

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

---

Varga Réka

**MENETREND KÉSZÍTÉSI PROBLÉMÁK**

BSc Szakdolgozat

Témavezető:

Kis Tamás

Operációkutatási Tanszék



Budapest, 2015

# Köszönetnyilvánítás

Ez úton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Kis Tamásnak, aki hasznos tanácsaival, szakértelmével segítette munkámat.

Külön köszönettel tartozom családomnak és barátaimnak, mert mindig támogattak, pozitív gondolataikkal erősítettek engem.

# Tartalomjegyzék

<b>1. Főbb menetrend készítési problémák</b>	<b>4</b>
1.1. Járatok, útvonalak megtervezése . . . . .	4
1.2. Menetrend meghatározása . . . . .	5
1.3. Személyzet és járművek beosztása . . . . .	5
<b>2. Buszmenetrend</b>	<b>7</b>
2.1. Egyszerű buszmenetrend probléma . . . . .	9
2.1.1. A buszmenetrend szinkronizálási probléma modellje . . . . .	9
2.2. A probléma (Összetett periódusú busz szinkronizálási probléma) . . . . .	11
2.3. A modell . . . . .	11
2.4. Eredmények . . . . .	13
<b>3. Vonat menetrend</b>	<b>15</b>
3.1. Probléma . . . . .	15
3.2. Ciklikus menetrend . . . . .	16
3.2.1. Ciklikus vonat menetrendi probléma modellje . . . . .	18
3.2.2. Gráfként meghatározva, egyszerűsített modellel . . . . .	20
3.2.3. Gráf felépítése . . . . .	21
3.2.4. Megvalósítás . . . . .	23
3.2.5. Periodikus-esemény ütemezési probléma- PEÜP . . . . .	25
3.2.6. Megvalósítás . . . . .	28
3.3. Aciklikus menetrend . . . . .	29
3.3.1. Modell . . . . .	31
3.3.2. Megvalósítás . . . . .	31
<b>4. Összefoglalás</b>	<b>33</b>

# 1. fejezet

## Főbb menetrend készítési problémák

Egy menetrend készítése, akár városon belüli (pl. busz), akár egész országot, esetleg országokat érintő (pl. vonat) is legyen, nagyon sok tényező figyelembe vételét igényli. Az is nyilvánvaló, hogy a megközelítése más és más lehet aszerint, hogy mi a célunk, kinek a szemszögéből nézzük. Alapvetően három nagyobb csoportot különböztethetünk meg e téren, így az utasok igényeinek kielégítése, stabil és erős rendszer megléte, valamint a költségek figyelembe vétele (utasok és üzemeltetők szempontjából is). Ezek a célok gyakran konfliktusokhoz vezethetnek, hisz például egy utasnak az lenne a legideálisabb, ha a tervezett utazási célját egyből eléri és nincsenek köztes megállók, így a leggyorsabban éri el azt, viszont az üzemeltető célja, hogy egyszerre minél több utast szállítson, ezáltal maximalizálja nyereségét.

Mindazonáltal, törekedni kell arra, hogy a működési költségeket minimalizálva (bevételt maximalizálva), ugyanakkor a szolgáltatás minőségét javítva érjünk el minél jobb eredményeket. Aszerint, hogy kik és mik vesznek részt a tömegközlekedésben a menetrend egyes készítési/ütemezési fázisait, azokhoz szükséges bemeneti adatait és összefüggésüket a következők szerint négy főbb csoportba oszthatjuk..

### 1.1. Járatok, útvonalak megtervezése

Első kérdés a menetrend megtervezésénél, hogy milyen útvonalak legyenek, honnan, meddig menjenek, mit érintsen. Ezt általában egy piackutatással kezdik, ahol demográfiai és utazási mintákat vizsgálnak. Mindezt azért, hogy az egyes környékeken megnézzék, milyenek a potenciális utasok szokásai. Ezt követően meg kell nézni az utak hálózatát és a lefedettséget. Azaz, hogy például az egyes vonalak között mennyi utat kell megtenni

gyalog. Általában mind városon belül (belváros), mind pedig országos (főváros) hálózatot nézünk, lesz egy középpont, amely fele a járművek orientálódnak. Ezért meg kell vizsgálni, hogy egy vonal menjen végig, vagy csak egy átszállási pontig, ahonnan az utas majd tovább tud halad, és mik legyenek egyáltalán az átszállási pontok. Mi ezek meglétét feltételezzük problémánk vizsgálatakor.

## 1.2. Menetrend meghatározása

Maga a menetrend összeállításánál is rengetek tényezőt kell figyelembe venni azért, hogy az utasok igényeit minél inkább kielégíthessék. Fő feladat a gyakoriságok, követési idők beállítása, járművek csatlakozása, utasok várakozási idejének csökkentése. Ehhez figyelembe kell venni többek között a vonalak és megállók számát, hogy milyen szabály szerint jönnek az egyes megállók. Számításba kell venni azt is, mennyi utas van átlagosan adott két megálló között, a meglévő járművek milyen típusúak, mennyi embert tudnak egyszerre szállítani. Ezeknek a járműveknek mekkora a biztonságos követési idejük és, hogy mekkora a menetidejük két megálló között. Ha ezek mind-mind be vannak állítva, lehet továbblépni, hogy például, ami a mi fő problémánk is lesz, hogy az egyes napokat milyen periódusokra osszuk fel, ha felosztottuk, hogyan szinkronizáljuk az egyes vonalakat vagy, a vonalak egy megadott ciklust kövessenek vagy változó időben induljanak. Ezt a két problémát fogom a 2. fejezetben bemutatni buszokon és a 3-ban vonatok ütemezésén keresztül.

## 1.3. Személyzet és járművek beosztása

Mikor a járműveket szeretnénk ütemezni, ügyelni kell többek között arra, hogy mennyi az az idő, ami alatt maximum és minimum forgalomba tud állni vagy, hogy mennyi a megengedett maximum késés és maximum mennyivel indulhat előbb. Mivel ezek a közlekedési eszközök többnyire nem egész nap közlekednek, ezért szükség van garázsra, ezek nagysága és távolsága a vonaltól is fontos. Azzal a holt idővel is számolni kell, amíg például a busz ezt a garázs-induló/végállomás utat megteszi.

A sofőröknél az egyik legfontosabb az lesz, mikor és hol tudnak pihenni, ezek között a pihenők között mennyi idő telik el. A pihenőknél nem mindegy, mennyi időt töltenek el ott (étkezésre még több idő), ahogy az sem, hogy éppen milyen napszakban vannak. Kell-e

járművet cserélniük vagy sem, fél vagy teljes állásban vannak-e alkalmazva. Ezen kívül még több hatóság által meghatározott törvény befolyásolhatja (pl. szabadság kiadása vagy a munkanapok meghatározása).

Erre az utolsó két problémára már több program is létezik, amelyek viszonylag jól beosztják mind a járműveket, mind az alkalmazottakat. Ez azért sem meglepő, mert a legtöbb kiadást ezek optimális beállításával lehet csökkenteni a leginkább.

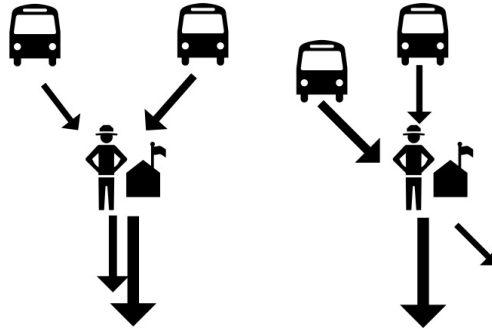
## 2. fejezet

# Buszmenetrend

Egy nagyobb városon belül, ahogy az 1. fejezetben is írtam, több probléma felmerül egy menetrend készítés kapcsán. Ebben a fejezetben szeretném bemutatni buszok indulásának és érkezésének összehangolását az egyes megállóknál. A cél az, hogy az üzemeltető a kiadásait csökkentse, ugyanakkor a szolgáltatás minősége ne romoljon, azaz az utasok kényelmét és szokásait figyelembe véve. Így ez a probléma nagy mértékben függ attól, hogy hogyan és milyen időközökre osztunk fel egy napot (csúcsidő vagy éppen holt idő, munkanap vagy hétvége, ünnepnap, stb.).

Célunk az, hogy maximalizáljuk az összehangolt megállók számát, amihez figyelembe kell venni az átszállásokat, vagyis, hogy egy utas az egyik pontból a másikba úgy jut el, hogy közben járatot vált, ezt ábrázolja a (2.1) ábra jobb oldala. Nyilván akkor kielégítő számára, ha minél kevesebbet kell várnia. Viszont két különböző vonal, mivel van közös megállójuk, nem jöhet közvetlen egymás után, hiszen több probléma is adódhat út közben (például dugó, baleset), az esetleges busz torlódásokat tehát figyelembe kell venni és törekedni azok elkerülésére, ezt ábrázolja a (2.1) ábra bal oldala.

