EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNY EGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Interpolációs módszerek

Szakdolgozat

Tálas András

Matematika Bsc

Matematikai elemző szakirány

Témavezető: Dr. Havasi Ágnes

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

2014

Tartalom

1. Bevezetés

1.1. Interpoláció a matematikában

Az interpoláció egy numerikus (közelítő) matematikai módszer az analízis, és azon belül is a numerikus analízis témakörében. Ismerjük egy jelenséget leíró *f(x)* függvény helyettesítési értékeit az értelmezési tartományának véges sok pontjában, azonban az ezen pontokon kívüli helyettesítési értékeink ismeretlenek. Az interpolációs módszer alapja az hogy, a függvény ismertetlen értékeire az ismert értékek alapján adjunk közelítést, és így konstruáljunk az adott függvényt közelítő *I(x)* függvényt. Az interpolációs függvénynek teljesíteni kell az „alappont" feltételt:

Minden x_i alappontra teljesüljön

$$I(x_i) = f(x_i) \quad ,$$

vagyis az interpolációs és az interpolált függvény helyettesítési értékei az összes alappontban megegyezzenek. Interpolációról akkor beszélünk, ha az alappontok maximum és minimum értéke által meghatározott intervallumban adunk közelítést a függvény értékeire. Amikor az ismert értékek alapján, az alappontok által meghatározott tartományon kívül eső helyeken közelítjük a függvényt, akkor extrapolációról beszélünk [1].

1.2. Motiváció

Az interpolációnak sok gyakorlati felhasználása van különböző tudományágak terén. Tegyük fel, hogy véges sok ponthoz vannak mérési eredményeink, célunk, hogy megtaláljuk az ismert pontokon kívüli pontokhoz tartozó értékeket, illetve meghatározzuk az ismeretlen függvényt. Általában akkor alkalmazzuk, ha egy tértől, illetve időtől folytonosan függő mennyiségről csak diszkrét tér,- ill. időpontokban van mérési adatunk, és az adott mennyiség értékét más pontokban is becsülni szeretnénk. Interpoláció alkalmazásával lehet megoldani azt a problémát is, amikor a mérésünk költséges, így további mérések nélkül szeretnénk adott ponthoz tartozó értéket közelíteni. Legismertebb példák az interpolációs módszerre a sivatagban a kőolajlelőhely keresése, valamint a tengerekben a só, a kálium, illetve egyéb kémiai összetevők adott mélységben fellelhető koncentrációjának a meghatározása. A kőolajmezőket modellező egyenletekben szükségünk van a nyomásra mint a hely függvényére, azonban ezt csak néhány fúrásnál elvégzett mérés alapján tudjuk közelíteni. Ehhez hasonlóan a koncentráció meghatározásánál különböző mélységekben mérünk, és a mérési eredmények alapján adunk közelítést a mélyebb rétegek értékeire. Könnyen látható, hogy a mélység növelésével a víznyomás is növekszik, így nem csak nehezedik és drágul a mérés, hanem bizonyos mélységben már nem is kivitelezhető [1], [4].

Nem kevésbé bizonyul hasznosnak az interpoláció a földrajzi pozicionálás során, illetve a geográfiában. A GPS műholdak csak bizonyos időközönként küldenek jelet az aktuális pozíciójukról, ilyenkor hasznos interpolációs becslést alkalmazni a műhold helyének, sebességének vagy gyorsulásának meghatározására a köztes időpontokban [5]. A geográfiában lineáris interpolációt használunk például akkor, amikor egy domborzati elem (pl. hegy) két ismert szintvonala közötti pont magasságát szeretnénk meghatározni.

További alkalmazása az interpolációnak az informatika területéhez tartozó szoftveres képmegjelenítés. A mai számítógépeken szinte mindegyik képmegjelenítő program interpolációt használ, amikor a képet forgatjuk vagy nagyítjuk. Egy digitális fotó a méretétől függő számú pixelből, azaz képpontból áll (pl. 150x150 pixel). Minden egyes képponthoz hozzárendeljük a színét. (Ez RGB színkeverés esetén három darab számot jelent 0-255-ös értékkel, amelyek a piros, a zöld és a kék alapszín intenzitását adják meg.) Nagyítás során a kép pixelszáma is növekszik, de csak az eredeti kép információtartalma ismert, így az „új" pixelek értékei ismeretlenek. Az újonnan beillesztett pixelek színét a szomszédos, eredeti pixelek színértékéből tudjuk megbecsülni. Ezek meghatározására használnak a különböző programok különböző interpolációs algoritmusokat. A kép minőségromlásának mértéke az itt használt interpolációs formulák hibájával arányos.

További matematikai alkalmazása az interpolációnak a differenciáltgeometria területén a görbeillesztés témaköre. Ebben az esetben a spline-interpolációt az ún. Bernstein-polinomokkal és Beziér-ívekkel valósítjuk meg, így kapva adott görbét leíró vektorfüggvényre illeszkedő interpolációs vektorfüggvényt. Ez komplex formája annak, mintha koordinátánként megadnánk egy egyparaméteres függvényt, ami leírja az érintett pontok aktuális koordináta szerinti helyettesítési értékeit a függvény teljes intervallumának részintervallumain (görbe paraméterezett előállítása), és ezen koordinátafüggvényekre illesztenénk spline-interpolációs polinomokat.

1.3. A fejezetek tartalma

Az első fejezetben kerül bevezetésre az interpoláció mint matematikai módszer, valamint ennek különböző tudományterületeken belüli alkalmazása.

A második fejezetben a különböző polinomiális interpolációs módszerek által megoldható feladatok, valamint a feladatokat megoldó formulák, többek között Lagrange-, Newton-, és Hermite-féle interpolációs módszerek. Továbbá bemutatjuk használatuk előnyeit és hátrányait is mind a formulák alakja, mind az interpolált függvényre való illeszkedés szempontjából.
A harmadik fejezet az összefoglalása a különböző interpolációs formuláknak, illetve tartalmaz egy-két konkrét feladatra történő összehasonlítást. A feladatok megoldása és az eredmények ábrázolása Matlab programmal történt, a használt programkódok a Melléklet részben találhatók.

2. Interpolációs formulák

2.1. Interpolációs alapfeladat

Tegyük fel, hogy ismerjük egy $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény értékét a páronként különböző $x_0, \ldots, x_n$ pontokban. Ezek a pontok adottak. Elnevezés: alappontok.

Az alappontokban felvett függvényértékeket jelölje $f_i := f(x_i)$. Tehát ismerjük az

$$(x_i, f(x_i)) = (x_i, f_i) \in \Re^2 \quad i = 0,1, \ldots, n, \text{ ahol } x_i \neq x_j, \text{ ha } i \neq j$$

úgynevezett tabulált pontokat.

Tegyük fel, hogy a függvényünk *[a,b]* értelmezési tartományának az *a* pontja egybeesik az alappontok közül a legkisebb értékűvel, a *b* pontja pedig legnagyobbal [4] , [5].

Cél: Az *f* függvény rekonstruálása (közelítése) az ismert adatok alapján, másképp véges sok pontból végtelen sok pontbeli értékének a meghatározása.

2.2. Interpolációs módszerek csoportosítása

Az interpolációs módszerek csoportosíthatóak a közelítő függvény alakja és az alappontok felhasználása szerint.

A függvény alakja szerint:

- *Polinomiális:* A legelterjedtebb módszereknél a közelítő függvények polinom alakúak. A polinom alakú előállításhoz egy n-edfokú polinom n+1 db együtthatóját kell meghatározni, ezek pedig egyértelműen megadják az interpolációs polinomot.

- *Trigonometrikus:* A közelítő függvények trigonometrikus sorok, azaz sinus, és cosinus függvények lineáris kombinációjából álló sor részletösszegeinek felelnek meg.

Adott f függvény Fourier-sorral történő előállítása a következő alakot jelenti:

$$f(x) := A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \exp(i(kx)) \quad ,$$

ahol $A_k, B_k, C_k \in \Re \quad k = 0, 1, \ldots \infty$

A trigonometrikus polinommal történő előállítás az adott 2π szerinti periodikus függvény diszkrét Fourier-transzformációjának felel meg, hiszen 2n+1 ekvidisztáns (egyenlő Δx közönként vett) pontban vannak az ismert f_i függvényértékeink, és ez alapján a következő egyenletrendszer megoldásával kapjuk az interpoláló trigonometrikus polinom előállításához szükséges ismeretlen együtthatókat (c_k):

$$f_m = f(m*\Delta x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k * \exp(i*(k*m*\Delta x)) \quad \forall m = 0,1,\ldots,2n$$

A polinom alakú függvénytípusokat könnyen ki tudjuk értékelni, azaz adott pontbeli helyettesítési értékeik könnyen meghatározhatók, valamint ismertek ezen függvények grafikonjai. Mind a polinom, mind trigonometrikus függvények akárhányszor deriválhatók, és a derivált függvények is polinom, illetve trigonometrikus alakúak maradnak.

Az alappontok felhasználása szerint:

- *Lokális:* Ha az *I(x)* közelítő függvény meghatározásakor az *x* közelében fellelhető néhány pontot vesszük figyelembe, azaz adott *I(x)* közelítőérték kiszámítása *x* pont környezetében található alappontokkal történik. Lokális interpolációs módszer például a lineáris interpoláció, amelynek során bármely két pontot egyenessel kötünk össze, tehát lineáris elsőfokú polinomokat használunk. Adott $\{(x_i, f(x_i)), (x_{i+1}, f(x_{i+1}))\}$ tabulált pontokra, az $[x_i, x_{i+1}]$ intervallumon belüli *x* ponthoz tartozó *f(x)* függvényértéket a következő formulával közelíti a lineáris interpoláció:

$$f(x) := f(x_i) + \frac{(x - x_i)(f(x_{i+1}) - f(x_i))}{x_{i+1} - x_i}$$

A lineáris közelítés példáján jól látszik, hogy a lokális közelítés során még az alacsonyabb rendű deriváltakban sem kapunk folytonos függvényt.

- *Globális:* Globális interpolációról akkor beszélünk, ha egy tetszőleges x ponthoz tartozó közelítő *I(x)* érték az összes rendelkezésre álló alappontot felhasználva adható meg, tehát a tabulált pontok által alkotott teljes halmaz alapján illesztünk függvényt. Globális interpolációs módszer többek között a Lagrange-interpoláció (ld. Lagrange-interpoláció). A teljes közelítő függvényhez több alappolinomot is meg kell határoznunk, melyek mindegyike a teljes $[x_0, x_n]$ intervallumon van értelmezve, és egy pont kivételével az összes tabulált pontra szükség van a polinom együtthatóinak meghatározására. Végeredményben egy tetszőleges *I(x)* közelítő érték meghatározásához az összes tabulált pontra szükségünk van, és a pontokra n+1 alappont esetén egy legfeljebb n-edfokú interpolációs polinomot illesztünk, tehát a polinom fokszáma annál nagyobb, minél több alappontra illesztünk. Ez a módszer sok esetben jobb közelítést ad, hátránya azonban, hogy túlságosan magas fokszám esetén két alappont között igen nagy ingadozásokat mutathat az interpolációs polinom.

- *Spline:* Az előző két módszer vegyítése. A teljes spline függvényt az alappontok által meghatározott intervallumon több szomszédos szakaszon értelmezett polinom (spline) összessége alkotja, ezért egy adott szakaszra nézve a módszer lokális, a teljes intervallumon pedig globális simaságot biztosít az interpolált függvénynek [1].

2.3. Polinomiális interpoláció

Olyan polinomot keresünk, amely előre megadott helyeken előre megadott értékeket vesz fel, azaz legyen p olyan polinom, melyre a

1) $p(x_i)=f_i \quad i=0,1,\ldots,n$ feltétel teljesül [4] , [5].

Több szempontból is előnyösnek bizonyul polinomot választani, egyrészt mert gyorsan számolható az adott helyen vett helyettesítési értéke, másrészről pedig egyszerűen meghatározható a deriváltja, ami különösen az Hermite-féle és a spline-interpoláció során hasznos.

2.4. Az interpoláció alaptétele

Jelölje P_n a legfeljebb n-edfokú polinomok halmazát.

Állítás: Minden rögzített n+1 db ponthoz pontosan egy olyan $p\in P_n$ polinom van, mely teljesíti az 1)-es feltételt.

Bizonyítás (Egyértelműség/Unicitás): Indirekt módon tegyük fel, hogy $\exists g,\ h\in P_n$ polinomok, melyek teljesítik az 1)-es feltételt, és $g\neq h$. Jelölje $Z\in P_n$ azt a polinomot, amelyre

$$Z(x):=g(x)-h(x) \quad \forall x\in[a,b] \quad .$$

Ekkor $Z(x_i)=g(x_i)-h(x_i)=f_i-f_i=0 \quad \forall i=0,1,\ldots,n-\text{re}$,

azaz x_i gyöke Z-nek. Tehát Z-nek n+1 db gyöke: (x_i) , ahol $i=0,1,\ldots,n$.

Z egy legfeljebb n-edfokú polinom, melynek akkor és csak akkor lehet n-nél több gyöke, ha Z maga a nullpolinom.

Így $Z(x)=g(x)-h(x)=0 \quad \forall x\in[a,b]$, és ebből következően $g(x)=h(x) \quad \forall x\in[a,b]$.

Ez ellentmond annak a feltevésnek, miszerint *g* és *h* különböző polinomok [4].

