Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Végtelen sorokkal kapcsolatos tételek és ellenpéldák

Szakdolgozat

Készítette:
Csala Mátyás
Matematika Bsc
Matematikai elemző szakirány

Témavezető:
Gémes Margit
Műszaki gazdasági tanár
Analízis Tanszék

Budapest
2016

1. Bevezetés

Szakdolgozatom a végtelen sorok elméletével kapcsolatos. Ez a téma már nagyon régóta foglalkoztatja a tudósokat, gondolkodókat, matematikusokat, hiszen tudjuk, hogy Zénón paradoxonjai közt is találunk olyan feladatokat, melyek a végtelen sorok elméletére vezethetők vissza.

Mivel a téma rendkívül szerteágazó, s rengeteg ismeret áll rendelkezésre, ezért annak csak egy kisebb szeletével foglalkozom. Először is áttekintem azokat a tételeket, definíciókat, melyeket a későbbiekben vizsgálni fogok. Ezek szemléltetésére általában több példát igyekeztem megoldani.

A későbbiekben pedig érdekesebb, nehezebb problémák és feladatok megoldásával foglalkozom, természetesen a korábbbi tételekhez szorosan kapcsolódva. Főként e tételek feltételeit vizsgálom, hogy mit jelenthet azok teljesülése, vagy egy–egy feltétel elhagyása.

2. Alapvető definíciók, tételek

2.1. Definíció. [1] A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor *részletösszegein* az $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ $(n = 1, 2, \dots)$ számokat értjük. Ha a részletösszegekből képzett (s_n) sorozat konvergens és a határértéke A, akkor azt mondjuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *végtelen sor konvergens és az összege* A.

Ha a részletösszegekből képzett (s_n) sorozat divergens, akkor azt mondjuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *végtelen sor divergens.*

Ha $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ (illetve $-\infty$), akkor azt mondjuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *végtelen sor összege* ∞ (illetve $-\infty$). Ezt úgy jelöljük, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ (illetve $-\infty$).

2.2. Definíció. [1] A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sort *abszolút konvergensnek* nevezzük, ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sor konvergens.

2.3. Definíció. [1] A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sort *feltételesen konvergensnek* nevezzük, ha a sor konvergens, viszont nem abszolút konvergens.

2.4. Tétel. (Cauchy-kritérium) *[1] A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor akkor és csak akkor konvergens, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik egy N index úgy, hogy minden $N \le n < m$-re*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_m| < \varepsilon.$$

2.5. Tétel. *[1] Ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor konvergens és az összege A, akkor minden $c \in \mathbb{R}$-re a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ sor is konvergens, és az összege $c \cdot A$.*

Ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ végtelen sorok konvergensek és összegük A, illetve B, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ is konvergens, és az összeg pedig $A + B$.

3. Tételek, konvergenciakritériumok

3.1. Majoráns és minoráns elv

3.1. Tétel. (Majorizációs elv) . *[1]*
Tegyük fel, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *és* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *végtelen sorok tagjaira minden elég nagy* n *esetén fenáll* $|a_n| \leq b_n$*. Ha a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *sor konvergens, akkor* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *abszolút konvergens.*

3.2. Példa. [1]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$$

Oldjuk meg a feladatot majorizációs elv segítségével. Ehhez ellenőriznünk kell, hogy teljesülnek-e a tételben megfogalmazott feltételek. Most legyen $a_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$ és $b_n = \frac{1}{n^2}$. Tudjuk, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens. Most már csak azt kell tudnunk, hogy fenáll-e minden elég nagy n-re a következő:

$$\left| \frac{1}{\binom{2n}{n}} \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Kevesebb a dolgunk, ha a reciprokát tekintjük, valamint az abszolútérték jelet is elhagyhatjuk, mivel n nemnegatív egész:

$$\frac{(2n)!}{n! \cdot (2n-n)!} = \frac{2n \cdot (2n-1) \cdot \ldots \cdot (n+1) \cdot n!}{n! \cdot n!}.$$

Ha egyszerűsítünk $n!$-sal és 2-vel, akkor a következő becsléssel közelebb juthatunk a megoldáshoz:

$$\frac{2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2) \cdot \ldots \cdot (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n} > (2n^2 - n) \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 > n^2.$$

Ez teljesül minden elég nagy n-re, hiszen ez igaz, ha $n > 1$:

$$2n^2 - n > n^2$$
$$n^2 > n$$

A tétel feltételei tehát teljesülnek, ebből következik, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$ végtelen sor abszolút konvergens.

A majoráns kritérium elvezet bennünket egy újabb kritériumhoz, amelynek segítségével végtelen sorok divergenciáját tudjuk belátni.

[1]Laczkovich–T.Sós Analízis II. 17.44./e feladat

3.3. Tétel. (Minoráns-kritérium) . *[1]*
Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *és a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *nemnegatív végtelen sorok tagjaira minden elég nagy* n *esetén fenáll* $a_n \leq b_n$*. Ha a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor divergens, akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *sor is divergens.*

3.4. Példa. [2]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n \cdot (n+1)}}$$

Először a tételben meghatározott feltételeket kell megteremtenünk. Mivel ezúttal az az előzetes várakozásunk, hogy a sor divergens lesz, megpróbálunk egy divergens alsó becslést találni a $b_n = \frac{1}{\sqrt{n \cdot (n+1)}}$ végtelen sorra. Ehhez először a következő átalakítást intézzük:

$$\frac{1}{\sqrt{n \cdot (n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

Tudjuk, hogy $n \leq 3n^2$ minden elég nagy n-re, ezért érvényes lesz a következő becslés:

$$\frac{1}{2n} = \frac{1}{\sqrt{4n^2}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+3n^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

Azt látjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ végtelen sor divergens, mert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, hiszen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ végtelen sor divergens. Mindezekből már következik, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n \cdot (n+1)}}$ végtelen sor is divergens a minoráns kritérium miatt.

3.2. Gyökkritérium és hányadoskritérium

3.5. Tétel. (Gyökkritérium) . *[1]*

(i) Ha van olyan $q < 1$ *szám, amelyre* $\sqrt[n]{|a_n|} < q$ *teljesül minden elég nagy* n *esetén, akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor abszolút konvergens.*

(ii) Ha $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$*, akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor abszolút konvergens.*

(iii) Ha a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$*, akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergens. Ugyanis ekkor minden elég nagy* n*-re az* $|a_n|>1$*.*

[2] Laczkovich–T.Sós Analízis II. 17.42./b feladat

3.6. Példa. [3]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{3^n - 2^n}$$

A példa megoldásához a gyökkritérium (ii) részét fogjuk használni:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n^{10}}{3^n - 2^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^{10}}}{\sqrt[n]{3^n - 2^n}}$$

Tudjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{10}} = 1$ és $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n - 2^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n} = 3$. Mivel könnyen és többféleképpen belátható, hogy a $3^n > 2^n$ minden elég nagy n-re, a fentiek szerint számíthatjuk a határértéket. Az alábbiakban az egyik legegyszerűbb módon bizonyítjuk is. Ehhez a sorozatokra vonatkozó csendőr-elvet használjunk a megfelelő becslések megtalálása után.

$$3 \leftarrow 3 \cdot \sqrt[n]{1 - \frac{2}{3}} \leq 3 \cdot \sqrt[n]{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \sqrt[n]{3^n - 2^n} = 3 \cdot \sqrt[n]{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n} \leq 3 \cdot \sqrt[n]{1 + 0} \to 3.$$

Ezt felhasználva már nincs nehéz dolgunk:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^{10}}}{\sqrt[n]{3^n - 2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^{10}}}{\sqrt[n]{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^{10}}}{3} = \frac{1}{3} < 1.$$

Így teljesül a gyökkritérium (ii) feltétele, ezért a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{3^n - 2^n}$ sor abszolút konvergens.

