Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

A nagy triumvirátus

BSc Szakdolgozat

Szilágyi Béla

Matematika BSc
Elemző szakirány

Témavezető:
Mezei István
adjunktus

Budapest
2016

1. Bevezetés

A szakdolgozatom a matematikában kiemelkedően fontos három függvénnyel: az exponenciális, a szinusz és a koszinusz függvénnyel foglalkozik. Talán nem igényel részletesebb indoklást, hogy a természeti törvények megfogalmazásában velük találkozunk a leggyakrabban.

A középiskolában nem egyszerű ezeknek a függvényeknek a bevezetése. Az exponenciális függvényt csupán a racionális helyeken ismerjük meg (majd elhisszük, hogy jó tulajdonságai a valós számok halmazára is érvényesek). A sin és cos függvény értelmezésekor a kör ívhosszának mérése okoz problémát (ezen nagyvonalúan gyakran átsiklunk).

A dolgozatban az analízis eszköztárát felhasználva igyekszem az exponenciális függvényt szemlélettől mentesen értelmezni, közben természetesen szem előtt tartva azt az igényt, hogy tulajdonságaiban ráismerjünk az exponenciális függvényekkel szemben támasztott követelményekkel, amelyet az iskolában és a gyakorlatban is fontosnak tartunk.

Az exponenciális függvény segítségével már kézenfekvő a sin és cos függvény bevezetése (*Euler-formula*). Nyilván az ezekkel a függvényekkel való első találkozásra nem alkalmas ez az eljárás, hiszen minden a komplex számok halmazán történik. Az a szoros kapcsolat, melyet az *Euler-forumla* mutat a függvények között, mégis nagyon hasznos. Ezen keresztül válik érthetővé, hogy miért tekintjük közeli rokonoknak őket.

A dolgozat második részében összefoglalom az analízisben tanultaknak azt a részét, amely a gondolatmenetet segíti, indokolja és lehetővé teszi a következtetéseket. A *végtelen sorok*, *konvergenciakritériumok* segítségével összegzem a *hatványsorok* működését, jó tulajdonságait. Láthatóvá válik, hogy a bevezetett három függvény és a régóta ismert exp, sin, cos *Taylor-sora* megegyezik, azaz célhoz értünk.

Tartalomjegyzék

2. Az E függvény

Legyen $z \in \mathbb{C}$ és tekintsük $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z^n}{n!})$ végtelen sort. A gyökkritérium szerint $\limsup \sqrt[n]{\frac{|z|^n}{n!}} = \lim |z| \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = |z| \underbrace{\lim \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}}_{0} = |z| \cdot 0 = 0 < 1$, tehát bármely $z \in \mathbb{C}$-re a $\sum(\frac{z^n}{n!})$ végtelen sor (abszolút) konvergens.

Vezessük be az E:$\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $E(z)$:$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ fent említett végtelen sort.

A végtelen sorok szorzása alapján megmutatjuk, hogy

$$E(z_1 + z_2) = E(z_1) \cdot E(z_2)$$

Ez az azonosság indokolja, hogy az E függvényt exponenciális függvénynek nevezzük, mert a középiskolában is az exponenciális függvény a hatványozás azonosságai alapján éppen ezzel a tulajdonsággal rendelkezett. Vajon mi lehet az exponenciális függvény alapja? Azt tapasztaltuk az iskolában, hogy az a alapú exponenciális függvény az $x = 1$ helyen éppen ezt az értéket veszi fel: $a^1 = a$. Megmutatjuk, hogy az $E(1) = e$.

Ehhez mindenekelőtt végigvesszük az E függvény egyes helyeken vett azonosságait.

2.1. Azonosságok

Legyen

$$E(1) = a$$

Így

$$E(2) = E(1 + 1) = E(1) \cdot E(1) = a \cdot a = a^2$$

Teljes indukció alapján:

$$\begin{aligned} k = 1 \text{ -re:} \qquad & E(1) = a \\ k = n \text{ -re:} \qquad & E(n) = a^n \end{aligned}$$

Mi lesz $k = n + 1$ -re? Igaz-e, hogy $E(n+1) = a^{n+1}$?

$$E(n+1) = \underbrace{E(n)}_{a^n} \cdot \underbrace{E(1)}_{a} = a^n \cdot a = a^{n+1} \checkmark$$

Tehát megtudtuk, hogy

$$\begin{aligned} a = E(1) &= E(\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{n \text{ db}}) = E(\frac{1}{n}) \cdot E(\frac{1}{n}) \cdot \ldots \cdot E(\frac{1}{n}) = \\ &= \Big(E(\frac{1}{n})\Big)^n \Rightarrow E(\frac{1}{n}) = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

Így $(\sqrt[n]{a})^n = a$, vagy másképp írva $(a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{n}{n}} = a$.
Mi van, ha E-t egy $\dfrac{m}{n}$ helyen nézzük, ahol $m, n \in \mathbb{N}$? $E(\dfrac{m}{n}) =?$
Alkalmazva a korábbi trükköt, írjuk fel $\dfrac{m}{n}$ -et m db $\dfrac{1}{n}$ összegeként.

$$E(\frac{m}{n}) = E(\underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{m \text{ db}}) = E(\frac{1}{n}) \cdot \ldots \cdot E(\frac{1}{n}) = \Big(E(\frac{1}{n})\Big)^m = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$$

Az utolsó dolog, amit megvizsgálunk, hogy $E(-x)$ mennyi. Vegyük észre, hogy $E(0) = 1$.

$$1 = E(0) = E\big(x + (-x)\big) = \underbrace{E(x)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{E(-x)}_{\neq 0} \Rightarrow E(-x) = \frac{1}{E(x)} \tag{1}$$

Most, hogy ezeket a tulajdonságokat megvizsgáltuk, folytassuk az eredeti állításunkkal, miszerint $E(1)$ nemcsak egyenlő a-val, hanem éppen megadja az e számot, azaz $E(1) = e$.

3. Az e szám

Tudjuk, hogy

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \forall z \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

3.1. Tétel.

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $e_n := (1 + \dfrac{1}{n})^n$.
A binomiális tételt felhasználva $((a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k})$

$$e_n = (1 + \frac{1}{n})^n = \underbrace{\binom{n}{0} \cdot 1^n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^0}_{1} + \underbrace{\binom{n}{1} \cdot 1^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^1}_{1} + \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} +$$
$$+ \binom{n}{3} \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots + \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} + \cdots + \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{n^n} =$$
$$= 2 + \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} + \cdots + \frac{n!}{n!(n-n)!} \frac{1}{n^n} =$$
$$= 2 + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots\overbrace{(n-k+1)}^{n-(k-1)}}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} +$$
$$+ \cdots + \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} =$$
$$= 2 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \cdots + \frac{1}{k!}(1 - \frac{1}{n}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{k-1}{n}) + \cdots +$$
$$+ \frac{1}{n!}(1 - \frac{1}{n}) \cdots (1 - \frac{n-1}{n}) < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots + \frac{1}{n!} =: y_n$$

Ebből következik, hogy $e_n < y_n$ ($k \in \mathbb{N}$, ahol $k < n$). Ez azért is igaz, mivel a zárójelben levő tagok 0 és 1 közé esnek, így ha azokat elhagyjuk, növeljük az összértéket. Viszont e_n -re az is igaz, hogy:

$$e_n > 2 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \cdots + \frac{1}{k!}(1 - \frac{1}{n}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{k-1}{n})$$