<u>Bizonyítás (Létezés/Egzisztencia):</u>

Az adott alappontokat felhasználva definiáljuk a következő polinomot:

$$\tilde{\Omega}_i(x):=\prod_{j=0;\, j\neq i}^{n}(x-x_j) \quad \in P_n$$

Vegyük észre, hogy ezen polinomnak az i-edik alappontbeli helyettesítési értéke:

$$\tilde{\Omega}_i(x_i)=\prod_{j=0;\, j\neq i}^{n}(x_i-x_j)\neq 0$$

Abban az esetben, amikor az alappontunk indexe $k\neq i$:

$$\tilde{\Omega}_i(x_k)=\prod_{j=0;\, j\neq i}^{n}(x_k-x_j)=(x_k-x_k)\prod_{j=0;\, j\neq i;\, j\neq k}(x_k-x_j)=0\prod_{j=0;\, j\neq i;\, j\neq k}(x_k-x_j)=0$$

Definiáljuk most az $\Omega_i(x):=\prod_{j=0;\, j\neq i}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j} \quad \in P_n$ polinomot,

amely $\tilde{\Omega}$ -hoz hasonlóan $k=i$ indexű alappontra a következőt adja:

$$\Omega_i(x_i)=\prod_{j=0;\, j\neq i}^{n}\frac{x_i-x_j}{x_i-x_j}=\prod_{j=0}^{n-1}1=1$$

Abban az esetben, amikor $k\neq i$, akkor pedig mindig lesz a produktumon belül egy nulla számlálójú tényező, így a szorzat is nullát ad:

$$\Omega_i(x_k)=\prod_{j=0;\, j\neq i}^{n}\frac{x_k-x_j}{x_i-x_j}=\frac{x_k-x_k}{x_i-x_k}\prod_{j=0;\, j\neq i;\, j\neq k}^{n}\frac{x_k-x_j}{x_i-x_j}=0\prod_{j=0;\, j\neq i;\, j\neq k}^{n}\frac{x_k-x_j}{x_i-x_j}=0 \quad .$$

Vagyis $\Omega_i(x_k)=\delta_{i,k}=\begin{cases}1 & ,ha \quad k=i\\ 0 & ,ha \quad k\neq i\end{cases}$. Itt $\delta_{i,k}$ az ún. Kronecker delta szimbólum, $\Omega_i(x)$-et pedig az i-edik alapponthoz tartozó n-edrendű Lagrange-féle alappolinomnak nevezzük.

Legyen $L_n(x) := \sum_{i=0}^{n} f_i \Omega_i(x) \quad \in P_n$.

Ekkor az x_k, $k=0,1,\ldots n$ alappontra az előzőekben az *Ω*-alappolinomra belátott tulajdonság alapján a következő értéket kapjuk:

$$L_n(x_k) = \sum_{i=0}^{n} f_i \Omega_i(x_j) = f_0 \Omega_0(x_k) + f_1 \Omega_1(x_k) + \ldots + f_k \Omega_k(x_k) + \ldots + f_n \Omega_n(x_k) = \\ = f_o 0 + f_1 0 + \ldots + f_k 1 + \ldots + f_n 0 = f_k \quad .$$

Ebből következően $L_n(x_k) = f_k \quad \forall k = 0, 1, \ldots,$ n-re , ami ekvivalens az 1)-es feltétellel.

Elnevezés: Az így kapott polinomot n-edrendű Lagrange-féle interpolációs polinomnak hívjuk. Tehát valóban létezik legfeljebb n-edfokú polinom, mely teljesíti az interpolációs alapfeltételt, és így a bizonyítás teljes [4] , [5].
(Megjegyzés: Az egyértelmű létezés ezenkívül bizonyítható lineáris egyenletrendszerrel való megoldhatóság és Vandermonde determináns tulajdonságai révén is.)

2.5. A Lagrange-féle interpolációs polinom előállítása alappontpolinomokkal

Legyen $\omega_{n+1}(x) := \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$, valamint $\omega_0(x) := 1$.

Elnevezés: n+1-edfokú alappontpolinom. Ekkor a függvények szorzatának deriválási szabályát $(f(x)g(x))' := f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ többszörösen alkalmazva azt kapjuk, hogy:

$$\omega_{n+1}'(x) := ((x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n))' = (x-x_0)'(\prod_{j=1}^{n}(x-x_j)) + (x-x_0)(\prod_{j=1}^{n}(x-x_j))' = \\ = (\prod_{j=1}^{n}(x-x_j)) + (x-x_0)\{(x-x_1)'(\prod_{j=2}^{n}(x-x_j)) + (x-x_1)(\prod_{j=2}^{n}(x-x_j))'\} = \\ = (\prod_{j=1}^{n}(x-x_j)) + (x-x_0)(\prod_{j=2}^{n}(x-x_j)) + (x-x_0)(x-x_1)(\prod_{j=2}^{n}(x-x_j))' = \ldots = \\ = (\prod_{j=0;\, j\neq 0}^{n}(x-x_j)) + (\prod_{j=0;\, j\neq 1}^{n}(x-x_j)) + \ldots + (\prod_{j=0;\, j\neq n}^{n}(x-x_j)) = \sum_{k=0}^{n}(\prod_{j=0;\, j\neq k}^{n}(x-x_j)) = \sum_{k=0}^{n}\tilde{\Omega}_k(x)$$

Az előzőekhez hasonlóan nézzük meg a helyettesítési értéket az i-edik alappontban:

$$\omega_{n+1}'(x_i)=\sum_{k=0}^{n}(\prod_{j=0;\,j\neq k}^{n}(x_i-x_j))=(\prod_{j=0;\,j\neq 0}^{n}(x_i-x_j))+\ldots+(\prod_{j=0;\,j\neq i}x_i-x_j)+\ldots+(\prod_{j=0;\,j\neq n}^{n}(x_i-x_j))$$

Láthatóan ebben a szummában minden tag nulla az i-edik tagot kivéve, hiszen, mint már láttuk, $\widetilde{\Omega}_{\widetilde{k}}$ helyettesítési értéke az x_i alappontban csak akkor nem nulla, ha $i=k$. Tehát a tagok összege nem más, mint az i-edik tag:

$$\omega_{n+1}'(x_i)=\prod_{j=0;\,j\neq i}^{n}(x_i-x_j)=\tilde{\Omega}_i(x_i) \quad .$$

Legyen $\quad l_i(x):=\dfrac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)*\omega_{n+1}'(x_i)}=\Omega_i(x) \quad ,$

így ezzel a jelöléssel, valamint kisebb átalakításokkal $L_n(x)$ felírható a következő alakban [4] , [5]:

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}f_i*\Omega_i(x)=\sum_{i=0}^{n}(\prod_{j=0;\,j\neq i}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)})*f_i=\sum_{i=0}^{n}f_i\frac{\prod_{j=0;\,j\neq i}^{n}(x-x_j)}{\prod_{j=0;\,j\neq i}^{n}(x_i-x_j)}=\sum_{i=0}^{n}\frac{f_i*\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega_{n+1}'(x_i)}=$$

$$=\sum_{i=0}^{n}f_i*l_i(x)$$

Az interpolációs feladatoknál a célunk a különböző pontokon vett ismeretlen helyettesítési értékek kiszámítása. Ehhez elég a Lagrange-féle formulába behelyettesíteni, a konkrét polinomot nem szükséges, valamint időigényes kanonikus alakban (x-hatványonként csoportosítva) kiszámolni. A helyettesítési értékeket tehát gyorsabban számolhatjuk az $\Omega_i(x)$ alappolinomok előállításával és azokba történő helyettesítéssel. Ezen előállítás előnye, hogy ha valamelyik alappontban a függvényértéket meg kell változtatnunk, akkor az új polinom helyettesítési értékeit könnyen újraszámolhatjuk a régi értékekből. Még jobban megkönnyítjük a dolgunkat, és gyorsítjuk a számolást, ha $\Omega_i(x)$-et $l_i(x)$ alakban állítjuk elő. Ugyanis míg az előzőben a szumma mindegyik tagja egy, a többitől különböző n-1 tényezőjű produktumból nyert polinom kiszámolásával adható meg, addig az utóbbi alaknál csak $\omega_{n+1}(x)$-et, illetve annak deriváltját kell meghatározni. A szumma tagjait sem kell mindig újraszámolni, hiszen két tag közötti különbség mindössze a nevezőben az *(x-x_i)*-s tag, és a derivált függvény helyettesítési értéke a következő alappontban. Mindkét Lagrange-féle alak hátránya azonban, hogy egy új alappont felvétele esetén minden korábbi tagot újra kell számolnunk. Erre a problémára ad megoldást a Newton-féle interpolációs formula a következő alfejezetben.

2.6. Newton-féle interpolációs formula

Legyen $0 \le k \le n$ és jelölje $N_k(x)$ azt a k-adrendű polinomot, mely teljesíti a polinomiális interpoláció alapfeladatát, azaz

$$2)\quad N_k(x_i) = f_i \quad i = 0, 1, \ldots n \quad .$$

Az interpoláció alaptétele szerint pontosan egy olyan legfeljebb k-adfokú polinom van, mely teljesíti ezt a feltételt, ebből következően:

$$3)\; L_k(x) = N_k(x), \quad x \in \Re \quad .$$

Jelölje a k-adrendű polinom főegyütthatóját b_k. Nyilvánvaló $\quad b_0 := N_0(x) = f_0 \quad$ ugyanis egyetlen

alappont esetén az interpolációs polinom a konstans f_0 polinom. Ekkor a következő rekurzió teljesül:

$$N_k(x) := N_{k-1}(x) + b_k * \omega_k(x) \;\; k = 1, 2, \ldots n; \;\; \omega_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$$

A rekurzió belátásához vonjunk ki az egyenlőség mindkét oldalából $N_{k-1}(x)$-et.

$$N_k(x) - N_{k-1}(x) = b_k * \omega_k(x) = b_k * \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j); \quad k = 1, 2, \ldots, n \quad .$$

Helyettesítsünk be egy tetszőleges l indexű alappontot a képletbe:

$$N_k(x_l) - N_{k-1}(x_l) = b_k * \prod_{j=0}^{k-1} (x_l - x_j), \quad l = 0, 1, \ldots n$$

Könnyen látható, hogy a k-adfokú alappontpolinomba bármelyik k-nál kisebb indexű alappontot behelyettesítve nullát kapunk, hiszen a produktumba lesz egy $(x_j - x_j) = 0$-ás tényező. Ezért

$$N_k(x_l) - N_{k-1}(x_l) = 0, \quad \text{ha}\, 0 \leqslant l \leqslant k-1 \quad .$$

Másképp fogalmazva, az $N_k(x) - N_{k-1}(x) \in P_k$ polinom $x_{0,} x_{1,} \ldots, x_{k-1}$ alappontokon vett helyettesítési értéke nulla, azaz ezek lesznek a polinom gyökei $\forall k = 1, 2, \ldots, n$.

Tehát $N_k(x) - N_{k-1}(x) = b_k \omega_k(x) = b_k(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})$ k db különböző pont esetén, így ha úgy határozzuk meg $N_k(x)$-et, hogy a k+1-edik alappontra is teljesüljön az egyenlőség, akkor a polinom algebra egyik tétele alapján $N_k(x) - N_{k-1}(x),$ és $b_k * \omega_k(x)$ polinomok egyenlőek. (Ha két, legfeljebb k-ad fokú polinom k+1 különböző helyen ugyanazt az értéket veszi fel, akkor megegyezik.).

Kérdés még, hogy az $N_k(x)$ polinomok főegyütthatóit hogyan számolhatjuk ki? Induljunk ki a 3)-as egyenlőségből, miszerint a két különböző módon előállított interpolációs polinom megegyezik. A két polinom egyenlősége azzal ekvivalens, hogy a két polinom minden együtthatója egyenlő. Nézzük meg a főegyütthatóikat: Adott k-ra $N_k(x)$ főegyütthatója b_k, mivel $N_{k-1}(x)$ (k-1)-edrendű polinom, a rekurzió maradék tagja k-adrendű polinom, így összegük főegyütthatója a maradék tagból származik, ami nem más b_k. (Két polinom összegének rendje legfeljebb a maximuma a két polinom rendjének. Két különböző fokú polinom összegének főegyütthatója a nagyobb fokú polinom főegyütthatója.) Ennek kell megegyeznie $L_k(x)$ főegyütthatójával, ami az

$$f_i \Omega_i(x) = f_i \prod_{j=0;\, j \neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots k$$

polinomok főegyütthatóinak összege (külön-külön mindegyik k-adrendű). Ennek kiszámításához a produktumban csak az x-es tagok együtthatóit kell összeszorozni, és így kapjuk a következő

egyenlőséget: $$b_k := \sum_{i=0}^{k} f_i \prod_{j=0;\, j \neq i}^{k} \frac{1}{(x_i - x_j)}$$

Vagyis ezen képlet segítségével $k = 1, 2, \ldots, n$ -re meghatározhatók a b_k együtthatók, és ezzel a polinom rekurzívan is előállítható tetszőleges n-re. A rekurzív előállítás előnye abban rejlik, hogy az előző tag ismeretében könnyen előállítható az aktuális tag. $N_{k-1}(x)$ ismeretében csak a b_k együtthatót és $\omega_k(x)$-et kell újként előállítani, melyeket szintén gyorsan megkaphatunk (az első esetben az előző (k-1) tagú szumma összegét bővítjük egy taggal, a másiknál pedig a (k-1) indexre kapott polinomot szorozzuk egy taggal). Ezzel el is értük az előző fejezet végén kitűzött célunkat, hogy olyan alakú interpolációs polinomot állítsunk elő, amelyet új tabulált pont hozzá vétele esetén ne kelljen teljesen újraszámolni, hiszen rekurzívan ki tudjuk számolni az előző eredményünk alapján. Azonban a rekurzív előállítás nagy hátránya, hogy ha csak az adott n-edik tagra vagyunk kíváncsiak, ahhoz először mind az (n-1) db őt megelőző tagot is ki kell számolni. Ezt kiküszöbölendő megadjuk a polinom explicit előállítását is. Kiindulva a nulla indexű tagból, teljes indukcióval megadható az explicit alak:

$$N_0(x)=b_0=b_0*\omega_0(x); \quad N_1(x)=N_0(x)+b_1*\omega_1(x)=b_0*\omega_0(x)+b_1*\omega_1(x)$$
$$N_2(x)=N_1(x)+b_2*\omega_2(x)=(b_0*\omega_0(x)+b_1*\omega_1(x))+b_2*\omega_2(x)=\sum_{k=0}^{2} b_k*\omega_k(x)$$

Folytatva az indukciót, az n-edik tagba behelyettesítve az n-1-edik tagnál kapott egyenletet a következő explicit képletet kapjuk:

$$4) \qquad N_n(x)=\sum_{k=0}^{n} b_k*\omega_k(x) \quad ,$$

ahol a b_k együtthatók és a k-adfokú alappontpolinom a fentiek szerint számolható. Elnevezés: Az interpolációs polinom 4) szerinti előállítását n-edrendű Newton-féle interpolációs polinomnak nevezzük [5].