Tekintsünk egy bonyolultabbnak tűnő példát is:

3.7. Példa.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2 + \frac{1}{n})^n}$$

Ha felismerjük, hogy a gyökkritériumot kell használnunk, akkor valójában nincs is nehéz dolgunk:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{(2 + \frac{1}{n})^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{(2 + \frac{1}{n})^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{(2 + \frac{1}{n})} = \frac{1}{2} < 1$$

Így a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2 + \frac{1}{n})^n}$ sor abszolút konvergens lesz.

A gyökkritériumot használhatjuk végtelen sorok divergenciájának igazolására is.

Lássunk erre egy példát:

[3] Laczkovich–T.Sós Analízis II. 17.42./a feladat

3.8. Példa.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^n}}{\sqrt[n]{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n^2}} = \infty > 1$$

Ezzel beláttuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n^2}$ végtelen sor divergens.

3.9. Tétel. (Hányadoskritérium) . *[1] Tegyük fel, hogy $a_n \neq 0$, ha n elég nagy.*

(i) Ha van olyan $q < 1$ szám, amelyre $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$ teljesül minden elég nagy n esetén, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens.

(ii) Ha $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens.

(iii) Ha $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergens, mert $|a_{n+1}| > |a_n|$ minden elég nagy n-re, és így $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

3.10. Példa. [4]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$$

Nézzük meg, mit jelent most a hányadoskritérium feltétele:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^{10}}{10^{n+1}}}{\frac{n^{10}}{10^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^{10} \cdot 10^n}{n^{10} \cdot 10^{n+1}} \right|$$

A egyszerűsítés után a következőket kapjuk:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^{10}}{n^{10} \cdot 10} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^{10}}{n^{10}}}{10} \right| = \frac{1}{10} < 1$$

A fenti gondolatmenethez hozzátartozik, hogy belássuk $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{10}}{n^{10}} = 1$. Szerencsére ezt könnyen megtehetjük:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{10}}{n^{10}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{10} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} = 1$$

A tétel (ii) részét használhatjuk, amiből következik, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$ sor abszolút konvergens.

Nézzünk meg egy érdekesebb példát a hányadoskritérium alkalmazására.

[4]Laczkovich–T.Sós Analízis II. 17.44./d feladat

3.11. Példa. [5]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$$

Ismét a tétel (ii) részét használjuk:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)!^2}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)! \cdot (n+1)! \cdot 2^{n^2}}{2^{n^2} \cdot 2^{2n} \cdot 2 \cdot n! \cdot n!} \right|$$

Elvégezve az egyszerűsítéseket, már csak egy jóval könnyebb határérték-számítás marad:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2}{2 \cdot 2^{2n}} \right| = 0 < 1.$$

Ezzel teljesül is a tétel (ii) feltétele, így beláttuk, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ abszolút konvergens.

A hányadoskritérium, akárcsak a gyökritérium, szintén hasznos lehet, ha egy végtelen sorról be szeretnénk látni, hogy divergens.

Nézzünk meg egy példát erre az esetre is:

3.12. Példa. [6]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{n! \cdot (n+1)! \cdot (n+2)!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(3n+3)!}{(n+1)! \cdot (n+2)! \cdot (n+3)!}}{\frac{(3n)!}{n! \cdot (n+1)! \cdot (n+2)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(3n+3)! \cdot n! \cdot (n+1)! \cdot (n+2)!}{(3n)! \cdot (n+1)! \cdot (n+2)! \cdot (n+3)!} \right|$$

Egyszerűsíthetünk, hiszen az $(n+1)!$ és az $(n+2)!$ szerepel a nevezőben és a számlálóban is:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(3n+3)! \cdot n!}{(n+3)! \cdot (3n)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(3n+3) \cdot (3n+2) \cdot (3n+1) \cdot (3n)! \cdot n!}{(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n! \cdot (3n)!} \right|$$

Ezúttal is egyszerűsíthetünk a kifejezésen, méghozzá $(3n)!$-sal és $n!$-sal.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{3(n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+1)}{(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3 \cdot (9n^2+9n+2)}{n^2+5n+6} \right|$$

[5] Laczkovich–T.Sós Analízis II. 17.44./b feladat

[6] Thomas-féle Kalkulus 3. 11.5. Feladatok/38. feladat

Láthatjuk, hogy az n^2 a leggyorsabban növekvő tag, amennyiben $n \to \infty$, ezért célszerű ezzel elosztani a számlálót és a nevezőt is a határték kiszámításához.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{27n^2}{n^2} + \frac{27n}{n^2} + \frac{2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{5n}{n^2} + \frac{6}{n^2}} \right| = 27 > 1.$$

A fentiekből következik, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{n!\cdot(n+1)!\cdot(n+2)!}$ végtelen sor divergens. Hasznosnak bizonyult a hányadoskritérium, hiszen más módszerekkel jóval nehezebb belátni a fenti sor divergenciáját.

A gyökkritérium erősebb, mint a hányadoskritérium, mert ha egy sorra teljesül a hányadoskritérium feltétele, akkor a sor a gyökkritérium feltételét is automatikusan kielégíti. Bizonyos esetekben azonban könnyebb számolni a hányadoskritériummal. Most nézzünk példát, ahol a gyökkritérium alkalmazható, de a hányadoskritérium nem.

3.13. Példa. *Tekintsük a következő végtelen sort!*

$$a_n = \begin{cases} \frac{n^2}{5^n}, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ \frac{1}{5^n}, & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases}$$

A kérdés persze a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergenciatulajdonságaira vonatkozik. Először a hányadoskritériummal próbáljuk meg igazolni a sor konvergenciáját:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{\frac{1}{5^{n+1}}}{\frac{n^2}{5^n}} = \frac{1}{5\cdot n^2}, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ \frac{\frac{(n+1)^2}{5^{n+1}}}{\frac{1}{5^n}} = \frac{(n+1)^2}{5}, & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases}$$

Rögtön látszik, hogy az $\frac{(n+1)^2}{5}$ határértéke végtelen, ha az $n \to \infty$, és ebből persze következik, hogy a $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ feltétele nem lesz igaz a hányadoskritériumnak, azaz nem tudjuk alkalmazni a tételt. Másodjára próbálkozzunk meg a gyökkritériumot használni:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{5^n}} = \frac{1}{5} < 1, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{5^n}} = \frac{1}{5} < 1, & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases}$$

Teljesül a gyökkritérium feltétele, mivel $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$. Megállapíthatjuk tehát, hogy a sor konvergens.

3.3. Integrálkritérium

3.14. Tétel. (Integrálkritérium) . *[1]*

Legyen $a \in \mathbb{N}^+$, és legyen f monoton csökkenő és nemnegatív függvény az $[a, \infty)$ félegyenesen. A $\sum\limits_{n=a}^{\infty} f(n)$ végtelen sor akkor és csak akkor konvergens, ha az $\int_a^\infty f(x)dx$ improprius integrál konvergens.

3.15. Példa.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^c$$

A következőkben tehát $\int_1^\infty 1/n^c dx$ improprius integrált vizsgáljuk meg. Láthatjuk, hogy ez akkor és csak akkor konvergens, ha $c > 1$, pontosabban:

$$\lim_{y\to\infty} 1/n^c = \begin{cases} \frac{1}{1-c}, & \text{ha } c > 1 \\ \infty, & \text{ha } c \leq 1. \end{cases}$$

Valóban, a $c \neq 1$ esetén:

$$\int_1^\infty 1/x^c dx = \lim_{y\to\infty} \int_1^y 1/x^c dx = \lim_{y\to\infty} \left[\frac{1}{1-c} \cdot x^{1-c}\right]_1^y = \lim_{y\to\infty} \left[\frac{1}{c-1} + \frac{1}{1-c} \cdot y^{1-c}\right]$$

Azt pedig tudjuk hogy:

$$\lim_{x\to\infty} x^{1-c} = \begin{cases} 0, & \text{ha } c > 1 \\ \infty, & \text{ha } c < 1. \end{cases}$$

A $c = 1$ esetben is igaz:

$$\int_1^\infty 1/x dx = \lim_{y\to\infty} \int_1^y 1/x dx = \lim_{y\to\infty} [\log x]_1^y = \lim_{y\to\infty} \log y = \infty$$

Ezzel beláttuk, hogy a $\sum_{n=1}^\infty 1/n^c$ sor konvergens, ha $c > 1$.

