EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

# Párosítások

BSc Szakdolgozat

Németh Kinga

Matematika BSc
Elemző szakirány

Témavezető: Szőnyi Tamás
Egyetemi tanár

Budapest

2016

# Tartalomjegyzék

# Bevezetés

Szakdolgozatomban a gráfelméleti alapfogalmak bevezetése után a párosításokat fogom vizsgálni, először páros, majd általános gráfokban. Mindkét rész hasonlóan fog felépülni. Elsőként megvizsgálom, hogy milyen feltételek szükségesek a teljes párosítás létezéséhez, majd mivel nem minden gráf teljesíti ezen feltételeket, a maximális párosítást szeretném megtalálni. A maximális párosítás megtalálását egy már meglévő párosítás javításával fogom elérni.

Páros gráfok esetében Ferdinand Georg Frobenius és Philip Hall tételeit mutatom be, melyek a témában alapvető fontosságúak. De többek között Kőnig Dénes, illetve Gallai Tibor magyar matematikusok tételeivel is találkozni fogunk.

Hasonló módon, az általános gráfok vizsgálásakor a témakör legfontosabb, William Thomas Tutte tételét, illetve Jack Edmonds algoritmusát szemléltetem.

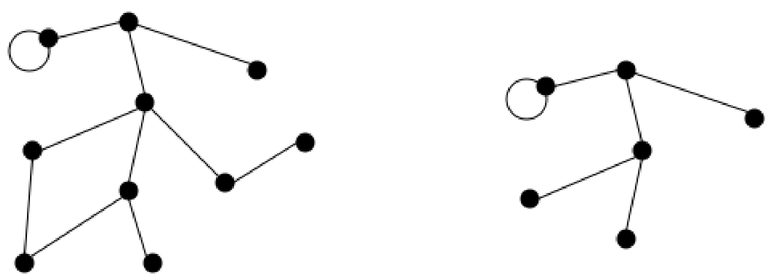
# 1. fejezet

# Alapfogalmak

Ismerjük meg a gráfokat, részeiket, alaptulajdonságaikat!

**1.1. Definíció (Gráf).** Egy gráf egy rendezett pár, G = (V; E), ahol V egy nem üres halmaz. V elemeit csúcsoknak vagy pontoknak, E elemeit pedig éleknek nevezzük. E elemeihez V egy vagy két eleme van hozzárendelve, az él végpontjai. Jelöljük a G gráf csúcsait V(G)-vel, éleit E(G)-vel.

**1.2. Definíció (Részgráf).** A G' = (V'; E') gráf a G = (V; E) gráf részgráfja, ha V' ⊆ V és E' ⊆ E, valamint egy pont és egy él pontosan akkor illeszkedik egymásra G'-ben, ha G-ben is illeszkedők. Az E'-beli élek végpontjai tehát V'-beliek.



*1.1. Ábra. Gráf és annak egy részgráfja.*

**1.3. Definíció (Feszítő és feszített részgráf).** Egy G' (V'; E') gráf a G = (V; E) gráf feszítő részgráfja, ha G' részgráfja G–nek és V' = V, azaz a részgráf G összes pontját tartalmazza. G' a G gráf V' által feszített részgráfja, ha E' az összes olyan E–beli élt tartalmazza (és csak ezeket), melyek mindkét végpontja V'-ben van.

Tehát, ha G' feszített és feszítő részgráf is, akkor G' = G.

**1.4. Definíció (Hurokél).** Egy G gráfban hurokélnek mondjuk azt az $e \in E(G)$ élet, melynek ugyanaz a kezdő és végpontja is, azaz egyelemű halmaz van hozzárendelve.

**1.5. Definíció (Többszörös él).** Egy G gráfban többszörös éleknek (vagy párhuzamos éleknek) nevezzük azon E(G)-beli éleket, melyeknek egyik végpontja ugyanazon $u \in V(G)$, másik végpontja pedig ugyanazon $v \in V(G)$ csúcsok. Azaz olyan élek, melyekhez azonos kételemű részhalmazok vannak hozzárendelve.

**1.6. Definíció (Egyszerű gráf).** Egyszerű gráfoknak nevezzük azokat a gráfokat, melyekben nincs se hurokél, se többszörös él. Ekkor a gráf éleit azonosíthatjuk végpontjaik (kételemű) halmazával.

Tehát amennyiben nem egyszerű gráfokról beszélünk, úgy megengedettek a többszörös, illetve hurokélek is.

**1.7. Definíció (Fokszám).** Egyszerű gráf esetén egy $v \in V(G)$ csúcs fokszáma a rá illeszkedő élek száma. Nem egyszerű gráfban a hurokél 2–vel növeli az adott csúcs fokszámát. Jele: d(v)

**1.1. Állítás.** Minden gráf esetén a fokszámok összege az élek számának kétszerese.

**1.8. Definíció (Reguláris).** A G gráfot k-regulárisnak nevezzük, ha G-ben minden pont fokszáma k. A G gráf reguláris, ha k-reguláris valamely k-ra, ahol $k \geq 1$.

**1.9. Definíció (Izolált pont).** Izolált pontnak hívjuk G azon pontját, melyből nem indul ki él, tehát fokszáma nulla.

**1.10. Definíció (Séta, Körséta).** Egy $v_0$, $e_1$, $v_1$, $e_2$, … $v_{k-1}$, $e_k$, $v_k$ sorozatot sétának nevezünk, ahol $v_i$ a csúcsokat, $e_i$ pedig $v_{i-1}$ és $v_i$ -t összekötő éleket jelöli, minden $0 \leq i \leq k$ -ra. Ha $v_0 = v_k$ , akkor az körséta.

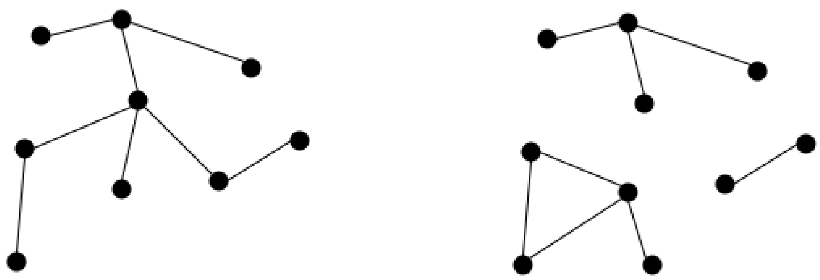
**1.11. Definíció (Út, Kör).** Ha egy sétában minden csúcs különböző, akkor azt útnak nevezzük, illetve ha az első és az utolsó csúcs megegyezik (és a többi mind különböző), akkor azt körként definiáljuk. Hosszukat az őket alkotó élek számával adhatjuk meg.

**1.1. Megjegyzés.** Ha egy gráfban két pont között van séta, akkor van út is.

**1.12. Definíció (Összefüggő gráf).** Egy gráfot összefüggőnek mondunk, ha bármely két csúcsa között van út.

**1.13. Definíció (Komponens).** A maximálisan összefüggő részgráfot összefüggőségi komponensnek nevezzük. Egy részgráf maximálisan összefüggő, ha se több élt, se több csúcsot nem tudunk hozzávenni úgy, hogy összefüggő maradjon.

Tehát egy összefüggő gráf 1 komponensből áll, egy nem összefüggő gráfban pedig a komponensek között nem megy él.



*1.2. Ábra. Balra egy összefüggő gráf, jobbra egy 3 komponensű gráf.*

**1.14. Definíció (Fa).** Az összefüggő, körmentes gráfokat fáknak nevezzük.

Egy fában tehát nincs sem többszörös, sem pedig hurok él.

**1.15. Definíció (Feszítőfa).** Az F gráf a G gráf feszítőfája, ha F fa és feszítő részgráfja G–nek.

**1.16. Definíció (Erdő).** A körmentes gráfokat erdőnek nevezzük. Egy erdő minden komponense fa.

**1.17. Definíció (Feszítőerdő).** Egy F gráf a G gráf feszítőerdője, ha F erdő és minden komponense feszítőfája G megfelelő komponensének.

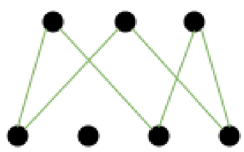
**1.2. Állítás.** Minden legalább két pontú fában van legalább két olyan csúcs, melynek 1 a fokszáma, hiszen a fa körmentes és a leghosszabb út két végpontjának fokszáma 1.

**1.3. Állítás.** Egy n pontú fa éleinek száma n - 1. Így ha az F erdő pontjainak száma n, komponenseinek száma k, akkor F–nek pontosan n - k éle van.

**1.2. Megjegyzés.** Az 1.2. Állítás felhasználásával, teljes indukcióval belátható az 1.3. Állítás.

**1.18. Definíció (Páros gráf).** Páros gráfnak nevezünk egy G gráfot, ha G csúcsainak halmazát fel tudjuk úgy osztani egy A és egy B halmazra, hogy az összes G-beli élre teljesül, hogy egyik végpontja A-ban, a másik pedig B-ben van. Jelölése: G = (A,B; E), ahol E az élek halmaza.

Páros gráfban csak páros hosszú körök lehetnek, hiszen egy kör (és út) csúcsai felváltva vannak A-ban, illetve B-ben. Tehát ha kör keletkezik, mindenképp páros sok csúcson (és élen) kell keresztül mennie, mivel minden második csúcs van azonos osztályban. Tehát a kör páros hosszú.



*1.3. Ábra. Páros hosszú kör páros gráfban.*

## 1.1. Gráf paraméterek

**1.1.1. Definíció (Párosítás, $\nu(G)$).** Egy tetszőleges G gráfban párosításnak nevezzük élek azon halmazát, melyben két élnek nincs közös végpontja (azaz független élhalmaz). A független élek maximális számát, azaz a legnagyobb párosítás méretét $\nu(G)$-vel jelöljük.

**1.1.2. Definíció (Teljes párosítás).** Teljes párosításnak nevezzük azt a párosítást, ahol a gráf minden csúcsából kiindul a párosítás valamely éle.

**1.1.3. Definíció ($\tau(G)$).** Egy G gráfban lefogó csúcshalmaznak nevezzük pontok egy $L \subseteq V(G)$ halmazát, ha a gráf minden élének legalább egyik végpontja L-ben van. A lefogó csúcsok minimális számát $\tau(G)$-vel jelöljük.

**1.1.4. Definíció ($\alpha(G)$).** $A \subseteq V(G)$ független csúcshalmaz, ha nem létezik olyan él, melynek mind a két végpontja A–ban van. A független csúcshalmaz maximális méretét $\alpha(G)$–vel jelöljük.

**1.1.5. Definíció ($\rho(G)$).** $S \subseteq E(G)$ lefedő élhalmaz, ha a gráf minden csúcsa valamely S–beli él végpontja. A lefedő élhalmaz minimális számát $\rho(G)$–vel jelöljük

**1.1.1. Tétel (Gallai[1] tétele).** Egy tetszőleges $G(V, E)$ gráfban:

- $\alpha + \tau = |V|$, hurokélmentes gráfra
- $\nu + \rho = |V|$, ha nincs izolált csúcs.

[1] **Gallai Tibor** (eredeti nevén: *Grünwald Tibor*, Budapest, 1912. július 15. – Budapest, 1992. január 2.) magyar matematikus. Doktori fokozatát a Budapesti Műszaki Egyetemen szerezte, témavezetője Kőnig Dénes volt. A matematikai tudományok doktora (1988), az MTA levelező tagja (1991).