2.7. Newton-féle osztott differenciás módszer

A Newton-féle interpolációs polinom explicit alakjához hasonlóan próbáljuk meg induktívan előállítani a b_k együtthatókat egy egyszerűbb alakban. Induljunk ki a már ismert formulákból:

$$b_k:=\sum_{i=0}^{k} f_i \prod_{j=0;\, j\neq i}^{k} \frac{1}{(x_i-x_j)} \quad \text{, valamint} \quad b_o:=f_0 \quad .$$

Elnevezés: Az előzőleg megadott szummát az (x_i, f_i) $\forall i=0,1,\ldots,k$ pontokhoz tartozó

(k-1)-edrendű Newton-féle osztott differenciának nevezzük. Jelölése: $[x_{0,} x_{1,} \ldots, x_k] f$

Az elsőrendű polinomhoz tartozó főegyüttható a következőképpen számítható:

$$b_1 := \sum_{i=0}^{1} f_i \prod_{j=0;\, j\neq i}^{1} \frac{1}{(x_i - x_j)} = f_0 \prod_{j=0;\, j\neq 0}^{1} \frac{1}{(x_0 - x_j)} + f_1 \prod_{j=0;\, j\neq 1}^{1} \frac{1}{(x_1 - x_j)} = \frac{f_0}{x_0 - x_1} + \frac{f_1}{x_1 - x_0} =$$
$$= (-1)\frac{f_0}{x_1 - x_0} + \frac{f_1}{x_1 - x_0} = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

Ahhoz, hogy ezt a képletet kapjuk, csak a szummát és a produktumot kellett kibontani, valamint egy mínusz egyes szorzót kiemelni a törtből. A *k=2* esetben azonban már nem csak ezekre az átalakításokra lesz szükségünk:

$$b_2 := \sum_{i=0}^{2} f_i \prod_{j=0;\, j\neq i}^{2} \frac{1}{(x_i - x_j)} =$$
$$= f_0 \prod_{j=0;\, j\neq 0}^{2} \frac{1}{(x_0 - x_j)} + f_1 \prod_{j=0;\, j\neq 1}^{2} \frac{1}{(x_1 - x_j)} + f_2 \prod_{j=0;\, j\neq 2}^{2} \frac{1}{(x_2 - x_j)} =$$
$$= \frac{f_0}{(x_0 - x_1)*(x_0 - x_2)} + \frac{f_1}{(x_1 - x_0)*(x_1 - x_2)} + \frac{f_2}{(x_2 - x_0)*(x_2 - x_1)} =$$

Ezek után emeljük ki a mínusz egyes szorzót, ahol lehet, és bővítsük a második törtet a megfelelő, hiányzó szorzótényezővel:

$$= \frac{f_0}{(-1)(x_1 - x_0)(-1)(x_2 - x_0)} + \frac{1}{(x_2 - x_0)} \frac{f_1 (x_2 - x_0)}{(x_1 - x_0)(-1)(x_2 - x_1)} + \frac{f_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} =$$
$$= \frac{f_0}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)} + \frac{(-f_1)(x_2 - x_0)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} + \frac{f_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} =$$

A továbbiakban egy egyszerű átalakítási trükköt használunk fel. Az átalakítás lényege, hogy tetszőleges kéttagú különbség egy harmadik tag hozzáadásával, majd kivonásával két kéttagú különbség összegére bontható. Itt a számlálóban található kéttagú különbséget x_1-gyel bővítjük, kettébontjuk a törtet, majd külön-külön egyszerűsítjük is őket a megfelelő különbséggel:

$$=\frac{f_0}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)}+\frac{(-f_1)(x_2-x_1+x_1-x_0)}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)(x_2-x_1)}+\frac{f_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=$$
$$=\frac{f_0}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)}+\frac{(-f_1)(x_2-x_1)+(-f_1)(x_1-x_0)}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)(x_2-x_1)}+\frac{f_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=$$
$$=\frac{f_0}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)}+\frac{(-f_1)}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)}+\frac{(-f_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}+\frac{f_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=$$

Végül pedig összevonjuk a közös nevezőjű törteket, kiemelünk az első tagból mínusz egyet, az

egész összegből pedig az $\frac{1}{(x_2-x_0)}$ hányadost:

$$=\frac{f_0-f_1}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)}+\frac{f_2-f_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{f_2-f_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}-\frac{f_1-f_0}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)}=$$
$$=\frac{1}{(x_2-x_0)}\left(\frac{f_2-f_1}{(x_2-x_1)}-\frac{f_1-f_0}{(x_1-x_0)}\right)$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$[x_i]f:=f_i \quad \forall i=0,1,\ldots n;$$
$$[x_i,x_{i+1}]f:=\frac{[x_{i+1}]f-[x_i]f}{x_{i+1}-x_i} \quad \forall i=0,1,\ldots n-1;$$
$$[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]f:=\frac{[x_{i+1},x_{i+2}]f-[x_i,x_{i+1}]f}{x_{i+2}-x_i} \quad \forall i=0,1,\ldots n-2;$$
$$[x_i,x_{i+1},\ldots,x_{i+n}]:=\frac{[x_{i+1},x_{i+2},\ldots x_{i+n}]f-[x_i,x_{i+1},\ldots x_{i+n-1}]f}{x_{i+n}-x_i} \quad i=0\text{-ra}$$

.

Elnevezés: Nulladrendű, elsőrendű, másodrendű, n-edrendű Newton-féle osztott differenciák, melyeket a fejezet elején más formában egyszer már bevezettünk. Ezeket felhasználva az eddigi eredményeinket a következő formában kapjuk:

$$b_1=\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}=[x_0,x_1]f;$$
$$b_2=\frac{1}{(x_2-x_0)}\left\{\frac{f_2-f_1}{(x_2-x_1)}-\frac{f_1-f_0}{(x_1-x_0)}\right\}=\frac{[x_1,x_2]f-[x_0,x_1]f}{x_2-x_0}=[x_0,x_1,x_2]f$$

A második egyenlőség végén bevezetett jelöléssel az indukciót folytatva belátható, hogy tetszőleges k-ra a b_k együttható előáll a következő alakban:

$$5)\qquad b_k=[x_0,x_1,\dots,x_k]f=\frac{[x_1,x_2,\dots,x_k]f-[x_0,x_1,\dots,x_{k-1}]f}{x_k-x_0}$$

Az osztott differenciák segítségével gyorsan meghatározhatjuk a Newton-féle interpolációs polinomot, a differenciák szemléletes számolásához a következő táblázat lesz segítségünkre:

x_i	$[x_i]f=f_i$	$[x_i, x_{i+1}]f$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]f$	…	$[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}]f$
x_0	**f_0**				
		$[x_0, x_1]f$			
x_1	f_1			…	
			$[x_0, x_1, x_2]f$		
		$[x_1, x_2]f$			
x_2	f_2				
.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	**$[x_0, x_1, \dots, x_n]f$**
.	.	.	.	.	
x_{n-2}	f_{n-2}				
		$[x_{n-2}, x_{n-1}]f$			
x_{n-1}	f_{n-1}		$[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]f$	…	
		$[x_{n-1}, x_n]f$			
x_n	f_n				

A táblázat első oszlopában a tabulált pontok, a második oszlopában az alappontokon vett helyettesítési értékek, másként a nulladfokú osztott differenciák helyezkednek el. Utána az oszlopokban rendre a megfelelő pontokhoz és függvényértékekhez tartozó első-, másod-, stb. n-edrendű osztott differenciák találhatóak. A táblázat oszlopain végighaladva a másodiktól kezdve mindig eggyel kevesebb sorunk (értékünk) lesz. Ez annak köszönhető, hogy a táblázat úgy van elrendezve, hogy az 5)-ös definíció segítségével tetszőleges k-adrendű osztott differencia értéke számolható (könnyen, akár kézzel is) a két őt megelőző (k-1)-edrendű osztott differencia segítségével, és a differencia „kezdő”, valamint „végpontja” által. Mint azt beláttuk, ezek az értékek, nem mások, mint az interpolációs polinomot alkotó főegyütthatók (ld. piros kiemelés a táblázatban).

Ekkor az explicit előállításra vonatkozó 4-es állítást átírva a következő alakban tudjuk előállítani az n-edrendű Newton-féle interpolációs polinomot osztott differenciákkal [4] , [5]:

$$N_n(x):=\sum_{i=0}^{n}[x_{0,}x_{1,}\dots x_i]f*\omega_i(x)=$$
$$=[x_0]f+\frac{[x_1]f-[x_0]f}{x_1-x_0}(x-x_0)+\frac{[x_{1,}x_2]f-[x_{0,}x_1]f}{x_2-x_0}(x-x_0)(x-x_1)+$$
$$+\dots+\frac{[x_{1,}x_{2,}\dots,x_n]f-[x_{0,}x_{1,}\dots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

2.8. Lagrange-, Newton-féle interpolációs polinomok hibájának becslése

Interpolációs hiba: Jelölje $p_n \in P_n$ az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ függvény interpolációs polinomját az

$a=x_0, x_1, \dots, x_n=b$ alappontokra nézve.

Az $E_n:[a,b]\to\mathbb{R}$, $E_n(x)=p_n(x)-f(x)$ függvényt az (x_0, f_0), (x_1, f_1), …, (x_n, f_n), pontokhoz tartozó interpolációs hibafüggvénynek, $E_n(x)$-et pedig az x ponthoz tartozó interpolációs hibának nevezzük.

Állítás: Tegyük fel, hogy $f\in C^{n+1}[a,b]$ (azaz f függvény (n+1)-szer folytonosan deriválható az $[a,b]$ intervallumon belül), ekkor $\exists\xi\in(a,b)$, melyre $\forall x\in[a,b]$ esetén teljesül a következő egyenlőség:

$$6)\quad (-1)E_n(x)=f(x)-p_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)\quad ,$$

ahol p_n az $x_0, x_1, \dots, x_n$ alappontokhoz tartozó interpolációs polinom, és ω_{n+1} továbbra is az (n+1)-edfokú alappontpolinomot jelöli.

Bizonyítás: Legyen $\tilde{x}\in[a,b]/\{x_{0,}x_{1,}\dots,x_n\}$ egy tetszőleges, az alappontoktól eltérő pont. Első lépésként lássuk be, hogy $\exists\xi\in(a,b)$, melyre teljesül a 6)-os egyenlőség az $\tilde{x}$ pontban, vagyis

$$7)\quad f(\tilde{x})-p_n(\tilde{x})=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(\tilde{x})\quad .$$

Legyen $\phi(x):=f(x)-p_n(x)-K\omega_{n+1}(x)$, ahol K az a nemnulla állandó, melyre $\Phi(\tilde{x})=0$, tehát

$\phi(\tilde{x})=f(\tilde{x})-p_n(\tilde{x})-K\omega_{n+1}(\tilde{x})=0$, ebből pedig

$$8)\quad K=\frac{f(\tilde{x})-p_n(\tilde{x})}{\omega_{n+1}(\tilde{x})}\quad .$$

Nézzük meg a φ függvény helyettesítési értékét egy tetszőleges alappontban:

$$\phi(x_i):=f(x_i)-p_n(x_i)-K\,\omega_{n+1}(x_i)=f_i-f_i-K\prod_{j=0}^{n}(x_i-x_j)=0\quad \forall i=0,1,\ldots,n$$

Ez valóban nulla, hiszen p_n az f függvény egy interpolációs polinomja, és így definíció szerint minden tabulált ponton vett helyettesítési értéke megegyezik az interpolált függvény ugyanazon pontbeli helyettesítési értékével. Az előzőek fejezetek eredményei alapján az ω alappontpolinom minden alappontra nullértékű. Tehát a φ függvénynek a tabulált pontok, valamint $\tilde{x}$ a gyökei, így összesen n+2 helyen ugyanazt a nullértéket veszi fel.