2.1. ábra. Torlódási és átszállási pontok



A részletes probléma bemutatása előtt definiálom az egyes jelöléseket a [3]-as és [4]-es cikk szerint, majd a probléma egy előzményét írom le. Jelölés a következő lesz:

- $I$ : összes útvonal
- $J(i)$ : azok a vonalak, amelyek megosztják megállójukat  $i \in I$ -vel
- $B^{ij}$ :  $i, j \in J(i)$  vonal összehangolt megállója
- $S^i$ : az  $i$ . vonal tervezett periódusa
- $i(p)$ :  $p$ . járat az  $i$  vonalon
- $i(\text{első}(s))$ : az első járat az  $s$  periódusban
- $i(\text{utolsó}(s))$ : az utolsó járat az  $s$  periódusban
- $f^i$ : az  $i$  vonal járatainak gyakorisága egész nap
- $f_s^i$ : az  $i$  vonal járatainak gyakorisága az  $s$  periódusban
- $\eta_s^i$ : egyenletes követési ideje az  $i$  vonalnak az  $s$  periódusban
- $h_s^i$ : a minimális szünet két járat között az  $i$  vonalon az  $s$  periódusban
- $H_s^i$ : a maximális szünet két járat között az  $i$  vonalon az  $s$  periódusban
- $\Delta_s^i$ : az  $i$  vonal rugalmas paramétere az  $s$  periódusban
- $t_p^{ib}$ : az  $i$  vonal  $p$ . járatának menetideje a járat induló állomásától a  $b$  megállóig
- $w_{pq}^{ijb}$ : a minimum követési idő az összehangolt  $i(p)$  és  $j(q)$  járatok között
- $W_{pq}^{ijb}$ : a maximum követési idő az összehangolt  $i(p)$  és  $j(q)$  járatok között
- $d_s^i$ : az utolsó és első járat az  $s$  és  $s + 1$  periódusban
- $X_p^i$ :  $p$ . járat indulási ideje az  $i$  vonalon  $i(p)$ -ként jelölve
- $Y_{pq}^{ijb}$ : összehangoltságot jelöli az  $i(p)$  és  $j(q)$  járatok között a  $b$  megállóban
- $T$ : periódus percben megadva
- $M$ : egy nagy szám, ami a maximális különbség az érkezési idők között
- $\delta^i$ : szünet amplitudó faktora



Minden esetben a mexikói Monterrey város buszhálózatát vizsgáljuk. A település és agglomerációjának lélekszáma több, mint 4 millió fő, így nem meglepő, hogy körülbelül 300 különböző buszjárata van. Az utasok nem tudják a pontos indulási időket, csak becsülni tudják, mennyit kell várniuk egy adott járműre.

## 2.1. Egyszerű buszmenetrend probléma

A probléma előzményeit [3] cikk írja le. A buszok majdnem minden sarkon megállnak, így nem lesz minden pont jelentős számunkra és nem is vesszük figyelembe, csak azokat, amelyek kezdetei egy olyan vonalnak, amit több járat is használ vagy, ahol előfordul átszállás. Ezeket, ahogy már korábban is említettem, nevezzük torlódási és átszállási pontoknak. Célünk az, hogy minél több összehangolt eseményt kapjunk.

**2.1.1. Definíció.** *Összehangolt eseményről beszélünk, ha két, egymást követő járat közötti követési idő egy megadott időkorláton belül esik egy adott megállóban és előnyben részesíti az utasok átszállási idejét.*

A napokat felosztjuk különböző periódusokra, melyeket az utasok igényei és az utazások hossza alapján alakítottak ki. Fontos, hogy az egyes vonalakon az egymást követő buszoknak legyen egy ideális indulási idejük, ami igazodik az adott periódus gyakoriságához és figyelembe veszi a már említett átszállásokat és torlódásokat. Ezt jelöljük  $H_{idealis}^i = \frac{I}{f^i}$ -vel. Ennek alapján meg tudjuk adni a minimális és maximális követési időt:  $h^i = H_{idealis}^i - \delta^i$  és  $H^i = H_{idealis}^i + \delta^i$ , ahol  $\delta^i$  adott szünet amplitudó faktor.

### 2.1.1. A buszmenetren szinkronizálási probléma modellje

A modellünk, egyszerű és minden vonálnál azonos periódust használva, a következőképpen fog kinézni:

A döntési változót  $X_p^i$ -vel jelöljük és az  $i$ . vonal  $j$ . járatának indulási idejét fejezi ki. Ezen kívül lesz még egy bináris változónk, amely a szinkronizált eseményeket számolja a következők szerint:

$$Y_{pq}^{ijb} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i(p) \text{ érkezik először a } b \text{ megállóba és össze van hangolva } j(q)\text{-val} \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

$$X_1^i \leq H^i \quad \forall \quad i \in I \quad (2.1)$$

$$T - H^i \leq X_{f^i}^i \leq T \quad \forall \quad i \in I \quad (2.2)$$

$$h^i \leq X_{p+1}^i - X_p^i \leq H^i \quad \forall \quad i \in I, p = 1, \dots, f^i - 1 \quad (2.3)$$

$$(X_q^j + t_b^j) - (X_p^i + t_b^i) \geq w_b - M(1 - Y_{pq}^{ijb}) \quad \forall \quad i \in I, j \in J(i), p = 1, \dots, f^i, \\ q = 1, \dots, f^j, b \in B^{ij} \quad (2.4)$$

$$(X_q^j + t_b^j) - (X_p^i + t_b^i) \leq W_b + M(1 - Y_{pq}^{ijb}) \quad \forall \quad i \in I, j \in J(i), p = 1, \dots, f^i, \\ q = 1, \dots, f^j, b \in B^{ij} \quad (2.5)$$

$$X_p^i \in \{0, 1, \dots, T\} \quad \forall \quad i \in I, p = 1, \dots, f^i \quad (2.6)$$

$$Y_{pq}^{ijb} \in \{0, 1\} \quad \forall \quad i \in I, j \in J(i), p = 1, \dots, f^i, \\ q = 1, \dots, f^j, b \in B^{ij} \quad (2.7)$$

Célfüggvényünk, amely maximalizálja az összehangolt megállókat, a következő lesz:

$$F(x) = \max \sum_{i \in I} \sum_{j \in J(i)} \sum_{b \in B^{ij}} \sum_{p=1}^{f^i} \sum_{q=1}^{f^j} (Y_{pq}^{ijb})$$

Az első korlát felelős azért, hogy minden vonal első járata a  $T$  periódusidő elején induljon el, ahogy az utolsó járat pedig a periódus végén, ezt mutatja a (2.2) egyenlőtlenség. A (2.3) felel azért, hogy egy adott  $i$  vonalon a járatok folyamatosan menjenek a minimum és maximum követési időn belül. Azért, hogy az  $Y_{pq}^{ijb}$ , az összehangolás változója aktiválódjon, az kell, hogy a  $j$ . vonal  $q$ . járművének érkezési ideje és az  $i$ . vonal  $p$ . járművének érkezési ideje a  $b$  megállóban a  $w_b$  és  $W_b$  korlátok között legyen, ezt mutatja a (2.4) és (2.5) korlátozás. Itt az  $M$  érték egy nagy szám, mely maximalizálja az  $(ij)$  pár érkezési ideje közötti különbséget, amiket minden  $b$  pontban szinkronizálunk.

$$M = \max \left\{ \max_{i,j \in J(i), b \in B^{ij}} \{T + t_b^j - t_b^i\}, \max_{i,j \in J(i), b \in B^{ij}} \{T + t_b^i - t_b^j\} \right\}$$

Ez a modell kellően rugalmas ahhoz, hogy a város buszhálózatának alapját modellezze. Szükséges azonban a valóságban is tesztelni, figyelembe véve más problémákat is. Esetünknel 200 vonalat és 40 összehangolási pontot vizsgáltak. Az előbbi modellt, helyi keresési algoritmussal futtatva annak megoldásaiak relatív különbsége kevesebb, mint 18 % volt kevesebb, mint egy perces számítási idővel. Ezeket az eredményeket óvatosan kell vizsgálni, hisz nagyon összetett a probléma. Így meg kell jegyeznünk, hogy megoldása NP-nehéz osztályba tartozik.

## 2.2. A probléma (Összetett periódusú busz szinkronizálási probléma)

Az előző modellben láthattuk, hogy minden egyes járatnak azonos volt a periódusa (percen megadva), melyet  $T$ -vel jelöltünk. Viszont egy valós menetrendnél lehetnek a különböző vonalaknak eltérő periódusai, ahogy a menetidejük is eltérő. Ezekből a periódusokból szintén meg fogjuk kapni egy-egy vonal egész napi beosztását. Itt tehát figyelembe kell venni azt is, hogy ha az egyes járatok eltérő, de szomszédos periódusban vannak és más a menetidejük, még össze lehet hangolni őket a közös pontjukban. Számításba véve azt is, hogy az érkezésük között eltelt idő a minimum és maximum várakozási időn belül van. Ezt az előző modell elutasította volna. Így tehát az összehangolt események az indulási időktől, a menetidőktől és a várakozási időktől fognak függeni.

Ahhoz, hogy az eltérő periódusok közötti átmenet zökkenőmentes legyen, új megszerítésekra és ezzel együtt új jelölésekre van szükség. A  $d_s^i$  lesz az a paraméter, amely jelöli az  $i$ . vonal  $s$  periódusának végét és  $s + 1$ . periódusának elejét. Ez az érték befolyásolja az egyes járatok közötti szüneteket is. Tehát a minimum szünetek  $h_s^i = \eta_s^i - \Delta_s^i$  és maximum szünetek  $H_s^i = \eta_s^i + \Delta_s^i$  lesznek, ahol  $\eta = \frac{d_s^i - d_{s-1}^i}{f_s^i}$  az egyenletes követési tábolság. A  $\Delta_s^i$  pedig a szünet rugalmas paramétere, mely a menetrend szerinti indulásokat fogja biztosítani.

## 2.3. A modell

Az előző modellel megegyező lesz a döntési változó, a bináris változó, amely számolja a szinkronizált eseményeket és ennek megfelelően a célfüggvényünk is azonos lesz.

Döntési változó:

$X_p^i$ : a  $p$ . járat indulási ideje az  $i$  vonalon.