3.16. Példa. [7] *Legyen p pozitív állandó. Igazoljuk, hogy*

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \cdot (\ln x)^p} dx$$

pontosan akkor konvergens, ha a $p > 1$! Ennek ismeretében mit mondhatunk a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln n)^p}$$

sorról?

[7] Thomas-féle Kalkulus 3. 11.3. Feladatok/39. feladat

Először nézzük meg, hogyan néz ki a fenti improprius integrál, ha $p \neq 1$.

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \cdot (\ln x)^p} dx = \lim_{y\to\infty} \int_2^y \frac{1}{x \cdot (\ln x)^p} dx = \lim_{y\to\infty} \left[\frac{1}{1-p} \cdot (\ln x)^{1-p} \right]_2^y$$

Helyettesítsünk be és számítsuk ki a határértéket:

$$\lim_{y\to\infty} \left[\frac{1}{1-p} \cdot (\ln y)^{1-p} - \frac{1}{1-p} \cdot (\ln 2)^{1-p} \right]_2^y =$$
$$= \lim_{y\to\infty} \left[\frac{1}{1-p} \cdot (\ln y)^{1-p} + \frac{1}{p-1} \cdot (\ln 2)^{1-p} \right]$$

Természetesen $\frac{1}{p-1} \cdot (\ln 2)^{1-p}$ egy konstans minden p rögzített számra. Így a következő hatáérték érdekes számunkra:

$$\lim_{y\to\infty} \frac{1}{1-p} \cdot (\ln y)^{1-p} = \begin{cases} 0, & \text{ha } p > 1 \\ \infty, & \text{ha } p < 1. \end{cases}$$

Összegezve tehát ez lesz a határérték:

$$\lim_{y\to\infty} \left[\frac{1}{1-p} \cdot (\ln y)^{1-p} + \frac{1}{p-1} \cdot (\ln 2)^{1-p} \right] = \begin{cases} \frac{1}{p-1} \cdot (\ln 2)^{1-p}, & \text{ha } p > 1 \\ \infty, & \text{ha } p < 1. \end{cases}$$

Ez egyúttal azt is jelenti, hogy az improprius integrál konvergens, ha $p > 1$, és divergens, ha a $p < 1$. Így már csak egy eset maradt, amikor a $p = 1$. Nézzük meg ezt is.

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \cdot (\ln x)} dx = \lim_{y\to\infty} \int_2^y \frac{1}{x \cdot (\ln x)} = \lim_{y\to\infty} [\ln \ln x]_2^y =$$
$$\lim_{y\to\infty} [\ln \ln x - \ln \ln 2] = \infty$$

tehát az integrál divergens lesz $p = 1$ esetben is.

Tekintsük most a $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln n)^p}$ végtelen sort. Láthatjuk, hogy erre a sorra teljesülnek az integrálkritérium feltételei, így a tétel szerint pontosan akkor lesz konvergens, amikor a fenti improprius integrál. A $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln n)^p}$ végtelen sor tehát divergens, ha $p \leq 1$ és konvergens, ha $p > 1$.

3.4. Dirichlet, Abel és Leibniz kritériumai

3.17. Tétel. (Dirichlet-kritérium) . *[1] Tegyük fel, hogy*

(i) az (a_n) sorozat monoton csökkenő és 0-hoz tart, és

(ii) a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sor részletösszegeinek sorozata korlátos.

Ekkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ sor konvergens.

A Dirichlet-kritérium speciális esetként tartalmazza a Leibniz-kritériumot (legyen $b_n = (-1)^{n-1}$).

Bizonyítás. Legyen a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sor n-edik részletösszege s_n, és tegyük fel, hogy $|s_n| \leq K$ minden n-re. Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Mivel $a_n \to 0$, ezért választhatunk olyan N indexet, hogy $|a_n| < \frac{\varepsilon}{K}$ teljesüljön minden $n \geq N$-re. A folytatáshoz a következő egyenlőtlenséget is felhasználjuk:

3.18. Tétel. (Abel-egyenlőtlenség) *[1] Ha $x_1 \geq x_2 \geq \dots x_k \geq 0$ és $z \leq y_1 + \ldots + y_l \leq Z$ minden $l = 1, \ldots, k$-ra, akkor*

$$x_1 \cdot z \leq x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n \leq x_1 \cdot Z.$$

Folytatva a Diriclhet-kritérium bizonyítását: ha $N \leq n \leq m$, akkor az Abel-egyenlőtlenség szerint:

$$-\varepsilon < (-K) \cdot a_n \leq a_n b_n + \ldots + a_m b_m \leq K \cdot a_n < \varepsilon,$$

tehát $|a_n b_n + \ldots + a_m b_m| < \varepsilon$. Ezzel beláttuk, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ sor kielégíti a Cauchy-kritériumot, azaz konvergens. □

3.19. Példa. *Nézzük a következő végtelen sort:* $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \ldots$ *!*

Használjuk a Dirichlet-kritériumot a példa megoldására! Méghozzá úgy, hogy az $a_n = \frac{1}{n}$. Ekkor a teljesül a tétel (i) feltétele, mert az $\frac{1}{n}$ sorozat monoton csökkenő, valamint $\frac{1}{n} \to 0$, amennyiben $n \to \infty$.

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ tagjai ekkor a következőképpen néznek ki: $1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, \ldots$.

Jelölje s_n a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sor n-edik részletösszegét. Láthatjuk, hogy ez egy oszcillálva divergens sorozat lesz, hiszen s_n lehet 0, 1, vagy 2 is, éppen ezért $0 \leq s_n \leq 2$, azaz a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ részletösszegeinek sorozata korlátos. Így teljesül a kritérium (ii) feltétele is, ezért a fenti végtelen sor konvergens lesz.

3.20. Tétel. (Abel-kritérium) . *[1] Tegyük fel, hogy*

(i) az (a_n) sorozat monoton és korlátos, és

(ii) a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sor konvergens.

Ekkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ sor is konvergens.

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy az (a_n) sorozat monoton csökkenő, mert különben áttérünk a $(-a_n)$ sorozatra. Legyen $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, ekkor $(a_n - a)$ monoton csökkenve nullához tart. Mivel a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sor konvergens, ezért a részletösszegeinek sorozata korlátos. Így a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a) b_n$ sor konvergens a Dirichlet-kritérium szerint. Ha ehhez a sorhoz tagonként hozzáadjuk a konvergens $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a \cdot b_n$ sor tagjait, akkor megkapjuk a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ sort, amely konvergens lesz a következő tétel miatt.

3.21. Tétel. *[1] Ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ végtelen sorok konvergensek és összegük A, illetve B, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ sor is konvergens, és az összege $A + B$.*

Bizonyítás. Ha a szóban forgó sorok n-edik részletösszegei s_n t_n, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ sor n-edik részletösszege $s_n + t_n$. Így az állítás abból következik, hogy $\lim_{n\to\infty}(s_n + t_n) = \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} t_n = A + B$. □
□

3.22. Példa.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Most az $a_n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$. Ez a sorozat monoton, hiszen a számtani-mértani közepek közti egyenlőtlenség alkalmazásával a következőket kapjuk:

$$\sqrt[n+1]{1 \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < \frac{1 + n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

Ezután $n+1$-edik hatványra emeljük mindegyik oldalt:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

Már csak az kell, hogy ez a sorozat korlátos legyen felülről. Ehhez azt mutatjuk meg, hogy minden n és m pozitív egészre:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$$

Megint a számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenséget alkalmazzuk:

$$\sqrt[n+m]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{1}{m}\right)^m} < \frac{n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)+m\cdot\left(1-\frac{1}{m}\right)}{n+m} = \frac{n+m}{n+m} = 1,$$

így

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{1}{m}\right)^m < 1.$$

Mivel $\left(1-\frac{1}{m}\right)^m$ reciproka

$$\left(\frac{m}{m-1}\right)^m = \left(1+\frac{1}{m-1}\right)^m,$$

Itt mindkét oldalt osztva $\left(1-\frac{1}{m}\right)^m$-nel, azt kapjuk, hogy

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{m-1}\right)^m.$$

Itt m+1-et kell hellyettesítenünk m helyébe, ezzel belátva, hogy az $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ számok mindegyike felső korlátja a sorozatnak.