Lemma (Rolle-tétel/Rolle-féle középértéktétel): Ha $g\in C(a,b)\cap D(a,b)$ függvény (azaz g függvény folytonos $[a,b]$ zárt intervallumon, és (a,b) nyílt intervallumon deriválható), valamint $f(a)=f(b)$, akkor $\exists c\in(a,b)$, hogy $f'(c)=0$.

Az előző Lemma felhasználásával, és mivel a φ függvény az $[a,b]$ intervallumon n+2 helyen ugyanazt az értéket veszi fel, ezért $\varphi'(x)$ az (a,b) intervallumon belül legalább n+1 helyen nullát vesz fel (a szomszédos alapponttok és $\tilde{x}$ között). Ha $\varphi'(x)$ az (a,b) intervallumban legalább n+1 helyen ugyanazt az értéket veszi fel, akkor $\varphi''(x)$ az (a,b) intervallumban legalább n helyen nullát vesz fel. Ezt a gondolatmenetet folytatva azt kapjuk, hogy $\varphi^{(n+1)}(x)$ az (a,b) intervallumon belül legalább egy helyen 0. Nézzük meg ezt a deriváltfüggvényt:

$$\phi^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)-p_n^{(n+1)}(x)-K\,\omega_{n+1}^{(n+1)}$$

Mivel $p_n(x)$ egy n-edfokú polinom, így az (n+1)-edik deriváltja a nullpolinom. Az alappontpolinom (n+1)-edfokú, így az (n+1)-edik deriváltja egyenlő a főegyütthatója (1) és a hatványfüggvény deriválásakor keletkező konstans szorzatával

$$\left(\quad (x^{n+1})^{(n+1)}=((n+1)\,x^{n})^{(n)}=((n+1)\,n\,x^{n-1})^{(n-1)}=\ldots=(n+1)\,n\,(n-1)\ldots2*1\,x^{0}=(n+1)!\quad\right)$$

Összevetve ezt a két eredményt azt kapjuk, hogy

$$\phi^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)-K\,(n+1)!$$

Jelölje most $\xi\in(a,b)$ azt a pontot, melyre $\varphi^{(n+1)}(\xi)=0$ (előzőleg beláttuk, hogy létezik legalább egy ilyen pont), és ekkor $0=\phi^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-K\,(n+1)!$.

Ezt átrendezve K értékére a következő egyenlőséget kapjuk:

$$9)\quad K=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\quad .$$

Vessük össze ezt a 9)-es feltételt a már előzőekben a K-ra kapott 8)-as feltétellel:

$\frac{f(\tilde{x})-p_n(\tilde{x})}{\omega_{n+1}(\tilde{x})}=K=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$, amiből az alappontpolinommal átszorozva megkapjuk a 7)-es

állítást $f(\tilde{x})-p_n(\tilde{x})=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(\tilde{x})$. Tehát létezik a 7)-es feltételt kielégítő ξ pont, mégpedig

tetszőleges $\tilde{x}\in[a,b]/\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ választása estén. Könnyen belátható, hogy a

7)-es feltétel az alappontokra is igaz, mivel a baloldalon két azonos érték különbsége, míg a jobb oldalon a ballal azonosan nulla érték szerepel, mert a szorzatban az alappontpolinom helyettesítési értéke nulla. Ezzel be is láttuk a 6)-os állítást, hiszen minden *[a,b]* intervallumbeli pontra létezik az állítást kielégítő $\exists\xi\in(a,b)$ pont. Az állításunk elején feltesszük, hogy az interpolált függvény folytonos, ezáltal csak erre a függvényhalmazra szűkített függvényekre lesz érvényes a hibabecslésünk. Ez azonban szükséges megszorítás, hiszen ha nem követeljük meg az interpolált függvény simaságát, úgy a hibáról sem tudnánk semmit állítani, mivel az alappontokon kívül az interpolált függvényünk tetszőleges értéket felvehet, addig az interpolációs polinomunk értékkészlete korlátozott marad.

Következmény:

$$10)\quad |f(x)-p_n(x)|\le\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)\right|=\frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|\quad\forall x\in[a,b]\quad ,$$

ami az interpolációs polinom hibájának abszolút értékére használható becslés [4] , [5].

2.9. A Lagrange, Newton-féle interpolációs hibabecslés élesítése

Vezessük be a következő jelölést:

$M_{n+1}:=max\{|f^{(n+1)}(x)|\}\quad x\in(a,b)$, azaz M_{n+1} jelölje az interpolált függvény (n+1)-edik

deriváltjának legnagyobb abszolút értékű helyettesítési értékét az *(a,b)* intervallumon, vagyis egy felső becslést a deriváltfüggvény által felvehető értékekre. Ennek segítségével a 10)-es becslésből a 11)-es nyerhető:

$$11)\quad |f(x)-p_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)| \quad \forall x \in (a,b)$$

Ez a becslés a legtöbb esetben gyengébb, mint maga a 10)-es becslés, azonban nagy előnye, hogy az *f* függvény ismeretében egy konstanst jelent, míg $f^{n+1}(\xi)$ értéke tartalmazz az ismeretlen ξ pontot, ami pedig *x* megválasztásától függ. Ezek után a 11)-es egyenlőtlenség jobb oldalán már csak az alappontpolinom marad az egyetlen tényező, ami pedig az alappontok megválasztásától függ. Ha $x \in (a,b)$ adott, akkor ω helyettesítési értéke ebben a pontban nem más, mint az alappontok *x*-től való előjeles eltéréseinek szorzata, erre pedig adható egy triviális felső becslés. Tetszőleges $x \in (a,b)$ pont esetén egy ilyen eltérés értéke kisebb, mint *b-a*, hiszen *x* választható tetszőlegesen közel *b*-hez, és az ettől legtávolabbi alappont az $x_0=a$. Vagyis az (n+1) db különbség szorzata kisebb lesz, mint $(b-a)^n$. Ezt a felső becslést alkalmazzuk az alappontpolinomra:

$$12)\quad |f(x)-p_n(x)| < \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \quad \forall x \in (a,b)$$

Jelölje most ||.|| a végtelen normát, ekkor az előző eredményünket a következő alakokban kapjuk:

$$13)\quad \|f-p_n\| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}; \quad \|f-p_n\| \leqslant \frac{\|f^{n+1}\|}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \quad .$$

Az intervallumhossz-becslés gyenge becslés, ezért nézzünk egy ennél erősebb, élesebb becslést.

<u>Lemma (Állítás):</u> $|\omega_{n+1}(x)| \leqslant \frac{1}{4} * n!\, h^{n+1}, \ \ ahol\ h = max\{x_{i+1}-x_i\} \quad 0 \leqslant i \leqslant n$, vagyis *h* a

szomszédos alappontok közötti legnagyobb távolság.

<u>Bizonyítás:</u> Bizonyítsuk be teljes indukcióval az alappontok számára. Ha n=1, akkor teljesülnie kell

az $|\omega_2(x)| = |(x-x_0)(x-x_1)| = |x-x_0| \cdot |x-x_1| \leqslant \frac{1}{4} 1!\, h^2 = \frac{h^2}{4}$ egyenlőségnek.

Másként fogalmazva keressük a szélső értékét az $(x-x_0)(x-x_1)$ másodfokú függvénynek. Szélsőérték-vizsgálattal, és a Viéte-formulák segítségével könnyen meghatározható, hogy a szélsőértékét az

$x=\dfrac{x_0+x_1}{2}$ helyen veszi fel, ez pedig a következő egyenlőtlenségre vezet

$$|x-x_0|\cdot|x-x_1|\leqslant\left|\frac{x_0+x_1}{2}-x_0\right|\cdot\left|\frac{x_0+x_1}{2}-x_1\right|=\left|\frac{x_1-x_0}{2}\right|\cdot\left|\frac{x_0-x_1}{2}\right|=\frac{|x_1-x_0|\cdot|x_1-x_0|}{4}=\frac{(x_1-x_0)^2}{4}\leqslant\frac{h^2}{4}$$

ahol menet közben triviális törtegyszerűsítést és kiemelést alkalmaztunk. A végén pedig felülről becsüljük két szomszédos pont távolságát a két legtávolabbi pont távolságával. Vagyis teljesül n=2-re. Induktívan tegyük fel, hogy az állítás teljesül n-re, azaz $|\omega_n(x)|\leqslant\frac{1}{4}(n-1)!\,h^n$, és ebből következően belátjuk az n+1-re teljesülést is:

$$|\omega_{n+1}(x)|=\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|=\left|(\prod_{i=0}^{n-1}x-x_i)(x-x_n)\right|=|\omega_n(x)(x-x_n)|=|\omega_n(x)|\cdot|x-x_n|=|\omega_n(x)|\cdot|x-b|$$

A fenti egyenlőségek egyszerű átalakításokat jelentenek: az alappontpolinom definícióbeli alakjának ismeretét, produktum felbontását, szorzat abszolút értékének felbontását, a végén pedig az utolsó alappont helyére az intervallum végpontját helyettesítjük. Következő lépésként pedig felső becsléseket alkalmazunk: egyrészt az indukciós állítást n-re, valamint az $|x-b|\leqslant nh$ becslést. Az utóbbi könnyen igazolható, hiszen $x=a$-ra ez az abszolút érték egyenlő az intervallumhosszal, ami legfeljebb akkora, mint a két legtávolabbi szomszédos pont távolsága szorozva az intervallumon belül található szomszédos pontpárok számával. Egyenlőséget ekvidisztáns felosztás esetén kapunk. Ezáltal n+1-re is teljesül az állítás:

$$|\omega_{n+1}(x)|=|\omega_n(x)|*|x-b|\leqslant\frac{1}{4}(n-1)!\,h^n|x-b|\leqslant\frac{1}{4}(n-1)!\,h^n\,nh=\frac{1}{4}n!\,h^{n+1}$$

Tehát az állításunk igaz n=2-re, valamint ha n-re igaz, akkor abból következően n+1-re is, ezáltal tetszőleges n≥2-re igaz, és ezzel beláttuk az állítást. A lemma és az eddig kapott feltételek következményei:

$$14)\quad |f(x)-p_n(x)|\leqslant\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|\leqslant\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\frac{1}{4}n!\,h^{n+1}=\frac{M_{n+1}}{4(n+1)}h^{n+1}\quad\forall x\in(a,b)$$

$$15)\quad \|f-p_n\| \leqslant \frac{\|f^{n+1}\|}{4(n+1)} h^{n+1} \quad ,$$

ahol |.| az abszolút értéket, és ||.|| pedig a végtelen normát jelöli. A 14), 15)-ös becslések erősebbek, mint a 12), 13)-nál kapottak, valamint az alappontok tetszőleges megválasztása esetén csak a két legtávolabbi szomszédos ponttól függenek, nem pedig az összes alapponttól, így tudunk általánosabb becslést adni az interpoláció során keletkező várható hibára, eltérésre [4] , [5].

2.10. Csebisev-polinomok

Mint azt az előző fejezetben beláttuk, az interpolációs formula hibája függ az alappontpolinomtól, ezáltal pedig az alappontok választásától. Ezt úgy próbáltuk ellensúlyozni, hogy olyan becslést adtunk a hibára, mely nem függött az összes tabulált ponttól. Most közelítsük meg a problémát a másik oldalról, és adjunk olyan becslést a hibára, mely függ az alappontoktól, de ezek optimális választása esetén a hiba is a lehető legkisebb lesz. Cél úgy választani az alappontokat, hogy

$max_{x\in[a,b]}\{|\omega_{n+1}(x)|\}$ minimális legyen.

Határozzuk meg azt az n-edfokú polinomot, melynek

- a főegyütthatója *1*,
- a maximuma minimális adott *[a,b]* intervallumon.

Legyen *[a,b]=[-1, 1]*. Megjegyzés: Az egyszerűség kedvéért használjuk a *[-1,1]* intervallumot, arról változótranszformációval áttérhetünk tetszőleges intervallumra (Pl. $x\in[-1,1]\rightarrow y=x+6\in[5,7]$).