**1.1.1. Bizonyítás (Gallai tétel).** Először lássuk be a tétel első felét, azaz egy hurokmentes G gráfban a maximális független csúcshalmaz, illetve a minimális lefogó csúcshalmaz méreteinek összege megadja a gráf csúcsainak számát.

Ha egy L halmaz lefogó csúcshalmaz, akkor $A = V(G)\setminus L$ független csúcshalmaz, ha nem így lenne, akkor lenne két olyan pont A-ban, amit összeköt él, így viszont az az él nem lenne lefogva L által, tehát $\alpha(G) \geq |V(G)\setminus L|$ minden L lefogó csúcshalmazra. Ebből következik, hogy

$$|V(G)| \leq \alpha(G) + \tau(G).$$

Fordítva, ha L nem fogna le egy élet, akkor annak mind a két végpontja szerepelne A-ban, tehát $\tau(G) \leq |V(G)\setminus A|$ minden A független csúcshalmazra. Tehát

$$|V(G)| \geq \tau(G) + \alpha(G).$$

A két egyenlőtlenségből pedig következik az egyenlőség.

Nézzük a második állítást, miszerint a maximális független élhalmaz, valamint a minimális lefedő élhalmaz méreteinek összege megegyezik a csúcsok számával (feltéve, hogy nincs a gráfban izolált pont).

Legyen $\nu(G)$ független élhalmaz, mely lefog $2\nu(G)$ különböző csúcsot, a maradék csúcsok lefoghatóak $|V(G)| - 2\nu(G)$ éllel (minden fedetlen csúcshoz választunk egy élt), tehát $\rho(G) \leq |V(G)| - \nu(G)$, így

$$|V(G)| \geq \rho(G) + \nu(G).$$

Illetve ha S egy minimális lefedő élhalmaz, akkor S k db diszjunkt csillag. Ugyanis kör nem lehet benne, hisz akkor egy pontot két élt is lefogna, így viszont nem lenne minimális. Három hosszú (vagy annál hosszabb) út sem lehet benne, ugyanis annak a középső éle lenne felesleges. Tehát S egy k komponensű erdő, melynek miden komponense csillag, így $\rho(G) = |V(G)| - k$ és $\nu(G) \geq k$, ebből következik, hogy

$$|V(G)| = \rho(G) + k \leq \rho(G) + \nu(G).$$

A két egyenlőtlenségből pedig következik az egyenlőség.

***

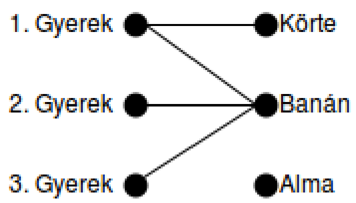
# 2. fejezet

# Párosítások páros gráfokban

A fejezet [1], [2] illetve [4] felhasználásával készült.

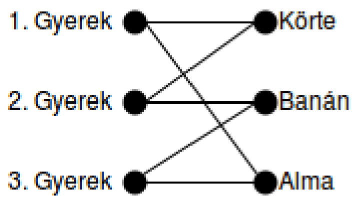
Értelemszerű, hogy egy páros gráfban csak akkor létezhet teljes párosítás, ha $|A| = |B|$, hiszen egy csúcs csak egy párosított él végpontja lehet és minden él egyik végpontja A–ban, másik B–ben van. Ám az is nyilvánvaló, hogy ez nem elegendő feltétel.

Vegyük például, hogy van egy körténk, egy almánk és egy banánunk, illetve három gyerek, akiknek szeretnénk kiosztani a gyümölcsöket. Ha mondjuk mind a három gyerek allergiás az almára vagy ketten csak a banánt hajlandóak elfogadni, akkor akárhogy próbálkozunk, nem fogjuk tudni kiosztani mind a három gyümölcsöt.




*2.1. Ábra.*

Egész más lenne a helyzet, ha például mind a három gyümölcsöt elfogadná 2-2 gyermek.




*2.2. Ábra. 2-reguláris gráf.*

Ezt mondja ki általánosabban Kőnig Dénes[2] tétele is a gráfok nyelvén.

## 2.1. Kőnig tétele reguláris gráfokra

**2.1.1. Tétel (Kőnig tétel).** Ha a $G = (A,B;\, E)$ páros gráfban $|A| = |B|$ és minden csúcs foka $r > 0$ (azaz G r-reguláris gráf), akkor G-ben létezik teljes párosítás.

Bizonyítására a Frobenius tétel után visszatérünk, lásd 2.2.2. Bizonyítás. Ott azt fogjuk látni, hogy a tétel nem csak egyszerű gráfok esetén igaz, ugyanis a többszörös él nem akadály, sőt akár több teljes párosítást is felfedezhetünk a gráfban, úgy, hogy minden párosításbeli él különböző legyen.

**2.1.1. Definíció (Élkromatikus szám).** Egy G gráf élkromatikus száma k, ha élei k db színnel kiszínezhetőek úgy, hogy bármely két szomszédos él (azaz egy csúcsból kiinduló) színe különböző legyen, de $k - 1$ színnel nem. Jele: $\chi'(G)$.

Először lássunk egy példát arra, hogy Kőnig tételéből hogyan következtethetünk az élkromatikus számra.

**2.1.1. Példa.** Egy 4 fős társaság szabályos francia kártyával játszik úgy, hogy az 52 lapot véletlenszerűen kiosztják egymás között, hogy mindenki kapjon 13-13 kártyát. Minden körben 1-1 kártyát tesznek le a kezükből és azt szeretnék, hogy mind a 13 körben úgy tudják lerakni a lapokat, hogy mind a négy szín különböző legyen (kőr, treff, pikk, káró).

Legyenek A-ban a társaság tagjai, B-ben pedig a 4 szín, illetve egy A-beli pont annyiszor van összekötve egy B-belivel, ahány olyan színű lap van a kezében. Tehát $|A| = |B| = 4$, illetve minden fokszám 13. Mivel ez egy 13-reguláris gráf, ezért Kőnig

[2] **Kőnig Dénes** (Budapest, 1884. szeptember 21. – Budapest, 1944. október 19.) magyar matematikus, az első gráfelméleti könyv szerzője. Matematikai tanulmányait 1902-től a budapesti és a göttingeni egyetemen végezte, 1907-ben doktorált a Budapesti Műszaki Egyetemen. 1935-ben professzori címet kapott.

tétele miatt létezik benne teljes párosítás. Színezzük ki 1–es színnel az első teljes párosításbeli éleket, majd hagyjuk el őket a gráfból. Így maradt egy $|A| = |B| = 4$ csúcsú, illetve 12-reguláris gráfunk, melyben Kőnig tétele miatt létezik teljes párosítás. Tehát minden megtalált teljes párosítást kiveszünk a gráfból, mely után marad egy eggyel kisebb reguláris gráfunk. Ezt addig tudjuk ismételni, amíg már csak páronként 1-1 él marad, melyeket ha kiszínezünk a 13–adik színnel, akkor megtaláltuk a 13-adik teljes párosítást is.

A példa általánosabb megfogalmazásával beláthatjuk következményünket is!

**2.1.1. Következmény.** Egy r-reguláris páros gráf esetében $\chi' = r$.

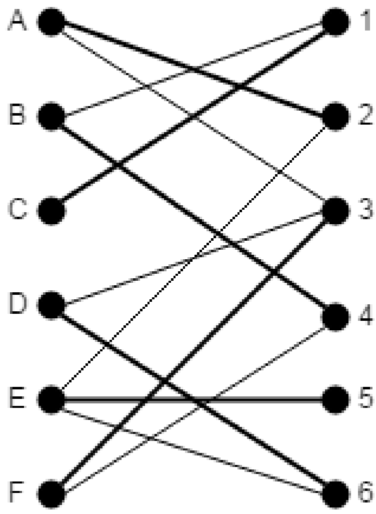
**2.1.1. Bizonyítás (2.1.1. Következmény).** Kőnig tétele kimondja, hogy egy r-reguláris páros gráfban létezik teljes párosítás. Színezzük ki ezeket az éleket az 1. színnel, majd hagyjuk el őket a gráfból. Így marad egy (r-1)-reguláris páros gráfunk, hiszen minden csúcsból pontosan 1 élt hagytunk el, így minden csúcs fokszáma pontosan 1-gyel csökkent. Az új, (r-1)-reguláris gráfon ismét alkalmazhatjuk Kőnig tételét. A megtalált teljes párosítást színezzük ki a 2. színnel, majd hagyjuk el ezeket az éleket is, így kapunk egy (r-2)-reguláris páros gráfot. Az eljárást addig folytassuk, míg az r-edik színnel kiszínezhetjük az utolsó teljes párosításbeli éleket is. Így pontosan r színnel tudtuk kiszínezni az éleket, ennél kevesebbel nem tudjuk, hiszen minden csúcsnak r a fokszáma és az egy csúcsból kiinduló éleket különböző színűekre kell színeznünk.

***

## 2.2. Frobenius tétele

Kőnig tétele túlságosan erős feltételt ad a teljes párosítás létezéséhez. Lássunk egy példát arra is, amikor a tétel második fele nem teljesül, azaz a gráf nem reguláris, de mégis van benne teljes párosítás:

**2.2.1. Példa.** Egy menhelyen van 6 kutya és van 6 ember, aki szeretne a kutyák közül örökbefogadni egyet. Azt szeretnénk, hogy minden kiskutyának legyen gazdája. Mivel 6 különböző kutyáról és emberről beszélünk, így az ízlésük és szempontjaik is eltérőek. Egy G gráfban az örökbefogadókat jelöljük A-F–ig betűkkel, a kutyákat 1-6–ig számokkal, az élekkel pedig az örökbefogadási szándékot fejezzük ki:




*2.2.1. Ábra. Menhely.*

A példán látható, hogy a teljes párosítás létezésének nem szükséges feltétele a regularitás. De akkor honnan tudhatjuk, hogy egy gráfban létezik teljes párosítás? Vannak alapvető feltételeink. Mint azt már korábban megállapítottuk, ugyanannyi kutyának kell lennie, mint ahányan örökbe akarnak fogadni. Mindenkinek kell találnia legalább 1 neki tetsző kutyát, illetve az is problémát okozna, ha két ember csak és kizárólag ugyanazt az 1 kutyát szeretné elvinni. Ugyanakkor, ha három embernek ugyanaz a 2 kutya tetszene és más nem, akkor is egyedül távozna valaki. Milyen feltétel biztosíthatná ezen problémák elkerülését?

Jelen példában ez azt jelenti, hogy az örökbefogadókból akárhogy választunk ki k embert, biztosan elvinnének legalább k kiskutyát (azaz legalább k csúccsal össze vannak kötve). Ez nyilvánvalóan szükséges ahhoz, hogy mindenki haza tudjon vinni egy kutyát.

Most nézzük a teljes párosításról szóló legalapvetőbb, Ferdinand Georg Frobenius[3] német matematikus tételét!

**2.2.1. Jelölés.** Egy G(A,B; E) páros gráfban X ⊆ A-ra G(X) azon b ∈ B csúcsok halmaza, amelyre van olyan x ∈ X , hogy {b,x} él.

**2.2.1. Tétel (Frobenius tétel).** A G = (A,B; E) páros gráfban akkor és csak akkor létezik teljes párosítás, ha |A| = |B| és minden X ⊆ A : |G(X)| ≥ |X|.