Bináris változó:

$$Y_{pq}^{ijb} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i(p) \text{ érkezik először a } b \text{ megállóba és össze van hangolva } j(q)\text{-val} \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

Célfüggvény:

$$\max F(x) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J(i)} \sum_{b \in B_{ij}} \sum_{p=1}^{f^i} \sum_{q=1}^{f^j} (Y_{pq}^{ijb})$$

$$h_s^i \leq X_{p+1}^i - X_p^i \leq H_s^i \quad \forall \quad i \in I, p = \text{elso}(s), \dots, \text{utolso}(s) - 1, \\ s \in S \quad (2.8)$$

$$d_{s-1}^i + \frac{h_s^i}{2} \leq X_{\text{elso}(s)}^i \leq d_{s-1}^i + \frac{H_s^i}{2} \quad \forall \quad i \in I, s \in S \quad (2.9)$$

$$d_s^i - \frac{H_s^i}{2} \leq X_{\text{utolso}(s)}^i \leq d_s^i - \frac{h_s^i}{2} \quad \forall \quad i \in I, s \in S \quad (2.10)$$

$$X_q^j + t_{jb}^q - (X_p^i + t_{pb}^i) \geq w_{pq}^{ijb} - M(1 - Y_{pq}^{ijb}) \quad \forall \quad i \in I, j \in J(i), b \in B^{ij}, p = 1, \dots, f^i, \\ j = 1, \dots, f^j \quad (2.11)$$

$$X_q^j + t_{jb}^q - (X_p^i + t_{pb}^i) \leq W_{pq}^{ijb} + M(1 - Y_{pq}^{ijb}) \quad \forall \quad i \in I, j \in J(i), b \in B^{ij}, p = 1, \dots, f^i, \\ j = 1, \dots, f^j \quad (2.12)$$

$$X_p^i \in \mathbb{R}, Y_{pq}^{ijb} \in \{0, 1\} \quad \forall \quad i \in I, j \in J(i), b \in B^{ij}, p = 1, \dots, f^i, \\ j = 1, \dots, f^j \quad (2.13)$$

A (2.8)-as korlát fogja biztosítani, hogy az indulási idők minden  $i$  vonalon majdnem teljesen egyenletesen legyenek elosztva végig az adott  $s$  periódusban. A (2.9) és (2.10)-es korlátok érik el, hogy az egyes periódusok között ne legyenek zavarok. Ez garantálja, hogy az  $s - 1$ . periódus utolsó és az  $s$ . periódus első járatának érkezése közötti idő a periódus átlagos szünetéhez közeli legyen. Vagyis ez az idő  $\left[ \frac{h_{s-1}^i + h_s^i}{2}, \frac{H_{s-1}^i + H_s^i}{2} \right]$  között kell, hogy legyen. A (2.11)-es és (2.12)-es korlátozások teszik lehetővé, hogy  $(Y_{pq}^{ijb})$  egy legyen, ha a  $b$  megállóban az  $i(p)$  és  $j(q)$  járatok közötti idő a  $[w_{pq}^{ijb}; W_{pq}^{ijb}]$  időintervallumon belül van. Az  $X_p^i$  döntési változó ebben a modellben valós értékeket is felvehet, amit aztán egészként definiálhatunk, ha az időt diszkrétizáljuk, viszont csekély növekedést mutatnak csak az előzetes kísérletek, ha egész értékeket használunk. Az első busz szinkronizálási problémánál, ahol a modellben egész értékek szerepelnek, megoldása NP-nehéz osztályba sorolt, így nem meglepő, hogy ez a modell is NP-nehéz problémához vezet.

A (2.13)-as korlátozásnál látható volt, hogy a várakozási idő intervallumának meghatározása nagyban befolyásolja a szinkronizációt. Ezek az intervallumok függenek attól, mekkora szünetek vannak megadva az egyes járatok között az adott vonalakon. Ezért egy ilyen intervallum létrehozásakor összhangba kell hozni a torlódási pontokban az egyes vonalak érkezéseit azért, hogy minél több összehangolt eseményt kapjunk. Ha például veszünk egy perióduson belül két vonalat, amiket szinkronizálni szeretnénk egy torlódási pontban. A két vonal egyenletes követési ideje ( $\eta$ ) adott. Így a várakozási idő intervalluma

a következőképpen fog alakulni:

$$[w_{pq}^{ijb}; W_{pq}^{ijb}] = \left[ \frac{\min \{\eta_s^i, \eta_s^j\}}{2}; \max \{\eta_s^i, \eta_s^j\} - \frac{\min \{\eta_s^i, \eta_s^j\}}{2} \right]$$

Más lesz a helyzet akkor, ha a két vonal különböző periódusban van, az  $i(p)$   $s \in S^i$ -ben és  $j(q)$  az  $s' \in S^j$ -ben. Ekkor a szünet értékét változtatva kapjuk:

$$[w_{pq}^{ijb}; W_{pq}^{ijb}] = \left[ \frac{\min \{\bar{\eta}_p^i, \bar{\eta}_q^j\}}{2}; \max \{\bar{\eta}_p^i, \bar{\eta}_q^j\} - \frac{\min \{\bar{\eta}_p^i, \bar{\eta}_q^j\}}{2} \right]$$

ahol  $\bar{\eta}_p^i = \eta_p^i$  és  $\bar{\eta}_q^j = \eta_s^j$ , kivéve:

- ha az  $s$  periódusban az  $i(p) = utolso(s)$  a várakozási idő intervallumának meghatározása az  $\bar{\eta}_p^i = \frac{\eta_s^i + \eta_{s+1}^i}{2} + (t_{s+1}^{ib} - t_s^{ib})$  szerint lesz, mert a követési idő az  $i(p)$  és a következő periódus első járata között közel van az átlagos szünet nagyságához.
- ha  $j(q) = elso(s')$  vagy  $j(q) = utolso(s' - 1)$ , akkor három lehetőség fordulhat elő:  $i(p)$  szinkronizálható az  $s' - 1$  periódushoz tartozó  $j$  vonal járataival, vagy  $s'$ -hez tartozóval, vagy mindkettőhöz tartozóval.

Ekkor  $\bar{\eta}_q^j = \min \left\{ \eta_{s'-1}^j; \frac{\eta_{s'-1}^j + \eta_{s'}^j}{2} + (t_{s'}^{jb} - t_{s'-1}^{jb}); \eta_{s'}^j \right\}$  lesz.

Ezen túlmenően még több feltételt lehetne alkalmazni az intervallum meghatározására azért, hogy jobb legyen a hálózat. Ez a modell egy viszonylag rugalmas modell, amellyel eseményeket tudunk szinkronizálni. Más esetekkel, feltételekkel alkalmazható akár vonatok összehangolására is.

## 2.4. Eredmények

A összetett periódusok alkalmazásával jobb eredményeket értek el, mint az egységessel. Feltételezve, hogy van 50 vonal, 5 megálló, ami szinkronizálva van és 10 db, 60 perces periódus, melyek egybevágók minden vonallal. Ezen túl a paraméterek random generáltak ( $f_s^i$ , szünet,  $t_p^{ib}, t_q^{jb}$ ). A létrejött példák (10 db) alapján megállapították, hogy mintegy 20%-kal jobb eredmény született.

Monterrey hálózatának egy részén, főként a belvárosba irányuló vonalakra alkalmazták az eljárást. 5 vonalat vizsgáltak, melyeknek azonos volt az indulási helyük. Olyan megállókat vettek, amik közösek és szükséges összehangolni őket. A szünetek és menetidők

a csúcsidőn kívüli adatok, a menetrend rugalmassága pedig a szünet amplitudó faktorán alapszik. Így 625 összehangolt eseményt kaptak. A maximális összehangolt esemény számát úgy kapták meg, hogy a célfüggvényt  $\sum_{p=1}^{f^i} \sum_{q=1}^{f^j} Y_{pq}^{ijb}$ -nek választották.

Az összetett periódusú buszmenetrend probléma egy NP-nehéz probléma, így nehéz megoldani korlátozott idő alatt, viszont a modell és algoritmus segítségével jó minőségű megoldások születtek. Új paraméterek bevonása lehetővé tenné új korlátok, egyenlőtlenségek létrehozását, melyek javíthatnának a modell minőségén.

## 3. fejezet

# Vonat menetrend

### 3.1. Probléma

A tömegközlekedést használva mindenkinek fontos kérdés az idő, azaz, hogy mikor és mennyit kell utazni, és ami az utasnak jó, az nem feltétlenül jó a szolgáltatónak és fordítva. A közlekedést üzemeltetőknek az egyik legfontosabb kérdése a költséghatékonyság lesz. A következőkben ezt a két problémát mutatom be két különböző modellel.

A vonat menetrendeknél előfordulhat a gyakrabban használt ciklikus menetrend, mint például nálunk vagy a későbbi példa szerint Hollandiában, de előfordulnak olyan országok is, ahol nem ciklikus menetrendet alkalmaznak, például Franciaországban vagy Spanyolországban. Ciklikus menetrendről akkor beszélünk, mikor egy adott vonalon a járművek bizonyos ciklikusság (gyakoriság) szerint járnak és a nap nincs felosztva eltérő hosszúságú periódusokra. Ez a ciklusidő lehet fél, 1, 2 vagy akár még több óra is. Ennek az az előnye, hogy könnyebben kezelhető, valamint az utasok egyszerűen meg tudják jegyezni a vonat indulását az adott állomásról. Ezen túlmenően viszonylag sok járat adódik az utazni vágyóknak, hiszen nem veszi figyelembe azt, hogy épp hétköznapi vagy hétvége, csúcsforgalom vagy kora délután van. Ez az, ami egy aciklikus menetrendnél változni fog. Hiszen ott, a nap folyamán nem azonos időben indulnak a járművek. Ezáltal a kiadásokat csökkenteni tudják az egyes cégek (a ciklusok az utasok száma szerint vannak kialakítva). Valamint könnyebb vele közvetlen kapcsolódásokat kialakítani egyes vonalak között.

## 3.2. Ciklikus menetrend

A ciklikus menetrend készítésnél figyelembe kell venni bizonyos tényezőket, melyek befolyásolják megvalósíthatóságát. Ilyen a menetidő -beleértve az állásidőt is-, ami az egyik legfontosabb tényező az utasok szempontjából. A másik nagyon fontos összetevő a minimális követési idő, azaz mennyi idő elteltével jöhet egy vonat után a másik azonos vágányon, ez a szempont pedig a szolgáltató szemszögéből érdekes. Ezeken túlmenően még számos hatás, igény létezik, amik mind befolyásolják a menetrendet, viszont ezeket a következő modellek nem veszik figyelembe.