Ezzel pedig teljesül a kritérium (i) része.

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sorról tudjuk, hogy konvergens. Ezzel teljesül a tétel (ii) része is.

Mindezekből az Abel-kritérium szerint következik, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$ sor konvergens.

3.23. Tétel. (Leibniz-kritérium) . *[1]*

Ha az (a_n) sorozat monoton csökkenő és 0-hoz tart, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ sor konvergens.

3.24. Példa.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{\log n}$$

Oldjuk meg a példát a Leibniz-kritériummal! Tudjuk, hogy az $a_n = \frac{1}{\log n}$ sorozat monoton csökkenő, ha $n > 1$ és nullához tart, ezért a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{\log n}$ sor konvergens lesz a tétel szerint.

3.5. Egyéb kritériumok

3.25. Tétel. (Kondenzációs kritérium) . *[1]*
Ha az (a_n) sorozat nemnegatív és monoton csökkenő, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *és* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$ *végtlelen sorok egyszerre divergensek, vagy konvergensek.*

Bizonyítás. Jelöljük a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$ sorok részletösszegeit s_n-nel, illetve S_n-nel. Állapodjunk meg, hogy $s_0 = S_0 = 0$. Mivel az $a_{2^n} \geq a_i$ minden $i > 2^n$-re, ezért

$$S_n - S_{n-1} = 2^n \cdot a_{2^n} \geq \sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} a_i = s_{2^{n+1}} - s_{2^n}$$

minden n-re, és így

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(S_k - S_{k-1}) \geq \sum_{k=1}^{n}(s_{2^{k+1}} - s_{2^k}) = s_{2^{n+1}} - s_2.$$

Ebből következik, hogy ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$ részletösszegei korlátosak, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor részletösszegei is azok. Hasonlóan, $a_{2^n} \leq a_i$ minden $i \leq 2^n$-re, ezért

$$S_n - S_{n-1} = 2^n \cdot a_{2^n} \leq 2 \cdot \sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n} a_i = 2 \cdot (s_{2^n} - s_{2^{n-1}})$$

minden n-re,azaz

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(S_k - S_{k-1}) \leq 2 \cdot \sum_{k=1}^{n}(s_{2^k} - s_{2^{k-1}}) = s_{2^n} - s_1.$$

Ha tehát a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor részletösszegei korlátosak, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$ részletöszegei is azok. Egy nemnegatív tagú sor akkor és csak akkor konvergens, ha részletösszegeinek sorozata (felülről) korlátos. Ezt alkalmazva a tétel bizonyításának végéhez értünk. □

3.26. Példa. [8]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$$

Használjuk a kondenzációs kritériumot. A $(a_n) = \frac{\log n}{n^2}$ sorozat nemnegatív. A következőkben azt látjuk be, hogy $(a_n) = \frac{\log n}{n^2}$ sorozat monoton csökkenő. Ehhez tekintjük az $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$ függvényt és kiszámítjuk a deriváltját.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \cdot \log x}{x^4} = \frac{x - 2x \cdot \log x}{x^4}$$

Az $x^4 > 0$, így elegendő a továbbiakban a számlálót vizsgálni. Ha $f'(x) < 0$ egy adott intervallumon, akkor ott az $f(x)$ függvény monoton csökkenő.

$$\begin{aligned} x - 2x \cdot \log x &< 0 \\ x &< 2x \cdot logx \\ 1 &< 2 \cdot \log x \\ \frac{1}{2} &< \log x \\ \sqrt{e} &< x \end{aligned}$$

Meg kell jegyeznünk, hogy a fenti egyenlőtlenség megoldásánál kihasználtuk, hogy az $x > 0$. Mivel az $f(x)$ függvény monoton csökken, ha $\sqrt{e} < x$, ezért $x = 2, 3, 4, \ldots$ pontokat tekintve is monoton csökken, ezért $a_n = \frac{\log n}{n^2}$ sorozat is monoton csökkenő lesz, ha $n = 2, 3, 4, 5 \ldots$ pontokban tekintjük.

A továbbiakban tehát a tétel szerint a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$ sort kell vizsgálnunk. Ha ezt felírjuk, majd elvégezzük az egyszerűsítéseket, akkor következőt kapjuk:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot \log 2^n}{(2^n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n \log 2}{2^n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \log 2}{2^n}$$

Az így kapott végtelen sorra használjuk a korábban megismert hányadoskritériumot.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)\cdot \log 2}{2^{n+1}}}{\frac{n \cdot \log 2}{2^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^n \cdot (n+1) \cdot \log 2}{2^{n+1} \cdot n \cdot \log 2} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{2n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} \right| = \frac{1}{2} < 1$$

Teljesül a hányadoskritérium, így a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot \log 2^n}{(2^n)^2}$ végtelen sor konvergens lesz. A tétel szerint az előbbi végtelen sor és a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$ egyszerre konvergensek, vagy divergensek. Így beláttuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$ sor konvergens.

[8] Laczkovich–T.Sós Analízis II. 17.42./f feladat

3.27. Tétel. *Legyen* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *egy pozitív tagú sor, ahol a tagok monoton csökkenő sorozatot alkotnak. A* j_k *sorozat pedig egy szigorúan monoton növő, természetes számokból álló sorozat. Ekkor a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor konvergens lesz, amennyiben a* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (j_{k+1} - j_k)a_{j_k}$ *sor konvergens.*

Bizonyítás. Először egyszerűen szorzással alakítsuk át a következő formulát:

$$(j_{k+1} - j_k)a_{j_k} = (a_{j_k} + a_{j_k} + a_{j_k} + \ldots + a_{j_k}) - (a_{j_k} + \ldots + a_{j_k})$$

Értelemszerűen az első zárójelben j_{k+1}, míg a másodikban j_k darab tag van. Ezután kihasznáva azt, hogy az a_n monoton csökken és a j_k szigorúan monoton növő, már fel tudunk írni egy kézenfekvő alsó becslést:

$$(a_{j_k} + a_{j_k} + a_{j_k} + \ldots + a_{j_k}) - (a_{j_k} + \ldots + a_{j_k}) \geq a_{j_k} + a_{j_k+1} + a_{j_k+2} + \ldots + a_{j_{k+1}-1}$$

Ebből pedig már látszik a következő összefüggés is:

$$\sum_{k=1}^{n} (j_{k+1} - j_k)a_{j_k} \geq \sum_{k=1}^{j_{n+1}-1} a_k$$

Ebből már láthatjuk, hogy a majoráns-kritériumot alkalmazva, ha a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (j_{k+1} - j_k)a_{j_k}$ végtelen sor konvergens, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor is az. □

3.28. Példa. *Bizonyítsuk be, hogy az előző konvergenciakritérium alkalmazható, ha* $j_k = (j+1)^k$*, illetve ha* $j_k = j^{k+1}$*.*

Először tekintsük a $j_k = (j+1)^k$ esetet. Ahhoz, hogy a fenti kritérium alkalmazható legyen, meg kell néznünk, mit jelentenek a feltételek, azaz kell, hogy a fenti sorozat természetes számokból álló, monoton növő sorozat legyen.