Nézzük meg ez hova tart, ha $n \to \infty$.

$$e \geq 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!} =: y_k$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ -re } e \geq y_n$$

Így a közrefogási elv miatt:

$$e_n < n \leq e \qquad n \to \infty \text{ esetén } (n \in \mathbb{N}) :$$

Mivel e_n és e is e -hez tart $n \to \infty$ esetén, így y_n -nek is oda kell tartania.

$$\lim(y_n) = e$$
$$\Updownarrow$$
$$\lim(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}) = e$$
$$\Updownarrow$$
$$E(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

Ezzel az $E(1) = e$ állításunkat bizonyítottuk is. $\square$

A $\sum \frac{1}{n!}$ sor konvergenciájának a gyorsaságát az alábbi módon becsüljük meg:
Legyen

$$y_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \qquad (k < n) \text{ és } e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Vonjuk ki egymásból őket!

$$e - y_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \ldots <$$
$$< \frac{1}{(n+1)!} \left\{ 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots \right\}$$

A kapcsos zárójelben levő tagok egy mértani sort alkotnak, ahol az első tag egy és a differencia $\frac{1}{n+1}$. Formálisan: $a = 1$, $r = \frac{1}{n+1}$. Az összeg: $\frac{a}{1-r}$, ha $|r| < 1$.

Számítsuk ki az összeget!

$$\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} =?$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} 1 \cdot (\frac{1}{n+1})^l = \frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{\frac{n+1-1}{n+1}} = \frac{n+1}{n}$$

Tehát az

$$\frac{1}{(n+1)!}\left\{1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots\right\} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n! \cdot n}$$

Így

$$0 < e - y_n < \frac{1}{n! \cdot n}$$

Ennek segítségével fogjuk belátni, hogy ez e szám irracionális.

3.2. Állítás. e irracionális.

Bizonyítás. Tudjuk

$$\frac{0}{n! \cdot n} < e - y_n < \frac{1}{n! \cdot n}$$

$$\downarrow$$

$$\exists \vartheta_n \in]0, 1[\text{, hogy } e - y_n = \frac{\vartheta_n}{n! \cdot n}$$

Adjunk minkét oldalhoz y_n -t!

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{\vartheta_n}{n! \cdot n}, \text{ ahol } 0 < \vartheta_n < 1$$

Indirekt tegyük fel, hogy $e = \frac{p}{q}$, ahol $p, q \in \mathbb{Z}^+$.

$$\frac{p}{q} = e = \underbrace{2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{q!}}_{\text{egész szám}} + \frac{\vartheta_q}{q! \cdot q} \qquad / \cdot q!$$

$$p \cdot (q-1)! = D_{\mathbb{Z}} + \frac{\vartheta_q}{q}, \text{ ahol } 0 < \vartheta_q < 1 \text{ és } q \in \mathbb{Z}^+, \text{ ezáltal } 0 < \frac{\vartheta_q}{q} < 1$$

Ellentmondásra jutottunk, tehát e irracionális szám. □

3.3. Tétel. *Legyen* $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *ahol* $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *és* $E(x) = e^x$.

1. $E(x)$ *folytoson és differeciálható* $\forall x$ *-ben.*
2. $E'(x) = E(x)$.
3. $E(x)$ *az* x *szigorúan monoton növő függvénye és* $E(x) > 0$.
4. *(a)* $E(x) \to \infty$, *ha* $x \to \infty$ *és*
   (b) $E(x) \to 0$, *ha* $x \to -\infty$.
5. $lim_{x\to\infty} x^n \cdot E(x) = 0 \qquad \forall n$*-re.*

Bizonyítás. 1. A 9.10. és a 9.11. Tételből következik.
2. E függvény differenciálható.$\big(E'(x) = E(x)\big)$.

$$\begin{aligned} E'(x) &= (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!})' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^n)'}{n!} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \text{ ami } n-1 = m \text{ helyettesítéssel} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = E(x) \end{aligned}$$

3. (2) alapján $0 < x < y$ esetén $E(x) < E(y)$ és (1) alapján $E(-y) < E(-x)$, ezért E szigorúan monoton növekvő. Illetve (2) alapján $E(x) > 0$, ha $x > 0$, ezért (1)$\Rightarrow E(x) > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$.
4a. (2) alapján $E(x) \to \infty$, ha $x \to \infty$;
4b. előzőből és (1) -ből következik, hogy $E(x) \to 0$, ha $x \to -\infty$.

5.

$$
\begin{aligned}
E(x) &> \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \qquad x > 0 \text{ esetén} \\
E(x) \cdot (n+1)! &> x^n \cdot x \\
\frac{(n+1)!}{x} &> \frac{x^n}{E(x)} \\
&\Downarrow \\
x^n \cdot E(-x) &< \frac{(n+1)!}{x}, \text{ amiből (f) következik.} \\
(\lim_{x\to\infty} x^n \cdot E(-x) &< \lim_{x\to\infty} \frac{(n+1)!}{x} = 0 \qquad \forall n \text{ -re})
\end{aligned}
$$

Tehát az (f) azt fejezi ki, hogy $E(x)$ az x bármely hatványánál „gyorsabban" tart $+\infty$ -hez, ha $x \to +\infty$. □

Az addíciós formulából ($E(x_1 + x_2) = E(x_1)E(x_2)$) következik, hogy:

$$
\lim_{h\to 0} \frac{E(x+h) - E(x)}{h} = E(x) \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{E(h)-1}{h}}_{\to 1.\ \text{De miért?}} = E(x)
$$

Bizonyítás. Azért, mert

$$
\begin{aligned}
E(h) - 1 &= h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \dots, \text{ és így} \\
\frac{E(h)-1}{h} &= 1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \dots, \text{ ha } h = 0. \\
&\Downarrow \\
\lim_{h\to 0} \frac{E(h)-1}{h} &= 1
\end{aligned}
$$

□

4. A C és az S függvény

Bevezetjük a komplex számok halmazába a C,S függvényeket.

$$C : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad C(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$S : \mathbb{S} \to \mathbb{S}, \qquad S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Írjuk fel $C(z)$ és $S(z)$ tagjait!

$$C(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

$$S(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

$S(z)$ -t szorozzuk be i -vel, ahol $i^2 = -1$, így

$$\begin{cases} i^{4n} = 1 \\ i^{4n+1} = i \\ i^{4n+2} = -1 \\ i^{4n+3} = -i \end{cases}$$

ahol $n \in \mathbb{Z}$.
Tehát

$$iS(z) = iz - \frac{iz^3}{3!} + \frac{iz^5}{5!} - \frac{iz^7}{7!} + \dots$$

Tudjuk, hogy

$$E(w) = 1 + w + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + \dots \qquad (w \in \mathbb{C})$$

Nézzük meg az E függvényt $w := iz$ -re!

$$
\begin{aligned}
E(iz) &= 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \dots \\
&= 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{iz^5}{5!} - \dots
\end{aligned}
$$

Vegyük észre, hogy

$$C(z) + iS(z) = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \dots$$

Azaz kiderült, hogy $\forall z \in \mathbb{C}$ esetén

$$E(iz) = C(z) + iS(z)$$

Ezt nevezzük *Euler-formulának.*

4.1. Megjegyzés. (Leonhard Euler) 1707. április 15-én Bázelben született. Édesanyja Margaretha Brucker, édesapja Paul Euler kálvinista lelkész volt, aki fiát is erre a pályára szánta, de jóbarátja és tanára Jakob Bernoulli felfedezte a fiúban a matematikai tehettséget. Neki köszönhetjük többek között az $e^{i\pi} + 1 = 0$ egyenlőséget, a róla elnevezett Euler-formulát. Felfedezte a Feuerbach kört, ő jelölte először π -vel a kör kerületének és átmérőjének arányát, e -vel az $(1 + \frac{1}{n})^n$ sorozat határértékét, stb. Egyik legfőbb műve az 1736-ban megjelent Mechanika című munkája. 1783. szeptember 15-én hunyt el Szentpétervárott agyvérzésben a svájci matematikus és fizikus.