**2.2.1. Megjegyzés.** A feltételt, miszerint minden X ⊆ A : |G(X)| ≥ |X| Hall-feltételnek nevezzük.

**2.2.1. Bizonyítás (Frobenius tétel).** A bizonyítás során a tétel feltételének eleget tevő gráfokat „jó” gráfoknak nevezzük. Egy G = (A,B; E) páros gráf tehát „jó”, ha |A| = |B| és tetszőleges k db A–beli pont legalább k db B-beli ponttal van összekötve (tehát teljesül a Hall-feltétel).

A tétel előtti példában lényegében meggondoltuk, hogy minden olyan gráf „jó”, amelyben létezik teljes párosítás, bizonyítanunk tehát csak ennek megfordítását kell, azaz hogy minden „jó” gráfban létezik teljes párosítás.

Ha a gráfnak két pontja van, akkor a „jóság” egyszerűen annyit jelent, hogy a két pont össze van kötve. Egy gráfban tehát akkor létezik teljes párosítás, ha létezik 2 pontú „jó” gráfokból álló felbontása.

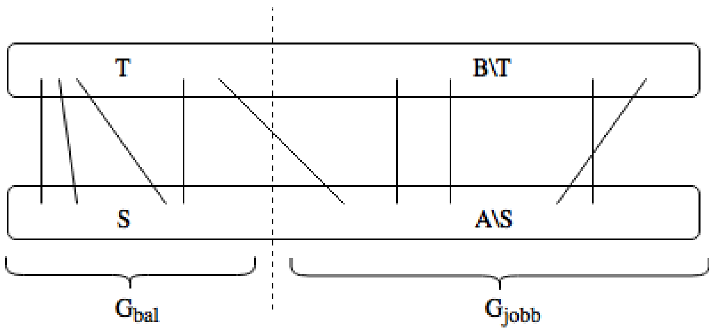
Ezt teljes indukcióval fogjuk ellenőrizni. A gráfokat két „jó” részre bontjuk, melyekben indukciós feltevésünk szerint létezik teljes párosítás és így az eredeti gráfban is létezik.

[3] **Ferdinand Georg Frobenius** (Berlin, 1849. október 26. – Charlottenburg, 1917. augusztus 3.) német matematikus. 1875-től a zürichi Szövetségi Műegyetem, 1879-ben Über Gruppen von vertauschbaren Elementen (A permutálható elemű csoportokról) címmel publikálta az absztrakt csoportokkal kapcsolatos felfedezéseit. 1893-tól a Berlini Egyetem professzora.

Először válasszunk ki egy $a \in A$ és $b \in B$ pontot, melyeket él köt össze. Bontsuk fel a gráfot úgy, hogy egyik halmaza legyen {a,b}, a másik pedig a többi pontból álló halmaz. Az első közülük nyilván „jó", a másik már nem feltétlenül, itt ugyanis lehet k darab bal oldali pontból álló $S \neq \emptyset$ részhalmaz ($S \subseteq A \backslash \{a\}$), hogy $|(G - \{a, b\})(S)| < |S|$. Az eredeti gráfban S pontjaira teljesül a Hall-feltétel, azaz legalább k ponttal össze vannak kötve, ez pedig csak úgy lehetséges, ha a k-adik pont maga a b. Jelölje T ($T \subseteq B$) az S pontjaival szomszédos pontok halmazát az eredeti gráfban, mely így tartalmazza a b pontot is, így $|S| = |T|$. Tehát $G(S) = T$.

Most próbálkozzunk egy másik felbontással: ebben az egyik rész legyen $G_{bal} = S \cup T$ (a köztük haladó élekkel), a másik pedig, $G_{jobb}$ a többi pont és él, azaz $(A \backslash S) \cup (B \backslash T)$. Egyik részhalmaz sem lehet üres, ugyanis $G_{bal}$-nak biztosan elem b, $G_{jobb}$-nak pedig biztosan eleme a.

$G_{bal}$ -ról tudjuk, hogy jó, hiszen $|S| = |T|$, illetve S–re teljesül a Hall-feltétel, mivel feltevésünk szerint az eredeti gráfban is teljesül rá. Formálisan $X \subseteq S -$ re $G_{bal}(X) = G(X)$, mert S minden szomszédja T-ben van és $T \subseteq G_{bal}$.




*2.2.2. Ábra.*

Nézzük most $G_{jobb}$-ot! Vegyük ennek egy $Y \subseteq A$ részhalmazát, melyre előfordulhat, hogy nem teljesül rá a Hall-feltétel, azaz $\left|G_{jobb}(Y)\right| < |Y|$. Mivel az eredeti gráfban az Y részhalmazra is teljesül a Hall-feltétel, ez csak úgy lehetséges, hogy Y–ból mennek élek T–be is. Legyen $Z = S \cup Y$, erre $G(Z) = G_{jobb}(Y) \cup T$. Így már teljesül, hogy

$$|G(Z)| = |T \cup G_{jobb}(Y)| \geq |S \cup Y| = |Z|.$$

Mivel

$$\left|T \cup G_{jobb}(Y)\right| = |T| + \left|G_{jobb}(Y)\right| \geq |S \cup Y| = |S| + |Y|,$$

amiből $|T| = |S|$, így beláttuk, hogy $\left|G_{jobb}\ (Y)\right| \geq |Y|$.

Így pedig G-t fel tudtuk bontani két „jó” részre (2.2.2. Ábra), melyekben létezik teljes párosítás, tehát G-ben is létezik teljes párosítás.

***

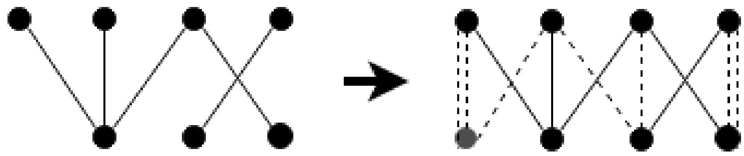
Innen már könnyű lesz belátni Kőnig tételét:

**2.2.2. Bizonyítás (Kőnig tétel).** Legyen a $G = (A,B;\ E)$ páros gráf r-reguláris. Ekkor G-ben az élek száma $|E| = |A| \cdot r = |B| \cdot r$. Így valóban $|A| = |B|$. Ugyanezt az ötletet használjuk a $G(X)$-re vonatkozó feltétel ellenőrzésekor. Tekintsük azt a $G'$ páros gráfot, amelynek két osztálya $X$ és $G(X)$, élei pedig G ezen két részhalmaza között menő élek. Ebben a részgráfban X minden csúcsának foka r, G(X) minden csúcsának foka legfeljebb r, hiszen G(X) egy csúcsából mehet nem X-beli csúcsba is él. Így a $G'$ éleinek száma $|X| \cdot r$, ami legfeljebb $|G(X)| \cdot r$. Ebből következik, hogy $|X| \leq |G(X)|$, vagyis a Frobenius tételbeli mindkét feltétel teljesül, azaz van teljes párosítás G-ben. Észrevehetjük, hogy számolásunk során a gráf egyszerűségére nem volt szükség.

***

**2.2.1. Következmény.** Tetszőleges páros gráfban létezik olyan párosítás, mely az összes maximális fokú pontot fedi.

**2.2.3. Bizonyítás (2.2.1. Következmény).** Legyen G a páros gráfunk, melyben a maximális fokszám $\Delta(G)$. Ekkor G–t egészítsük ki élekkel úgy, hogy minden pont foka $\Delta(G)$ legyen, illetve csúcsokkal, úgy, hogy $|A| = |B|$ teljesüljön. Tehát vagy $|A|$ - $|B|$ darab csúccsal a B halmazt vagy $|B|$ - $|A|$ darab csúccsal az A halmazt egészítjük ki. Mivel a gráfban többszörös élek is lehetnek, ezt könnyű megtenni. A 2.2.3. Ábra ezt illusztrálja.



*2.2.3. Ábra.*

Az így kapott gráfunk legyen G', mely egy Δ(G)-reguláris gráf, ahol |A| = |B|, így Kőnig tétele alapján tudjuk, hogy létezik benne teljes párosítás. Mivel a teljes párosítás az összes csúcsot fedi, így ha a párosítás megtalálása után elhagyjuk az utólag berajzolt éleket, illetve csúcsokat, akkor egy olyan párosításunk marad, mely fedi az összes maximális fokú, azaz Δ(G) fokú csúcsot. Hiszen ezeknek a pontoknak az eredeti gráfban is Δ(G) volt a fokszámuk, így nekik nem volt szükségük plusz élekre, tehát a maximális fokú pontok változatlanok maradtak a kibővített gráfban. Tehát a G-ben maximális fokú csúcsokból kiinduló G'-beli párosított élek az eredeti G gráfban vannak.

***

## 2.3. Hall tétele

Mi a helyzet akkor, hogy ha több kutya van, mint ahányan szeretnének örökbefogadni? Nyilvánvaló, hogy ekkor az |A| = |B| feltétel nem teljesül, így teljes párosítást nem találhatunk. A kutyák vannak többen, tehát |B| > |A|, így akármilyen párosítást is találunk legalább |B| - |A| pont fedetlenül fog maradni. Próbáljuk kihozni így a maximumot, tehát csak azt szeretnénk, hogy mindenki vigyen el egy kiskutyát és elfogadjuk azt, hogy sajnos lesz, aki gazdátlanul marad. Gráfok nyelvén ez azt jelenti, hogy megelégszünk egy A-t fedő párosítással, azaz hogy minden A-beli pontból kiinduljon egy párosításbeli él.

**2.3.1. Tétel (Hall[4] tétele).** A $G = (A,B;\, E)$ páros gráfban akkor és csak akkor létezik A-t fedő párosítás, ha A-ra teljesül a Hall-feltétel, azaz minden $X \subseteq A : |G(X)| \geq |X|$.

Többféleképpen is be lehet bizonyítani a tételt. Lemásolhatnánk a Frobenius tétel bizonyítását (ezt nem tesszük meg), de vissza is vezethetjük rá egy olyan trükkel, melynek már korábban is hasznát vettük, amikor is fiktív pontokat, illetve éleket vettünk hozzá a gráfunkhoz.

**2.3.1. Bizonyítás (Hall tétele).** A Hall-feltétel szükségessége itt is nyilvánvaló, hiszen azt szeretnénk, hogy minden A-beli csúcsból kiinduljon egy párosításbeli él. A párosított él másik végpontja csak B-ben lehet és egy pont legfeljebb egy párosított él végpontja lehet. Hogy ez megvalósulhasson, minden A-beli X részhalmazra teljesülnie kell, hogy legalább annyi szomszédjuk van B-ben, ahányan ők is vannak (ez pedig maga a Hall-feltétel).

Most be kell látnunk az elégségességet: $X = A$ -ra alkalmazva a Hall-feltételt, azt kapjuk, hogy $|A| \leq |G(A)| \leq |B|$ (hiszen $G(A) \subseteq B$). Vegyünk hozzá A-hoz $|B| - |A|$ darab fiktív csúcsot, és ezek mindegyikét kössük össze B minden pontjával. Így egy $G^* = (A^*,B;\, E^*)$ páros gráfot kapunk, ahol $A^* = A \cup$ „fiktív pontok” és $E^* = E(G) \cup$ „fiktív élek”.

Frobenius tételével megmutatjuk, hogy $G^*$-ban van teljes párosítás. Világos, hogy $|A^*| = |B|$. Legyen $X \subseteq A^*$. Ha X tartalmaz fiktív pontot, akkor $G^*(X) = B$ (hiszen a fiktív csúcsok minden B-beli ponttal össze vannak kötve), így $|G^*(X)| = |B| = |A^*| \geq |X|$. Ha X nem tartalmaz fiktív pontot, azaz $X \subseteq A$, akkor $G^*(X) = G(X)$, így ebben az esetben is teljesül a Hall-feltétel. Tehát a Hall-feltétel igaz $G^*$-ra és $|A^*| = |B|$, alkalmazható tehát a Frobenius tétel, így $G^*$-ban van teljes párosítás. Ezek közül a nem fiktív csúcsokból induló élek (melyek az eredeti G élei) egy A-t fedő párosítást adnak G-ben.

***

[4] **Philip Hall** (Hampstead, 1904. április 11. – Cambridge, 1982. december 30.) angol matematikus. Elnöke volt a Londoni Matematikai Társaságnak 1955-1957, elnyerte a Berwick-díjat 1958-ban és a De Morgan Medalt 1965-ben.

A Hall tétel szinte triviális következményeként is belátható Frobenius tétele:

**2.3.2. Bizonyítás II (Frobenius tétele).** A két feltétel szükségessége nyilvánvaló. Ha viszont teljesül is a Hall-feltétel, akkor Hall tétele miatt van benne A-t fedő párosítás. Mivel azonban $|A| = |B|$, ez lefedi B-t is.

***

**2.3.1. Megjegyzés.** Ha $|A| = |B|$ és A–ra teljesül a Hall-feltétel, akkor B–re is teljesül. Ez Frobenius tételét kétszeri felhasználásából könnyen következik, de anélkül is belátható.

**2.3.3. Bizonyítás (2.3.1. Megjegyzés).** Tegyük fel, hogy A–ra teljesül a Hall-feltétel, B–re viszont nem. Legyen $Y \subseteq B$ egy ilyen részhalmaz és Y összes szomszédját jelöljük $G(Y) \subseteq A$ –val és mivel a Hall-feltétel nem teljesül, így $|Y| > |G(Y)|$.

Most legyen $X = A \setminus G(Y)$ és így $G(X)$ legfeljebb $B \setminus Y$ lehet, mivel Y összes szomszédja $G(Y)$ –ban van.

Mivel $|A| = |B|$ és $|G(Y)| < |Y|$, ezért

$$|X| = |A \setminus G(Y)| > |G(X)| = |B \setminus Y|.$$

Tehát A–ra sem teljesül a Hall-feltétel.

***

## 2.4. Deficites Hall tétel

Az örökbefogadás problémájához visszatérve, vizsgáljuk a helyzet, mikor ahhoz se ragaszkodunk, hogy mindenki vigyen kiskutyát, már azzal is megelégszünk, ha legfeljebb d ember távozik egyedül. Ez a gráfok esetében azt jelenti, hogy olyan párosítást szeretnénk, hogy legfeljebb d párosítatlan csúcs legyen A-ban. Erre fog választ adni a deficites Hall tétel.

**2.4.1. Megjegyzés.** Egy $G = (A,B; E)$ páros gráfban $|A| \neq |B|$, az A –beli pontok minden fokszáma r, B–beli pontok fokszáma pedig s. Ha $r > s$, akkor a gráfban létezik A–t fedő párosítás.

**2.4.1. Bizonyítás (2.4.1. Megjegyzés).** Mivel egy páros gráf minden élének egyik végpontja A–ban, másik végpontja pedig B-ben van, így $|A| \cdot r = |B| \cdot s$. Így nyilvánvaló, hogy ha $r > s$, akkor $|A| < |B|$, tehát csak A–t fedő párosítást találhatunk a gráfban.

Egészítsük ki az A osztályt |B| - |A| db ponttal, majd minden B-beli pontból indítsunk r – s db élt A fiktív csúcsaiba, úgy, hogy végül a fiktív csúcsoknak is r legyen a fokszámuk. Ez biztosan lehetséges, hiszen

$$(|B| - |A|) \cdot r = |B| \cdot (r - s),$$

ugyanis

$$|B| \cdot r - |A| \cdot r = |B| \cdot r - |B| \cdot s,$$

ahol tudjuk, hogy $|A| \cdot r = |B| \cdot s$. Tehát a gráf valóban kiegészíthető, úgy, hogy kapjunk egy r-reguláris páros gráfot, ahol az $A^* := A \cup$ „fiktív csúcsok” jelöléssel $|A^*| = |B|$ teljesül.

Kőnig télele miatt pedig tudjuk, hogy ilyen feltételek mellett a gráfban létezik teljes párosítás. Ha pedig a megtalált párosítás után elhagyjuk az utólag behúzott éleket, illetve csúcsokat, egy A-t fedő párosításunk marad.

***

**2.4.2. Bizonyítás II (2.4.1. Megjegyzés).** Ellenőrizhetjük közvetlenül is a Hall-feltételt. Legyen $X \subseteq A$ és tekintsük az $X \cup G(X)$ által feszített (páros) részgráfot. Ebben X csúcsainak foka r, a G(X) csúcsainak foka pedig $\leq s$. Megszámolva az élek számát (mint a Frobenius tétel következményeként, a Kőnig tétel 2.2.2. Bizonyításában) azt kapjuk, hogy

$$|X| \cdot r = \text{élszám} \leq |G(X)| \cdot s,$$

amiből $r > s$ miatt következik:

$$|X| \leq |X| \cdot \frac{r}{s} \leq |G(X)|.$$

***

**2.4.1. Definíció (deficit).** A $G = (A,B;\ E)$ páros gráfban egy $X \subseteq A$ halmaz deficitje a $\operatorname{def} G(X) = |X| - |G(X)|$ mennyiség. (Ha $X = \emptyset$ : $\operatorname{def}(\emptyset) = 0$)

Tehát a deficit az $X \subseteq A$ részhalmaz elemszámának, valamint szomszédjainak (melyek mindegyike B-beli) számának különbsége. Ahogy azt már a Hall tételnél felfedeztük, ha $|B| > |A|$, akkor legalább $|B|$ - $|A|$ csúcs fedetlenül marad B-ben. Ugyanezt a gondolatot vizsgáljuk A részhalmazaira.

**2.4.1. Tétel (Deficites Hall tétel).** A $G = (A,B;\ E)$ páros gráfban akkor és csak akkor létezik A-t legfeljebb d csúcs híján fedő párosítás, ha minden $X \subseteq A$ : $|G(X)| \geq |X| - d$ minden $X \subseteq A$ -ra.

**2.4.3. Bizonyítás (Deficites Hall tétel).** A feltétel szükségessége megint nyilvánvaló, hiszen ha valamely $X \subseteq A$ : $|X| - |G(X)| > d$, akkor X csúcsai közül több mint d-nek nem lesz párja. Az elégségesség bizonyítása ismét fiktív pontok bevezetésével történhet. Vegyünk hozzá B-hez d darab fiktív csúcsot (ezek halmaza legyen D), és ezeket kössük össze A minden csúcsával. A $B^* = B \cup D$, illetve $E^* = E(G) \cup$ „fiktív élek” jelölést használva így legyen $G^* = (A,B^*;\ E^*)$.

Megmutatjuk, hogy G*-ban az A osztályra teljesül a Hall-feltétel. Legyen $X \subseteq A$, ekkor $G^*(X) = G(X) \cup D$, így

$$|G^*(X)| = |G(X)| + |D| \geq |X| - d + d$$

a tételbeli feltétel miatt. Frobenius tétele alapján G*-ban van tehát A-t fedő párosítás. Ebből legfeljebb d darab él megy fiktív csúcsba, így a párosítás G-beli élei legfeljebb d csúcs híján fedik A-t.

***

A deficites Hall tétel segítségével megállapíthatjuk azt is, mekkora lehet a maximális párosítás G-ben.

**2.4.1. Következmény.** $\nu(G) = |A| - \max\{\text{def } G(X) : X \subseteq A\}$ bármely $G = (A,B;\ E)$ páros gráfban.

**2.4.4. Bizonyítás (2.4.1. Következmény).** Legyen $d_0 = \max\{\text{def } G(X) : X \subseteq A\}$ a maximális deficit értéke. Mivel minden $X \subseteq A$ halmaz deficitje legfeljebb $d_0$, a deficites Hall-tétel alapján létezik A-t $d_0$ híján fedő párosítás, azaz $\nu(G) \geq |A| - d_0$. Másrészt a maximális deficitet valahol elérjük, azaz van olyan $X_0 \subseteq A$, amelyre $\text{def } G(X_0) = d_0$, tehát minden párosítás legalább $d_0$ csúcsot fedetlenül hagy A -ból, azaz $\nu(G) \leq |A| - d_0$.

***

## 2.5. Kőnig tétele

**2.5.1. Tétel (Kőnig tétele).** Páros gráfban $\nu = \tau$, azaz a független élek maximális száma megegyezik a lefogó pontok minimális számával.

**2.5.1. Bizonyítás (Kőnig tétele).** Legyen a páros gráf $G = (A,B;\ E)$. A 2.4.1. Következmény szerint

$$\nu = |A| - d_0, \text{ ahol } d_0 = \max\{|X| - |G(X)| : X \subseteq A\}.$$

Tekintsünk egy $X_0 \subseteq A$ -t, amelyre $|X_0| - |G(X_0)| = d_0$. Ekkor $L = (A \setminus X_0) \cup G(X_0)$ lefogó csúcshalmaz, hiszen az $X_0$ pontjaiból induló élek másik végpontját $G(X_0)$ tartalmazza, az $A \setminus X_0$ -ból induló éleket pedig $A \setminus X_0$ fogja le. Mivel $|L| = |A| - |X_0| + |G(X_0)| = |A| - d_0$, így találtunk $\nu$ pontú lefogó csúcshalmazt. Mivel a gráfban van $\nu$ független él, ezért ennél kevesebb ponttal nem is lehet lefogni az éleket.

***

# 3. fejezet

# Javító és majdnem javító utak

A fejezetet [1] és [5] alpján dolgoztam fel.

Rendelkezésünkre áll a teljes párosítás létezésének egy szükséges és elégséges feltétele. Azt a feltételt, miszerint $|A| = |B|$ még könnyű ellenőrizni, ám a Hall-feltétel teljesülését már annál nehezebb. Ha például van egy 300 pontos gráfunk, hogy leellenőrizzük, hogy minden részhalmazára teljesül-e a feltétel, szinte elképzelhetetlen nagyságú számokkal kellene megbirkóznunk, hiszen ekkor $2^{300}$ részhalmazt kellene megvizsgálnunk. Célunk tehát, hogy algoritmikusan ennél gyorsabban megtaláljuk a párosítást.

**3.1. Definíció (Javító út).** Egy gráfban legyen P egy párosítás. Egy út javító út P-re nézve, ha P nem fedi a végpontjait és az élei felváltva P-beliek és P-n kívüliek.

**3.2. Definíció (Majdnem javító út).** A javító utakat és részeiket, vagyis az olyan utakat, melyek párosítatlan csúcsból indulnak és minden második éle párosításbeli, de a többi nem, majdnem javító útnak vagy alternáló útnak nevezzük.

Nézzünk egy másik bizonyítási módszert a Hall tételre, melyben javító utak segítségével látjuk be a tételt!