Állítás: Létezik olyan n-edrendű polinom, amely kielégíti mindkét feltételt.
Bizonytás(I.): Tekintsük a következő függvényt:

$$16)\quad p_n(x):=\cos(n*\arccos(x))$$

Első lépésként bebizonyítjuk, hogy ez a trigonometrikus függvény nem más, mint egy n-edrendű polinom, majd ennek segítségével adjuk meg az első feltételt kielégítő polinomot. Legyen $\gamma\in\mathbb{R}$ tetszőleges, valamint ismerjük a következő trigonometrikus azonosságokat:

$$a)\ \cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$$
$$b)\ \cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)$$
$$c)\ \cos(-\alpha)=\cos(\alpha)$$
$$d)\ \sin(-\alpha)=-\sin(\alpha)$$

Ezeket az azonosságokat rendre felhasználva, mégpedig először a), b)-t, majd c), d)-t, egy újabb azonosságot nyerünk:

$$17)\ \cos((n+1)\gamma)+\cos((n-1)\gamma)=\cos(n\gamma+\gamma)+\cos(n\gamma-\gamma)=$$
$$=\cos(n\gamma)\cos(\gamma)-\sin(n\gamma)\sin(\gamma)+\cos(n\gamma)\cos(-\gamma)-\sin(n\gamma)\sin(-\gamma)=$$
$$=\cos(n\gamma)\cos(\gamma)-\sin(n\gamma)\sin(\gamma)+\cos(n\gamma)\cos(\gamma)+\sin(n\gamma)\sin(\gamma)=2\cos(n\gamma)\cos(\gamma)$$

Határozzuk meg γ értékét most úgy, hogy γ legyen az a szám, mely adott x-re az *arccos(x)* értéket veszi fel. Helyettesítsük be γ-t a 17)-es azonosságba:

$$18)\ \cos((n+1)\arccos(x))+\cos((n-1)\arccos(x))=2\cos(n*\arccos(x))\cos(\arccos(x))=$$
$$=2\mathrm{x}\cos(n*\arccos(x))$$

Itt a második egyenlőségnél kihasználtuk, hogy a *cos* függvény inverze az *arccos*, így tetszőleges x-re a *cos(arccos(x))* függvény eredményeként visszaadja a függvényargumentumot. Ha összevetjük a 18)-nál kapott egyenlőséget a 16)-os definícióval, a

$$\cos((n+1)\arccos(x))+\cos((n-1)\arccos(x))=p_{n+1}+p_{n-1}=2\mathrm{x}\cos(n*\arccos(x))=$$
$$=2\mathrm{x}\ p_n(x)$$

összefüggésre jutunk. Tehát végeredményben kaptunk egy rekurzív képletet $p_{n+1}(x)$ előállítására:

$$19)\ p_{n+1}(x)=2\mathrm{x}\ p_n(x)-p_{n-1}(x)$$

Most bebizonyítjuk, hogy $p_n(x)$ egy n-edfokú polinom, valamint, hogy ennek a főegyütthatója 2^{n-1}, $n\geq1$-re. Lássuk be ezeket teljes indukcióval a fokszámra. Először n=0, 1-re a 16)-os explicit képlet segítségével:

$$p_0(x):=\cos(0*\arccos(x))=\cos(0)=1\,;\quad p_1(x)=\cos(1*\arccos(x))=x$$

Ezek teljesítik az állítást, hiszen a konstans polinom definíció szerint nulladfokú, az identitás függvény pedig elsőfokú polinom. A elsőfokú polinom főegyütthatója $1=2^0$, tehát ez a feltétel is teljesül. Vizsgáljuk az n=2 esetet, amelynél a polinom meghatározásához már szükségünk lesz a 19)-es rekurzióra:

$$p_2(x)=2\mathrm{x}\ p_1(x)-p_0(x)=2\mathrm{xx}-1=2\mathrm{x}^2-1\quad ,$$

ahol láthatóan teljesül mindkét feltétel.

Tegyük fel, hogy a feltételek teljesülnek n-re:

20) $p_n \in P_n, p_{n-1} \in P_{n-1};$ valamint $a_n = 2^{n-1}, a_{n-1} = 2^{n-2}$,

és lássuk be, hogy (n+1)-re is teljesülnek a feltételek. Ha a 19)-es rekurzió alapján számoljuk a polinomot, akkor arra jutunk, hogy a legmagasabb kitevőjű *x*-es tag csak a rekurzió $2xp_n(x)$-es tagjából jöhet, mivel a $p_{n-1}(x)$ tag (n-1)-edrendű a 20)-as állítás alapján, míg az előbb említett (n+1)-edrendű (a $2x$ polinommal való szorzás eggyel növeli fokszámot, és $p_n(x)$ ugyanazon állítás alapján n-edrendű). Tehát $p_{n+1}(x)$ is (n+1)-edrendű lesz, és a főegyütthatóját pedig úgy kapjuk, hogy $p_n(x)$ főegyütthatóját szorozzuk kettővel. (Két polinom szorzatának főegyütthatója egyenlő a polinomok főegyütthatóinak szorzatával). Vagyis az (n+1)-edrendű polinom főegyütthatója $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$, hiszen az indukciós feltevésünk szerint az n-edrendű polinom főegyütthatója 2^n. Ezáltal induktívan beláttuk tetszőleges n≥1-re mindkét állítást. Ezzel a bizonyítással már meg tudjuk adni a keresett n-edrendű polinomot, melynek főegyütthatója egy, mindössze annyit kell tennünk, hogy szorozzuk a polinomot $2^{-(n+1)} = 2^{1-n}$-nel:

$T_n(x) := 2^{1-n} p_n(x) = 2^{1-n} \cos(n * \arccos(x))$. Elnevezés: n-edfokú Csebisev-polinomok [4] , [5].

Bizonyítás(II.): Második lépésként bizonyítsuk a minimalitást.

Lemma: Adott *[a,b]* intervallumon, egy *1* főegyütthatós (n+1)-edrendű $p_{n+1}(x)$ polinomra pontosan akkor igaz, hogy $\|p_{n+1}\| \leq \|q_{n+1}\| \quad \forall q_{n+1} \in P_{n+1}$, ahol $q_{n+1}(x)$ szintén *1* főegyütthatós polinom (és ||.|| a továbbiakban jelölje a végtelen normát), ha a $p_{n+1}(x)$ polinom az *[a,b]* intervallumon rendelkezik legalább n+2 páronként különböző abszolút szélsőértékhellyel, és a szélsőértékhelyeken a függvényértékek abszolút értékben megegyeznek, és előjelük váltakozik.

Bizonyítás (←irány): Tegyük fel az állítás végén leírtak teljesülését, vagyis azt, hogy az (n+1)-edrendű polinom legalább n+2 különböző abszolút szélsőértékhellyel rendelkezik, az ezeken vett függvényértékek abszolút értékben megegyeznek, előjelük váltakozik. Továbbá indirekten tegyük fel, hogy egy $q_n(x) \neq p_n(x)$, *1* főegyütthatós, (n+1)-edrendű polinomra

21) $\|p_{n+1}\| > \|q_{n+1}\|$. Tekintsük az $r_n(x) := p_{n+1}(x) - q_{n+1}(x)$ polinomot.

Megállapítások erre a polinomra:

- Fokszáma legfeljebb n, mivel két *1* főegyütthatós (n+1)-edfokú polinom különbsége állítja elő.

- Legalább n+2 db szélsőértékhelyen ($p_{n+1}(x)$ szélsőértékhelyei) vett függvényértékek előjelei megegyeznek $p_{n+1}(x)$ ugyanezen helyeken vett függvényértékeinek előjeleivel (szintén váltakozó előjellel). Mivel $p_{n+1}(x)$ szélsőértékei abszolút értékben nagyobbak, mint $q_{n+1}(x)$ szélsőértékei a 21)-es feltétel miatt (és a végtelen norma definíciójából), ezért a különbségpolinom előjelét a szélsőértékhelyeken a $p_{n+1}(x)$ szélsőértékhelyeken vett előjelei határozzák meg:

  $$|P|>|Q|\rightarrow sgn(-P-Q)=-1=sgn(-P-(-Q)), sgn(P-Q)=1=sgn(P-(-Q))$$

- Az n+2 db előjelváltásból következik, hogy a polinomnak legalább n+1 db zérushelye van (Bolzano-tétel alapján a függvénynek azokon a pontokon lesznek zérushelyei, amely környezetében előjelet vált)

Ezen a ponton pedig ellenmondásra jutunk, mert egy legfeljebb n-edfokú polinomnak nem lehet n+1 db gyöke, csak ha az nullpolinom, ebből pedig $p_{n+1}(x)=q_{n+1}(x)$ következne, így a 21)-es feltétel nem teljesülhetne. Tehát beláttuk, hogy az indirekt állítás hamis, így az eredeti igaz.

Bizonyítás (→irány): Tegyük fel, hogy $p_{n+1}(x)$ egy *1* főegyütthatós (n+1)-edrendű polinom, melyre

$$22)\quad \|p_{n+1}\|\leq\|q_{n+1}\| \quad \forall q_{n+1}\in P_{n+1} \quad ,$$

ahol $q_{n+1}(x)$ egy 1 főegyütthatós polinom. Indirekten tegyük fel, hogy $p_{n+1}(x)$-nek legfeljebb n+1 helyen van abszolút szélsőértéke úgy, hogy ezeken a helyeken a szélsőértékek abszolút értékben megegyeznek, az előjelük pedig váltakozó. Ekkor az előzőek alapján bármely két szomszédos (ellentétes előjelű) szélsőértékhely között lesz olyan pont, ahol $p_{n-1}(x)$-nek zérushelye van. Ezek száma legfeljebb n, amit jelöljünk most k-val. Legyenek ekkor ezek a pontok rendre $x_0, x_1, \ldots, x_k\in[a,b]$ valamint tekintsük azt a legfeljebb n-edfokú polinomot, melynek ugyanezek a zérushelyei: $s_n(x):=\pm(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_k)$, ahol a ± jel arra utal, hogy az előjel megfelelő választásával a szélsőértékhelyein a függvényértékek megegyeznek $p_{n+1}(x)$ előjelével. Legyen $\varepsilon>0$ megfelelően kicsi, és vonjuk ki $p_{n+1}(x)$-ből az $s_n(x)$ polinom ε-szorosát. Ekkor egy olyan polinomot kapunk, mely:

- (n+1)-edrendű, és *1* főegyütthatós (mivel $p_{n+1}(x)$ fokszáma nagyobb, mint $\varepsilon s_n(x)$-é, így különbségük fokszáma legalább $p_{n+1}(x)$ fokszáma. Ezáltal a főegyüttható értéke is a nagyobb fokszámú polinom főegyütthatójáéval egyezik, ami *1*.) .
- Valamint teljesül, hogy: $\|p_{n+1}-\epsilon\cdot s_n\|<\|p_{n+1}\|$, mivel $\varepsilon>0$.

Ezzel pedig ellentmondásra jutunk a 22)-es feltétellel, $p_{n+1}(x)$ optimalitására nézve. Azaz az állítás megfordítása is igaz, ami által beláttuk a két feltétel ekvivalenciáját.

<u>Lemma:</u> Csak egyetlen olyan (n+1)-edfokú, *1* főegyütthatós polinom létezik az *[a,b]* intervallumon, melyre $\|p_{n+1}\|\leqslant\|q_{n+1}\| \quad \forall q_{n+1}\in P_{n+1}$, ahol $p_{n+1}(x)$ *1* főegyütthatós polinom.

<u>Bizonyítás (Indirekt):</u> Tegyük fel, hogy $p_{n+1}^{1.}, p_{n+1}^{2.}\in P_{n+1}; \quad p_{n+1}^{1.}\neq p_{n+1}^{2.}$ is megfelel a feltételeknek. Ez csak úgy lehet, hogy $\|p_{n+1}^{1.}\|=\|p_{n+1}^{2.}\|:=D$, mivel mindkettő minimális.

Ekkor viszont a következő is teljesül: $\left\|\frac{p_{n+1}^{1.}+p_{n+1}^{2.}}{2}\right\|=\frac{\|p_{n+1}^{1.}+p_{n+1}^{2.}\|}{|2|}\leqslant\frac{\|p_{n+1}^{1.}\|+\|p_{n+1}^{2.}\|}{2}=\frac{D+D}{2}=D$,

ahol rendre a 2-es normatulajdonságot, és a háromszög-egyenlőséget használjuk fel, majd behelyettesítünk, és egyszerűsítjük a törtet. Vagyis ez azt jelenti, hogy a két polinom „számtani közepéből" nyert polinom is optimális az *[a,b]* intervallumon, valamint eleget tesz a többi feltételnek is (*1* főegyütthatós, (n+1)-edrendű). Ekkor felhasználva a már belátott lemmát, ez a polinom legalább n+2 helyen venné fel az abszolút szélsőértékét váltakozó előjellel (±*D*), ugyanúgy, mint $p_{n+1}^{1.}$, és $p_{n+1}^{2.}$. Ez pedig csak úgy lehet, hogy ha az utóbbi két polinom ugyanazokon a helyeken veszi fel a szélsőértékeit, különben a belőlük képzett (n+1)-edrendű „számtani közép" polinomnak több mint n+2 szélsőértékhelye, és ezzel együtt több mint n+1 zérushelye lenne, ami nem lehet. Ebből pedig az következik, hogy a két (n+1)-edfokú polinom ugyanazon n+2 helyen ugyanazt az értéket veszi fel, így szükségképpen (a dolgozatban már

használt polinom-algebrai tétel alapján) a két polinom egyenlő. Mivel indirekten feltettük, hogy a két polinom különböző, így ellentmondásra jutottunk, tehát az eredeti állítás igaz.
A fejezetben tárgyaltak alapján végeredményben arra jutottunk, hogy egyetlen olyan (n+1)-edfokú, *1* főegyütthatós polinom létezik adott *[a,b]* intervallumon, melynek a maximuma minimális (Csebisev-polinom), és ezt meg is tudjuk határozni rekurzívan [5].