4.2. Megjegyzés. $t \in \mathbb{R}$ -re: $c(t) + is(t) = E(it)$.

$$s, c : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad c(t) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!}, \qquad s(t) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Látható, hogy c és s a C és S valós számok halmazára való leszűkítése.

A *Taylor sorok* tanulmányozása során láttuk már, hogy

$$
\begin{aligned}
\cos t &= 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots \\
\sin t &= t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots
\end{aligned}
$$

Ez azt mutatja, hogy az általunk bevezetett $C\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ és $S\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvények valós számok halmazára történő leszűkítése éppen cos és a sin függvényt adja, azaz $c = \cos$ és $s = \sin$.

4.3. Következmény.

$$\begin{cases} E(iz) & = C(z) + iS(z) \\ E(-iz) & = C(z) - iS(z) \end{cases}$$

Megnézzük a kapcsolatot a komplex exponenciális függvénnyel. A valós cos és sin függvényt nem tudtuk más függvények segítségével előállítani. Most a komplex exponenciális függvény lehetőséget teremt a C és S előállítására.

1. Összeadva a két egyenletet az $iS(z)$ -k kiejtik egymást.

$$\frac{E(iz) + E(-iz)}{2} = C(z)$$

2. Kivonva pedig a két egyenletet a $C(z)$ -k esnek ki.

$$\frac{E(iz) - E(iz)}{2i} = S(z) \text{ -t kapunk a rendezés után.}$$

Ebből pedig könnyen kiszámolhatjuk $z = 0$ helyettesítéssel, hogy:

$$C(0) = \frac{1+1}{2} = 1 = \left(\frac{E(0) + E(0)}{2}\right)$$
$$S(0) = \frac{1-1}{2i} = 0$$

4.1. Addíciós tételek

4.4. Tétel. (Addíciós tétel)

$$C(u \pm v) = C(u)C(v) \mp S(u)S(v), \textit{ ahol } u, v \in \mathbb{C}$$

Bizonyítás.

$$\frac{E(iu+iv)+E(-iu-iv)}{2} = \frac{E(iu)\cdot E(iv)+E(-iu)\cdot E(-iv)}{2}$$
$$\Downarrow$$
$$E(u+v) = E(u)E(v) \text{ addíciós formula miatt} \tag{3}$$

Ezzel kész vagyunk a bal oldallal. Most hasonlítsuk össze ezt a jobb oldallal.

$$\begin{aligned} &\left(\frac{E(iu)+E(-iu)}{2}\right)\cdot\left(\frac{E(iv)+E(-iv)}{2}\right)- \\ -&\left(\frac{E(iu)-E(-iu)}{2i}\right)\cdot\left(\frac{E(iv)-E(-iv)}{2i}\right)\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy $2i\cdot 2i = 4i^2 = -4$ (így a negatív előjel eltűnik középről), illetve végezzük el a keresztbe szorzásokat.

$$\begin{aligned} &\frac{E(iu)\cdot E(iv)+E(iu)\cdot E(-iv)+E(-iu)\cdot E(iv)+E(-iu)\cdot E(-iv)}{4}+ \\ +&\frac{E(iu)\cdot E(iv)-E(iu)\cdot E(-iv)-E(-iu)\cdot E(iv)+E(-iu)\cdot E(iv)}{4}=\end{aligned}$$

A megfelelő tagok kiesése után:

$$\begin{aligned} &= \frac{2\cdot E(iu)\cdot E(iv)+2\cdot E(-iu)\cdot E(-iv)}{4} = \qquad /:2 \\ &= \frac{E(iu)\cdot E(iv)+E(-iu)\cdot E(-iv)}{2}\end{aligned}$$

Ez pedig pont a bal oldal. Tehát igazoltuk az addíciós formulát. □

4.5. Tétel. (Addíciós formula)

$$S(u\pm v) = S(u)S(v)\pm C(u)C(v)$$

Ennek bizonyítását hasonló módon végezzük, mint az imént.

Bizonyítás. Bal oldal:

$$\begin{aligned} S(u+v) &= \frac{E(iu+iv)-E(-iu-iv)}{2i} = \\ &= \frac{E(iu)\cdot E(iv)-E(-iu)\cdot E(-iv)}{2i}, \text{ ahol } u,v\in\mathbb{C} \end{aligned}$$

Jobb oldal:

$$\begin{aligned} S(u)C(v)+C(u)S(v) =& \frac{E(iu)-E(-iu)}{2i}\cdot\frac{E(iv)+E(-iv)}{2}+ \\ &+\frac{E(iu)+E(-iu)}{2}\cdot\frac{E(iv)-E(-iv)}{2i} \end{aligned}$$

Végezzük el a keresztbe szorzásokat!

$$\begin{aligned} &\frac{E(iu)\cdot E(iv)+E(iu)\cdot E(-iv)-E(-iu)\cdot E(iv)-E(-iu)\cdot E(-iv)}{4i}+ \\ +&\frac{E(iu)\cdot E(iv)-E(iu)\cdot E(-iv)+E(-iu)\cdot E(iv)-E(-iu)\cdot E(-iv)}{4i} = \end{aligned}$$

Rendezzük az egyenletet!

$$\begin{aligned} &= \frac{2E(iu)\cdot E(iv)-2E(-iu)E(-iv)}{4i} \qquad /:2 \\ &= \frac{E(iu)\cdot E(iv)-E(-iu)\cdot E(-iv)}{2i}, \text{ ami visszaadja a bal oldalt.} \end{aligned}$$

Tehát ez az állítás is igaz. $\square$

5. A π bevezetése

Térjünk vissza a valós számok halmazára!

$$E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad E(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad c(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k!)}$$

$$s\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad s(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

- $c(-x) = c(x) \Rightarrow c$ páros
- $s(-x) = -s(x) \Rightarrow s$ páratlan
- c,s folytonos és differenciálható

5.1. Tétel. *A* $]0,2[$ *intervallumon egyetlen* p *szám van, amelyre* $c(p) = 0$.

Bizonyítás. Tudjuk $c(x)$ hatványsorából az $x = 0$ helyettesítéssel, hogy $c(0) = 1$.