**3.1. Bizonyítás II (Hall tétele).** Nyilvánvaló, hogy ha van A-t lefedő párosítás, akkor teljesül a feltétel, hiszen ekkor a párosítás élei minden ponthoz egyértelműen hozzárendelnek egy B-beli pontot.

Tegyük most fel, hogy teljesül a Hall-feltétel és lássuk be, hogy ekkor van A-t lefedő párosítás. Tegyük fel, hogy van egy P párosításunk, ami lefedi $X \subseteq A$ halmazt, de még van olyan $u \in A \setminus X$ pont, amit nem. Jelöljük X'-vel a B-beli, P által lefogott csúcsok halmazát. Ha u-nak van szomszédja $B \setminus X'$-ben, akkor egy élet hozzávehetünk P-hez. Lehetséges azonban, hogy u-nak minden szomszédja X'-ben van. Ekkor is előfordulhat, hogy javító úttal növelni tudjuk a párosítás élszámát, úgy hogy az éleket felcseréljük (ami párosított él volt, fedetlen él lesz, ami fedetlen él volt, az lesz a párosított él). Ekkor egy éllel nagyobb lesz párosításunk, mivel a javító út páratlan hosszú.

Tegyük fel, hogy már javító úttal sem növelhetjük a párosítást. Belátjuk, hogy ekkor már P lefedi A-t. Legyen T' azon B-beli pontok halmaza, melyek elérhetők u-ból majdnem javító úttal, az 1 él hosszúságú utak is majdnem javító útnak tekinthetőek. Azaz T' a már párosított B-beli csúcsok halmaza, jelöléssel $T' \subseteq X'$, ugyanis ha lenne nem párosított T'–beli csúcs, akkor létezne javító út, ami ellentmond a feltevésünknek. Jelölésünk szerint T a T'-beli pontok párja és nyilván $T \subseteq X$.

Tehát az $u \in A \setminus X$–beli párosítatlan pontból majdnem javító úton eljuthatunk T', illetve T csúcsaihoz. Más csúcsot azonban u-ból induló majdnem javító úttal nem érinthetünk, ugyanis, ha $X' \setminus T'$–beli ponthoz jutnánk, annak T'–belinek kellene lennie, T' definíciója szerint. Illetve, ahogy már megállapítottuk $B \setminus X'$ csúcsot sem érinthetünk, hiszen az javító út lenne, melynek létezését már kizártuk.

Az A–beli pontok közül szintén csak a T–beli pontokat érinthetjük majdnem javító úttal, T definíciója szerint. Így $G(T) = T'$ is teljesül, máskülönben u-ból lenne majdnem javító út T'-n kívül is.

Mivel T és T' összes pontja fedett a párosítás által, illetve nyilvánvalóan ezen párosításbeli {x,y} élek esetén $x \in T$ és $y \in T'$, ebből pedig következik, hogy $|T| = |T'|$, tehát az $u \in A \setminus X$ ponttal:

$$|T \cup \{u\}| > |T'| = |G(T \cup \{u\})|,$$

tehát nem teljesül a Hall-feltétel.

***

A Hall tétel II bizonyítása során láthattuk, hogy javító utakkal meg tudtuk találni az A-t fedő párosítást. Általánosabban, ez a módszer arra is alkalmas, hogy megtaláljuk a maximális méretű párosítást. A kérdés tehát az, hogy hogyan találunk javító utakat. Próbáljunk teljes párosítást konstruálni úgy, hogy kiindulunk egy üres halmazból és élenként építjük fel. Kiválasztunk két pontot és a köztük lévő élt megjelöljük. Ezután kiválasztunk újabb két pontot és a köztük lévő élt szintén megjelöljük. Ezt addig folytatjuk, amíg csak tudjuk, végül a megjelölt élek adnak egy M párosítást, melyet mohó párosításnak is nevezhetünk. Mohó, mivel a későbbi választásokat figyelmen kívül hagyva jelölünk meg minden élt, tehát nem biztos, hogy a legoptimálisabban választunk. Ha már mohó módon nem tudjuk bővíteni a párosítást, akkor a fedetlen csúcsokból megpróbálunk javító utat keresni. Minden javító út – az élek felcserélésével - eggyel növeli párosításunk méretét. Mivel egy javító út páratlan hosszú, tehát első és utolsó éle is párosítatlan, illetve fedetlen csúcsból indulunk és érkezünk.

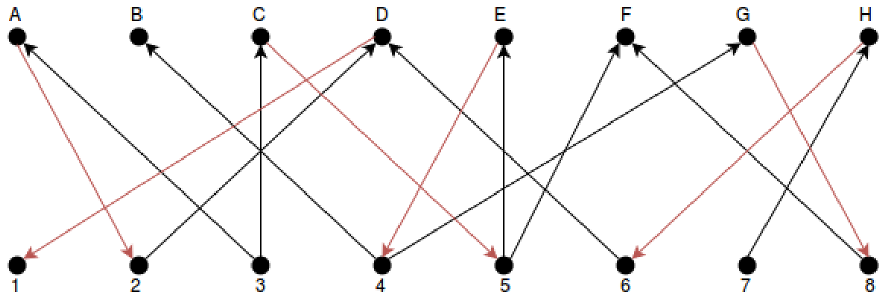
## 3.1. Javító út keresés szélességi kereséssel

Ezzel az eljárással a már meglévő párosításunkat szeretnénk növelni, úgy hogy egy úgynevezett elérési listában tároljuk a csúcsokat, majd sorban megnézzük a listába került csúcsok szomszédait és ha egy fedetlen csúcshoz érünk, akkor találtunk egy javító utat.

Első lépésként A és B között irányítjuk az éleket. A párosított éleket irányítsuk $a \in A$ -ból $b \in B$ -be, a többit, azaz a párosítatlan éleket pedig B-ből A-ba.

A táblázatunk (lista) felső sorába fognak kerülni először a B-beli fedetlen csúcsok. Majd sorba vesszük azok irányítás szerinti szomszédait és beírjuk őket. Fontos, hogy ha már egy csúcs bekerült a felső sorba, azt már többet oda nem írjuk be. Illetve minden csúcs alá beírjuk, hogy mely csúcs szomszédjaként került be a listába (kivéve természetesen az elején beírt fedetlen csúcsoknál).

Sorrendben végignézzük az összes felső sorbeli csúcsot és az eljárás szerint feltöltjük a táblázatot.




*3.1.1. Ábra.*

| Elérési lista | 3 | 7 | A | *C* | H | 2 | *5* | 6 | D | E | *F* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Honnan | | | 3 | *3* | 7 | A | *C* | H | 2 | 5 | *5* |

Amennyiben fedetlen csúcshoz érünk, akkor javító utat találtunk, melyet vissza tudunk vezetni az először bevitt fedetlen csúcsok egyikéhez. A példánkban az F fedetlen csúcsba értünk 5-ből, melynek C volt a párosításbeli párja, C-t pedig 3 szomszédjaként írtuk fel, mely szintén fedetlen csúcs volt. A javító utunk tehát 3 – C – 5 – F. A javító útban szereplő élek irányítását felcseréljük, majd az új élekkel elölről kezdjük az eljárást (ha van még fedetlen csúcs).

Azonban ha nem érkeztünk fedetlen csúcshoz, de a listát már nem tudjuk folytatni, ugyanis nincs olyan csúcs, amit beírhatnánk, akkor a párosítás méretét már nem is tudjuk tovább növelni, a most következő tétel szerint.

**3.1.1. Tétel.** Legyen G = (A,B; E) egy páros gráf és P egy a gráfban lévő párosítás. Ha P nem maximális párosítás, akkor létezik javító út P-re nézve.

**3.1.1. Bizonyítás (3.1.1. Tétel).** Mivel P nem maximális párosítás, így biztosan létezik egy legalább eggyel nagyobb, M párosítás a gráfban. Tehát $|E(P)| + 1 \leq |E(M)|$.

Figyelmen kívül hagyhatjuk most azokat a csúcsokat, melyek mindkét párosításban fedetlenek, illetve azokat az éleket is, melyek P-ben és M-ben megegyeznek. Tehát mindkét párosítás által fedettek.

Mivel P is és M is független élhalmaz, így egy csúcs mindkét párosításban csak egy él végpontja lehet. Tehát P-beli és M-beli él vagy megegyezik (azaz mindkét végpontja azonos) vagy felváltva követik egymást (tehát csak az egyik végpont egyezik meg), melyek így vagy utakat vagy páros köröket alkothatnak. Tudjuk, hogy M legalább egy eggyel nagyobb párosítás P-nél, így biztosan van egy olyan komponens, amiben több M-beli él van, mint P-beli, azaz lesz egy olyan páratlan hosszú út, ami M-beli éllel kezdődik, illetve végződik. Ez a páratlan hosszú út lesz a javító út P-re nézve.

***

Mivel a tétel bizonyítása során nem kellett felhasználnunk, azt, hogy páros gráfról beszélünk, így a tétel általános gráfokra is igaz. Ez a tétel át is vezet minket a következő fejezethez.

# 4. fejezet

# Párosítások általános gráfokban

Ezt a részt [2] könyv alapján dolgoztam ki.

Továbbiakban legyen $G = (V; E)$ tetszőleges gráf, melyben szeretnénk megtalálni a teljes párosítást, feltéve, hogy van benne. Ahogyan a páros gráfok esetében, nyilvánvalóan itt is vannak szükséges feltételek. Például $|V(G)|$-nek párosnak kell lennie, hiszen ha a gráfnak páratlan sok pontja van, akkor nyilvánvalóan marad fedetlen pontja, hiszen minden párosított élnek két különböző végpontja van. Illetve mivel nem követeljük meg, hogy a gráf összefüggő legyen, hiába páros a gráf csúcsainak száma, ha két páratlan sok csúcsot tartalmazó komponensből áll. Hiszen így mind a két komponensben marad legalább 1-1 párosítatlan csúcs. Tehát az első szükséges feltételünk hogy a gráf minden komponensének páros sok pontot kell tartalmaznia. Vezessünk is be egy jelölést!

**4.1. Jelölés.** Legyen $c_p(G)$ a G gráf páratlan, vagyis páratlan sok pontot tartalmazó komponenseinek száma.

Nos, tudhatjuk, hogy ez nem lesz elég feltétel a teljes párosítás létezésének megállapításához. Hiszen ahogy a páros, úgy az általános gráfoknál is problémát okoz, ha két pontnak ugyanaz az egy (és más nem), vagy három pontnak kizárólag ugyanaz a két pont a szomszédja.

Hogyan módosíthatnánk a Hall-feltételt úgy, hogy az minden gráf esetében segítséget nyújtson? Egy nem páros gráf sajnos sokkal kevésbé átlátható, csúcsait nem tudjuk két halmazra osztani, úgy, hogy csak a két halmaz között menjenek élek. Talán vizsgálhatnánk először mi is csúcsok egy X részhalmazát, illetve a maradék gráfunkat. Ha kivesszük X–et, akkor lehetséges, hogy a gráfunk komponensekre hullik. A komponensek párosak, páratlanok? Találunk bennük teljes párosítást? És ha az X–beli szomszédjukat hozzávesszük? Tehát jó ötletnek tűnik komponensenként vizsgálni a gráfot.

## 4.1. Tutte tétele

Lehet, hogy William Thomas Tutte[5] is az előbbi kérdésekkel kezdte és találta meg végül a megoldást. Mielőtt megnéznénk tételét ellenőrizzünk egy fontos állítást.