Természetesen a $j_k = (j+1)^k$ sorozat szigorúan monoton növő, ha j egy rögzített pozitív egész, hiszen ekkor a $j_k = (j+1)^k < j_{k+1} = (j+1)^{k+1}$, vagyis alkalmazható a tétel. Nézzük most meg a feladat második részét, azaz a $j_k = j^{k+1}$ esetet. Most is ezt a feltételt kell ellenőriznünk, ami ismét teljesül, ha feltesszük, hogy $j > 1$ természetes szám, hiszen ekkor kapunk szigorúan monoton növő j_k sorozatot. A fenti kritérium működését megnézhetjük konkrét sorokra is.

3.29. Példa. *Konvergens-e a* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\log_2 n)^{\frac{n}{2}}}$ *sor?*

Most legyen a $j_k = 2^k$. Ez a sorozat természetes számokból áll és persze szigorúan monoton növő is, tehát használható a tétel szerint. Az $a_n = \frac{n}{(\log_2 n)^{\frac{n}{2}}}$. Az a_n sorozat monoton csökenő minden elég nagy indexre, hiszen minden elég nagy n-re teljesül, hogy $n \leq (\log_2 n)^{\frac{n}{2}}$. Láthatjuk, hogy ez így van, mert az alábbiak igazak lesznek, ha $n \geq 4$:

$$\begin{aligned} n &\leq (\log_2 n)^{\frac{n}{2}} \\ n &\leq \sqrt{(\log_2 n)^n} \\ n^2 &\leq (\log_2 n)^n \\ n^2 \leq 2^n = \log_2 4 \cdot \log_2 4 \cdot \ldots \cdot \log_2 4 &\leq \log_2 n \cdot \log_2 n \cdot \ldots \cdot \log_2 n = (\log_2 n)^n \end{aligned}$$

Most, hogy láttuk, a tétel feltételei maradéktalanul teljesülnek, próbáljuk meg alkalmazni azt:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(j_{k+1} - j_k)a_{j_k} = \sum_{n=1}^{\infty}(2^{n+1} - 2^n) \cdot a_{2^n} \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{2^n}{(\log_2 2^n)^{\frac{2^n}{2}}} \quad = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot 2^n}{n^{2^{n-1}}}$$

Erről a végtelen sorról pedig a gyökkritérium segítségével meg tudjuk mondani, hogy konvergens, mert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2^n \cdot 2^n}}{\sqrt[n]{n^{2^{n-1}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^{\frac{2^{n-1}}{n}}} = 0 < 1$$

Mivel pedig ez a sor konvergens, így a tétel alapján tudjuk, hogy a $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\log_2 n)^{\frac{n}{2}}}$ sor is konvergens.

4. Feladatok, egyéb példák

4.1. A divergencia igazolása

Ahogy azt már korábban is láttuk, a fenti konvergneciakritériumok néhány esetben segítenek abban is, hogy egy végtelen sorról bebizonyítsuk, hogy divergens. A következő tétel egy fontos szükséges feltételt fogalmaz meg.

4.1. Tétel. *[1] Ha a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens*, akkor* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$*.*

A $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ tehát egy szükséges feltétel a konvergenciához, de nem elégséges feltétel. A következőkben tekintsük meg példákon, mit is mond ki ez a tétel.

4.2. Példa.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Ha előzetesen azt várjuk, hogy egy sor divergens lesz, érdemes a fenti tétel szerint megnézni, hogy mennyi a $\lim_{n\to\infty} a_n$ határérték. Ehhez először elvégzünk egy apró átalakítást.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n \cdot n^{\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Számítsuk ki $a_n = \frac{n^n \cdot n^{\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$ sorozat határértékét, ha az $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n \cdot n^{\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^n \cdot n^{\frac{1}{n}}}{n^n}}{\left(\frac{n+\frac{1}{n}}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\left(\frac{n}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n} = 1 \neq 0$$

A $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, az $\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^n \to 1$, mert

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1.$$

A tétel alapján tehát a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$ sor divergens.

Vannak azonban olyan végtelen sorok, amelyeknél $a_n \to 0$ feltétel teljesül, mégsem lesz konvergens a sor. Erre is nézzünk meg egy példát:

4.3. Példa.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot \sqrt[3n]{2^n+1} - 2 \cdot \sqrt[2n]{3^n-1}}{n}$$

Vizsgáljuk meg most az $a_n = \frac{3 \cdot \sqrt[3n]{2^n+1} - 2 \cdot \sqrt[2n]{3^n-1}}{n}$ sorozatot! Ehhez számítsuk ki a következő határértékeket a csendőr-elv alkalmazásával:

A $\lim_{n\to\infty}(2^n+1)^{\frac{1}{3n}} = \sqrt[3]{2}$, mert

$$\sqrt[3]{2} \leftarrow (2^n)^{\frac{1}{3n}} \leq (2^n+1)^{\frac{1}{3n}} \leq (2^n+2^n)^{\frac{1}{3n}} = (2^{n+1})^{\frac{1}{3n}} = 2^{\frac{n+1}{3n}} = 2^{\frac{1+\frac{1}{n}}{3}} \to \sqrt[3]{2}$$

A $\lim_{n\to\infty}(3^n-1)^{\frac{1}{2n}} = \sqrt{3}$, mert

$$\sqrt{3} \cdot 1 \leftarrow 3^{\frac{n}{2n}} = \left(3^n \cdot \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)\right)^{\frac{1}{2n}} \leq (3^n-1)^{\frac{1}{2n}} \leq (3^n)^{\frac{1}{2n}} = 3^{\frac{n}{2n}} \to \sqrt{3}$$

Tehát a $\lim_{n\to\infty} \frac{3 \cdot \sqrt[3n]{2^n+1} - 2 \cdot \sqrt[2n]{3^n-1}}{n} = 0$, mert az előbbiek alapján világos, hogy a $\lim_{n\to\infty} 3 \cdot \sqrt[3n]{2^n+1} - 2 \cdot \sqrt[2n]{3^n-1} = 3 \cdot \sqrt[3]{2} - 2 \cdot \sqrt{3}$.

Mégis azt fogjuk látni, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot \sqrt[3n]{2^{n+1}} - 2 \cdot \sqrt[2n]{3^{n-1}}}{n}$ sor divergens. Kiszámíthatjuk, hogy a $3 \cdot \sqrt[3]{2} - 2 \cdot \sqrt{3} \approx 0,316$, így minden elég nagy n-re teljesül a következő alsó becslés:

$$\frac{3 \cdot \sqrt[3]{2} - 2 \cdot \sqrt{3}}{n} \approx \frac{0,316}{n} \geq \frac{\frac{1}{4}}{n} = \frac{1}{4n}$$

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n}$ végtelen sor pedig divergens. A minoráns kritérium feltételei teljesülnek ebben az esetben, tehát a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot \sqrt[3n]{2^{n+1}} - 2 \cdot \sqrt[2n]{3^{n-1}}}{n}$ sor divergens.

4.4. Példa. [9] *Van-e olyan x, amellyel a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx}$ végtelen sor konvergens? Válaszunkat indokoljuk!*

A példa megoldásához a 2.5 tételt fogjuk felhasználni. Ugyanis, ha a feladat alapján feltesszük, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx}$ konvergens, akkor kiemelhető belőle az $\frac{1}{x}$, így $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx} = \frac{1}{x} \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sorról pedig tudjuk, hogy divergens, tehát ellentmondásba ütközünk. Éppen ezért nincs ilyen x szám.

4.5. Példa. [10] *Igaz-e, hogy tetszőleges csupa pozitív tagú $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens sorhoz található olyan, szintén csupa pozitív tagból álló és divergens $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sor, amelyre teljesül, hogy minden n-re $b_n < a_n$? Létezik-e a divergens sorok „legkisebbike"? Válaszunkat indokoljuk!*

[9] Thomas-féle Kalkulus 3. 11.3. Feladatok/34. feladat
[10] Thomas-féle Kalkulus 3. 11.3. Feladatok/35. feladat

A válasz: igaz lesz az előző feladat alapján, ugyanis az összes $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx}$ alakú sor divergens lesz, annyi változással, hogy mivel pozitív tagú sorokról beszélünk, jelen esetben az $x > 0$. Így például a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ és a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ jó lesz. Ebből már érezhető, hogy nincs ezek között a sorok közt „legkisebb", mivel minden valós számnál tudunk mondani nagyobb valós számot, amit az x helyére írva újabb divergens sort kapunk. Persze tudunk érdekesebb példát is találni divergens sorra, amely „kisebb" a fentieknél. Ilyen például a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log n}$. Korábban beláttuk erről a sorról az integrálkritérium segítségével, hogy divergens.