5.2. Állítás.

$$\begin{aligned}
&c(2) < 0, \text{ mert}\\
&c(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots =\\
&\quad = 1 - \frac{x^2}{2!}\left(1 - \frac{x^2}{4\cdot 3}\right) - \frac{x^6}{6!}\left(1 - \frac{x^2}{6\cdot 5}\right) - \ldots <\\
&\quad < 1 - \frac{x^2}{2!}\left(1 - \frac{x^2}{4\cdot 3}\right), \text{ mivel}\\
&0 < x < 2\\
&\quad \Downarrow\\
&0 < x^2 < 4
\end{aligned}$$

Végezzük el az $x = 2$ helyettesítést $c(x)$ -be, felhasználva az előbbi egyenlőtlenséget.

$$c(2) < 1 - \frac{4}{2!}\left(1 - \frac{4}{3 \cdot 4}\right) = 1 - 2\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{4}{3} = \frac{3}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$$

Tehát a $c(2)$ mindenképpen negatív szám. $\square$

Mivel c folytonos, így a *Bolzano-tétel* szerint:

$$\exists p \in]0, 2[, \text{ melyre } c(p) = 0$$

5.3. Tétel. *Legyen* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *és* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *folytonos függvény. Ekkor* f $\forall f(a)$ *és* $f(b)$ *közé eső értékeket felvesz, azaz, ha például* $f(a) < f(b)$*, akkor* $\forall c \in \big(f(a), f(b)\big)$ *-re* $\exists \xi \in (a, b)$*, hogy* $f(\xi) = 0$.

5.4. Állítás. Csak egyetlen ilyen p létezik.

Bizonyítás. Ehhez nézzük meg, hogy $c'(x) = -s(x)$. Ennek megmutatásához a $c(x)$ hatványsorát fogom tagonként deriválni a 9.4. Tételre hivatkozva.

$$c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$c'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n \cdot x^{2n-1}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

Vegyük észre, hogy ez pont az $s(x)$ mínusz egyszerese.

$$-(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots) = s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Ebből pedig láthatjuk, hogy:

$$c'(x) = -s(x)$$

Az állításunk igazolásához a továbbiakban megmutatjuk, hogy $s(x) > 0$ a $]0, 2[$ intervallumon.

$$s(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots =$$
$$= x\Big(1 - \frac{x^2}{3!}\Big) + \frac{x^5}{5!}\Big(1 - \frac{x^2}{7 \cdot 6}\Big) + \ldots$$

A zárójelben levő tagok 0 és 1 közé eső pozitív számok, így ezek elhagyásával (kivéve az első tagot) csökkentjük az összeget.

$$s(x) > x\Big(1 - \frac{x^2}{6}\Big) > 0$$

Így

$$-s(x) < 0$$
$$\Downarrow$$
$$c'(x) < 0$$

Ez azért igaz, mivel $c(x)$ deriváltja $-s(x)$, ahogy azt korábban bizonyítottuk. A derivált kisebb, mint 0, ami pedig a meredekségre utal. Azaz c egy szigorúan monoton csökkenő függvény $]0,2[$ -n. Amiből pedig az következik, hogy egyértelműen létezik p. (Tehát egyetlen p van a $]0,2[$ intervallumon, melyre $c(p) = 0$. $\square$

5.5. Definíció. $\pi := 2p$, azaz a π a c függvény 0 és 2 közötti egyetlen zérushely kétszerese.

Az $S : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ és $C : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvényekre vonatkozó 4.4. és 4.5. addíciós tételekből következik az alábbi tétel.

5.6. Tétel.

$$\begin{cases} S(z + 2\pi) & = S(z) \\ C(z + 2\pi) & = C(z) \end{cases} \tag{4}$$

Bizonyítás.

$$S^2(x) + C^2(x) = 1 \text{ négyzetes összefüggés alapján}$$
$$S^2(\frac{\pi}{2}) + C^2(\frac{\pi}{2}) = 1$$

Mivel $0 < \frac{\pi}{2} < 2$, emiatt $S(\frac{\pi}{2}) > 0$ és $C(\frac{\pi}{2}) = 0$, ahogy azokat korábban beláttuk. Így $C^2(\frac{\pi}{2}) = 0$, ebből pedig következik, hogy $S(\frac{\pi}{2}) = 1(> 0)$.
Térjünk át az addíciós képletekre.

$$S\left(\frac{\pi}{2} \pm z\right) = \underbrace{S\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} \cdot C(z) \pm \underbrace{C\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} \cdot S(z) = C(z)$$
$$C\left(\frac{\pi}{2} \pm z\right) = \underbrace{C\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} \cdot C(z) \mp \underbrace{S\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} \cdot S(z) = \mp S(z)$$

Haladjunk tovább!

$$S(\pi + z) = S\left(\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} + z\right)\right) = C\left(\frac{\pi}{2} + z\right) = -S(z)$$
$$C(\pi + z) = C\left(\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} + z\right)\right) = -S\left(\frac{\pi}{2} + z\right) = -C(z)$$

Végül:

$$S(2\pi + z) = S\big(\pi + (\pi + z)\big) = -S(\pi + z) = S(z)$$
$$C(2\pi + z) = C\big(\pi + (\pi + z)\big) = -C(\pi + z) = C(z)$$

Ezzel igazoltuk a két azonosságot. $\square$
Könnyen belátható, hogy:

$$S(z) = 0 \Leftrightarrow z = k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$
$$C(z) = 0 \Leftrightarrow z = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

6. Periodikusság

6.1. Definíció. $f \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény *periodikus*, ha létezik olyan $p \in \mathbb{C}$ ($p \neq 0$) szám, hogy minden f, ami $z \to f(z)$ függvény ($z \in D_f$) elemre $z + p \in D_f$ és $f(z) = f(z + p)$.

A p számot a f függvény *periódusának*, az f függvényt pedig p szerint *periodikus függvénynek* nevezzük.
(4) -ben a periodikusság fogalmát felhasználva igazoltuk, hogy az S és C komplex függvények 2π szerint periodikusak.

6.2. Megjegyzés. Érdekes módon $E(z + 2\pi i) = E(z) \cdot E(i2\pi)$, ahol $E(i2\pi)$ az *Euler-formula* felhasználásával:

$$E(i2\pi) = \underbrace{C(2\pi)}_{=1 \text{ (mivel } C(0)=1 \text{ és } C(0+2\pi)=1)} + i \underbrace{S2\pi}_{S(2\pi)=0 \text{ (mivel } S(0)=0)}$$

Így

$$E(z + 2\pi i) = E(z)$$

Ebből pedig az következik, hogy E függvény $2\pi i$ szerint periodikus függvény.

7. Hiperbolikus függvények

Legyen

$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

A sinh szigorúan monoton növő, páratlan függvény. ($\sinh(-x) = -\sinh(x)$)
Legyen

$$\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \sinh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

A cosh a negatív számok halmazán szigorúan monoton fogyó, a pozitív számok halmazán viszont szigorúan monoton növő függvény. Értékkészlete:$[1, \infty]$. Gyakran láncgörbének is nevezik.