2.11. Az interpolációs alappontok optimális megválasztása

Az előző fejezet eredményei alapján a következő állítások lesznek igazak:

$$max\{|p_n(x)|\} \geqslant max\{|T_n(x)|\},\ \ x \in [-1,1], \forall\, p_n \in P_n$$

23) $$max\{|T_n(x)|\} = \|T_n\| = max\{|2^{1-n}\cos(n*\arccos(x))|\} = 2^{1-n},\quad x \in [-1,1]$$

ahol az első egyenlőség a végtelen norma, a második egyenlőség a Csebisev-polinom definíciója, a harmadiknál pedig kihasználtuk, hogy a cosinus függvény abszolút értékben legfeljebb *1*-et ad. Tehát az n-edfokú Csebisev-polinom minimális maximuma a *[-1,1]*-en 2^{1-n}. Azonban a célunk az volt, hogy az interpolációs polinom hibáját minimalizáljuk, ehhez pedig az alappontpolinomot kellene optimálisan megválasztani.

Ötlet: Legyen $\omega_{n+1}(x) := T_{n+1}(x)$

Hogyan tudjuk ezt megvalósítani? Mivel mindkét polinom főegyütthatója *1*, ezért gyökeikkel egyértelműen meghatározhatóak. Az alappontpolinom gyökei az alappontok, ezért célunk az n+1 db alappontot úgy választani, hogy az (n+1)-edrendű Csebisev-polinomnak szintén ezek legyenek a gyökei. Nézzük meg az n-edfokú Csebisev-polinom gyökhelyeit:

$T_n(x) = 2^{1-n}\cos(n \cdot \arccos(x)) = 0$ akkor, és csak akkor, ha $n \cdot \arccos(x) = \frac{2k+1}{2}\pi,\ \ k \in Z$

Osszunk n-nel, és vegyük mindkét oldal *cos*-át:

$$x = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right),\ \ k \in Z\quad .$$

Tehát az $x_0, x_1, \ldots, x_n$ alappontok optimális megválasztására a következő formulát kapjuk:

24) $x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right),\ \ k = 0,1,\ldots,n-1$ Elnevezés: Csebisev-alappontok.

Tehát, ha a képlet alapján adjuk meg az interpolációs alappontokat, azaz Csebisev-alappontokon interpolálunk, akkor az interpoláció hibája minimális lesz, mégpedig:

$$25)\quad \|f-p_n\| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}2^{1-(n+1)} = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\frac{1}{2^n}; \quad \|f-p_n\| \leqslant \frac{\|f^{(n+1)}\|}{(n+1)!}\frac{1}{2^n} \quad ,$$

ahol ||.|| továbbra is a végtelen normát jelöli [4] , [5].

2.12. Az interpoláció rendje, konvergenciája

Egy függvény interpolálása során fontos elvárásunk, hogy az interpolációs polinom kellően sok alappont felvétele esetén tetszőlegesen közel haladjon az interpolált függvényhez. Ezért bevezetjük a következő fogalmakat:

Interpoláció rendje: Egy interpolációs hibafüggvényt r-edrendűnek nevezzük, ha létezik olyan *C* valós szám (*C* csak az interpolált függvénytől és az interpoláció intervallumától függhet) , melyre

$\|E_n\| \leqslant C \cdot h^r$, ahol *h* a két legtávolabbi szomszédos alappont távolsága, és ||.|| a végtelen norma.

Vagyis az interpolációs hiba abszolútértékének maximuma a *h* távolság r-edik hatványával arányos.

Eszerint $C = \frac{M_{n+1}}{4 \cdot (n+1)}$ választásával, és a 3.9-es fejezet 14)-es egyenlősége alapján kellően sima függvényekre a Lagrange-, illetve Newton-féle interpolációs formulák (n+1)-edrendű formulák.

Interpoláció konvergenciája: Az *[a,b]* intervallumon, az *n*∈*N*-re adott p_n interpolációs polinomok sorozata pontonként konvergál az *f* interpolált függvényhez, ha

$\forall x \in [a,b]$ rögzített pontra $\lim_{n\to\infty} p_n(x) = f(x)$. Valamint ugyanezen az intervallumon egy p_n interpolációs formula egyenletesen konvergál az *f* interpolált függvényhez, ha

$\forall \epsilon > 0-$hoz $\exists n_0 \in N, \forall n > n_0$ esetén $\|f-p_n\| \leqslant \epsilon$, ahol ||.|| a végtelen normát jelöli.

Állítás:Tegyük fel, hogy az *f* függvényünk akárhányszor deriválható, valamint

$M_{n+1} := max\{|f^{(n+1)}(x)|\}$ $x \in [a,b]$ jelöléssel $\exists M \in \Re,$ $\forall n \in N$ esetén, hogy $M_{n+1} \leqslant M$.

Ekkor az alappontok számának (n) növelésével az interpolációs polinom egyenletesen tart az interpolált függvényhez.

Bizonyítás: Használjuk fel ismét a 14)-es egyenlőséget és az előbb bevezetett *M*-et:

$$\|f-p_n\| \leqslant \frac{M_{n+1}}{4(n+1)} h^{n+1} \leqslant \frac{M}{4(n+1)} h^{n+1} \quad (n\to\infty)\to 0 \quad ,$$

tehát az n növelésével a két függvény végtelen normában mért távolsága tart a nullához, így az interpolációs polinom egyenletesen tart az interpolált függvényhez az *[a,b]* intervallumon. Vagyis ha az interpolált függvény derivált értékeire tudunk egy n-től független felső becslést adni, akkor a Lagrange-, illetve Newton-féle interpolációs polinom egyenletesen konvergál ehhez a függvényhez az alappontok által meghatározott intervallumon [4] , [5].

2.13. Hermite-féle interpolációs polinom

Az eddigiekben azzal az esettel foglalkoztunk, amikor ismertük egy függvénynek adott pontokon vett helyettesítési értékeit, és erre adtunk polinom alakú közelítést úgy, hogy a két függvénynek az ezen pontokon vett helyettesítési értékei megegyezzenek. Most vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor az alappontokon nem csak az interpolált függvény helyettesítési értékeit ismerjük, hanem bizonyos rendig bezárólag az interpolált függvény deriváltjainak a helyettesítési értékeit is. Ezek alapján módosítsuk az interpolációs feladatot:

Legyenek $x_0, x_1, \ldots, x_m$ adott alappontok, és tegyük fel, hogy ismerjük ezen alappontokon az interpolált függvényünk deriváltjainak értékeit rendre az $N_0-1, N_1-1, \ldots, N_m-1$-edik deriváltig bezárólag, azaz ismertek $f_k^i := f^{(i)}(x_k)$, ahol $i=0,1,\ldots,N_k-1$ és $k=0,1,\ldots,m$.

Jelölje n az ismert függvényértékek számánál egyel kisebbet, azaz $n=N_0+N_1+\ldots+N_m-1$ -et, és jelölje $H_n \in P_n$ azt a legfeljebb n-edfokú polinomot, melynek a k-adik alapponton vett i-edik deriváltjának értéke megegyezik az interpolált függvény ugyanezen az alapponton vett, ugyanakkora rendű deriváltfüggvénynek az értékével.

<u>Elnevezés:</u> az $x_0, x_1, \ldots, x_m$ alappontokhoz és $N_0-1, N_1-1, \ldots, N_m-1$ deriváltrendekhez tartozó n-edrendű Hermite-féle interpolációs polinom. Ez alapján pedig az Hermite-féle interpolációs alapfeladat a következő: Keressük azt a

$H_n \in P_n$ polinomot, melyre

26) $H_n^{(i)}(x_k) := f_k^i, \quad \forall i=0,1,\ldots,N_k-1, \quad \forall k=0,1,\ldots,m$

<u>Állítás:</u> Az Hermite-féle alapfeladatnak egyértelműen létezik megoldása.

<u>Bizonyítás:</u> Adjuk meg az interpolációs polinomot kanonikus alakban:

$$H_n(x)=\sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

Könnyen látható, hogy ha megadjuk az a_i együtthatókat, akkor azzal a polinomot egyértelműen meghatározzuk. Tekintsünk ezekre az együtthatókra ismeretlenekként. Milyen adatok állnak rendelkezésre ezen ismeretlenek meghatározására? Természetesen az alapfeladat egyenlőségei, azaz

$$27)\quad H_n^{(i)}(x_k)=\sum_{j=i}^{n} a_j \frac{j!}{(j-i)!} x_k^{j-i}=f_k^i,\quad i=0,1,\dots,N_k-1,\quad k=0,1,\dots,m$$

Ekkor az alapfeladat egyenlőségeire úgy tekinthetünk, mint egy n+1 változós (mivel H_n egy n-edfokú polinom, ezért n+1 db együttható határozza meg), és n+1 egyenletből (n+1 db egyenletet ad meg az alapfeladat) álló egyenletrendszerre. Írjuk fel az egyenletrendszert mátrixos alakban úgy, hogy *A* legyen az egyenletrendszer együtthatóit tartalmazó mátrix, *x* vektor az ismeretleneket (polinom együtthatóit), *b* vektor pedig az egyenletrendszer szabad tagjait (az ismert függvényértékeket) tartalmazza, ekkor a következő mátrix alakra jutunk: $A\underline{x}=\underline{b}$.
Ennek létezik megoldása, mégpedig egyértelmű, ha az *A* mátrix reguláris (nemszinguláris), azaz létezik inverze.
Pontosabban, ismert a következő mátrix regularitásával ekvivalens feltételek tétele:

- Ha egy tetszőleges $A \in T^{nxn}$ mátrix reguláris, akkor
- $det(A) \neq 0$,
- *A* nemnulla, és nem bal oldali nullosztó {Egy gyűrűben (T test is gyűrű) az *a* nemnulla elemet bal oldali nullosztónak nevezzük, ha van *b* nemnulla elem, melyre *ab=0.*},
- az $A\underline{x}=\underline{b}$ egyenletrendszernek csak a triviális $\underline{x}=\underline{0}$ megoldása van,
- bármely $\underline{b} \in T^n$ vektorra az $A\underline{x}=\underline{b}$ egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van.

Valamint ismert, hogy a komplementer feltételek az *A* mátrix szingularitására ekvivalens feltételek. [3]
Lemma (Állítás): Az *A* együtthatómátrix reguláris.
Bizonyítás (Indirekt): Tegyük fel, hogy az *A* mátrix szinguláris. A komplementer feltételek alapján, ha az *A* mátrix szinguláris, akkor nulla, vagy bal oldali nullosztó. Nullmátrix nem lehet, hiszen az

azt jelentené, hogy az Hermite-féle interpolációs polinom nullpolinom, ami csak csupa nulla $f_k^{(i)}$ értékekre tudná kielégíteni az alapfeladat egyenleteit, nem pedig tetszőlegesekre. Ha a mátrix bal oldali nullosztó, akkor létezik $\underline{y}\in T^n$ nemnulla vektor, hogy $A\underline{y}=\underline{0}$. Írjuk vissza ezt az egyenletrendszert polinom alakban:

$$28)\quad H_n^{(i)}(x_k)=\sum_{j=i}^{n} a_j \frac{j!}{(j-i)!} y_k^{j-i}=0,\quad i=0,1,\ldots,N_k-1,\quad k=0,1,\ldots,m$$

<u>Tétel:</u> Ha γ pontosan k-szoros (k≥1) gyöke a p polinomnak, akkor legalább (k-1)-szeres gyöke a p' polinomnak [3].

A 28)-as feltétel és az előző tétel ismeretében ez azt jelentené, hogy az interpolációs polinomnak az x_k alappont N_k-szoros gyöke, ahol *k=0, 1, ..., m*. Vagyis a polinom gyökeinek száma:

$$N_0+N_1+\ldots+N_m=\sum_{k=0}^{m} N_k=n+1$$

Így az n-edrendű polinomunknak n+1 db zérushelye lenne, vagyis H_n-nek a nullpolinomnak kellene lennie, ami ellentmondásra vezet. Ezzel beláttuk az állítást, miszerint *A* reguláris (mivel nemszinguláris), amiből a mátrixszingularitás tétele alapján következik, hogy tetszőleges *b*-re lesz egyértelmű megoldása az $A\underline{x}=\underline{b}$ egyenletrendszernek. Vagyis tetszőleges alappontok és függvényértékek esetén egyértelműen meg tudjuk határozni az Hermite-féle interpolációs polinom együtthatóit, ezáltal pontosan egy olyan polinom adható meg, mely kielégíti az alapfeladat egyenlőségeit. Végeredményben sikerült belátnunk a fejezet elején tett állítást az Hermite-féle alapfeladatra. Tehát már tudjuk, hogy létezik egyértelmű megoldás, azonban kérdés még, hogy hogyan tudjuk ezt a megoldást előállítani [4] , [5].

2.14. Hermite-féle interpolációs polinom előállítása osztott differenciákkal

Az előző fejezet eredményei alapján a célunk az Hermite-féle interpolációs polinom együtthatóinak meghatározása, ehhez pedig a következő egyenletrendszer áll a rendelkezésünkre:

$$27)\quad H_n^{(i)}(x_k)=\sum_{j=i}^{n} a_j \frac{j!}{(j-i)!} x_k^{j-i}=f_k^i,\quad i=0,1,\ldots,N_k-1,\quad k=0,1,\ldots,m$$

Valamint ismertek a 2.7-es fejezet eredményei az n-edrendű interpolációs polinom előállítására a Newton-féle osztott differenciák segítségével. Ahhoz, hogy az osztott differenciás módszerrel megoldható legyen az Hermite-féle interpolációs alapfeladat, ki kell bővíteni az osztott differencia definícióját, valamint módosítanunk kell az osztott differenciák táblázatát a következőképpen: Definíció szerint legyen a k-adik alappontra vonatkozó i-edrendű osztott differencia a

$[x_k, x_k, \dots, x_k] f = [x_k^{(i+1)}] f := \frac{f_k^i}{i!}, \quad i = 0, 1, \dots, N_k - 1$, ami $i=0$-ra továbbra is $[x_k] f = f_k$.