Számunkra a fő probléma az idő lesz, azaz, hogyan tudjuk a vonatokat ütemezni úgy, hogy egy adott  $T$  ciklusidőt felhasználva minél több korlátozást tehessünk. Ez a  $T$  ciklusidő esetünkben 60 perc lesz. A modellünk ezen a  $T$ -n fog alapulni, úgy, mint modulo operátor, viszont ezt helyettesíteni fogjuk egy egész értékű  $r$  döntési változóval, aminek segítségével hozzá tudjuk adni vagy levonni  $T$  többszöröseit. A döntési változóink az  $a_p^b$  és  $b_p^b$  lesznek, amelyek a  $p$  vonat érkezési és indulási idejét jelölik a  $b$  állomásról. Ezek az értékek minden esetben egészek, hisz a menetrendekre is percben megadva kerülnek ki. A modell bevezetése előtt a jelölések (összhangba hozva ceder és társai jelöléseivel):



$B$ :	megállók halmaza a vasúthálózatban
$A$ :	az $a = (b_1, b_2)$ normál pályák halmaza a vasúthálózatban, ahol $b_1, b_2 \in B$
$A^{egy}$ :	az $a = (b_1, b_2)$ egyszerű pályák halmaza a vasúthálózatban, ahol $b_1, b_2 \in B$
$V$ :	a vonatok halmaza
$G = (B, A \cup A^{egy})$ :	a vasúthálózat gráfja, amely tartalmazza a megállókat, normál és egyedüli pályákat
$B^p \subseteq B$ :	azon állomások halmaza, melyeken a $p$ vonat megáll
$A^p \subseteq A \cup A^{egy}$ :	azon pályák halmaza, melyeket a $p$ vonat bejár
$V_a$ :	azon $a$ pályák halmaza, ami az összes olyan $(p, p')$ vonatpárt tartalmazza, melyek elhaladnak a pályán azonos irányban, úgy, hogy $p'$ vagy a gyorsabb vonat vagy egyenélő sebességnél olyan esetben, mikor $p < p'$
$V_a^{egy}$ :	azon $a = (b_1, b_2)$ egyedüli pályák, a halmaz az összes $(p, p')$ párt tartalmazza, amelyek egymással szemben haladnak a pályán, a $p$ a $b_1$ állomáson áll meg, $p'$ pedig a $b_2$ -n
$F_b^d, F_b^a$ :	azon $p$ vonatok halmaza a $b$ állomáson, melyek indulási és érkezési idejük állandó
$S_b$ :	azon $(p, p')$ vonatpárok halmaza, $p < p'$ , melyekre az indulási idők össze vannak hangolva a $b$ megállóban
$C_b$ :	azon $(p, p')$ vonatpárok halmaza, $p < p'$ , ahol csatlakozás van két vonat között
$T$ :	a menetrend ciklusideje
$h$ :	az általános követési idő minden állomáson az indulások és érkezésekkor
$r_p^a$ :	a $p$ vonat menetideje az a vonalon
$\left[ \underline{d}_p^b, \overline{d}_p^b \right]$ :	a $p$ vonat állásideje a $b$ állomáson
$\left[ \underline{g}_p^b, \overline{g}_p^b \right]$ :	a $p$ vonat pontos indulási vagy érkezési idejének időintervalluma a $b$ állomáson, ha ez teljesen pontos, akkor $\underline{g}_p^b = \overline{g}_p^b$
$\left[ \underline{s}_{pp'}^b, \overline{s}_{pp'}^b \right]$ :	$p$ és $p'$ vonatok szinkronizálásának időkorlátja a $b$ állomáson
$\left[ \underline{c}_{pp'}^b, \overline{c}_{pp'}^b \right]$ :	$p$ és $p'$ vonatok közötti kapcsolódó vagy megfordítás időkorlátja a $b$ állomáson

Ahogy látszik a jelöléseknél is, meg kell különböztetnünk azokat a vágányokat, amelyeken csak egy irányban halad át vonat, ezt hívjuk normál pályának. Ilyen akkor van, ha egymás mellett több (minimum 2) sínpár található, ezt jelöljük  $a \in A$ -val. A másik változat az egyszerű vágány, amelyen a vonatok mindkét irányban közlekedhetnek, ez általában akkor fordul elő, ha csak egyetlen sínpár van, ezt jelöljük  $a \in A^{egy}$ -val. Ezért kell megkülönböztetnünk  $V_a$  és  $V_a^s$  halmazát, mert hogy ezek egyike sem fogja egyszerre tartalmazni  $(p, p')$ -t és  $(p', p)$ -t. Ezen kívül meg kell említeni  $C_b$ -t is. Ez a halmaz tartalmazza azokat a  $(p, p')$  vonatpárokat, melyek kapcsolódnak egymáshoz. Tehát, ha a  $b$  állomáson a  $p$  és  $p'$  vonatnak csatlakoznia kell, akkor ennek a halmaznak eleme lesz a  $(p, p')$ . Ebből következik, hogy ha a  $p$  vonat kapcsolódik  $p'$ -hez, akkor  $p$ -nek ez lesz a végállomása,  $p'$ -nek pedig a kiinduló állomása, vagyis  $p$  lesz az érkező vonat és  $p'$  lesz az induló a  $(p, p') \in C_b$  jelölésnél. A pályákon kívül a vonatok típusában is lehetnek eltérések sebességüket tekintve, azaz lehet például személyvonat vagy gyorsvonat. A jelöléseknél és később a modellben nem különböztetjük meg ezeket, ha viszont mégis, akkor változtatni kell a  $h$  követési időkön is, mivel egyértelmű, hogy két gyorsvonat között több időt kell hagyni, mint két személyvonat között. Ez esetben a jelölést  $h_{pp}^a$ -re változtatjuk. Ezt belevéve még tovább bonyolítható a modellünk.

### 3.2.1. Ciklikus vonat menetrendi probléma modellje

Ahogy már említettük korábban, célfüggvényünk az egyes vonatok indulási és érkezési ideje lesz egy adott megállóban:

$$a_p^b \in \{0, \dots, T - 1\} \quad \text{A } p \text{ vonat érkezési ideje a } b \text{ állomásra}$$

$$d_p^b \in \{0, \dots, T - 1\} \quad \text{A } p \text{ vonat indulási ideje a } b \text{ állomásról}$$

Azért, hogy a célfüggvényben alkalmazhatóak legyenek, az összes  $a_p^b$ -t egy  $a$  vektor fogja tartalmazni, ugyanígy  $d_p^b$ -t a  $b$  vektor. Az indulási és érkezési idők minél kisebbek, annál jobb, tehát a célunk minimalizálni az  $F(a, d)$  függvényt.

$$\text{Min: } F(a, d) \tag{3.1}$$

$$a_p^{b_2} - d_p^{b_1} = [r_p^a]_T \quad \forall \quad p \in V, a = (b_1, b_2) \in A^p \tag{3.2}$$

$$d_p^b - a_p^b \in [\underline{d}_p^b, \overline{d}_p^b]_T \quad \forall \quad p \in V, b \in B^p \tag{3.3}$$

$$d_{p'}^b - d_p^b \in [\underline{s}_{pp'}^b, \overline{s}_{pp'}^b]_T \quad \forall \quad b \in B, (p, p') \in S_b \tag{3.4}$$

$$d_{p'}^b - a_p^b \in [\underline{c}_{pp'}^b, \overline{c}_{pp'}^b]_T \quad \forall \quad b \in B, (p, p') \in C_b \tag{3.5}$$

$$d_{p'}^b - d_p^b \in [r_p^a - r_{p'}^a + h, T - h]_T \quad \forall \quad a = (b_1, b_2) \in A, (p, p') \in V_a \tag{3.6}$$

$$a_{p'}^b - d_p^b \in [r_p^a + r_{p'}^a + h, T - h]_T \quad \forall \quad a = (b_1, b_2) \in A^{egy}, (p, p') \in V_a \tag{3.7}$$

$$d_p^b \in [\underline{g}_p^b, \overline{g}_p^b] \quad \forall \quad b \in B, p \in F_b^d \tag{3.8}$$

$$a_p^b \in [\underline{g}_p^b, \overline{g}_p^b] \quad \forall \quad b \in B, p \in F_b^a \tag{3.9}$$

$$a_p^b, b_p^b \in \{0, \dots, T - 1\} \quad \forall \quad p \in V, b \in B_p \tag{3.10}$$

A menetidő és állásidő betartásáról (3.2) és (3.3) megszorítások fognak gondoskodni, míg a (3.4) megszorítás az indulási idők összehangoláshoz szükséges feltételeket elégíti ki. Mint ahogy már az előző fejezetben is említettem, külön figyelembe kell venni a vonatok csatlakozását és visszafordulását, ezért ezeknek az elvárásoknak a (3.5) korlátozás tesz eleget. Viszont a vonatok nem mehetnek egyszerre egy sínen vagy keresztezhetik egymást, ezért a minimális követési időt figyelembe véve a (3.6) és (3.7) korlátozások hivatottak elkerülni ezeket, figyelembe véve minden vonatpárnál, melyek használnak egy pályát. A  $V_a$  és  $V_a^{egy}$  halmazokat is figyelembe véve az alsó korlát is ez lesz ebben a két megszorításban (tartalmazva a menetidőket is). A (3.8) és (3.9) korlátozások fogják garantálni, hogy az indulási és érkezési idők fixek lesznek, viszont ezek nem lesznek periódikusak. Az utolsó állításban pedig pontosítva vannak a döntési változók. Végül a (3.2)-(3.7) korlátozásokhoz tartozik egy  $z$  egész változó, a modulo  $T$  kifejezésére.

A probléma ilyen módon való felírása azonban viszonylag bonyolult és nem teljesen egyértelmű. Ezek kiküszöbölésére, és vizualizálására egy úgynevezett korlátozás gráfot alkalmazunk. Mind a feltételek, mind a korlátozások azonosak lesznek, viszont modellünk jóval rövidebb.

### 3.2.2. Gráfként meghatározva, egyszerűsített modellel

Az előző modellben észrevehető volt, hogy minden megszorítás két esemény közötti kapcsolatra utal, ami lehet két érkezés vagy két indulás, érkezés és indulás vagy indulás és érkezés párosa. Tudjuk azt is, hogy ezek között mindig időeltolódás van, ami vagy fix vagy egy időintervallum. Ezeket figyelembe véve gráfunk minden csúcsa egy-egy érkezési vagy indulási idő lesz az adott vonatnak adott állomásnál. A könnyebb érthetőség végett vezessük be a következő definíciót.

**3.2.1. Definíció.** *Eseménynek nevezzük egy  $p$  vonat, egy, a vasúthálózat  $b$  állomása és, vagy egy  $a$  érkezés vagy egy  $d$  indulás kombinációját. Egy  $i$  esemény jelölése  $(p, b, a)$  vagy  $(p, b, d)$  lesz, ami megfelel az  $a_p^b$  vagy a  $b_p^b$  döntési változónak.*

Azért, hogy ne legyen külön indulási és érkezési időre döntési változónk, ezeket egyesítve bevezettjük a  $v_i$  döntési változót:

$v_i \in \{0, \dots, T - 1\}$  Az az időpillanat, mikor  $i \in B$  esemény történik.

A döntési változókon kívül a különböző időkorlátok is egyszerűsítésre szorulnak, így csak egy általános időkorlátunk lesz.

$[l_{ij}, u_{ij}]_T$  A periódikus időintervallum, amely tartalmazza az  $i$  és  $j$  eseményeket.

$e_{ij}$  Az az egész változó, mely a ciklikusságért felelős,  $i$  és  $j$  eseményeket tartalmazva.

Ezt az új korlátozást úgy határozzuk meg, hogy egy  $j$  esemény az alsó és felső korlátok közötti időben (percben mérve) következzen az  $i$  esemény után. Ezért a megszorításainál  $l_{ij}$  (alsó korlát) és  $u_{ij}$  (felső korlát) is egyenlő lesz a menetidővel, továbbá  $0 \leq l_{ij} \leq T - 1$  és  $0 \leq l_{ij} - u_{ij} \leq T - 2$ .

Az általános korlátot használva, minden korlátozást (3.2)-(3.7)-ig átírunk úgy, hogy

$$v_j - v_i \in [l_{ij}, u_{ij}]_T, \quad (3.11)$$

vagy az  $e_{ij}$  egész változót belevéve kapjuk

$$l_{ij} \leq v_j - v_i + T e_{ij} \leq u_{ij}, \text{ ahol } e_{ij} \in \mathbb{Z}. \quad (3.12)$$

Az állandó indulási és érkezési idők korlátai (3.8) és (3.9.) átírva:

$$\underline{f}_i \leq v_i \leq \bar{f}_i, \quad (3.13)$$

ahol az új paraméterek ( $\underline{f}_i$  és  $\overline{f}_i$ ) a fix indulási és érkezési idő korlátozás határainak felelnek meg, azaz  $\underline{g}_p^b$ -nek és  $\overline{g}_p^b$ -nek.

Ezek után a korlátozás gráf a következőképpen fog kinézni. A csúcsok halmaza megegyezik az események halmazával, vagyis  $B$ -vel. Az élek pedig megegyeznek azokkal az  $(i, j)$  eseménypárokkal, melyekre a megszorítást vesszük. Az előző modellben  $l_{ij}$  és  $u_{ij}$ -ra kapott időkorlátokat tekintsük az  $[l, u]$  általános időintervallumnak egy  $(i, j)$  éllel. Így  $l$  lesz az  $l_{ij}$ -k vektora,  $u$  az  $u_{ij}$ -ké és  $v$  pedig az összes  $v_i$  változóé, ahol  $v_i \in B$ . Ezek a paraméterek adják a  $G = (B, A, l, u)$  gráfot és a  $T$  ciklusidőt. Célfüggvényünk az előzővel megegyezően az indulási és érkezési idők minimalizálása, azaz az  $F(v)$  függvény. Ezek után a modellünk:

$$\text{Min: } F(v) \tag{3.14}$$

$$l_{ij} \leq v_j - v_i + T e_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i, j) \in A \tag{3.15}$$

$$\underline{f}_i \leq v_i \leq \overline{f}_i \quad \forall i \in N \tag{3.16}$$

$$0 \leq v_i < T \quad \forall i \in N \tag{3.17}$$

$$e_{ij} \in \mathbb{Z} \quad \forall (i, j) \in A \tag{3.18}$$

Figyelembe kellene még vennünk az egyszerű és normál pályák közötti eltérés, viszont ettől eltekintünk, így nem kapnak ezek külön jelölést. Látható, hogy ez a modell sokkal összetettebb és egyszerűbb, ami a kevesebb időkorlátozásnak köszönhető.

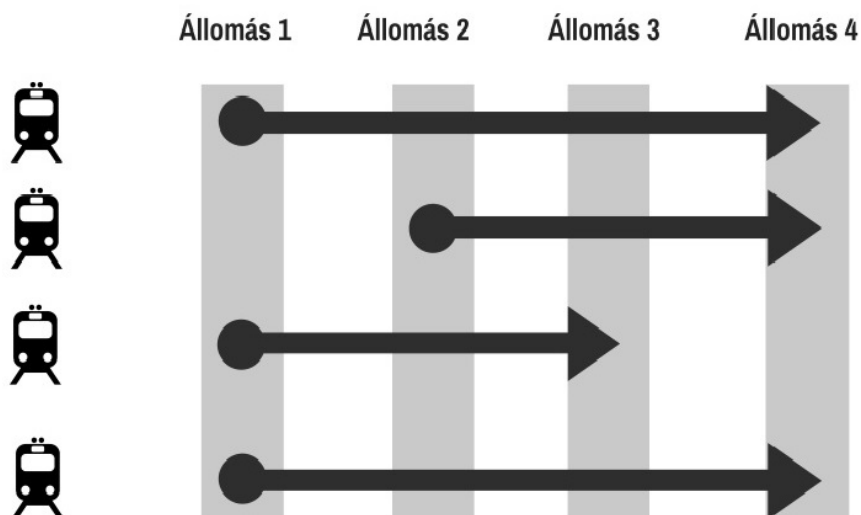
### 3.2.3. Gráf felépítése

A korlátozás gráf egy összetett gráf, vagyis a megszorításokból is látszik, hogy sok feltételnek eleget kell tennie. Gráfunk csúcsai fogják az adott vonatok állomásait reprezentálni. Itt bizonyos esetekben az állomáson belül megkülönböztetjük az indulásokat és érkezéseket (két csúcs vonatonként), a többi esetben egy csúcs lesz. Az élek pedig az egyes feltételeknek felelnek meg, melyek két vonat és/vagy állomás között adódnak.

Az első ilyen a vonat útja. A vonat útját a  $G$  gráfban egy út fogja mutatni a kezdő csúcstól, ami a kiinduló állomás, a végső csúcsig, ami a végállomás. Így a vonat útja a menetidő és az állásidőből fog összeadódni. Ha csak nem egy másik megszorítás is

szerepel, akkor itt az indulási időket fogjuk figyelembe venni. Gyakran előfordul, hogy a vonat, miután beért a végállomásra, vissza is fordul, ekkor ciklusként kell tekintenünk rá. Ezt ábrázolja a (3.1) ábra.

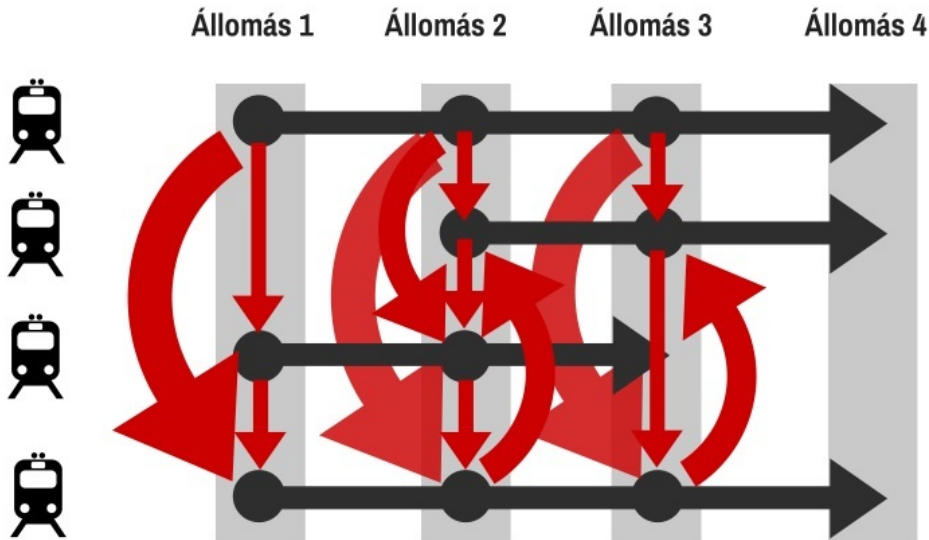
3.1. ábra. A vonatok útja az állomások között



Továbbá az egyes állomásoknál figyelembe kell vennünk, hogyha két vonat ugyanazon pályán folytatja útját, bizonyos követési távolságot hagyniuk kell a biztonságos közlekedés érdekében. Ezért az egyes vonatok között úgynevezett biztonsági élek lesznek, melyek ezt a megszorítást hivatottak betartani, ahogy a (3.2) ábrán a piros nyilak jelzik. Ehhez a megszorításhoz tartozik még a vonatok gyakoriságáról szóló korlátozás is, viszont mivel ennek időkorlátja általában szűkebb, ezért csak a biztonsági megszorítást vesszük figyelembe.

Ahogy az előbb már említettem, van olyan eset, mikor külön kell vennünk az érkezési és az indulási időket egy állomáson belül. Erre azért van szükség, mert figyelembe kell venni a csatlakozásokat is (ha az utas egyik vonatról átszáll egy másikra), így újabb élek lesznek eltérő vonatok érkezési és indulási ideje között. Valamint az állásidővel itt is számolnunk kell. Ezta részgráfot nevezzük állomás gráfnak, ami egy páros gráf lesz.