7.1. Összefüggések

- $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
- $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}\sinh(x_1 + x_2) &= \sinh(x_1)\cosh(x_2) + \cosh(x_1) + \sinh(x_2)\\ \cosh(x_1 + x_2) &= \cosh(x_1)\cosh(x_2) + \sinh(x_1) + \sinh(x_2)\end{aligned}$$

Kiterjesztve a komplex halmazra:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ch}(iz) &= \frac{E(iz) + E(-iz)}{2} = C(z)\\ \mathrm{Sh}(iz) &= \frac{E(iz) - E(-iz)}{2} = i \cdot \frac{E(iz) - E(-iz)}{2i} = iS(z)\\ \Rightarrow E(iz) &= \mathrm{Ch}(iz) + \mathrm{Sh}(iz) = C(z) + iS(z)\end{aligned}$$

Hatványsoraik:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ch}(z) &= 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} && (\forall z \in \mathbb{C})\\ \mathrm{Sh}(z) &= z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} && (\forall z \in \mathbb{C})\end{aligned}$$

8. Végtelen sorok; Konvergenciakritériumok

Legyen $(z_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$

8.1. Definíció. (z_n) *konvergens*, ha $\exists a \in \mathbb{C}$, hogy $\forall \varepsilon > 0$ -ra $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n > N$ -re, hogy

$$|z_n - a| < \varepsilon$$

Épp ezért $lim(z_n) := a$.

Ha $z_n = x_n + iy_n (n \in \mathbb{N}$ és ahol $x_n, y_n \in \mathbb{R})$, akkor (z_n) konvergenciája ekvivalens az (x_n) és (y_n) valós sorozatok konvergenciájával.$\Big((z_n) \Leftrightarrow (x_n)$ és (y_n) konvergens $\Big)$

8.2. Tétel. (Cauchy konvergenciakritérium) $(z_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *konvergens* $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n, m > N :$

$$|z_n - z_m| < \varepsilon$$

Gyakran szükségünk van egy sorozat tagjainak az összeadására és az összegre is. Ezért legyen (z_n) (egy sor) és $s_n := z_1 + z_2 + \ldots + z_n (n \in \mathbb{N})$ részletösszeg sorozat.

8.3. Definíció. $\sum(z_n) := (s_n)$

Ha (s_n) konvergens, akkor $\sum(z_n)$ végtelen sort is konvergensnek nevezzük, és ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n := \lim(s_n)$$

8.4. Tétel. (A végtelen sor konvergenciájának szükséges feltétele)

$$\sum(z_n) \ \textit{konvergens} \ \Rightarrow (z_n) \to 0$$

8.5. Definíció. A $\sum(z_n)$ *abszolút konvergens*, ha $\sum(|z_n|)$ *konvergens.*

8.6. Tétel. (Hányadoskritérium (D'Alambert))

$$\limsup\left(|\frac{z_n+1}{z_n}|\right) < 1 \Rightarrow \sum(z_n) \textit{ abszolút konvergens}$$

8.7. Tétel. (Gyökkritérium (Cauchy))

$$\limsup(\sqrt[n]{|z_n|}) < 1 \Rightarrow \sum(z_n) \textit{ abszolút konvergens}$$

(Ha $\limsup(\sqrt[n]{|z_n|}) > 1 \Rightarrow \sum(z_n)$ divergens.)

8.8. Tétel. *Ha $\sum z_n$ sor abszolút konvergens, akkor konvergens is.*

De ez visszafelé nem igaz! Példának említhetnénk a $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ végtelen sort, mely egy konvergens sorozat, viszont nem abszolút konvergens.

8.9. Megjegyzés. A $\lim z_n = 0$ feltétel a $\sum z_n$ sor konvergenciájának szükséges, de nem elégséges feltétele. Például: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ sort harmonikus sornak nevezzük. Divergens.

8.10. Tétel. (Leibniz-tétel) *Legyen (a_n) monoton fogyó és $(a_n) \to 0$. Amiből pedig következik, hogy $\sum(-1)^n a_n$ konvergens (de általában nem abszolút konvergens).*

8.1. Végtelen sorok összege, skalárszorosa

8.11. Definíció. Az (a_n) és (b_n) komplex számsorozatokkal képzett $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ sort a $\sum a_n$ és $\sum b_n$ sorok összegének nevezzük; a $\sum \lambda a_n$ sort, ahol $\lambda \in \mathbb{C}$ a $\sum a_n$ sor λ -szorosának nevezzük.

8.12. Tétel. (Végtelen sorok összege, skalárszorosa)

- *Ha $\sum a_n$ és $\sum b_n$ sorok konvergensek és összegük A és B, akkor a $\sum(a_n+b_n)$ is konvergens és az összege $A+B$.*
- *Ha $\sum a_n$ sor konvergens és összege A, akkor a $\sum \lambda a_n$ sor is konvergens és összege λA.*

Bizonyítás. Legyen

$$\begin{cases} A_n := & a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\ B_n := & b_1 + b_2 + \ldots + b_n \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Ekkor

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) = A_n + B_n$$
$$\lambda a_1 + \lambda a_2 + \ldots + \lambda a_n = \lambda A_n$$

Mivel a feltétel szerint $\lim A_n = A$ és $\lim B_n = B$, ezért $\lim(A_n + B_n) = A + B$ és $\lim_{n\to\infty} \lambda A_n = \lambda A$, s ez éppen azt jelenti, hogy $\sum(a_n + b_n)$, illetve $\sum \lambda a_n$ sorok részletösszegeinek sorozata az $A + B$, illetve a λA határértékhez tart. $\square$

8.2. $\sum(a_n)$ és $\sum(b_n)$ szorzata

	b_0	b_1	b_2	$\ldots$	b_{n-1}	b_n	$\ldots$
a_0	a_0b_0	a_0b_1	a_0b_2	$\ldots$	a_0b_{n-1}	a_0b_n	$\ldots$
a_1	a_1b_0	a_1b_1	a_1b_2	$\ldots$	a_1b_{n-1}	a_1b_n	$\ldots$
a_2	a_2b_0	a_2b_1	a_2b_2	$\ldots$	a_2b_{n-1}	a_2b_n	$\ldots$
$\vdots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ddots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
a_{n-1}	$a_{n-1}b_0$	$a_{n-1}b_1$	$a_{n-1}b_2$	$\ldots$	$a_{n-1}b_{n-1}$	$a_{n-1}b_n$	$\ldots$
a_n	a_nb_0	a_nb_1	a_nb_2	$\ldots$	a_nb_{n-1}	a_nb_n	$\ldots$
$\vdots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

1. táblázat. Végtelen sorok szorzása

Tekintsük a következő (c_n) sorozatot:

$$\begin{aligned}
c_0 &= a_0 b_0 \\
c_1 &= a_1 b_0 + a_0 b_1 \\
c_2 &= a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 \\
&\vdots \\
c_n &= a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + a_{n-2} b_2 + \ldots + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} b_i
\end{aligned}$$

A$(c_n) := (a_n) * (b_n)$ sorozat az (a_n) és (b_n) sorozat konvolúciója.

A két végtelen sor Cauchy szorzatán a (c_n) konvolúcióból képzett végtelen sort értjük, azaz:

$$\underbrace{\sum_0 (a_n) \cdot \sum_0 (b_n)}_{\text{Cauchy szorzata}} := \sum_0 (c_n) = \sum_0 \Bigg(\underbrace{\sum_{i+j=n} a_i b_j}_{c_n} \Bigg)$$

Másképp

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

8.13. Tétel. *$\sum_0 (a_n)$ és $\sum_0 (b_n)$ abszolút konvergens $\Rightarrow$ $\sum_0 (c_n)$ is abszolút konvergens, sőt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.*

8.3. Végtelen sorok átrendezése

A konvergens, de nem abszolút konvergens sorok nagyon labilisak. Van olyan átrendezésük, amely más összegű lesz (akár divergenssé is átrendezhető). Egy példán be is mutatom ezt a jelenséget.