Ez alapján jelentsék az adott differenciákból előállított új differenciák a következőket:

a) $[x_k^{(i)}] f + [x_k^{(j)}] f := [x_k^{(i+j-1)}] f; \quad i, j = 0, \dots, N_k - 1$

b) $\frac{\pm([x_{k-1}^{(i)}] f - [x_k^{(j)}] f)}{x_k - x_{k-1}} := [x_{k-1}^{(i)}, x_k^{(j)}] f; \quad i = 0, \dots, N_{k-1}, \quad j = 0, \dots, N_k - 1$

c) $\frac{\pm([x_{k-1}^{(i)}, x_k^{(j)}] f - [x_{k-1}^{(u)}, x_k^{(v)}] f)}{x_k - x_{k-1}} := [x_{k-1}^{max\{i;u\}}, x_k^{max\{j;v\}}] f$

$i, u = 0, \dots, N_{k-1} - 1, \quad j, v = 0, \dots, N_k - 1$

A fenti definíciók többszöri alkalmazásával előjeltől függően előállítható az x_0, x_1, …, x_m alappontokhoz és N_0-1, N_1-1, …, N_m-1 deriváltrendekhez tartozó

$N_0 + N_1 + \dots + N_m - 1 = n$ -edrendű osztott differencia: $[x_0^{(N_0-1)}, x_1^{(N_1-1)}, \dots, x_m^{(N_m-1)}] f$

Most pedig végezzük el a differenciatábla módosítását. A táblázat első oszlopába kerüljenek az alappontok, de most multiplicitástól függő darabszámban. Azaz, ha a k-adik alapponthoz tartozó deriváltrend az N_{k-1}, akkor összesen ennyiszer írjuk az alappontot a táblázat első oszlopába egymás után. A táblázat többi oszlopába rendre a nullad, első, …, n-edrendű differenciák kerülnek, mégpedig a fenti definíció alapján. (Megjegyzés: A régi és a módosított tábla lényegi különbsége, hogy ugyanazon alappont többször is szerepelhet, és az ugyanazon alappontokhoz tartozó osztott differenciák helyére az interpolált függvénynek a differencia rendjével megegyező rendű, előre adott deriváltfüggvény-értéke kerül. A számolás tovább menete azonos a két táblán.)
Tekintsük ezt a táblát (következő oldal):

x_i	$[x_i^0]f=f_i^0$	$[x_i, x_{i+1}]f$ $[x_i^2]f$	$[x_i^2, x_{i+1}]f$ $[x_i^3]f$	…	$[x_0^{N0-1}, …, x_m^{Nm-1}]f$
x_0	f_0	$[x_0^2]f$			
x_0	f_0		$[x_0^3]f$		
…	…				
x_0	f_0	$[x_0,x_1]f$			
x_1	f_1	$[x_1^2]f$	$[x_0, x_1^2]f$		
x_1	f_1				
…	…			…	
x_1	f_1	$[x_1, x_2]f$			
x_2	f_2				
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	$[x_0^{N0-1}, x_1^{N1-1}, …, x_m^{Nm-1}]f$
x_{m-1}	f_{m-1}				
x_{m-1}	f_{m-1}	$[x_{m-1}^2]f$		…	
…	…				
x_{m-1}	f_{m-1}				
x_m	f_m	$[x_{m-1}, x_m]f$	$[x_{m-1}, x_m^2]f$		
x_m	f_m	$[x_m^2]f$			
…	…	$[x_m^2]f$			
x_m	f_m				

Vezessünk be egy új jelölést, mégpedig (n+1)-edrendű Hermite-alappontpolinom néven:

$$\omega_{n+1}^{H}(x):=(x-x_0)^{N_0}(x-x_1)^{N_1}\dots(x-x_m)^{N_m}=\prod_{j=0}^{m}(x-x_j)^{N_j}$$

Legyen ezen polinom i-edik, valamint nulladrendű alakja:

$$\omega_i^{H}:=(x-x_0)^{N_0}(x-x_1)^{N_1}\dots(x-x_j)^{k}, \quad \text{ahol} \quad i=N_0+N_1+\dots N_{j-1}+k, \quad i=0,1,\dots,n$$
$$\omega_0^{H}(x):=1$$

Valamint jelölje most az i-edrendű differencia a következő alakot:

$$[x^{(i+1)}]f:=[x_0^{(N_0)},x_1^{(N_1)},\dots,x_j^{(k)}]f, \quad \text{ahol} \quad i=N_0+N_1+\dots+N_{j-1}+k, \quad i=0,1,\dots,n$$

Vagyis az i-edik rend előállításánál mind a polinom, mind a differencia esetében sorra vesszük az alappontokat a lehető legmagasabb hatványon (az előre adott multiplicitását tekintve), egészen addig, míg az összrend értéke i nem lesz. Tehát továbbra is a táblázat pirossal kiemelt értékei adják az i-edrendű polinom előállításához szükséges együtthatókat.

Állítás (Bizonyítás nélkül): Az Hermite-féle alapfeladatot megoldó polinom előáll a következő alakban:

$$29)\ H_n(x):=\sum_{i=0}^{n}[x^{(i+1)}]f\,\omega_i^{H}(x)$$

Tehát ha módosítjuk az osztott differencia táblázatot, akkor ugyanazzal a számolási módszerrel megkaphatjuk a keresett interpolációs polinomot, mely ez esetben az Hermite-féle alapfeladatot oldja meg.

2.15. Az Hermite-féle interpolációs polinom hibája

Az Hermite-féle interpolációs polinom hibájára az állításunk, és az állítás bizonyítása hasonló, mint a 3.8-as fejezetben, így egyes pontoknál a részletes magyarázatot elhagyjuk.
Használjuk az (n+1)-edrendű Hermite-alappontpolinomot:

$$\omega_{n+1}^{H}(x):=(x-x_0)^{N_0}(x-x_1)^{N_1}\dots(x-x_m)^{N_m}=\prod_{j=0}^{m}(x-x_j)^{N_j}$$

tehát azt a polinomot, melynek az Hermite-féle alapfeladatbeli alappontok a hozzájuk tartozó N_k*-1* deriváltrend szerinti N_k-szoros gyökei. Valamint az ismert függvényértékek száma továbbra is n+1.

Állítás: Tegyük fel, hogy $f \in C^{n+1}[a,b]$, ekkor $\exists \xi \in (a,b)$, melyre $\forall x \in [a,b]$ esetén:

$$30)\quad f(x) - H_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega^H_{n+1}(x)$$

Bizonyítás: Legyen $\tilde{x} \in [a,b] / \{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ egy tetszőleges, az alappontoktól eltérő pont. Első lépésként lássuk be, hogy $\exists \xi \in (a,b)$, melyre teljesül a 30)-as egyenlőség az $\tilde{x}$ pontban. Legyen

$\phi(x) := f(x) - H_n(x) - H\,\omega^H_{n+1}(x)$, ahol *H* az a nemnulla állandó, melyre $\varphi(\tilde{x}) = 0$.

Ebből pedig *H*-ra a

$$31)\quad H = \frac{f(\tilde{x}) - H_n(\tilde{x})}{\omega^H_{n+1}(\tilde{x})}$$ összefüggés adódik.

A φ függvény helyettesítési értékei tetszőleges alappontban nullák. Szintén az interpolációs alapfeladat miatt az interpolált, és az interpolációs függvény értékei az alappontokon egyenlőek. Az Hermite-alappontpolinomnak minden alappont többszörös multiplicitású gyöke, így ezeken a pontokon multiplicitástól függően többször is nullértéket vesz fel a polinom. Tehát a φ függvény az alappontokon összesen (n+1)-szer, valamint még egyszer az $\tilde{x}$ pontban, azaz együttesen n+2 helyen ugyanazt a nullértéket veszi fel. A $\varphi(x)$ függvény az [a,b] intervallumon belül n+2 helyen ugyanazt az értéket veszi fel, így a Rolle-tétel alapján $\varphi'(x)$ az (a,b) intervallumon belül legalább n+1 helyen nullát vesz fel. Ezt a gondolatmenetet folytatva azt kapjuk, hogy $\varphi^{(n+1)}(x)$ az *(a,b)* intervallumon belül legalább egy helyen *0*. Nézzük meg ezt a deriváltfüggvényt:

$$\phi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - H_n^{(n+1)}(x) - H\,(\omega^H_{n+1})^{n+1}$$

Mivel H_n egy n-edfokú polinom, így az (n+1)-edik deriváltja a nullpolinom, az Hermite-alappontpolinomból pedig deriválás után csak az (n+1)! marad, vagyis azt kapjuk, hogy

$$\phi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - H\,(n+1)!\ .$$

Jelölje most $\xi \in (a,b)$ azt a pontot, melyre $\varphi^{(n+1)}(\xi)$, ekkor $0 = f^{(n+1)}(\xi) - H\,(n+1)!$.

Ezt átrendezve kapjuk H értékére a következő egyenlőséget:

32) $H=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$

Vessük össze ezt a 32)-es feltételt a már előzőekben a *H*-ra kapott 31)-es feltétellel, és rendezzük át:

$$f(\tilde{x})-H_n(\tilde{x})=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}^{H}(\tilde{x}) \quad .$$

Tehát létezik a 30)-as feltételt kielégítő ξ pont, mégpedig tetszőleges $x\in[a,b]$ választása estén. Ezek alapján 3.9-es és 3.11-es fejezet eredményeit szintén fel tudjuk használni a hibabecslés élesítésére, azonban közel sem ugyanazt azt eredményt kapjuk. Vezessük be a következő jelöléseket: Legyen (n+1) a Lagrange/Newton-féle interpoláció, illetve az Hermite-féle interpoláció során használt alappontok száma, és legyen $N+1:=\sum_{k=0}^{n} N_k$ a multiplicitások száma. Ha teljesül, hogy

$\forall k=0,1,\dots,n-$re $N_k=1$, azaz csak nulladfokig deriválunk (vagyis csak a függvényértékekbe), akkor a két interpolációs feladat megegyezik, és $n=N$. Minden más eseteben $N>>n$ (határozottan nagyobb) . Nézzük erre az *N*-re az interpolációs hibabecsléseket:

33) $|f(x)-H_N(x)|\leq\frac{M_{N+1}}{4(N+1)}h^{N+1} \quad \forall x\in(a,b); \quad \|f-H_N\|\leq\frac{\|f^{N+1}\|}{4(N+1)}h^{N+1}$

A 14), 15)-ben leírt eredmények alapján.

34) $\|f-H_n\|\leq\frac{M_{N+1}}{(N+1)!}\frac{1}{2^N}; \quad \|f-H_n\|\leq\frac{\|f^{N+1}\|}{(N+1)!}\frac{1}{2^N}$,

abban az esetében, ha Csebisev-alappontokon interpolálunk.
Az Hermite-féle interpoláció rendje ezek alapján (N+1) lesz [4].

3. Interpolációs feladatok

Az utolsó fejezetben a már bevezetett, különböző interpolációs formulák és tételek segítségével oldunk meg néhány számítási feladatot Matlab program segítségével. Az itt felhasznált alprogramok a Matlab hivatalos oldaláról származnak (némelyik általam módosítva), amelynek elérési címe a felhasznált irodalom [2]-es számú pontjánál található, maguk a programkódok pedig a mellékletben.

3.1. Interpolációs formulák számítási ideje

Oldjuk meg a következő feladatot! Határozzuk meg az *f(x)=sin(x)* függvény Lagrange, és Newton-féle interpolációs polinomját a következő alappontokon:

$$x^T = \left(-4\pi, -\frac{7}{2}\pi, -3\pi, -\frac{5}{2}\pi, \ldots, 0, \ldots, \frac{5}{2}\pi, 3\pi, \frac{7}{2}\pi, 4\pi\right)$$

Ezeken a pontokon az ismert függvényértékek rendre:

$$f^T = (0, 1, 0, -1, \ldots, 0, \ldots, 1, 0, -1, 0)$$

A feladatot megoldó program az *interpol_ido* néven szintén a mellékletben találtható. A program bekér két vektorváltozót, melyek az alappontokat, illetve az ismert függvényértékeket tartalmazzák, eredménye pedig két időérték. Két függvény, mégpedig a *newton_interpol*, és a *langrangepoly* oldják meg a feladatot, mégpedig a Newton, illetve Lagrange-féle interpolációs alakkal számolva, majd a *tic-toc* parancspárral történik a számítási idő meghatározása.

Ezek alapján a feladatot megoldó polinomot Newton-féle osztott differenciákkal $t_{11}=0,0015$ másodperc alatt, míg a Lagrange-féle interpolációs formulával $t_{21}=0,0021$ másodperc alatt tudjuk előállítani. Növeljük az alappontok számát néggyel (szimmetrikusan kétszer π féllel), majd még egyszer néggyel. Ekkor az eredményeink:

$$\begin{array}{ll} t_{12}=0,0021 & t_{22}=0,0033 \\ t_{13}=0,0028 & t_{23}=0,0039 \end{array}$$

Vagyis a Newton-féle osztott differenciás formula ugyanazt a feladatot (ugyanakkora várható hibával) rövidebb idő alatt oldja meg.