**4.1.1. Állítás.** Tegyük fel, hogy egy G gráf páros sok csúcsból áll, azaz $|V(G)|$ páros. Legyen X a csúcsok egy részhalmaza, tehát $X \subseteq V(G)$. Ekkor $|X|$ és $c_p(G-X)$ ugyanolyan párosságú, formálisan

$$|X| \equiv c_p(G-X) \qquad (\text{mod } 2).$$

**4.1.1. Bizonyítás (Állítás).** Az állítás egyértelmű, hiszen, két páros, vagy két páratlan szám összege lehet páros. Tehát ha van egy páros csúcsszámú gráfunk, melynek vesszük X páros csúcsszámú részhalmazát, akkor értelemszerűen $(G-X)$ is páros csúcsszámú. Ekkor, ha van $(G-X)$-ben páratlan komponens, akkor abból csak páros sok lehet, hiszen párosszor kell venni páratlan sok csúcsot, hogy végül páros sok legyen.

Ha $|X|$ páratlan, akkor $|(G-X)|$ is páratlan és páratlanszor páratlan az páratlan, tehát $c_p(G-X)$ is páratlan.

***

**4.1.1. Tétel (Tutte tétele).** Egy G gráfban akkor és csak akkor létezik teljes párosítás, ha minden $X \subseteq V(G)$-re $c_p(G-X) \leq |X|$, azaz akárhogy hagyunk el a gráfból néhány pontot,

[5] **William Thomas Tutte** (Newmarket, 1917. május 14. – Kitchener, 2002. május 2.), Brit, később kanadai kódfejtő és matematikus. A II. világháború idején a brit Bletchley Park matematikusai közé tartozott, akik megalkották a Colossust, az első programozható számítógépet, mellyel az Enigmát is feltörték, így képesek voltak visszafejteni a német haditengerészet üzenetváltásait és ezáltal nyomon követni az ellenséges haderők mozgásait.

a maradékban a páratlan komponensek száma az elhagyott pontok számánál több nem lehet.

A tétel bebizonyítása előtt, nézzük ha $X = \emptyset$. Ekkor, ha G-ben létezik teljes párosítás, a Tutte-feltétel szerint $c_p(G - X) \leq 0$, mely csak $c_p(G - X) = 0$ esetén teljesülhet, ez pedig azt jelenti, hogy $|V(G)|$ páros.

Most vegyük $X = 1$ –et, tehát egy G gráfból, melyben létezik teljes párosítás, elhagyunk 1 pontot. Ekkor a gráfban a maximális párosítás mérete $\frac{|V(G)|-1}{2}$, hiszen mivel az eredeti gráfban volt teljes párosítás, így azon élek behúzásával csak az az egy pont marad fedetlen, melynek az X-beli pont volt a párja. Ez viszont azt jelenti, hogy G-ben 1 db páratlan komponens lesz, mely tartalmazza az X-beli pont párját.

$X = 2$ –re vagy 2 olyan pontot távolítottunk el, melyek az eredeti gráf teljes párosításában egymás párjai vagy azonos komponensben vannak, így X elhagyásával nem keletkezik páratlan komponens. Ha pedig különböző komponensben vannak, akkor is legfeljebb 2 páratlan komponens jöhet létre, hiszen legfeljebb 2 pont híján van teljes párosítás a gráfban.

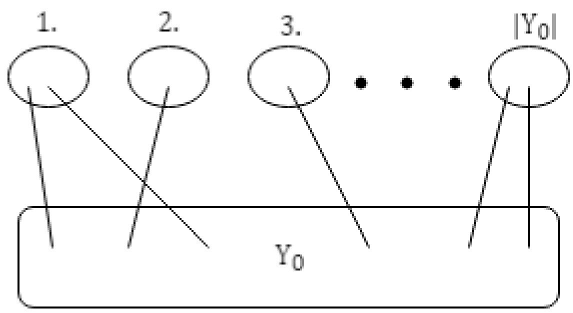
**4.1.1. Definíció (Gát).** Egy $Y \subseteq V(G)$ csúcshalmazt gátnak nevezünk egy G gráfban, ha $c_p(G - X) = |Y|$.

**4.1.2. Bizonyítás (Tutte tétele).** Ha G-ben van teljes párosítás, akkor nyilvánvalóan teljesül a feltétel. Hiszen ahogy fentebb is meggondoltuk, ha a gráfból elhagyjuk X-et, akkor a páratlan komponensek mindegyikéből megy legalább egy párosításbeli él X-be és nyilvánvalóan különböző pontokba. Tehát $c_p(G - X) \leq |X|$.

A csúcsok száma, azaz $|V(G)|$ páros, hiszen $X = \emptyset$ –ra csak így teljesülhet a Tutte-feltétel, ekkor $X = \emptyset$ gát is.

(1) Indirekt tegyük fel, hogy van olyan gráf, melyre teljesül a feltétel ($c_p(G - X) \leq |X|$), viszont nincs benne teljes párosítás. Legyen G egy minimális csúcsszámú ilyen gráf.

(2) Legyen $Y_0$ maximális pontszámú gát, tehát $c_p(G - Y_0) = |Y_0|$. Megmutatjuk, hogy $(G - Y_0)$–ban így egyáltalán nincsenek páros komponensek. Máskülönben, egy ilyen páros komponens egy s pontját ha $Y_0$-hoz hozzávennénk, akkor $Y_0 \cup \{s\}$ egy $Y_0$-nál nagyobb gát lenne. Hiszen s elhagyásával legalább egy újabb páratlan komponens keletkezne. Lássuk be azt is, hogy $Y_0$ minden pontja és a maradék gráf legalább egy komponense között van él. Ha $Y_0$ egy u pontjából nem menne él a páratlan komponensek egyikébe sem, akkor több páratlan komponensünk lenne, mint $Y_0 - \{u\}$. Tehát $\left(G - (Y_0 - \{u\})\right)$ -ra nem teljesülne a Tutte-feltétel. Fordítva, ha lenne olyan páratlan komponens, melyből nem megy él $Y_0$-ba, akkor az a komponens az eredeti gráfban is egy páratlan komponens lenne, tehát az eredeti G-ben nem létezne teljes párosítás.




*4.1.1. Ábra.*

(3) Lássuk be, hogy egy $G_p$ páratlan komponensből egy tetszőleges t pont elhagyásával a komponensben létezik teljes párosítás. Mivel $G_p$ páratlan, így $(G_p - \{t\})$ már páros sok pontot fog tartalmazni. Most vizsgáljuk meg hogy a $(G_p - \{t\})$-re teljesül-e a Tutte-feltétel. Mivel $G_p$ kevesebb csúcsot tartalmaz, mint G, ebből következik a teljes párosítás létezése $\left(G_p - \{t\}\right)$-ben.

Indirekt tegyük fel, hogy az $X \subseteq V\left(G_p - \{t\}\right)$ halmazra nem teljesül a feltétel, tehát

$$c_p\left(\left(G_p - \{t\}\right) - X\right) > |X|.$$

A 4.1.1. Állításból pedig következik, hogy mivel $c_p(G_p - \{t\} - X)$ és $|X|$ azonos paritású, így

$$c_p\left(\left(G_p - \{t\}\right) - X\right) \geq |X| + 2.$$

Ekkor viszont az eredeti G–ben az $Y_0$ gáttal (és a t elhagyásával páros komponensé vált $G_p$-vel):

$$c_p(G - Y_0 - \{t\} - X) \geq |Y_0| - 1 + |X| + 2 = |Y_0 \cup X \cup \{t\}|.$$

Viszont, mivel az eredeti gráfban teljesül a Tutte-feltétetel, így az egyenlőtlenség fordítva is igaz, ez pedig csak úgy lehetséges, ha egyenlőség áll fent. Ez pedig azt jelentené, hogy $|Y_0 \cup X \cup \{t\}|$ is gát, ekkor ellentmondásra jutunk, hiszen $Y_0$ a maximális gát. Ebből tehát az következik, hogy $G_p$-ben t elhagyásával valóban létezik teljes párosítás.

Ezen tények megállapítása után, minden páratlan komponenst helyettesítsünk egy ponttal. Ezt akár úgy is felfoghatjuk, hogy minden páratlan komponensből kivesszük a (3)-ban említett t pontot. Ezen pontok, illetve $Y_0$ pontjaival kapunk egy $G^* = (A,B)$ páros gráfot, ahol az A osztály $Y_0$ pontjai, a B osztály pedig a „t pontok" vagy másképp a $G - Y_0$ komponenseinek halmaza. Tudjuk, hogy a páratlan komponensek, azaz a „t pontok" száma $|Y_0|$, mivel $Y_0$ gát. Tehát a páros gráfunkra igaz, hogy $|A| = |B|$. Megmutatjuk, hogy teljesül rá a Hall-feltétel is, hiszen $A = Y_0$ minden X részhalmazára igaz, hogy legalább $|X|$ ponttal szomszédos. Máskülönben $Y_0 \setminus X := Z$ olyan részhalmaza az eredeti gráfnak, melyre nem teljesül az alapfeltételünk, tehát $c_p(G - Z) > |Z|$, ami ellentmond (1)-nek. Tehát Frobenius tétele alapján tudjuk, hogy $G^*$-ban létezik teljes párosítás, így viszont G–ben is létezik. G-ben húzzuk be a $G^*$-beli párosított éleket, a komponensek maradékában pedig (3) alapján tudjuk, hogy létezik teljes párosítás.

***

**4.1.2. Definíció (Élösszefüggőség).** Egy gráf 2–szeresen élösszefüggő, ha akárhogy hagyunk el a gráfból 2–nél kevesebb élt, a maradék gráf összefüggő marad.

**4.1.2. Tétel (Petersen[6]).** Ha G 3-reguláris, 2–szeresen élösszefüggő gráf, akkor létezik benne teljes párosítás.

**4.1.3. Bizonyítás (Petersen tétele).** Vegyük a G gráf egy X részhalmazát. Mivel a gráf 2–szeresen élösszefüggő, így legalább 2 élnek biztosan kell lennie X és G\X egy páratlan komponense között. Legyen $G_p$ egy páratlan komponens, tehát $\left|V(G_p)\right|$ páratlan. Ha $G_p$ és X között csak két él futna, akkor $G_p$ fokszámainak összege,

$$3 \cdot \left|V(G_p)\right| - 2$$

páratlan volna, melynek fele, azaz az élek száma nem lenne egész, ami nem lehetséges. Tehát egy páratlan komponens és X között páratlan számú és legalább 3 él fut.

Jelöljük t–vel az X–ből kiinduló élek számát, tehát G–ben t darab olyan él van melynek egyik végpontja X-ben, másik végpontja a gráf egy páratlan komponensében van. Ekkor

$$t \geq 3 \cdot c_p(G - X), \text{ illetve } t \leq 3 \cdot |X|,$$

tehát t legalább akkora, mint a páratlan komponensek 3–szorosa, hiszen minden komponensből legalább 3 él indul X-be. Illetve legfeljebb akkora lehet, mint az X részhalmaz 3–szorosa, mivel G 3-reguláris, tehát X minden pontjából legfeljebb 3 él lehet összekötve egy páratlan komponenssel. Ebből következik, hogy $c_p(G - X) \leq |X|$, amiből pedig Tutte-tétele miatt tudjuk, hogy G –ben létezik teljes párosítás.