Tekintsük a $\sum \left((-1)^n \frac{1}{n} \right)$ végtelen sort. Ez a *Leibniz tétel* miatt konvergens, de nem abszolút konvergens, mert $\sum \left(|(-1)^n \frac{1}{n}| \right) = \sum \left(\frac{1}{n} \right)$ divergens.

Legyen

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n}+\ldots =: S$$

Írjuk fel ezt csoportosítva is!

$$\sum_{k=0}^{\infty}-\frac{1}{4k+1}+\frac{1}{4k+2}-\frac{1}{4k+3}+\frac{1}{4k+4}=S \tag{5}$$

Ami $k=0$ -ra, épp az eredeti S -nek az első négy tagját adja meg; $k=1$ -re az 5.-8. tagokat, tehát négyes csoportok szerinti részletösszegre bontottuk az eredetit.
Nézzük meg ugyanezt kettes csoportokban:

$$\sum_{k=0}^{\infty}-\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}=S$$

Ha megszorozzuk $\frac{1}{2}$ -vel, akkor

$$\sum_{k=0}^{\infty}-\frac{1}{4k+2}+\frac{1}{4k+4}=\frac{S}{2} \tag{6}$$

Adjuk össze (5) és (6) -t!

$$\sum_{k=0}^{\infty}-\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{4k+3}+\frac{1}{2k+2}=\frac{3}{2}S$$

Láthatjuk, hogy a $-\frac{1}{4k+2}$ tag kiesik, viszont az $\frac{1}{4k+4}$ tagból 2db is lett, így kapjuk az $\frac{1}{2k+2}$ -t.
Nézzük meg, hogy melyik végtelen sorhoz jutunk!

$$\underbrace{-1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}_{k=0}\underbrace{-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{4}}_{k=1}-\ldots-\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{4k+3}+\frac{1}{2k+2}-\ldots=\frac{3}{2}S$$

Láthatjuk, hogy az ebben a végtelen sorban szereplő összeadandók ugyanazok, mint $\sum\left((-1)^n\frac{1}{n}\right)$ végtelen sorban, viszont más sorrendben szerepelnek és az S a $\frac{3}{2}$ -szeresére változott. Abszolút konvergenciánál ez nem fordul elő!

8.14. Definíció. Legyen $p = (p_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a természetes számok egy permutációja. Ekkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n}$ végtelen sort a $\sum a_n$ egy (a p permutációnak megfelelő) *átrendezésének* nevezzük.

8.15. Tétel. *Ha a $\sum(a_n)$ számsor abszolút konvergens, akkor bármely átrendezése is abszolút konvergens és a sor összege az átrendezéssel nem változik.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n}$$

9. Hatványsorok

Legyen $(c_n)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, illetve legyen $a \in \mathbb{C}$. A $\sum\Big(c_n(z-a)^n\Big)$ végtelen sort a középpontú hatványsornak nevezzük. A $(c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots)$ az együttható sorozat.

Például:

$$5 - 10(x-3) + 20(x-3)^2 - 40(x-3)^3 + 80(x-3)^4 - \ldots = ?$$

Vegyük észre, hogy ez egy mértani sort, ahol $a = 5$ és $r = -2(x-3)$.
Egyszerűbben átírva: $\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot r^n = \sum_{n=0}^{\infty} 5 \cdot \big(-2(x-3)\big)^n$, ami akkor konvergens, ha $|r| < 1$ és ekkor az összeg $\frac{a}{1-r}$.

$$|-2(x-3)| < 1$$
$$\Updownarrow$$
$$|x-3| < \frac{1}{2}$$
$$\Updownarrow$$
$$2,5 < x < 3,5$$

Ekkor az összeg: $\dfrac{5}{1+2(x-3)}$, ha $2,5 < x < 3,5$.

Hogyan határozhatjuk meg, hogy konvergens-e egy hatványsor? A gyökkritérium vagy a hányadoskritérium segítségével. Nézzünk mindkettőre egy-egy példát.

Példa1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

Alkalmazzuk a hányadoskritériumot!

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}\right| = \frac{|x^{n+1}|}{|x^n|} \cdot \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\to 1} \to |x|, \text{ ha } n \to \infty$$

A hányadoskritérium szerint $|x| < 1$ -re abszolút konvergens, amiből következik, hogy $(-1 < x < 1)$ -re konvergens. (Ha $|x| > 1$, akkora konvergenciakritériumok szükséges feltétele miatt divergens.)

Vizsgáljuk meg a végpontokat!

- Ha $x = 1$: $\quad \sum \frac{x^n}{n} = \sum \frac{1}{n} \to \infty$, ha $n \to \infty$
- Ha $x = -1$: $\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ konvergens, mert *Leibniz.*

Tehát a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ konvergens $\Leftrightarrow -1 \leq x < 1$ (abszolút konvergens -1<x<1).

Példa2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n} = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^3} + \dots$$

Alkalmazzuk a gyökkritériumot!

$$\sqrt[n]{\frac{|x^n|}{n^n}} = \frac{|x^n|}{n} \to 0, \text{ ha } n \to \infty, \text{ ami kisebb, mint } 1$$

A gyökkritérium alapján minden x -re abszolút konvergens, azaz minden x esetén konvergens is.

9.1. Tétel. (Cauchy-Hadamard) *A komplex hatványsorok konvergenciasugaráról szól. Legyen*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \textit{hatványsor és legyen}$$

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}}, \textit{ ahol}$$

$$\alpha\colon = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \textit{ és } R = \frac{1}{\alpha}$$

9.2. Állítás.

- Ha $\alpha = 0$, akkor $R = +\infty$, ekkor $\forall z$ -re abszolút konvergens.
- ha $\alpha = +\infty$, akkor $R = 0$, azaz csak a-ban konvergens.
- Ha $0 < \alpha < +\infty$, ekkor $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ abszolút konvergál, ha $|z-a| < R$ és divergál, ha $|z-a| > R$. (a köríven bármi lehet)

9.3. Megjegyzés. Az R számot a hatványsor *konvergenciasugarának* nevezzük.

9.4. Tétel. (Hatványsorok tagonkénti differenciálhatósága) *Ha a* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n$ *konvergens* (u,v) *nyílt intervallumon, akkor* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n$ *összegfüggvény akárhányszor és tagonként deriválható, azaz:*

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n \cdot x^{n-1}$$

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n \cdot x^{n-1}\Big)' = \sum_{n=2}^{\infty} c_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$(c_0 \cdot x^0)' = 0$$

9.5. Tétel. (Hatványsorok tagonkénti integrálása) *Valós hatványsorokra az integrál is „jól" viselkedik. Ha az (u, v) intervallumban a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ hatványsor konvergens és az összege $f(x)$, akkor tagonként integrálható és ez a hatványsor is konvergens (u, v) -n, azaz:*

$$\int f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(x-a)^{n+1}}{n+1} + c$$

9.1. Alkalmazások

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots =?$$

Hol konvergens és ott mi az összeg?

$$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}}_{a_n}$$

Ehhez alkalmazzuk a gyökkritériumot!