3.2. ábra. A vonatok közötti biztonsági élek, pirossal jelölve



**3.2.2. Definíció.** *Páros gráfnak nevezünk egy  $G$  gráfot, ha  $G$  csúcsainak halmazát fel tudjuk osztani egy  $A$  és  $B$  halmazra, hogy az összes  $G$ -beli élre teljesül, hogy az egyik végpontja  $A$ -ban van, a másik pedig  $B$ -ben. Egy  $G$  páros gráfot következőképpen jelölünk:  $G = (A, B)$ .*

Azaz a gráf egyik felén az érkezési idők ( $B_b^a$ ), másik felén az indulási idők ( $B_b^d$ ) lesznek, melyek között irányított élek vannak. Ezt láthatjuk a (3.3) ábrán zöld nyilakkal jelölve.

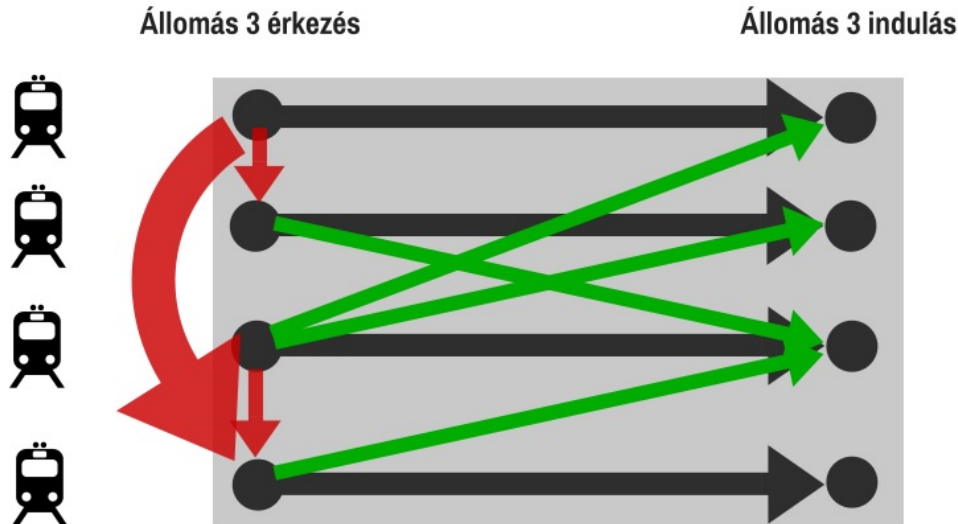
Az összes feltételt figyelembe véve (vonatutak és ciklusok, biztonsági és megálló gráf) három részből fog kialakulni a valódi, korlátozás gráf, vagyis  $G=(B,A,l,u)$ . Minden  $a \in A$  pályánál lehetséges biztonsági előírás és minden  $b \in B$  állomáson adott egy  $G_a$  állomás gráf.

### 3.2.4. Megvalósítás

A modellt tesztelték a valóságban is, három példát. Mindegyik a holland vasút rendszerén alapszik. Medegyik esetben a ciklusidő 1 óra, azaz  $T = 60$  perc volt.

- 1. eset: az 1997/98-as intercity hálózatra próbálták ki. Ez 50 megállót és 12 vonalat tartalmazott. A vonalak gyakorisága megegyezett, de a hálózat nagy része összetett

3.3. ábra. A vonatok közötti átszállások, zölddel jelölve



vonalakból állt. Ezek között az összetett vonalak között 30 perces gyakoriságokat alkalmaztak. Ezekről a gyakoriságoktól elvárható, hogy tökéletesek legyenek, vagyis az ennek megfelelő korlátozások egyenlőségek. A csatlakozásokról szóló korlátozás pedig úgy lett meghatározva, hogy csak rövid átszállási idő van. A példában ezen kívül a vonatok között több összekapcsolási és vágási esemény is szerepel.

- 2. eset: az 1997/98-as intercity hálózaton kívül gyorsvonatokat is belevettek. Az példa intercity része azonos az előzővel és ehhez vettek 11 gyorsvonati vonalat 24 állomással. A legtöbb gyorsvonatnak is hasonlóan az előző példában, a gyakoriságoknál egyenlőséget vettek, de 2 lett. A csatlakozás itt is úgy lett kialakítva, hogy kényelmes, de viszonylag gyors legyen az utazás.
- 3. eset: ismét az 1997/98-as menetrendet vették, viszont most csak a Hollandia északi részén közlekedőket, de minden típusú vonatra. 50 állomást és 10 vonalat vettek, melyek különböző típusúak (intercity, gyors vonat, személyvonat és egy tehervonat) voltak. Mivel nemzetközi vonatot nem tartalmazott a teszt, nem kellett fix indulási és érkezési időket használni. A gyakoriság itt is kettő volt, a csatlakozási korlátok pedig számos átszállást biztosítanak a vonatok között.



Az első és második eset ilyen formában nem megoldható, mert túl szűk a meghatározásuk, viszont az állásidők és csatlakozási idők felső korlátját növelve már több célfüggvényt is (utazási idő, menetrend nagysága, a kezdeti korlátozások megsértésének összege) alkalmazhatók. A harmadik példa a legnagyobb és legösszetettebb, ezért egész értékű optimális nem található rá. A modell tehát kisebb változtatásokra szorul (pl. ciklikus fixáció), amivel már megoldhatóvá válik.

### 3.2.5. Periodikus-esemény ütemezési probléma- PEÜP

A  $v_j - v_i + T e_{ij} \in [l_{ij}, u_{ij}]$  korlátozást kiemelve a modellből, láthatjuk, hogy ez foglalkozik a periodikussággal. Ennek a problémának külön neve van: PEÜP, mely megoldást keres  $v_i$ -kre úgy, hogy a periodikusan ismétlődő eseményeket veszi a periodikus időintervallumon belül. Eseményen ugyan úgy, mint a fentiekben, egy vonatot, megállóját és érkezését vagy indulását értjük. Ezt az időintervallum korlátot vizsgálva ugyan úgy alkalmazhatunk a problémára korlátozás gráfot, de előtte definiáljuk a Periodikus-esemény ütemezési problémát.

**3.2.3. Definíció.** *Adott az eseményeknek egy  $N$  halmaza, egy  $A \subseteq N \times N$  halmaz, a  $T$  ciklusidő valamint a  $[l_{ij}, u_{ij}] \forall (i, j) \in A$  időintervallumok. A PEÜP talál egy  $v_i \in [0, T) i \in N$  periodikus ütemezést, amely kielégíti a*

$$(v_j - v_i) \bmod T \in [l_{ij}, u_{ij}] \quad \forall (i, j) \in A$$

*kifejezést, vagy arra következtet, hogy nem létezik ütemezés.*

Ez egy megvalósítható probléma, ezért az ütemezés periodikussága miatt egy  $i$  esemény akkor lesz ütemezve, ha  $v_i \in [0, T)$  helyet foglal az adott időpillanatban, vagyis az összes  $v_i + zT, z \in \mathbb{Z}$  is. Az intervallum alsó korlátja a PEÜP megkötés miatt a  $0 \leq l_{ij} < T$  lesz, valamint, ha az intervallum szélesebb lenne, mint maga a  $T$ , nem írna elő periodikus korlátozást, ezért a  $0 \leq u_{ij} - l_{ij} < T$  egyenlőtlenséget is ki kell elégítenie. Egy  $(i, j)$  párra akár  $M$  darab megszorítást is tehetünk az időintervallumon belül, viszont ezzel a jelöléssel az egyszerűség kedvéért nem foglalkozunk. Modellünk bevezetése előtt meg kell még határoznunk a célfüggvényünket, ami ebben az esetben az  $F(v, e)$  lesz, ahol  $v$  egy vektor, mely az összes  $v_i$  eseményt jelöli és  $e$  jelöli a  $e_{ij}, \forall (i, j) \in A$  egész átlózókból álló vektort.

Így a modell:

$$\text{Min: } F(v) \quad (3.19)$$

$$l_{ij} \leq v_j - v_i + Te_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i, j) \in A \quad (3.20)$$

$$0 \leq v_i < T \quad \forall i \in N \quad (3.21)$$

$$e_{ij} \in \mathbb{Z} \quad \forall (i, j) \in A \quad (3.22)$$

Ebben a formulában minden  $(v, e)$ , eredmény, valamint  $l_{ij}$  és  $u_{ij}$  is egész lesz.

A probléma megoldására vezessünk be most is egy korlátozás gráfot. Előnyös, ha a gráfunk összefüggő, ha viszont nem az, akkor minden komponensét külön kell vizsgálnunk. Ezen a gráfon jól illusztrálhatóak a PEÜP-ben megadott periodikus megkötések, melyeket elemeznünk kell. Most a gráfunkat úgy kell megadnunk, hogy az adott  $e$  vektornak megfelelő legyen:  $G_e = (N, A_e)$ , ahol  $\forall (i, j) \in A$  megszorításra kettő él lesz. Az egyik megy  $i$ -ből  $j$ -be, a másik  $j$ -ből  $i$ -be és az éleknek adott lesz egy hossza, mely a következők szerint függ a  $e$  vektortól:

$$d_{ij}(e_{ij}) = u_{ij} - Te_{ij} \quad \text{az } (i, j) \in A_e \text{ változó hossza, megfelel } (i, j) \in A \text{-nak} \quad (3.23)$$

$$d_{ji}(e_{ij}) = -l_{ij} - Te_{ij} \quad \text{a } (j, i) \in A_e \text{ változó hossza, megfelel } (i, j) \in A \text{-nak} \quad (3.24)$$

Legyen  $e_{ij} = e_{ji}, \forall (i, j) \in A$ , így mindenhol csak  $d_{ij}(e_{ij})$ -t fogunk használni minden  $(i, j) \in A_e$  élre. Feladatunk az lesz, hogy legrövidebb utat találjunk  $G_e$ -ben az élek hossza ( $d_{ij}(e_{ij})$ ) szerint bizonyos  $s$  kezdő csúcstól az összes többi  $N$ -beli csúcsig.