***

[6] **Julius Peter Christian Petersen** (Dánia, Sjælland, Sorø, 1839. június 16. – Koppenhága, 1910. augusztus 5.) dán matematikus. 1862-ben felvételt nyert a Koppenhágai Egyetemre, ahol megkezdte matematikai tanulmányait. Arany medált kapott a „lebegő testek egyensúlya” témában írt tanulmányáért 1867-ben. Egyik alapítója a Danish Mathematical Society-nek, melyet 1873-ban hoztak létre.

## 4.2. Maximális párosítás becslése

Az utolsó szakaszban [6] és [7] forrásokat dolgoztam fel.

Mint tudjuk, nem minden gráfban létezik teljes párosítás, fogadjuk ezt el és próbáljuk megtalálni a maximális párosítást. Sajnos Kőnig tételére nem támaszkodhatunk, miszerint $\tau = \nu$, azaz a maximális független élhalmaz megegyezik a minimális lefogó csúcshalmazzal, mivel G nem feltétlenül páros.

Próbáljuk megbecsülni G–ben a maximális M párosítás méretét, azaz, hogy legfeljebb hány független élt találhatunk.

Legyen a $G = (V; E)$ gráfban $U \subseteq V$ a csúcsok egy halmaza. U–ban legfeljebb $|U|$ darab párosított él végpontja lehet. Tehát azt a lehetőséget sem zárjuk ki, hogy U minden pontja fedett az M párosítás által, illetve hogy ezen pontok mindegyike különböző él által van fedve. Továbbá G\U–ban a maradék párosítás mérete legfeljebb

$$\sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{|K_i|}{2} \right\rfloor$$

ahol $K_i$ G\U komponenseinek csúcshalmaza $i = 1, 2, \ldots k$ -ra. Tehát minden komponensben legfeljebb a csúcsok számának fele, páratlan komponens esetén pedig a csúcsok száma mínusz 1-nek a fele darab élt párosíthatunk. Tehát

$$|M| \leq |U| + \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{|K_i|}{2} \right\rfloor$$

amit átírhatunk a G\U páros, illetve páratlan komponenseit szétválasztva.

$$|\mathrm{M}| \leq |\mathrm{U}| + \frac{|\mathrm{V}| - |\mathrm{U}| - c_p(\mathrm{G}-\mathrm{U})}{2}$$

azaz |U|, illetve |G\U|, melyből levonjuk a páratlan komponensek számát, hiszen minden páratlan komponensben legalább 1 csúcs fedetlen marad, vagy U–ban van a párja, melyet már számoltunk. Illetve osztunk 2–vel, hiszen egy élnek 2 végpontja van és mi élhalmazt keresünk a csúcsokon keresztül. A becslést még tovább egyszerűsíthetjük:

$$|\mathrm{M}| \leq \frac{1}{2} \cdot \left(|\mathrm{V}| + |\mathrm{U}| - c_p\,(\mathrm{G}-\mathrm{U})\right)$$

**4.2.1. Tétel (Tutte-Berge[7] formula).** Minden $G = (V; E)$ gráfban

$$\max |\mathrm{M}| = \min \frac{1}{2} \cdot \left(|\mathrm{V}| + |\mathrm{U}| - c_p\,(\mathrm{G}-\mathrm{U})\right).$$

A tétel előtt a formulának a " $\leq$ " részét beláttuk, a következő szakaszban az Edmonds algoritmussal a másik irányt mutatjuk meg.

[7] **Claude Jacques Roger Berge** (Párizs, 1926. június 5. – Párizs, 2002. június 30.) francia matematikus, a modern kombinatorika és gráfelmélet egyik megalapozója. 1953-ban doktorált, Már 1952-ben kutatóként alkalmazta a Centre national de la recherche scientifique. 1957-ben a Princetoni Egyetemen vendégtanárként dolgozott. Ekkor kezdett gráfelmélettel, játékelmélettel és kombinatorikával foglalkozni.

# 5. fejezet

# Edmonds algoritmus

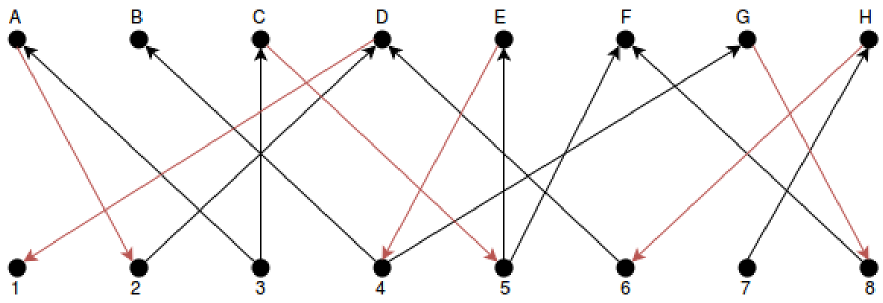
Nézzünk egy algoritmust, mellyel megtalálhatjuk a maximális párosítást. Ahogyan a páros gráfoknál, itt is javító utak segítségével próbáljuk növelni a már meglévő párosításunkat. Viszont, itt némiképp bonyolultabb a helyzet, hiszen nehezebb javító utat találni, illetve eldönteni, hogy egyáltalán létezik-e. Találkozhatunk páratlan hosszú körökkel, melyekben nincs javító út, hiszen lesz olyan csúcs, melynek a körben szereplő mindkét éle párosítatlan. Tehát úgy érünk vissza hozzá, hogy nem cserélhetjük meg az éleket, hiszen akkor egy csúcs két párosított él végpontja lenne, ami nem lehetséges. Éppen ezért, az algoritmust ki kell egészíteni. Én Edmonds[8] algoritmusát mutatom be!

Emlékezzünk vissza, hogy páros gráfokban, szélességi kereséssel úgy kerestünk javító utakat, hogy listáztuk az egyik osztály (legyen B) fedetlen csúcsait, majd végignéztük szomszédaikat, majd azok szomszédait egészen addig, amíg nem találtunk egy A-beli fedetlen csúcsot, vagy amíg már nem tudtuk folytatni a keresést. Nem páros gráfok esetében is hasonlóan fog történni a keresés. Viszont, mivel itt az éleknek nincs olyan A és B osztálya, hogy egyik végpontjuk A, másik pedig B-ben van, így az összes, a már megtalált párosításunk által fedetlen csúcsot meg kell vizsgálnunk.

Tehát, legyen először is $G = (V; E)$ a gráfunk, illetve P a mohó algoritmussal megtalált párosításunk, melyet bővíteni szeretnénk. Legyen továbbá X a P által nem fedett csúcsok

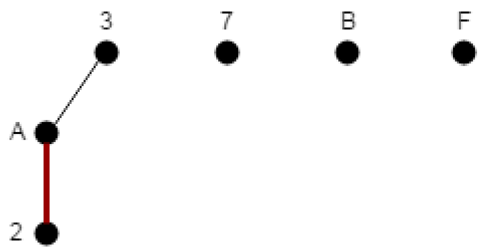
[8] **Jack R. Edmonds** (1934. április 5.-) amerikai számítógép tudós. 1958-ban diplomázott a George Washington Egyetemen. 1959-től 1969-ig dolgozott a National Institute of Standards and Technology-ban, és alapító tagja volt az Alan Goldman újonnan létrehozott Operációkutatás szekciójának 1961-ben. 1985-ben Neumann János Elméleti díjat nyert. 1999-ben visszavonult.

halmaza. Kiindulásként tekintsük a már fentebb is vizsgált páros gráfunkat (*3.1.1. Ábra.*).

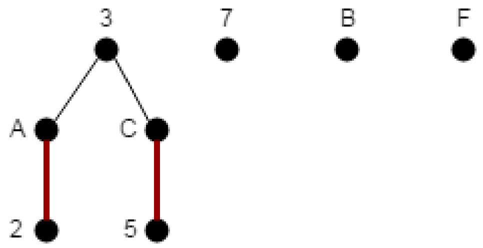



Itt X = {3; 7; B; F}.

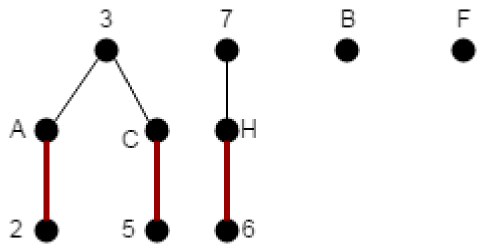
A szélességi keresésnél listában (táblázatban) jegyeztük a lépéseinket. Először 3 szomszédait néztük, ez volt A, illetve C. Következő lépésben 7 szomszédait, ez H, majd A párosításbeli szomszédját és így tovább. Edmonds algoritmusában ez némiképp változni fog, illetve itt már az élek irányítására sincsen szükség, hiszen egy nem páros gráf éleit sem tudom megfelelően irányítani. A módszernek egy sokkal bonyolultabb gráf vizsgálásakor is működnie kell, így egy darab táblázat nem biztos, hogy könnyítene a helyzetünkön, hiszen nem lenne túl átlátható. Készítsünk tehát egy úgynevezett kereső erdőt, melyben a fedetlen csúcsokból fogunk fákat növeszteni. Sorban tekintjük a csúcsokat, de egy lépésben nem csak egy szomszédját rajzoljuk fel, hanem mindjárt annak párosításbeli szomszédját is, tehát rögtön két élet rajzolhatunk 3-hoz. Szemléletesen:



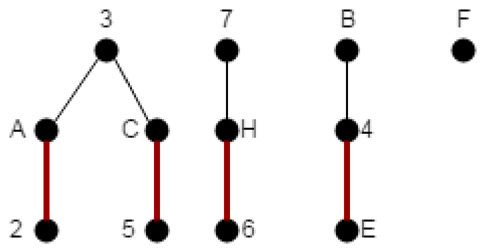

Mielőtt tovább mennénk, fontos leszögezni, hogy ahogyan a szélességi keresés esetében, itt is minden csúcs csak egyszer szerepelhet a keresés folyamán, jelen esetben a kereső erdőnkben. Következő lépésben 3 további szomszédait vizsgáljuk, ez C, illetve P-beli párja 5:




3-nak minden szomszédját megnéztük, jöjjön tehát 7:




7-tel is végeztünk, térjünk át B-re:




B-nek is csak egy szomszédja volt, jöjjön F! F-nek 5 a szomszédja és vegyük észre, hogy ezzel javító utat találtunk, hiszen a $3 - C - 5 - F$ egy út, melynek minkét vége P által fedetlen, tehát az élek felcserélésével eggyel növeltük P-t.

A szélességi kereséshez hasonlóan az élek felcserélése után, már az új, eggyel nagyobb párosításunkban akarunk javító utat találni, melyhez elölről kell kezdeni a faépítést. Most már 2-vel kevesebb fa lesz az erdőben.

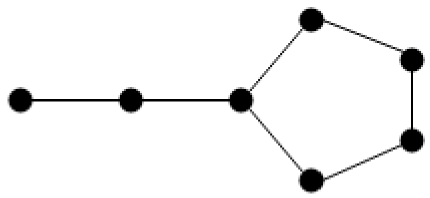
Akkor találtuk meg a maximális párosítást, ha már egyik fánkat sem tudjuk tovább építeni, de már nem találtunk javító utat.