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \Rightarrow \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| = \frac{(-1)^n \frac{|x^{2n+1}|}{2n+1}}{(-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}} = |x^2| \underbrace{\frac{2n-1}{2n+1}}_{\to 1}$$

Ez pedig x^2, ha $n \to \infty$. És ez akkor konvergens, ha $x^2 < 1$, azaz, ha $-1 < x < 1$. Ha $|x| > 1$, akkor divergens.

- $x = 1$ -ben: konvergens, mert *Leibniz*;
- $x = -1$ -ben: $-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \ldots$: *Leibniz*$\Rightarrow$ konvergens.

Tehát a konvergenciatartomány: $[-1, 1]$.

Legyen $f(x)$ az összeg. $(-1, 1)$ -n tagonként deriválhatjuk.

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad x \in [-1, 1]$$
$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \qquad x \in (-1, 1)$$

Ez egy mértani sor, ahol a hányados: $-x^2$ és az első tag: $a = 1$.
Összeg: $\dfrac{1}{1-(-x^2)} = \dfrac{1}{x^2+1}$
Integrálunk.

$$f(x) = \int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \arctan(x) + c \qquad (-1,1)$$

Meghatározzuk a kérdéses c értékét!

$$\begin{cases} f(0) & = 0 \\ \arctan(0) & = 0 \end{cases}$$

Ebből már láthatjuk, hogy $c = 0$.
Tehát

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots = \arctan(x), \text{ ha } -1 < x < 1$$

Ez igaz lesz ± 1 -ben is (9.6. tétel szerint)
Speciálisan: $\arctan 1 = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \ldots = \dfrac{\pi}{4}$

9.6. Tétel. (Abel-folytonossági tétel) *Ha egy hatványsor a konvergenciatartomány bal/jobb szélső pontjában konvergens, akkor ott az összegfüggvény is az.*

9.7. Következmény. *Ha egy folytonos függvényt állít elő egy hatványsor egy nyílt intervallumban és az intervallum valamelyik szélén konvergens, akkor ott is előállítja.*

9.2. Hatványsorok átrendezése más középpontú hatványsorokká

Legyen (c_n) egy együtthatósorozat és a pedig a hatványsor középpontja.

$$f\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \text{ ahol } x \in]a-R, a+R[$$

9.8. Állítás. $\forall \alpha \in]a-R, a+R[$, ahol $f \in C[\alpha]$

Bizonyítás. A bizonyításhoz egy segédtételt fogunk használni.

$$x - a = x - \alpha + \alpha - a$$

$$(x-a)^n = (x-\alpha+\alpha-a)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (x-\alpha)^i (\alpha-a)^{n-i} \text{ A binomiális tétel miatt.}$$

$$c_n(x-a)^n = \sum_{i=0}^{n} \left(c_n \binom{n}{i} (\alpha-a)^{n-i} \right) (x-\alpha)^i$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\left(c_n \binom{n}{i} (\alpha-a)^{n-i} \right)}_{u_{in}} (x-\alpha)^i$$

Tehát

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{i=0}^{n} u_{in}}_{\text{sorösszeg}} = \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{n=i}^{\infty} u_{in}}_{\text{oszlopösszeg}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{n=i}^{\infty} c_n \binom{n}{i} (\alpha-a)^{n-i} \right)}_{A_i \text{ (csak } i \text{ -től függ)}} (x-\alpha)^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} A_i (x-\alpha)^i, \text{ ahol } A_i = \sum_{n=i}^{\infty} c_n \binom{n}{i} (\alpha-a)^{n-i}$$

□

A következőkben számítsuk ki az A_0 és az A_1 értékét mely a későbbiekben fontos szerepet fognak játszani a következtetéseinkben.

$$A_0 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \binom{n}{0} (\alpha - a)^n = f(\alpha)$$
$$A_1 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \binom{n}{1} (\alpha - a)^{n-1} = f'(\alpha)$$

Utóbbi eredményünk persze csak akkor igaz, ha már tudnánk, hogy f folytonosan differenciálható függvény.

9.9. Tétel. *Bármely hatványsor átrendezhető más középpontú hatványsorrá, azaz*

$$f(x) \colon = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = \sum_{i=0}^{\infty} A_i (x-\alpha)^i, \text{ ahol } A_i = \sum_{n=i}^{\infty} c_n \binom{n}{i} (\alpha - a)^{n-i}$$

Az átrendezett sor konvergenciahalmaza: Legyen $\varrho := R - |\alpha - a|$, így $\mathrm{KH} \sum_{i=0}^{\infty} A_i (x-\alpha)^i \supset]\alpha - \varrho, \alpha + \varrho[$.

9.3. Hatványsorok folytonossága, differenciálhatósága

9.10. Tétel.

$$f(x) \colon = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \qquad \big(x \in]a-R, a+R[\big) \qquad \forall \alpha \in]a-R, a+R[\text{ -en } f \in C[\alpha]$$

ahol α rögzített.

Bizonyítás.

$$f(x) - f(\alpha) = \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} A_i (x-\alpha)^i}_{\text{Átrendezett középpontú hatványsor}} - \underbrace{A_0}_{=f(\alpha)}$$
$$= (x-\alpha) \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} A_i (x-\alpha)^{i-1}}_{\text{Konvergens hatványsor} \to \text{van korlátja}}$$
$$|f(x) - f(\alpha)| \le |x - \alpha| \cdot K \qquad K > 0$$

Tehát

$$\underline{\forall\alpha > 0}, \underline{\exists\delta}: = \frac{\varepsilon}{K} > 0, \text{ melyre } \forall x \in]a-R, a+R[\text{ esetén } \underline{|x-\alpha| < \delta}:$$
$$\underline{|f(x) - f(\alpha)|} \leq |x-\alpha| \cdot K \leq \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \underline{\varepsilon}$$

Ezzel bebizonyítottuk a folytonosságot. □

9.11. Tétel. $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \qquad \big(x \in]a-R, a+R[\big)$, $\alpha \in]a-R, a+R[, f \in D(\alpha)$, *sőt* $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n (\alpha - a)^{n-1}$

Bizonyítás.

$$\lim_{x\to\alpha} \underbrace{\frac{f(x) - f(\alpha)}{x-\alpha}}_{\text{különbségi hányados}} = \lim_{x\to\alpha} \frac{(x-\alpha)\sum_{i=1}^{\infty} A_i (x-\alpha)^{i-1}}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} A_i (x-\alpha)^{i-1}$$

Ez pedig $i = 1$ -re pont A_1 -et ad (a többi tag kiesik), amiből pedig következik, hogy

$$f'(\alpha) = A_1$$

9.12. Következmény. $f \in D \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \qquad f \in C_k$ *(folytonosan differenciálható), sőt* $f \in C_\infty$ *(akárhányszor folytonosan differenciálható) és* $f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n \binom{n}{k} (x-a)^{n-k}$.

□

10. Taylor-sorok

Keressük adott f függvény hatványsor előállítását adott a pont körül.
Tegyük fel, hogy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} = a_n \cdot (x-a)^{n-1} = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots \qquad (a-R, a+R)$$

(zárt intervallum is lehet), ahol $R > 0$, vagy $R = \infty$.

$x = a$ -t beírva

$$f(a) = a_0 + \underbrace{a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + \dots}_{0} \Rightarrow f(a) = a_0$$

Deriváljuk $f(x)$ -t!