3.2. Az interpolációs hiba nagysága

Határozzuk meg a $f(x)=\cosh(\pi * x)$, és $g(x)=\exp(\sqrt{x}+x+\sqrt{x^3})$ függvények Lagrange-féle interpolációs polinomjának a hibáját a *[-1, 1]* intervallumban először ekvidisztáns alappontokon, majd Csebisev-alappontokon.

A feladatot megoldó program az *interpol_hiba* néven a mellékletben található, mely a *langrangepoly* függvényt használja. A program rendre bekéri az intervallum két végpontját, az osztópontok számát (alappontok száma-1), valamint az interpolált polinom együtthatóit tartalmazó vektort, eredménye pedig a két interpolációs hiba értéke. A program úgy működik, hogy meghatározza az alappontokat, majd ezek alapján kiszámolja a polinomok helyettesítési értékeit, és ezekre illeszt interpolációs polinomot. Majd kiszámolja az eredeti, és az interpolációs polinom hibáját az *[a,b]* intervallum egy sűrű felosztásán, és veszi a legnagyobb abszolút értékű eltérést mindkét esetben.

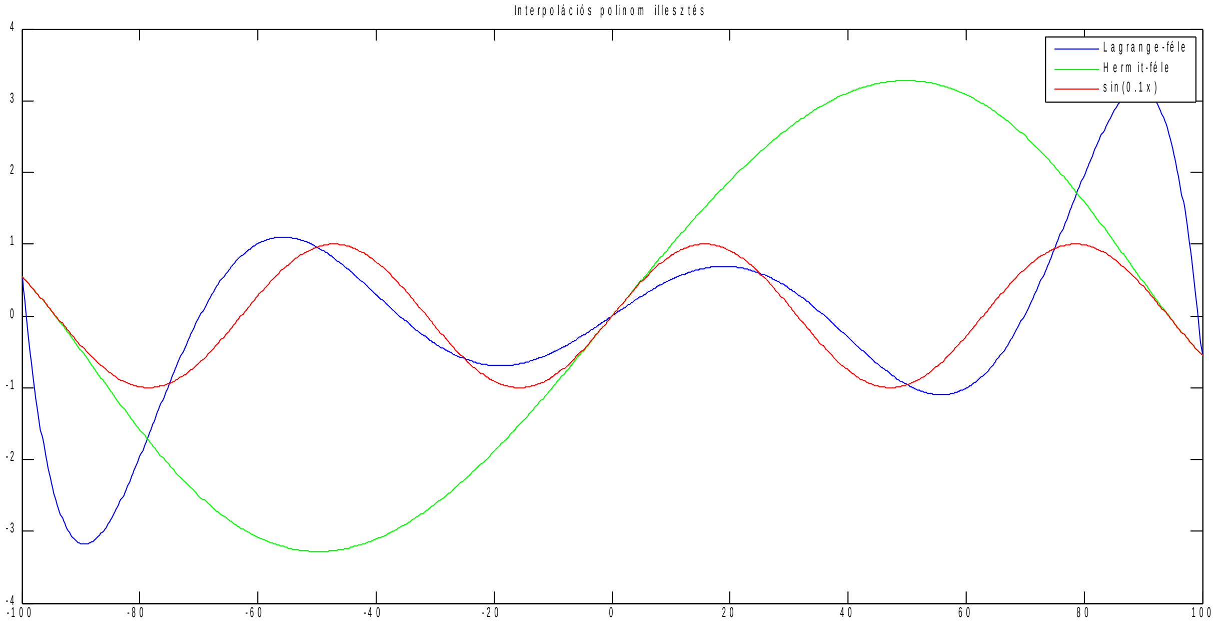
Az első függvény esetében az ekvidisztáns felosztáson *10* alappontra nézve az interpolációs polinom hibája $h_{e1}=3,997*10^{-6}$, Csebisev-alappontokon pedig a hiba $h_{cs1}=2,3057*10^{-6}$. A második függvény esetében ugyanezen értékek: $h_{e2}=0,2385$, $h_{cs2}=0,026$. *100* alappontra nézve ugyanezen értékek: $h_{e3}=9,0898*10^{41}$, $h_{cs3}=4,8591*10^{21}$, $h_{e4}=8,8756*10^{41}$, $h_{cs4}=3,0218*10^{20}$

Tehát a dolgozatban belátott hibaképlet a Csebisev-alappontokon történő interpolációra itt is igazolást nyer, hiszen az alappontok növelésével, mindkét függvény esetérben a két a hiba közül a második nagyságrendekkel kisebb.

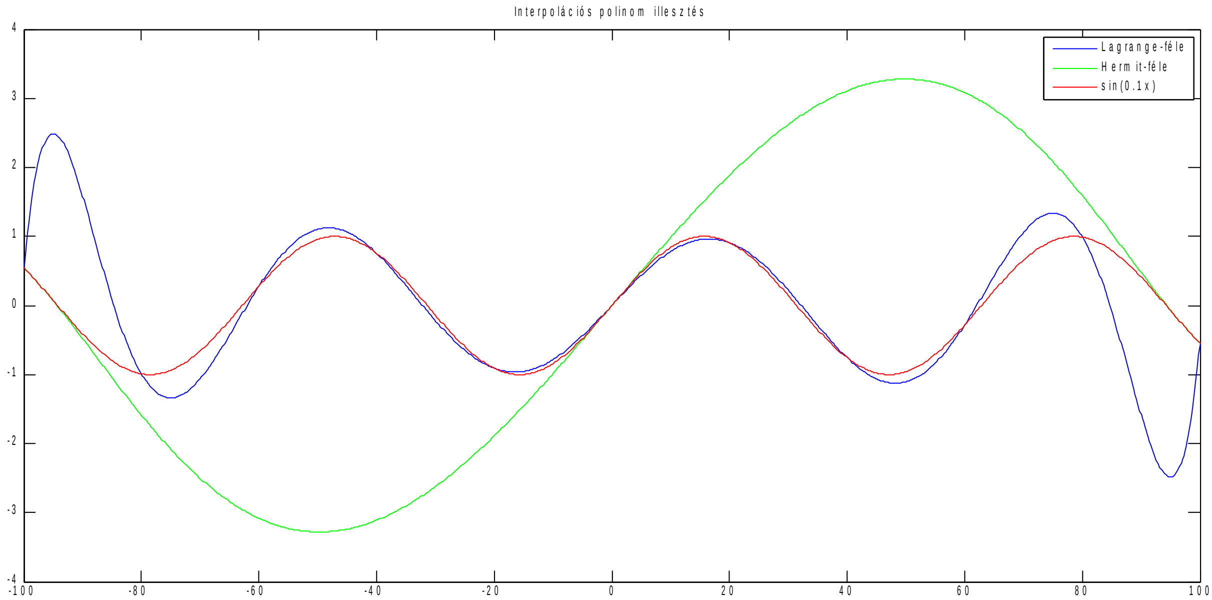
3.3. Interpolációs formulák illeszkedése az interpolált függvényre

Rajzoljuk ki egy ábrára a következő függvényt $f(x)=\sin(0.1\,x)$ a *[-100,100]* intervallumon, valamint a hozzá tartozó Lagrange- és Hermite-féle interpolációs polinomokat! Legyen a Lagrange-féle polinom alappontjainak száma n+1, még pedig úgy, hogy ez a szám megegyezzen az Hermite-féle polinom multiplicitásainak számával, tehát mindkét polinom n-edrendű legyen. Az Hermite-féle polinomnál legyenek az alappontokon megadva a függvény második deriváltjáig a függvényértékekek.

A függvényábrázolási feladatot megoldó program szintén a mellékletben fellelhető, a végeredményben kapott ábrák pedig a következő oldalon találhatóak.



Interpolációs polinom illesztése kilenc alappontra



Interpolációs polinom illesztése tizenegy alappontra

Felhasznált irodalom

[1]: www.wikipédia.org

[2]: www.mathworks.com

[3]: Freud Róbert: Lineáris algebra, ELTE Eötvös Kiadó, 2007

[4]: Faragó István-Horváth Róbert: Numerikus módszerek, Typotex Kiadó, 2013

[5]: Faragó István: Alkalmazott Analízis 1 Előadás jegyzet, 2012

Melléklet

Felhasznált programok Matlab kódjai:

1. Feladat(*interpol_ido*):

```
function [t1, t2]=interpol_ido(x, f)
tic
newton_interpol(x,f)
toc
t1=toc;
tic
lagrangepoly(x,f)
toc
t2=toc;
```

2. Feladat2(*interpol_hiba*):

```
function [H1, H2]=interpol_hiba(a,b,n,f)
x1=(a:(b-a)/n:b);
x2=zeros(1,n+1);
for i=1:n+1
x2(i)=cos((2*i-1)/(2*(n+1))*pi);
end
x3=(a:(b-a)/(1000*n):b);
y1=zeros(1,n+1);
y2=zeros(1,n+1);
h1=zeros(1,n+1);
h2=zeros(1,n+1);
for j=1:n+1
y1(j)=f(x1(j));
y2(j)=f(x2(j));
end
p1=lagrangepoly(x1,y1);
p2=lagrangepoly(x2,y2);
for k=1:(2*n+1)
```

```
h1(k)=abs(polyval(p1,x3(k))-f(x3(k)));
h2(k)=abs(polyval(p2,x3(k))-f(x3(k)));
end
H1=max(h1);
H2=max(h2);
```

3. Feladat3(*interpol-ill*):

```
function [p1,p2]=interpol_ill(a,b,n)
f=@(x)(sin(0.1*x));
f1=@(x)(0.1*cos(0.1*x));
f2=@(x)(-0.01*sin(0.1*x));
x1=linspace(a,b,n+1)
y1=zeros(1,n+1);
y1=f(x1);
p1=lagrangepoly(x1,y1);
x2=linspace(a,b,(n+1)/3);
A=zeros((n+1)/3,4);
for i=1:(n+1)/3
A(i,1)=x2(i);
A(i,2)=f(x2(i));
A(i,3)=f1(x2(i));
A(i,4)=f2(x2(i));
end
p2=Hermite_difftable(A);
x3=linspace(-100,100,1000);
y2=zeros(1,1000);
y3=zeros(1,1000);
y2=polyval(p1,x3);
y3=polyval(p2,x3);
axis([-100 100 min(y3-y2) max(y3-y2)]);
plot(x3,y2,'b-',x3,y3,'g-',x3,f(x3),'r-');
title('Interpolációs polinom illesztés');
legend('Lagrange-féle','Hermite-féle','sin(0.1x)');
```

4. Lagrange-interpoláció(*lagrangepoly*):

```
function [P,R,S] = lagrangepoly(X,Y,XX)
if size(X,1) > 1;  X = X'; end
if size(Y,1) > 1;  Y = Y'; end
if size(X,1) > 1 || size(Y,1) > 1 || size(X,2) ~= size(Y,2)
error('both inputs must be equal-length vectors')
end
N = length(X);
pvals = zeros(N,N);
for i = 1:N
pp = poly(X( (1:N) ~= i));
pvals(i,:) = pp ./ polyval(pp, X(i));
end
P = Y*pvals;
if nargin==3
YY = polyval(P,XX);
P = YY;
end
if nargout > 1
R = roots( ((N-1):-1:1) .* P(1:(N-1)) );
if nargout > 2
S = polyval(P,R);
end
end
```

5. Newton-interpoláció(*newton_interpol*):

```
function [N] = newton_interpol(x,y)
n = length(x);
a(1) = y(1);
for k = 1 : n – 1
d(k, 1) = (y(k+1) - y(k))/(x(k+1) – x(k));
end
for j = 2 : n – 1
for k = 1 : n – j
```

```
d(k, j) = (d(k+1, j - 1) - d(k, j - 1))/(x(k+j) – x(k));
end
end
for j = 2 : n
a(j) = d(1, j-1);
end
N=zeros(1,n);
for j=1:n
N(1,n-j+1:n)=N(1,n-j+1:n)+a(j)*poly(x(1:j-1));
end
```

6. Hermite-interpoláció(*Hermite-difftable*):

```
function Y=difftable(A)
alappontok=A(:,1);
fvertekek=A(:,2);
[n,m]=size(A);
M=zeros(1,m*n);
for i=1:n
o=0;
for j=1:m
if A(i,j)~=Inf
o=o+1;
end;
end;
M(i)=o-1;
end;
k=sum(M);
B=zeros(k,k+1);
C=[];
l=1;
aszam=1;
for i=1:k
if l>M(aszam)
l=1;
```

```
aszam=aszam+1;
end;
B(i,1)=alappontok(aszam);
B(i,2)=fvertekek(aszam);
C=[C;A(aszam,:)];
l=l+1;
end;
szamlaloban=2;
nevezoben=1;
for l=3:k+1
for i=1:k+2-l
if B(i,nevezoben)==B(i+l-2,nevezoben)
B(i,l)=C(i,l)/factorial(l-2);
else
B(i,l)=(B(i,szamlaloban)-B(i+1,szamlaloban))/(B(i,nevezoben)-B(i+l-2,nevezoben));
end;
end;
szamlaloban=szamlaloban+1;
end;
E=B(1,:);
X=B(:,1);
syms x;
syms H;
H=E(2);
for i=3:k+1
z=1;
for j=1:i-2
z=z*(sym(x)-X(j));
end;
H=H+E(i)*z;
end;
Y=sym2poly(H);
```