**3.2.4. Tétel. (Legrövidebb út optimális feltétele)** Minden  $i \in N$  csúcsra legyen  $\pi_i$  az  $s$ -ből  $i$ -be vezető irányított út hossza.  $\pi_i$  a legrövidebb út hossza  $d_{ij}(e_{ij})$  szerint akkor és csak akkor, ha kielégíti a következő feltételt:

$$\pi_j \leq \pi_i + d_{ij}(e_{ij}) \quad \forall (i, j) \in A_e \quad (3.25)$$

Az eredeti jelölés szerint  $A_e$  helyett  $A$ -t használva:

$$\pi_j \leq \pi_i + d_{ij}(e_{ij}) \quad \forall (i, j) \in A$$

$$\pi_i \leq \pi_j + d_{ji}(e_{ij}) \quad \forall (i, j) \in A$$

Majd ez után helyettesítjük  $d_{ij}(e_{ij})$ -t és kihasználjuk, hogy  $e_{ij} = e_{ji}$ , így kapjuk:

$$\begin{aligned}\pi_j &\leq \pi_i + u_{ij} - Te_{ij} \quad \forall (i, j) \in A \\ \pi_i &\leq \pi_j - l_{ij} + Te_{ij} \quad \forall (i, j) \in A\end{aligned}$$

A két összefüggésből következik:

$$l_{ij} \leq \pi_j - \pi_i + Te_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i, j) \in A$$

Ebből következik, hogy a  $G = (N, A, l, u)$  és a  $T$  ciklusidő megegyezik a legrövidebb út problémával, azaz  $G_e = (N, A_e)$  a  $d_{ij}(e_{ij})$  élhossz változóval.

Megvalósítható távolságú címkéket akkor és csak akkor lehet a gráf pontjaihoz rendelni, ha nincs benne negatív irányított kör (élek hosszának összege nem negatív).  $G_e$ -ben az élek nagysága az  $e_{ij}$  egész változóktól függ, ezért a PEÜP megvalósítása megfelel a  $e$  vektor létezésének, vagyis a  $G_e$ -ben nincsenek negatív irányított körök a  $d_{ij}(e_{ij})$  vonatkozásában. Ez a megközelítés vezet a következő tételhez, mely a PEÜP és a legrövidebb utak közötti kapcsolatot mutatja be. Előtte azonban néhány új jelölést kell bevezetnünk.

Legyen  $C$  egy irányítatlan kör  $G$ -ben,  $C^+$  az előre mutató élek halmaza, azaz  $C^+ = \{(i, j), i < j, (i, j) \in C\}$  és  $C^-$  a hátra mutató élek halmaza, azaz  $C^- = \{(i, j), i > j, (i, j) \in C\}$ .

**3.2.5. Tétel.** *A  $G = (N, A, l, u)$  gráffal és a  $T$  ciklusidő által megadott PEÜP akkor és csak akkor megvalósítható, ha létezik egy  $e$  egész vektor úgy, hogy minden  $C \in G$  körre teljesül*

$$a_C \leq \sum_{(i,j) \in C^+} e_{ij} - \sum_{(i,j) \in C^-} e_{ij} \leq b_C, \quad (3.26)$$

ahol  $a_C$  és  $b_C$ :

$$\begin{aligned}a_C &= \left[ \frac{1}{T} \left( \sum_{(i,j) \in C^+} l_{ij} - \sum_{(i,j) \in C^-} u_{ij} \right) \right] \\ b_C &= \left[ \frac{1}{T} \left( \sum_{(i,j) \in C^+} u_{ij} - \sum_{(i,j) \in C^-} l_{ij} \right) \right]\end{aligned}$$

**Bizonyítás.** Tekintsük a fenti  $G_e = (N, A_e)$  gráfot a  $d_{ij}(e_{ij})$  élhosszakkal. Legyen  $\pi_i$  az  $i$  csúcs legrövidebb út címkéje. Az előzőekben már említettük, hogy a  $\pi_i$  változónak akkor

és csak akkor létezik megvalósítható értéke, ha nincs negatív kör a  $G$  gráfban, figyelembe véve a  $d_{ij}(e_{ij})$  élhosszokat. Így a PEÜP akkor és csak akkor lesz megoldható, ha

$$\sum_{(i,j) \in C} d_{ij}(e_{ij}) \geq 0 \quad \forall C \in G_e \text{ körre.} \quad (3.27)$$

Vegyük az irányított körből álló  $G_e$  gráfot az  $(i, j)$  és fordítottja, azaz a  $(j, i)$  éleket, melyek hosszát az előzőekben definiáltuk, így érvényes lesz a következő:

$$d_{ij}(e_{ij}) + d_{ji}(e_{ij}) = u_{ij} - Te_{ij} - l_{ij} + Te_{ij} = u_{ij} - l_{ij} \geq 0.$$

Tehát ezek a körök kielégítik az előző feltételt.

Ezt követően átírjuk a szükséges és elégséges feltételt a (3.27) a  $G$  gráf körei szerint, valamint az  $l_{ij}$  és  $u_{ij}$  élek értékeit. Minden  $G$ -beli él két élet eredményez a  $G_e$  gráfban, így minden  $G$ -ben lévő kör két irányított kört hoz létre a  $G_e$ -ben. Ezek után a  $C \in G$  körökre adott:

$$\begin{cases} \sum_{(i,j) \in C^+} d_{ij}(e_{ij}) + \sum_{(i,j) \in C^-} d_{ji}(e_{ij}) \geq 0 \\ \sum_{(i,j) \in C^+} d_{ji}(e_{ij}) + \sum_{(i,j) \in C^-} d_{ij}(e_{ij}) \geq 0 \end{cases} \quad \forall C \in G \text{ körre.}$$

$d_{ij}e(ij)$ -t helyettesítve:

$$\begin{cases} \sum_{(i,j) \in C^+} (u_{ij} - Te_{ij}) + \sum_{(i,j) \in C^-} (-l_{ij} + Te_{ij}) \geq 0 \\ \sum_{(i,j) \in C^+} (-l_{ij} + Te_{ij}) + \sum_{(i,j) \in C^-} (u_{ij} - Te_{ij}) \geq 0 \end{cases} \quad \forall C \in G \text{ körre.}$$

Ami megegyezik a következővel:

$$\begin{cases} \sum_{(i,j) \in C^+} e_{ij} + \sum_{(i,j) \in C^-} e_{ij} \leq \left( \frac{1}{T} \left( \sum_{(i,j) \in C^+} u_{ij} - \sum_{(i,j) \in C^-} l_{ij} \right) \right) \\ \sum_{(i,j) \in C^+} e_{ij} + \sum_{(i,j) \in C^-} e_{ij} \geq \left( \frac{1}{T} \left( \sum_{(i,j) \in C^+} l_{ij} - \sum_{(i,j) \in C^-} u_{ij} \right) \right) \end{cases} \quad \forall C \in G \text{ körre.}$$

□

Az  $e_{ij}$  változók bevonásával a kifejezés jobb oldalát kerekíteni lehet. Az első kifejezést lefelé kerekítve kapjuk  $b_C$ -t és a második kifejezést felfelé kerekítve kapjuk  $a_C$ -t. A fentiekben, minden lépés a (3.27)-es kifejezés után vagy egy equivalencia reláció vagy egy csere, ezért a szükséges és elégséges állítás a tételben bizonyítva lett.

### 3.2.6. Megvalósítás

Ha ciklikus menetrend elkészítésére esik a választás, számos esetben a PEÜP-et használják alapul. Az korlátozások kiterjesztésével készítettek egy algoritmust, mely megoldja

a problémát és a holland vasúttársaság való életben is elfogadta. Előfordult olyan is, hogy lokális keresési technikával a  $e_{ij}$  változót rögzítve megvalósítható megoldást találtak. Több, mint 250 vonattal (egy órás futási idővel a holland menetrendet nézve) teszteltek, amely általában megoldható lett reális időn belül. A holland vasúttársaságnál maradvá, ugyanezen modellt alapul véve, de különböző célfüggvényeket alkalmazva, mint az utasok menetidejének minimalizálása, a menetrend nagyságának maximalizálása vagy az enyhébb korlátoknál a büntetéseit minimalizálva értek el eredményeket.

### 3.3. Aciklikus menetrend

Már korábban említettük, hogy egy ciklikus menetrendnél egy aciklikus változat költség-hatékonyabb lehet, valamint a menetrend készítői jobban egymáshoz tudják igazítani a csatlakozásokat.