A következőkben a korábbi tételeket vizsgáljuk majd különböző érdekes kérdések és feladatok formájában. Példákat, illetve ellenpéldákat tekintünk a tételek feltételeinek vizsgálata során.

4.2. Példák, ellenpéldák, érdekes állítások

4.6. Példa. *Felmerül a kérdés, hogy igaz-e, hogy ha egy végtelen sorból akárhány tagot elhagyunk, akkor a sor konvergenciatulajdonságai nem változnak meg. Látni fogjuk, hogy nem igaz.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \textit{ illetve } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

A fenti ellenpéldákkal könnyen cáfolható. Most a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sorból tagokat elhagyva pont a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sort kapjuk. Az előbbiről tudjuk, hogy divergens, az utóbbiról, hogy konvergnens.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ tagjai: } \underline{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{\underline{4}}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{\underline{9}}, \ldots$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ tagjai: } 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots$$

4.7. Példa. *Van-e olyan pozitív tagú sor, amelyiket a majoráns és minoráns kritériumokban egyaránt alkalmazhatunk más sorok konvergenciájának, illetve divergenciájának a bizonyítására?*

Tegyük fel tehát, hogy $0 \le a_n, b_n$, és minden elég nagy n esetén teljesül, hogy $a_n \le b_n$. Ekkor a majoráns-kritérium azt mondja ki, hogyha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sor konvergens, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor is konvergens, vagyis a felső becslésnél olyan b_n sorozatot keresünk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sor konvergens legyen.

Tegyük fel ismét, hogy $0 \leq a_n, b_n$, és minden elég nagy n esetén teljesül, hogy $b_n \leq a_n$. Ekkor a minoráns-kritérium azt mondja ki, hogyha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sor divergens, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor is divergens, vagyis az alsó becslésnél olyan b_n sorozatot keresünk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sor divergens legyen.

Mivel azonban nincs olyan sor, ami egyszerre konvergens és divergens, ezért a válasz az, hogy nincs ilyen sor.

4.8. Példa. *Mutassunk példát olyan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sorokra, ahol a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, $|a_n| \geq |b_n|$, és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ divergens.*

Ez a feladat szintén a majoráns-kritériummal kapcsolatos. Sejthetjük tehát, hogy azért tudunk a feladatban meghatározott példát mutatni, mert a majoráns-kritérium valamely feltétele nem teljesül. Méghozzá az, hogy nincs a példában megkötés a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sorok előjelét illetően.

Ezek után már nem nehéz találni, egy példát:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

Tudjuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$ sor konvergens lesz a Leibniz-kritérium miatt, azonban a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ sor pedig divergens. Az pedig világos, hogy a $\left|(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}\right| = \left|\frac{1}{n}\right| \geq \left|\frac{1}{n+1}\right|$ teljesül.

Most nézzünk egy olyan feladatot, ahol nem feltétlenül ellenpéldákat kell keresnünk, mert az lesz a sejtésünk, hogy valamelyik következtetés igaz lesz.

4.9. Példa. *Tegyük fel, hogy minden n-re az $a_n \geq 0$. Ekkor az alábbi állítások közül melyikből következik a másik?*

P: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergnes*

Q: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ *konvergnes*

Könnyebb belátni, hogy a $\mathbf{Q} \not\Rightarrow \mathbf{P}$. Ellenpéldaként ismét a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sorokat fogjuk nézni. Mivel $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergnes, ezért megváltozik a konvergenciatulajdonság, így $\mathbf{Q} \not\Rightarrow \mathbf{P}$.

A másik iránynál azt mondja az intuíciónk, hogy igaz lesz a következtetés, azaz **P**$\Rightarrow$**Q**. A bizonyításhoz a következő definíciót fogjuk alkalmazni.

4.10. Definíció. Az a_n sorozat b-hez tart, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan (ε-tól függő) n_0 szám, amelyre teljesül, hogy

$$|a_n - b| < \varepsilon \ \text{ minden } n > n_0 \text{ indexre.}$$

Most tehát a feltételből kiindulva: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergneciája miatt az $a_n \to 0$. A fenti definíció azt mondja ki, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan n_0 szám, amelyre teljesül, hogy $a_n < \varepsilon$ minden $n > n_0$ index esetén. Ez azt jelenti, hogy minden $n > n_0$-ra (minden elég nagy n-re) az a_n tagjai „nagyon kicsik" és „tetszőlegesen" közel kerülnek a sorozat határértékéhez, azaz a 0-hoz. A fentiek miatt tekinthetjük azokat a tagokat, amikor az $a_n < 1$, azaz az $\varepsilon = 1$, mert ε-nál nagyobb távolságra csak véges sok tagja van az a_n sorozatnak. Ekkor érvényes a következő egyenlőtlenség is: $a_n^2 < a_n$.

Így teljesülnek a majoráns-kritérium feltételei, hiszen nemnegatív tagú sorokról van szó és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ majorálja a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ végtelen sort, éppen ezért utóbbi is konvergens lesz.

4.3. Leibniz feltételei

4.11. Példa. *Mutassunk példákat olyan divergens sorokra, amelyek a Leibniz-kritérium 3 feltétele közül pontosan 2-t elégítenek ki!*

A példákból látni fogjuk, hogy a feltételek semelyikét nem lehet elhagyni. Az egyszerűség és az átláthatóság kedvéért most megszámozzuk a Leibniz-kritérium feltételeit:

1. $a_n \to 0$,
2. a_n sorozat abszolút értékben monoton csökkenő,
3. a_n váltakozó előjelű.

Ezek közül kell pontosan kettőnek teljesülni. Nézzük meg először azt az esetet, amikor az 1. és a 2. feltétel teljesül, de a 3. nem. Ilyen például a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor. Az $(a_n) = \frac{1}{n}$ sorozat monoton csökkenő és tart 0-hoz, azonban tudjuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor divergens.

Most pedig tekintsük azt az esetet, amikor az 1. nem teljesül, a többi feltétel pedig igen. Az $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \sqrt[n]{2}$ jó példa erre, hiszen a_n váltakozó előjelű és $\left|(-1)^{n-1} \cdot \sqrt[n]{2}\right| = \left|\sqrt[n]{2}\right|$ és $\sqrt[n+1]{2} \leq \sqrt[n]{2}$. Mindazonáltal az a_n sorozat oszcillálva divergens, hiszen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$ és $\lim_{n\to\infty} -\sqrt[n]{2} = -1$. Emiatt persze a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \sqrt[n]{2}$ végtelen sor sem lesz konvergens.

Végül jöjjön egy példa, amikor a 2. feltétel nem igaz, de a 1. és 3. feltételek igen. Jó példa lesz a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$ sor. Be kell látnunk, hogy az $a_n =$ $= (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$ sorozat 0-hoz konvergál:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n+1)+n}{n\cdot(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot\frac{n+1}{n^2}+\frac{n}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}} = 0.$$

Válatakozó előjelű lesz, hiszen $-\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$ és $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$ alakú tagok váltják egymást az a_n sorozatban, és $\left|\frac{1}{n+1}\right| \le \left|-\frac{1}{n}\right|$.

Azt is beláthatjuk, hogy az $|a_n|$ sorozat nem monoton csökkenő, mivel $\left|-\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right| = \left|\frac{-1}{n\cdot(n+1)}\right|$ és $\left|\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right| = \left|\frac{2n+1}{n\cdot(n+1)}\right|$ tagok váltják egymást. $\left|\frac{-1}{n\cdot(n+1)}\right|$ jóval *„gyorsabban"* tart 0-hoz, mint $\left|\frac{2n+1}{n\cdot(n+1)}\right|$.