Egy pillanatra térjünk vissza a páros gráfban megtalált javító útra, illetve felépített kereső erdőre. Észrevehetjük, hogy ha az egyik fából találunk élt a másik fába, az biztosan javító út lesz (kivéve természetesen, ha két fedetlen csúcs között megy él, de az is javító út), hiszen A-n és B-n belül nincsenek élek. Tehát egy B-beli csúcsból induló javító út A-ban fog véget érni és fordítva, illetve egy fában lefele haladva felváltva követik egymást A és B-beli csúcsok. Éppen ezért címkézzük fel a csúcsokat a következőképpen:

Kezdetben minden csúcs legyen címkézetlen, majd ahogy javító út keresés közben berajzoljuk őket a kereső fákba, úgy adunk nekik címkét is. Ha páros hosszú út vezet a fában a gyökér illetve a vizsgált csúcs között, akkor az a „Páros” (a fák gyökereinek is), ha páratlan sok él fut, akkor pedig a „Páratlan” címkét kapja az adott csúcs. A fenti példában tehát a „Páratlan” címkéjű csúcsok halmaza: $\{A; C; H; 4\}$, a „Páros” címkéjű csúcsok halmaza pedig: $\{3; 7; B; F; 2; 5; 6; E\}$. Tehát, az előbbi észrevételünk következtében megállapíthatjuk, hogy akkor találtunk javító utat, ha két különböző fa „Páros” címkéjű csúcsa között van él, hiszen ekkor találtunk egy páratlan hosszú utat, melynek mindkét vége párosítatlan csúcs.

Algoritmusunk során csak a „Páros” címkével ellátott csúcsokat vizsgáljuk, hiszen a „Páratlan” csúcsok szomszédja adott a kereső fában (párosításbeli párja). A „Páros” csúcsokat sorszámoznunk is kell, és sorrendben vizsgáljuk őket. Tehát amint egy „Páros” csúcs került egy fába annak - az egész kereső erdőt tekintve - a következő sorszámot adjuk.

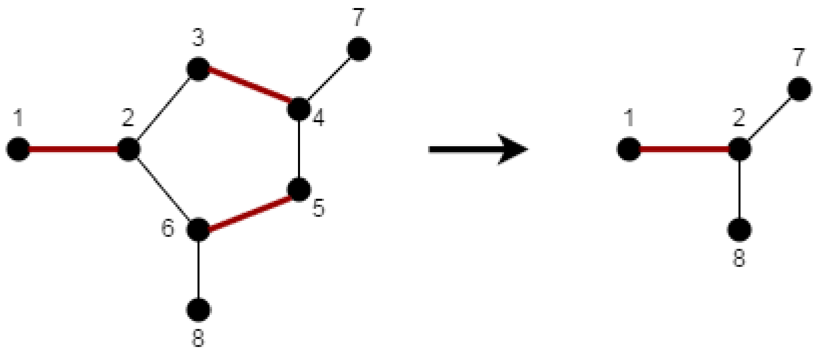
Amíg egy páros gráfban csak páros hosszú körök lehetnek, általános gráfok esetében ez nem igaz. Viszont, ha egy gráfban van páratlan hosszú kör, abból 1 csúcs biztosan nem párosítható másik, a körön belüli csúccsal, tehát egy páratlan hosszú körben, legalább 1 csúcsot biztosan csak a körön kívüli csúccsal párosíthatunk.



*5.6. Ábra. Virág.*

Az ábrán látható gráfokat, részgráfokat virágnak, azon belül is a páratlan hosszú körhöz kapcsolódó éleket a virág szárának, a csúcsot, mely a szárat köti össze a körrel pedig kocsánynak fogjuk nevezni.

Algoritmusunk során akkor találtunk páratlan kört, ha egy fán belül két „Páros" címkéjű csúcs között fut él. Mit teszünk, ha virággal találkozunk? Ekkor úgynevezett összehúzó lépés következik:




*5.7. Ábra. Összehúzó lépés.*

Tehát egy páratlan körből, mivel az csak hátráltatja a keresést, hiszen nem találhatunk benne javító utat, egy pontot csinálunk. A kocsányt meghagyjuk és minden a körből induló élnek ez lesz a végpontja. Így egy kisebb gráfot kapunk, melyben folytathatjuk a keresést, illetve a körből csinált csúcs címkéje a kocsány címkéje marad (Az ábrán a kocsány a 2-es csúcs).

**5.1. Megjegyzés.** A kocsány mindig „Páros" címkét kap, hiszen kettéágazik, ami csak „Páros" csúcs esetében lehetséges.

**5.1. Állítás.** Akkor és csak akkor létezik javító út a virág összehúzása előtt, ha létezik javító út az összehúzás után is.

Tehát a virág összehúzása nem befolyásolja a javító utat.

**5.1. Bizonyítás (5.1. Állítás).** A bizonyításunk során a körön belüli pontokat belső, a körön kívüli pontokat pedig külső pontoknak fogjuk nevezni.

Megmutatjuk, hogy a megtalált páratlan kör minden kiálló élének külső végpontja „Páratlan" címkét fog kapni. Vegyük észre, hogy a páratlan kör minden kiálló éle párosítatlan, kivéve azt, amelyen keresztül eljutottunk a kocsányhoz (*5.6. Ábra.*). Másként meg sem találtuk volna a virágot, hiszen ekkor a párosított él automatikus berajzolásával ki is léptünk volna a körből. Azon csúcsoknak pedig, melyek párosítatlan él végpontjaként kerülnek a kereső fába „Páratlan" címkét adunk. Mivel a kocsány „Páros" címkéjű pont, ezért a kereső fában a következő csúcsnak „Páratlan" címkét kell kapnia. Így ha a körön belül nincsen javító út, akkor a virág összehúzásával és a külső csúcsok kocsányhoz kötésével szabályosan tudunk továbbhaladni algoritmusunkban, anélkül hogy bármely lehetséges haladási utat figyelmen kívül hagynánk.

Tehát már csak azt kell belátni, hogy a virágban nincsen javító út. Indirekt tegyük fel, hogy van javító út a körben. Ez viszont azt jelentené, hogy a javító utat hamarabb megtalálnánk, mint hogy kiderülne, éppen egy páratlan körben vagyunk. Így pedig már a virág összehúzása előtt is létezne javító út.

***

Foglaljuk össze az Edmonds algoritmus működését:

(1) Először minden csúcs címkézetlen. Írjuk fel az összes, párosítás által NEM fedett csúcsot, sorszámozzuk be és a „Páros" címkével jelöljük meg őket.

(2) A felírt csúcsokból növesszünk fákat, úgy, hogy egy csúcs csak egyszer és egy fában szerepelhet. A fanövesztés sorrendben, dupla élenként történik. Tehát először az első csúcs szomszédait nézzük, ha egy szomszédját berajzolunk a fába, megjelöljük

„Páratlan” címkével és azonnal rajzoljuk a csúcs párosításbeli szomszédját is, mely a „Páros” címkét, illetve a következő sorszámot kapja. Majd a sorban következő („Páros”) csúcsot vizsgáljuk, mely a fa egy másik ágán, vagy, ha ott már nincs több él, akkor a soron következő fában lehet. Ha minden fát megvizsgáltunk, akkor visszatérünk az elsőre és így haladunk tovább, ameddig csak lehetséges.

(3) Megállunk. Ez három esetben történhet:

1. Egy fán belül két „Páros” címkéjű csúcs között van él, ez azt jelenti, hogy páratlan hosszú körrel találkoztunk. Ekkor végrehajtjuk az összehúzó lépést, majd tovább folytatjuk a keresést.

2. Két fa „Páros” címkéjű csúcsa között van él, ekkor javító utat találunk, a keresés megáll. A javító út éleit felcseréljük és az új párosítással elölről kezdjük a keresést.

3. Nincs több csúcs, mely bekerülhetne az erdőbe, tehát megvizsgáltuk a gráfot, de nincsen benne javító út. Ez azt jelenti, hogy „Páros” címkéjű csúcsból CSAK „Páratlan” címkéjű csúcsba megy él. Ekkor megtaláltuk a maximális párosítást.

   Ebben a pillanatban az $U := \{$„Páratlan” címkéjű csúcsok$\}$ jelöléssel $(G - U)$-ban a páratlan komponensek között egyelemű komponensként megtalálható az összes „Páros” címkéjű csúcs. Illetve a kereső erdőnkben a párosítás mérete $|U|$. Azok a csúcsok, melyek címkézetlenek maradtak, szintén fedettek a párosítás által, különben már a legelején „Páros” címkével illettük volna őket. Ezen csúcsok összege pedig $|V'| - |$„Páros”$| - |U|$, ahol $V'$-vel jelöljük G csúcsait, mivel azok száma az esetleges összehúzások miatt módosulhatott, de az 5.1. Állítás szerint ez nem változtat a párosítás maximális méretén. A maximális párosítás mérete tehát:

$$|U| + \frac{1}{2} \cdot (|V'| - |\text{„Páros”}| - |U|).$$

   Ilyenkor a 4.2.1. Tutte-Berge formula egyenlőséggel teljesül.

# Irodalomjegyzék


[1] Lovász László, Pelikán József, Veszetergombi Katalin: *Diszkrét matematika*, Tipotex Kft., 2006.

[2] Katona Gyula, Recski András, Szabó Csaba: *A számítástudomány alapjai*, Tipotex Kft., 2002.

[3] Wikipédia, Gráfelmélet: *https://hu.wikipedia.org/wiki/Gr%C3%A1felm%C3%A9let*

[4] Szőnyi Tamás: Párosítások páros gráfban *http://www.cs.elte.hu/~szonyi/parositas.pdf*

[5] Szőnyi Tamás: Javító és majdnem javító utak *http://www.cs.elte.hu/~szonyi/javut.pdf*

[6] Michel X. Geomans: Lecture notes on non-bipartite matching, M.I.T., 2007. *http://www-math.mit.edu/~goemans/18433S09/matching-nonbip-notes.pdf*

[7] Robert E. Tarjan: COS 423 Lecture 19 Graph Matching, 2011. *http://www.cs.princeton.edu/courses/archive/spr11/cos423/Lectures/GraphMatching.pdf*

[8] Életrajzi adatok: Wikipédia:

Gallai Tibor: *https://hu.wikipedia.org/wiki/Gallai_Tibor*

Kőnig Dénes: *https://hu.wikipedia.org/wiki/K%C5%91nig_D%C3%A9nes*

F. G. Frobenius: *https://hu.wikipedia.org/wiki/Ferdinand_Georg_Frobenius*

Philip Hall*: https://en.wikipedia.org/wiki/Philip_Hall*

William Thomas Tutte: *https://en.wikipedia.org/wiki/W._T._Tutte* *http://www.masodikvh.hu/erdekessegek/erdekessegek/157-az-enigma-feltoerese*

*http://mult-kor.hu/cikk.php?id=33073*

Julius Petersen: *https://hu.wikipedia.org/wiki/Julius_Petersen*

Claude Jaques Roger Berge: *https://hu.wikipedia.org/wiki/Claude_Berge*

Jack R. Edmonds: *https://en.wikipedia.org/wiki/Jack_Edmonds*

# Köszönetnyilvánítás

Elsősorban szeretném megköszönni témavezetőmnek, Szőnyi Tamásnak a rengeteg segítséget, illetve útmutatást, mely nélkül szakdolgozatom létre sem jöhetett volna.

Köszönöm Héger Tamásnak, hogy értékes tanácsaival csiszolt munkámon.

Továbbá köszönöm családomnak és barátaimnak, akik egyetemi éveim alatt mindvégig támogattak és bíztattak.