Természetesen többféle megvalósítás és modell is létezik a problémára, mi az időt diszkrétizáljuk és a gráfoknál maradvá egy tér-idő gráfot fogunk használni,  $G = (D, A)$  jelöléssel. Ebben az egész értékű lineáris programozási modellben olyan vasúti pályákat veszünk, melyeken a vonatok mindkét irányba közlekedhetnek, és így az egész hálózattal foglalkozni fogunk. A modell ismertetése előtt azonban új jelöléseket kell bevezetnünk:

- $V$ : a vonatok halmaza
- $B$ : megállók a vonalon
- $D$ : csúcsok uniójának halmaza; azt az időpillanatot jelöli, mikor a vonat megérkezik és elindulni az állomásról (érkező és induló csúcs)
- $\sigma$ : mesterséges forráspon
- $\tau$ : mesterséges nyelő
- $A$ : az élek halmaza  $\forall v \in V$ -re
- $G = (D, A)$ : irányított aciklikus multigráf
- $p_a$ : az az él, amely a profitot jelöli
- $\delta_v^+(b)$ : az  $A^v$ -ben lévő élek halmaza, melyek elhagyják a  $b$  állomást
- $\delta_v^-(b)$ : az  $A^v$ -ben lévő élek halmaza, melyek a  $b$  állomásra érkezőnek
- $C^{mind}$ : pálya kapacitás megszorítás következtében előforduló páros, összeférhetetlen élek maximális részhalmazainak családja, ahol  $C \in C^{mind}$  élek részhalmaza, melyekben minden megengedett megoldásban egy vonat mozoghat, azaz, ha két, eltérő vonat egy vonalon megy és egymáshoz túl közel vannak, a két él kizárja egymást

A csúcsok halmaza  $D = \{\sigma, \tau\} \cup (U^2 \cup U^3 \cup \dots \cup U^b) \cup (W^1 \cup W^2 \cup \dots \cup W^{b-1})$ , ahol  $U^i : i \in B \setminus \{1\}$  érkezési pontok és  $W^i : i \in B \setminus \{b\}$  indulási pontokat jelöl. Az élek halmaza,  $A$ , részekre fog bomlani a következő képpen:  $A^1, A^2, \dots, A^{|V|} \forall v \in V$ . Így minden  $v \in V$  vonatra  $A^v$  tartalmaz:

- induló élek halmaza:  $\sigma$  és az első megálló közötti élek, azaz megfelel a  $v$  vonat indulási idejének
- állomás élek halmaza: a  $v$  vonat megállási ideje minden állomásnál, melyet érint
- szegmens élek halmaza: a  $v$  vonat menetidejét jelöli minden általa érintett állomás között
- végző élek halmaza: az utolsó állomás és a  $\tau$  végpont közötti élek, a  $v$  vonat utolsó állomásra való érkezési idejének felel meg

Így a gráfunkban  $\sigma$ -tól  $\tau$ -ig minden  $v$  vonatnak megkapjuk a menetrendjét. Minden  $v \in V$  és  $a \in A^v$  élre lesz egy bináris változónk,  $\chi_a$ , mely akkor és csak akkor egyenlő 1-gyel, ha az  $a$  él egy optimális megoldásban ki lett választva.

Amint már említettük, az aciklikus menetrend egyik nagy előnye, hogy a költségeket is figyelembe veszi. Ezért minden  $a \in A$  élet egy profittal azonosítunk, ezt jelöljük  $p_a$ -val. Az élek profitja vigyáz arra, hogy az eredeti profitok a megfelelő vonatra legyenek kijelölve (ezek értékét az üzemeltető adja meg). Figyelembe kell vennünk bizonyos mértékű büntetéseket is, amik a lehetséges menetrend változásoktól függnék. Tehát minden induló élnek lesz egy profitja, amely megegyezik a vonat eredeti profitjával, minusz a büntetés a lehetséges eltolás szerint. Minden állomás élnek negatív profitja lesz, amely megegyezik a lehetséges nyújtásokkal. A többi él profitja egyenlő nullával. Továbbá, a vonat törlésre kerül, ha a vonat útjának globális profitja nullává vagy negatívvá válik.

### 3.3.1. Modell

$$\max \sum_{v \in V} \sum_{a \in A^v} p_a \chi_a \quad (3.28)$$

$$\sum_{a \in \delta_v^+(\sigma)} \chi_a \leq 1 \quad \forall v \in V \quad (3.29)$$

$$\sum_{a \in \delta_v^-(\vartheta)} \chi_a = \sum_{a \in \delta_v^+(\vartheta)} \chi_a \quad \forall v \in V, \vartheta \in D \setminus \{\sigma, \tau\} \quad (3.30)$$

$$\sum_{a \in C} \chi_a \leq 1 \quad \forall C \in C^{mind} \quad (3.31)$$

$$\chi_a \in \{0, 1\} \quad \forall a \in A \quad (3.32)$$

A fő cél ebben az esetben, hogy a profitot maximalizáljuk, ezért a (3.28). célfüggvény is ezt mutatja. Minden út az eredményben ez élnek feleltethető meg profittal. A következő megszorításban láthatjuk, hogy legfeljebb egy él van megfeleltetve minden egyes vonatnak, miután az induló pontot ( $\sigma$ ) elhagyja. Egy adott vonat belép és elhagy minden érkező vagy induló pontot, ennek vannak megfeleltetve élek, melyek összege megegyezik, ezt mutatja a (3.30). egyenlőség. Így a kiválasztott élek halmaza minden vonatra vagy üres lesz vagy egy útnak felel meg a  $\sigma$  forrásponttól a  $\tau$  nyelőig. A következő korlátozás pedig megtiltja, hogy két összeférhetetlen él egyszerre legyen kiválasztva, tehát egy biztonsági klikkből mindig legfeljebb egy lehet.

A modellnek létezik átírása Lagrange relaxáció szerint, ahol a a végényok kapacitásának megszorítására egy változót használnak, melyet a  $G$  gráf pontjainak feleltetnek meg. Ez azért előnyös, mert egy olyan problémához vezet, ahol az  $\chi$  változók profitja nem változik, mivel a Lagrange büntetések a gráf pontjaival asszociáljuk. Ezeket a büntetéseket így könnyebb kezelni, mintha a a büntetések az éleknek lennének megfeleltetve. Ezt követően hasonlóan jár el, mint az előző modell.

### 3.3.2. Megvalósítás

Ezzel a problémával többféle céllal is foglalkoztak. Volt, hogy a profit maximalizálása mellett a sínkapacitások korlátozásait is figyelembe vették. Így ez a megközelítés alkalmas arra is, hogy a vonat üzemeltetői ajánlatot tegyenek vonalakra, hisz látják, mekkora

nyereségre tehetnek szert. A modell egy bináris változó segítségével fejezte ki, hogy ez az érték akkor és csak akkor 1, ha egy vonat az adott időpillanatban az adott blokkban van. A cél pedig az volt, hogy a nyereséget maximalizálja a menetrendben. Erre a problémára két különböző egész értékű lineáris programozási modellt készítettek, hogy az üzemeltetők számára konfliktusmentes vonat útvonalakat találjanak a vasúti hálózatban, majd be is mutatták az eredményeket a német vasúti hálózaton, Hannover–Fulda–Kassel térségében. A modell kiterjesztésével és valós korlátokkal bővítve, úgy, hogy egy megfelelő Lagrange szorzót találjanak. Ezt a megközelítést a valóságban is tesztelték az olasz vasúthálózaton (Rete Ferroviaria Italiana). Az utasok kényelmét javítva a szolgáltatások minőségén változtatva célul, valamint a várakozási időket és késéseket figyelembe véve módosították a modellt, melyet a belga vasúthálózat egy részén próbáltak ki. Természetesen számtalan egyéb variációja létezik a modellnek, hol az üzemeltetők, hol az utasok érdekeit tartva szem előtt.



## 4. fejezet

# Összefoglalás

Mindegyik modell zárásaként megemlítettük, hogy megoldása NP-nehéz optimalizálási problémához vezet. Mivel NP-nehéz feladatokra nem ismert polinomiális idejű megoldó eljárás, ezért a gyakorlatban jól teljesítő, egzakt vagy heurisztikus eljárásokat adnak ezekre a problémákra.

Mint, ahogy az eredmények is mutatják, a való életben is kipróbált esetek vannak és alkalmaznak is. Hazánkban a legösszetettebb közlekedés Budapesten található, ahol nem csak buszokat, hanem villamosokat, metrókat, stb. is figyelembe kell venni az összehangolásnál. Minden vonal menetrendjénél eltérés van a hétköznapi és a hétvégi járatok gyakorisága között, valamint a különböző járatok gyakorisága között is. Többségében megfigyelhető, hogy egy perióduson belül egységes időközönként érkeznek a buszok az adott állomásra. Például a 7-es busz a Blaha Lujza téren 10 és 12 óra között 10 percenként jár, azaz 03, 13, stb., így ezt megjegyezni is könnyebb. A Blaha Lujza téri megállónál maradva, ahol több, mint 10 különböző busz áll meg, különösen tekintettel kell lenni a torlódásokra és az átszállásokra is, ami a reggeli csúcsidőben akár zavarokhoz vezethet.

Magyarország vasúti hálózata viszonylag elavult, sok helyen van sebességkorlátozás, egyszerű pálya és a vonatok is idősnek számítanak. Ezek mind a menetidő rovására mennek, amely gyakran megnehezíti az utasok dolgát. Ami viszont az utazóknak kedvez az az, hogy a vonalak többsége bizonyos ciklus szerint közlekedik egész nap -ezért könnyen megjegyezhető-, nem téve különbséget hétköznapi vagy hétvége között, csúcsidő és holtidő között. Csatlakozások előfordulhatnak úgy is, hogy az utasoknak át kell szállniuk, de úgy is, hogy egy másik vonalhoz kapcsolják hozzá a vonatot. Az első esetben gyakori, hogy az

egyik vonat nem várja meg a másikat, elkerülve a késést, viszont összekapcsoláskor akár több órás késések is lehetnek több vonalon is.

# Irodalomjegyzék

- [1] Avishai Ceder, *Public transit planning and operation*, Elsevier Ltd., 2007
- [2] Omar J. Ibarra-Rojas, P. Fouilhoux, S. Kedad-Sidhoum, Yasmin A. Rios-Solis, *Valid Inequalities for the Synchronization Bus Timetabling Problem*, European Journal of Operational Research, 2012
- [3] Omar J. Ibarra-Rojas, Yasmin A. Rios-Solis, *Synchronization of bus timetabling*, Transportation Research Part B, 599-614., 2012
- [4] Omar J. Ibarra-Rojas, Yasmin A. Rios-Solis, Fernando López-Irarragorri, *Multiperiod Synchronization Bus Timetabling*, INFORMS, Transportation Science 2014
- [5] Valentina Cacchiani, Paolo Toth *Nominal and robust train timetabling problems*, European Journal of Operational Research, 219. kötet, 3. probléma, 727-737., 2011
- [6] Leon W.P. Peeters *Cyclic Railway Timetable Optimization*, ERIM Ph.D. Series Research in Management, 2003
- [7] Leo Kroon, Dennis Huisman, Gábor Maróti *Railway Timetabling from an Operations Research Perspective*, Econometric Institute Report EI2007-22, 2007