Már csak azt kell megvizsgálnunk, hogy konvergens-e a sor, ehhez vizsgáljuk meg a részletösszegeket. Ha n páratlan, azaz a sor páratlan tagjait tekintjük, akkor ez az összeg a következő: $\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{2n+1}{n\cdot(n+1)}$. Látható, hogy a részletösszegek sorozata nem lesz korlátos ebben az esetben, hiszen

$$\frac{1}{n} = \frac{2n}{2n^2} = \frac{2n}{n^2+n^2} \le \frac{2n+1}{n^2+n} = \frac{2n+1}{n\cdot(n+1)}$$

nyilvánvalóan igaz, és $\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$ sor részletösszegeinek sorozata nem korlátos. Ez azt is jelenti, hogy minden határon túl növekedni fog a sor összege, azaz végtelen lesz.

Ezzel ellentétben ha a sor páros tagjait tekintjük, akkor egy konvergens sorozatot kapunk, melynek így van egy valós összege. Az $\sum\limits_{n=1}^{n}\frac{-1}{n\cdot(n+1)}$ sor részletösszegei korlátosak.

A páros és páratlan indexű tagokat összegezve, azt mondhatjuk tehát, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$ sor részletösszegei nem lesznek korlátosak. Ebből az következik, hogy az $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$ végtelen sor divergens lesz.

4.12. Példa. *Konvergens vagy divergens az alábbi sor?*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n\cdot\sqrt{n}}$$

Nézzük meg, melyek azok a kritériumok, amik alkalmazhatók erre a sorra. Az Abel-kritérium, az integrál-kritérium és a Dirichlet-kritérium feltételei közt találjuk, hogy monoton, illetve monoton csökkenő tagok alkossák a sort, ez pedig most nem teljesül, ezeket tehát nem tudjuk használni.

A gyökkriétériumot akár ki is próbálhatjuk:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{\cos n\pi}{n\cdot\sqrt{n}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}$$

A fenti átalakítás az abszolútérték miatt lehetséges, valamint, hogy a $\cos(n\pi)$ csak 1, illetve -1 értéket vehet fel. Tovább számolva a határértéket:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{n^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^{\frac{3}{2}}}} = 1$$

A gyökkritérium tehát nem segít, mert a tétel szerint ebben az esetben nem tudunk semmit az adott sor konvergenciatulajdonságairól. Tudjuk, hogy a gyökkritérium egy erősebb kritérium, így a hányadoskritériummal sem járunk sikerrel.

A legkézenfekvőbb a Leibniz-kritérium használata, mert alternáló sorrol van szó. Azt is tudjuk, hogy a sor tagjai abszolút értékben monoton csökkenő sorozatot alkotnak, hiszen ez valójában ekkor a $a_n = \left|\frac{\cos n\pi}{n^{\frac{3}{2}}}\right| = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Ez a sorozat konvergál a 0-hoz, éppen ezért a tétel alkalmazható lesz, s emiatt a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n\cdot\sqrt{n}}$ végtelen sor konvergens.

Van azonban egy másik megoldás is, ez tulajdonképpen arról szól, hogy belátjuk, hogy a sor abszolút konvergens és így konvergens is. Az abszolút konvergencia könnyen látható, hiszen ekkor a fentiek szerint:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos n\pi}{n^{\frac{3}{2}}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Ez pedig egy hiperharmonikus sor, azaz konvergens.

4.4. Az integrálkritérium vizsgálata

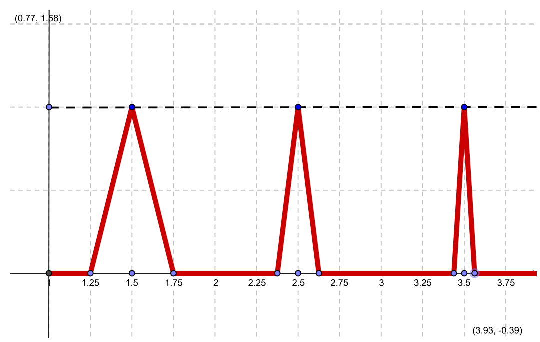
4.13. Példa. *Mutassunk példát olyan folytonos, nemnegatív függvényre, amelyre $\int_1^{\infty} f(x)dx$ konvergens, de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ divergens!*

Nyilvánvalóan az integrálkritériummal kapcsolatos ez a probléma, ezért annak feltételeit kell vizsgálni. A feladatban majdnem minden szerepel az integrálkritériumból, kivéve, hogy nincs kikötve az $f(x)$ függvény monoton csökkenése. Kézenfekvő tehát egy monoton nem csökkenő függvényt keresni, amely ugyanakkor folytonos, nemnegatív és teljesül rá, hogy $\int_1^{\infty} f(x)dx$ konvergens, de a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ végtelen sor divergens.

Legyen minden $n \in \mathbb{N}^{+}$-re $f_n : [n-1, n] \to \mathbb{R}$ olyan nemnegatív folytonos függvény, amelyre $f_n(n-1) = f_n(n) = 0$, $\max f_n \geq 1$ és $\int_1^{\infty} f(x)dx \leq \frac{1}{2^n}$. Ilyen az a függvény, amelyre $f_n(x) = 0$, ha $|x - a_n| \geq \varepsilon_n$, $f_n(a_n) = 1$ és f_n lineáris az $[a_n - \varepsilon_n, a_n]$ és $[a_n, a_n + \varepsilon_n]$ intervallumokban, ahol $a_n = \frac{2n-1}{2}$ és $\varepsilon_n = 2^{-n}$. Nézzük meg ennek a függvénynek a képét, egy kisebb intervallumban, hogy érzékeljük, miért illeszkedik a feladatban meghatározott feltételekhez. Az $f_n(\frac{2n-1}{2}) = 1$ és $a_n = \frac{2n-1}{2}$ alakú pontok körüli lineáris részeket sem nehéz elképzelni, a többi helyen pedig 0, így csak az intervallumok határait kell kiszámítani pár értékre és látszik, hogyan is néz ki a függvény. Legegyszerűbben ebből a formulából számolható: $|x - \frac{2n-1}{2}| \geq \frac{1}{2^n}$.

n	$a_n = \frac{2n-1}{2}$	$x \leq \frac{2n-1}{2} - \frac{1}{2^n}$	$x \geq \frac{2n-1}{2} + \frac{1}{2^n}$
$n=2$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{7}{4}$
$n=3$	$\frac{5}{2}$	$\frac{19}{8}$	$\frac{21}{8}$
$n=4$	$\frac{7}{2}$	$\frac{55}{16}$	$\frac{57}{16}$

Ezen pár érték alapján felvázolhatjuk a függvényt egy, az ábrán látható kisebb intervallumban.



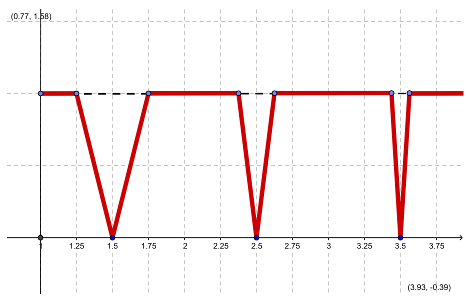
Legyen tehát $f(x) = f_n(x)$, ha $x \in [n-1, n]$ és $n \in \mathbb{N}^+$. Ekkor f folytonos. Mivel f nemnegatív, ezért az $x \mapsto \int_0^x f dt$ függvény monoton növő, és így a $\lim_{x\to\infty} \int_0^x f dt$ határérték létezik. Másrészt $\int_0^n f dt \leq 2^0 + 2^{-1} + \ldots + 2^{-n} < 2$ minden n-re (hiszen a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$), ezért a határérték véges és az $\int_0^\infty f dt$ improprius integrál konvergens.

Ennek ellenére a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ divergens lesz, mert itt az érték mindig 1, és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$.

Értelemszerűen felmerül a következő kérdés is az előző feladatot látva.

4.14. Példa. *Mutassunk példát olyan folytonos, nemnegatív függvényre, amelyre $\int_1^\infty f(x)dx$ divergens, de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergens!*

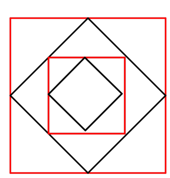
Ezt a problémát az előző feladat nyomán már könnyebb megoldani, ugyanis az intervallumok maradnak ugyanazok, csak a felvett értékeket változtatjuk meg. Legyen most ez a függvény, amelyre $f_n(x) = 1$, ha $|x - a_n| \geq \varepsilon_n$, $f_n(a_n) = 0$ és f_n lineáris az $[a_n - \varepsilon_n, a_n]$ és $[a_n, a_n + \varepsilon_n]$ intervallumokban, ahol $a_n = \frac{2n-1}{2}$ és $\varepsilon_n = 2^{-n}$. Tehát a $a_n = \frac{2n-1}{2}$ alakú pontokban most 0 lesz a függvényérték, ezért $\sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$ konvergens lesz. Ha viszont kívül vagyunk az $[a_n - \varepsilon_n, a_n]$ és $[a_n, a_n + \varepsilon_n]$ intervallumon, akkor a függvény értéke mindenhol 1, tehát a $\int_1^{\infty} 1dx$ integrált kell kiszámolnunk, ami ∞. Természetesen ebből le kell vonnunk az $y = 1$ és a függvény $[a_n - \varepsilon_n, a_n]$ és $[a_n, a_n + \varepsilon_n]$ intervallumokon vett lineáris részek által határolt kis háromszögek területét. Persze ezek területe éppen a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ sor összege, tudjuk, hogy konvergens ez a sor, ebből következik, hogy a $\int_1^{\infty} f dx$ divergens lesz, míg a $\sum_{n=1}^{\infty} f$ konvergens. Az alábbiakban erről a függvényről is láthatunk egy ábrát.



4.5. Sorösszegek példákban

4.15. Példa. [11] *Az 1. ábrán egy négyzetekből álló sorozat első négy tagját tanulmányozhatjuk. A legkülső négyzet területe 4 négyzetméter. Minden további négyzet csúcsai a tőle kívülre elhelyezkedő négyzet oldalfelező pontjaira illeszkednek. Határozzuk meg a sorozatban szereplő négyzetek területének összegét!*

1. ábra. A feladat rajza



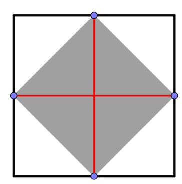
[11] Thomas-féle Kalkulus 3. 11.2. Feladatok/75. feladat

Az alábbi 2. ábrán jól látható, hogy a két piros szakasz négy egyenlő négyztre bontja a négyzetet, s ezeken a kisebb négyzeteken a szürke és a fehér háromszögek ugyaniolyan nagyságúak. Vagyis egy–egy lépésben a négyzetek területe éppen felére csökken. Ezzel pedig meg is határoztuk a keresett végtlelen mértani sorunkat alkotó sorozat kvóciensét, ami $q = \frac{1}{2}$. Ennek a sorozatnak a feladat szerint pedig 4 az első tagja. Az négyzetek összterületét így pontosan akkor kapjuk meg, ha kiszámítjuk a következő mértani sor összegét:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n = \sum_{n=1}^{\infty} 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8$$

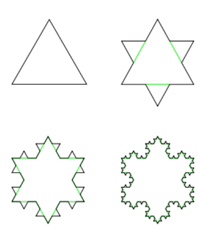
Így tehát a négyzetek összterülete 8 lesz.

2. ábra. Rajz a megoldáshoz



4.16. Példa. [12] *Helga von Koch hópehelygörbéje: Helga von Koch hópehelygörbéje egy véges területet határoló végtelen görbe. Ennek belátásához tegyük fel, hogy egy egységnyi oldalú szabályos háromszögből indulunk ki. Határozzuk meg az n-edik görbe L_n hosszát, és mutassuk meg, hogy $\lim_{n\to\infty} L_n = \infty$! Ezután határozzuk meg az L_n görbe által határolt A_n terület nagyságát, és adjuk meg a $\lim_{n\to\infty} A_n$ határértéket!*

Íme az egyes lépések a görbe alakulásáról:



[13]

[12]Thomas-féle Kalkulus 3. 11.2. Feladatok/77. feladat

[13]Az ábra forrása: Wikipédia

Először határozzuk meg az L_n görbe hosszát az n-edik iterációs lépés után, melyhez a következő észrevételek lehetnek hasznosak:

Minden lépésben 4-szer annyi oldalél keletkezik, mint amennyi az előző lépésben volt, mert egy–egy élt felvált egy új kisebb háromszög két éle, illetve az iterációs lépés előtti oldalélből is marad két él.

A keletkező háromszögek oldalai minden egyes lépésben az $\frac{1}{3}$-szorosára változik, hiszen a kiindulási és a keletkezett háromszögek szabályosak, s ezek oldalait harmadoljuk a következő lépésbeli görbe kialakításához.

A következő táblázat jól mutatja, hogyan alakulnak az egyes lépésekben az adatok:

L_n kerület	$(\frac{4}{3})^0 \cdot 3 = 3$	$(\frac{4}{3})^1 \cdot 3$	...	$(\frac{4}{3})^n \cdot 3$
a háromszögek oldalhosszai	$\frac{1}{3^0}$	$\frac{1}{3^1}$	...	$\frac{1}{3^n}$
oldalélek száma	$3 \cdot 4^0 = 3$	$3 \cdot 4^1 = 12$	...	$3 \cdot 4^n$

Az n-edik lépés után tehát az $L_n = 3 \cdot (\frac{4}{3})^n$. Ennek határértéke pedig: $\lim_{n\to\infty} 3 \cdot (\frac{4}{3})^n = \infty$, hiszen a $\frac{4}{3} > 1$.

Most folytassuk a feladat másik részével. Ehhez ismét tegyünk egy–két hasznos észrevételt:

Fontos megemlíteni a kiindulási területet, azaz az egységoldalú szabályos háromszög területét: $\frac{1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

A háromszög területe az oldalhossztól függően négyzetesen változik, ezért minden lépésben $\frac{1}{9}$-szeresére változik a kis háromszögek területe, így ez n lépés után: $\frac{1}{9^n}$.

Az első lépésben 3 új kisebb méretű háromszög keletkezik, utána pedig minden lépésben 4-szer annyi lesz mint az előzőben. Így tehát az n-edik lépésben $3 \cdot 4^{n-1} = 3 \cdot 4^{-1} \cdot 4^n = \frac{3}{4} \cdot 4^n$.

A fentiek alapján tehát minden iterációs lépésben ennyivel fog bővülni a terület: $\frac{3}{4} \cdot 4^n \cdot \frac{1}{9^n} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{4} \cdot (\frac{4}{9})^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Ezeket a területeket kell összegezni és ehhez még természetesen hozzáadni a kiindulási területet, így megkaphatjuk az összterületet:

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^k \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^k\right)$$

Ezt a formulát egyszerűen átalakíthatjuk egy indexelési trükkel, hogy egyszerűbben tudjunk összeget számolni.

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(1 + \frac{3}{4} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{4}{9}\right)^k\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(1 + \frac{3}{4} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{4}{9}\right)^k \cdot \frac{4}{9}\right) =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{4}{9}\right)^k\right)$$

Nem maradt más dolgunk, mint kiszámítani az A_n határértéket:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{4}{9}\right)^k\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{9}}\right) = \frac{8}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Láthatjuk tehát, hogy a terület véges lesz, méghozzá a kiindulási terület $\frac{8}{5}$-szerese lesz.

5. Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék

6. Hivatkozások

Hivatkozások

[1] Laczkovich Miklós–T. Sós Vera: *Analízis II.* Nemzeti Tankönyvkiadó.

[2] George B. Thomas: *Thomas-féle Kalkulus 3.* Typotex.