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (x-a)^{n-1} = 1a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \dots$$

Tehát

$$\begin{aligned} f'(a) &= a_1 \\ &\vdots \\ f^{(n)}(a) &= n! \cdot a_n \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

10.1. Megjegyzés. $0! = 1$

Tehát, ha $f(x)$ előáll $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ alakban egy $(a-R, a+R)$ $\quad R > 0$ intervallumon, akkor $a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ $\quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$.
Kérdés: Lehet-e, hogy f akárhányszor differenciálható, de nem áll így elő?
2 baj lehet:

- lehet, hogy a hatványsor csak a -ban konvergens, azaz $R = 0$;
- lehet, hogy $R > 0$, de a $\sum a_n(x-a)^n$ más függvényt állít elő.

10.2. Definíció. Tegyük fel, hogy f végtelen sokszor deriválható a -ban. Ekkor az f függvény *a -beli/a -körüli Taylor-sora*:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}}_{\text{szám}} \underbrace{(x-a)^n}_{\text{szám}} = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

- $a = 0$ -ra *Maclaurin-sornak* nevezzük
- ha csak az n -edfokú tagig vesszük, akkor az n *-edfokú Taylor polinomot* kapjuk

10.3. Következmény. *Adott függvényt csak a* Taylor-sora *állíthatja elő hatványsorként. (De nem mindig állítja elő!)*

Lehet, hogy csak a -ban konvergens, illetve az is előfordulhat, hogy más függvényt állít elő.
Például:

$$\text{Legyen } f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, \text{ ha } x \neq 0 \\ 0, \text{ ha } x = 0 \end{cases}$$

f akárhányszor differenciálható (0-ban is) és $\forall n$ -re $f^{(n)}(0) = 0$. Így a Taylor sora: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{0}{n!}(x)^n = 0 \neq f(x) \qquad x \neq 0$ -ra.
Épp ezért kellene egy tétel, amely garantálja, hogy a Taylor-sor előállítja a függvényt.
Taylor-polinom:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{n!}(x-a)^k$$

Taylor-sor:

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{n!}(x-a)^k$$

$T_n(x)$ a $T(x)$ -nek a részletösszege. Tehát $\forall$ olyan x -re, amelyre a Taylor-sor konvergens, akkor $T_n(x) \to T(x)$. Szeretnénk, hogy $T(x) = f(x)$. Ehhez az kellene, hogy $T_n(x) \to f(x)$. Ehhez pedig arra lenne szükség, hogy $\underbrace{f(x) - T_n(x)}_{\text{hibatag/maradéktag}}$ „kicsi" legyen „nagy" n -re, pontosabban tartson 0-hoz.

10.4. Tétel. (Maradéktag becslése) *Ha az f függvénynek az* $(n+1)$*. deriváltja, azaz* $|f^{(n+1)}(t)| \leq M \qquad t \in [a, x]$*, illetve* $t \in [x, a]$ *és* $T_n(x)$ *az f függvény a -körüli n. Taylor-polinomja, akkor*

$$\underbrace{|f(x) - T_n(x)|}_{maradéktag} \leq M \cdot \underbrace{\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}}_{\to 0,\ ha\ n\to\infty}$$

10.5. Következmény. *Ha van olyan M szám, melyre $|f^{(n+1)}(t)| \leq M \quad t \in [a,x]$, illetve $t \in [x,a] \quad \forall n$ -re, akkor x -ben előállítja f -et a Taylor-sora, azaz*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

10.1. Alkalmazások

1. Az $f(x) := \sin x$ $a = 0$ körüli hatványsor előállítása

   Taylor-sora:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x \\ f''(x) &= -\sin x \\ f'''(x) &= -\cos x \\ f^{(IV)}(x) &= \sin x \end{aligned}$$

   Ebből láthatjuk

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} \cos(0) & = 1, \text{ ha } n = 4+1 \text{ alakú} \\ -\cos(0) & = -1, \text{ ha } n = 4-1 \text{ alakú} \\ -\sin(0) & = \sin(0) = 0, \text{ ha } n \text{ páros} \end{cases}$$

   Tehát a $\sin(x)$ 0 körüli Taylor-sora:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \frac{1}{1!}x^1 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$|f^{(n)}| \leq 1$, mert $|\pm \sin(x)| \leq 1$ és $|\pm \cos(x)| \leq 1$, amiből következik $M = 1$ vektor esetén, hogy a 0 körüli Taylor-sor előállítja $\sin(x)$ -et $\forall x$ esetén.

Tehát

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

2. Az $f(x) :=\cos x$ $a = 0$ körüli hatványsor előállítása

Taylor-sora:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x \\ f''(x) &= -\cos x \\ f'''(x) &= \sin x \\ f^{(IV)}(x) &= \cos x \end{aligned}$$

Ebből láthatjuk

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} -\sin(0) & = \sin(0) = 0, \text{ ha } n \text{ páratlan} \\ -\cos(0) & = -1, \text{ ha } n = 4k+2 \text{ alakú} \\ \cos(0) & = 1, \text{ ha } n = 4k \text{ alakú} \end{cases}$$

Tehát a $\cos(x)$ 0 körüli Taylor-sora:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \frac{1}{1!} \cdot 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \ldots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$|f^{(n)}| \leq 1$, mert $|\pm \sin(x)| \leq 1$ és $|\pm \cos(x)| \leq 1$, amiből következik $M = 1$ vektor esetén, hogy a 0 körüli Taylor-sor előállítja $\cos(x)$ -et $\forall x$ esetén.

Tehát

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

3. e^x 0 körüli hatványsor előállítása

$$f^{(n)}(0) = e^0 = 1 \Leftarrow \begin{cases} f'(x) & = e^x \\ f''(x) & = e^x \\ \vdots & \\ f^{(n)}(x) & = e^x \end{cases}$$

e^x 0 körüli Taylor-sora:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x^n) = \frac{1}{n!}x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Az M x -től függhet, de n -től nem.

- Ha $x \geq 0$ $|e^t| \leq e^x \qquad [0, x)$ -n
- Ha $x < 0$ $|e^t| \leq 1 \qquad [x, 0]$ -n

Mivel e^t monoton nő, ebből $\forall x$ -re következik $M = e^x$, vagy $M = 1$ esetén, hogy a Taylor-sor előállítja e^x -et $\forall x$ -re.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Speciálisan $x = 1$ -re:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Köszönetnyilvánítás

Mindenekelőtt, ezúton is szeretném megköszönni Mezei Istvánnak a töretlen bizalmát és türelmét, mely a szakdolgozatom elkészítésben nagy szerepet játszott. Már az egyetemi tanulmányaim során is bebizonyította, hogy ilyen egy igazi, lelkiismeretes tanár, aki szemléletmódjával motiválja diákjait, hogy a tudás után szomjazzanak. Továbbá köszönöm családomnak és barátaimnak a támogatását, akik mindig egy lépéssel közelebb segítettek, hogy a céljaimat elérhessem.

Irodalomjegyzék

[1] Leindler L. - Schipp F.:*Analízis I.*, Nemzetközi Tankönyvkiadó, Budapest, 2001

[2] Walter Rudin: *A matematikai analízis alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978

[3] Mezei István, Faragó István, Simon Péter: *Bevezetés az analízisbe* című jegyzete, Typotex Kiadó, Budapest, 2013

[4] Laczkovich Miklós - T. Sós Vera: *Valós analízis I.*, Typotex Kiadó, Budapest, 2011

[5] https://hu.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler