Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

---

# Konvergenciagyorsítási módszerek
# BSc Szakdolgozat

Készítette

**Tábori Ármin**

Matematika BSc

Elemző matematikus szakirány

Témavezető

**Havasi Ágnes**

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Alkalmazott Analízis és

Számításmatematikai Tanszék

2016

Budapest

# *Köszönetnyilvánítás*

Szeretnék ezúton is köszönetet mondani Dr. Havasi Ágnesnek, az Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar adjunktusának, hogy segített a témaválasztásban, és ellátott szakirodalmakkal. További köszönettel tartozom a rengeteg konzultációért (e-mailben és személyesen egyaránt), ami jelentősen hozzájárult ahhoz, hogy mélyebben megérthessem a konvergenciagyorsítási módszereket.

Szeretném megköszönni Zénónak, hogy tanácsaival, megjegyzéseivel segítette munkámat.

Szeretném továbbá megköszönni családomnak, barátaimnak, hogy mellettem álltak és segítettek, valamint barátnőmnek, hogy bíztatott és támogatott engem ebben az időszakban.

# Tartalomjegyzék

# 1. fejezet

# Bevezetés

Nemlineáris egyenletek, illetve egyenletrendszerek megoldása során a gyakorlatban sokszor előfordul, hogy elkerülhetetlen valamilyen iterációs módszer használata, amelynek során egy, a megoldáshoz tartó sorozatot építünk fel. Azonban az iteratív módszerek gyakran hasznosak még lineáris problémák megoldására is, amikor nagyon sok ismeretlenünk van (esetenként milliós nagyságrendű), ahol egy direkt módszer alkalmazása a nagy tárigény miatt még a legjobb rendelkezésre álló számítógéppel is szinte megfizethetetlen, néhány esetben lehetetlen. Direkt módszerrel „pontos” megoldást kaphatunk, de van-e értelme, amikor nagyon sok számolással jár, illetve az egyenletünk / egyenletrendszerünk eleve hibákkal terhelt (modell hibái, mérési hiba, műszerhiba)?

Ezek után világos, hogy a gyakorlatban van értelme az iteratív módszerekkel és azok gyorsításával foglalkozni. Az iteratív módszereknél beszélhetünk konvergenciáról (amikor a módszerrel konstruált sorozat tart a keresett megoldáshoz), és konvergenciasebességről (amely jellemzi, hogy mennyire gyorsan tart ez a sorozat a megoldáshoz). Ezekre a fogalmakra pontos definíciót fogunk adni az 1. fejezetben.

A szakdolgozatban szeretnénk betekintést nyújtani az iteratív eljárások gyorsításának néhány népszerű, a gyakorlatban is használatos módszerébe.

Az 1. fejezetben azokat a jelöléseket, alapfogalmakat tekintjük át, amelyekre mindvégig támaszkodni fogunk a szakdolgozat során. Bizonyítás nélkül kimondunk néhány tanult tételt is, amelyeket felhasználunk majd a további eredményeinkhez. A 2. fejezetben bemutatjuk az *Aitken-féle $\Delta^2$-módszert* (továbbiakban Aitken-/$\Delta^2$-módszer), amellyel lineárisan konvergens sorozatot tudunk gyorsítani. Ezután megnézzük az Aitken-módszer alkalmazhatóságát a nemlineáris egyenletek megoldása során alkalmazott fixpont-iteráció gyorsítására. Később megvizsgáljuk, hogy kvadratikus konvergenciát tudunk-e gyorsítani vele. Adunk ezek után egy olyan módszert, amelyben a fixpont-iteráció és az Aitken-módszer ötvözve van, s ezt *Steffensen-módszernek* hívjuk. Továbbá ugyanebben a fejezetben megnézünk még egy speciális alakú $\{x_n\}$ sorozatot, amelyre használni fogjuk a $\Delta^2$-módszert. Végezetül megvizsgáljuk az ún. *iterált* $\Delta^2$*-módszert*, amelynek során a $\Delta^2$-módszert egymás után többször alkalmazzuk a gyorsítandó sorozatra. A 3. fejezetben az előző elméleti tételeket szeretném a gyakorlatba ültetni, *szimulációk, numerikus kísérletek és ábrák* segítségével. A 4. fejezetben röviden összegezzük a szakdolgozatban kapott eredményeket. Az **[A]** melléklet tartalmazza a szimulációkhoz felhasznált, általam írt *Matlab-kódokat*.

Szakdolgozatom fő vonalát az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karán tanult, Dr. Faragó István által tartott *Alkalmazott Analízis I. kurzus*, valamint *Avram Sidi* ebben a témában az Izraeli Műszaki Intézet Számítástudományi Tanszékén írt cikke adta [2]. A felhasznált szakirodalmakat az irodalomjegyzékben tüntettem föl.

## 1.1. Alapfogalmak

Mindenekelőtt néhány olyan alapfogalmat és tételt tisztázunk, amelyekre a szakdolgozatban támaszkodunk, illetve amelyek segítik a megértését.

**1.1.1. Definíció. Sorozatnak** nevezzük azokat a függvényeket, amelyeknek az értelmezési tartománya a pozitív természetes számok halmaza.
Legyen $H \neq \emptyset$ halmaz. Ekkor azt mondjuk, hogy $x : \mathbb{N}^+ \to H$ egy $H$-beli sorozat. Ebben a szakdolgozatban $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$ értékű sorozatokról fogunk beszélni.
Jelöljük innentől kezdve magát az $x : \mathbb{N}^+ \to H$ sorozatot a rövidebb $\{x_n\}$ jelöléssel.

**1.1.2. Definíció.** Azt mondjuk, hogy az $\{x_n\}$ számsorozat **konvergens**, ha

$$\exists x^* \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon{>}0\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ küszöbindex, hogy } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \text{ esetén } |x_n - x^*| < \varepsilon.$$

Ekkor az $x^*$ számot a sorozat határértékének nevezzük, és a $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ vagy az $x_n \to x^*$ jelölést használjuk.

**1.1.3. Definíció. (Konvergenciasebesség)** Tegyük fel, hogy $\{x_n\}$ konvergens, és $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$.
Azt mondjuk, hogy az $\{x_n\}$ sorozat $\alpha$ **rendben tart** $x^*$-hoz, ha $\exists \alpha \in \mathbb{N}^+$ szám és $c > 0$, amelyre

$$|x_{n+1} - x^*| \leqslant c|x_n - x^*|^\alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

$\alpha = 1$ esetén *lineáris (ha c<1)*, míg $\alpha = 2$ esetén *kvadratikus konvergenciáról beszélünk*. (Minél nagyobb az $\alpha$, annál nagyobb a konvergenciasebesség és annál kevesebb lépés szükséges ahhoz, hogy előírt pontossággal megközelítsük a határértéket).

**1.1.4. Definíció.** Tegyük fel, hogy létezik olyan $c_n \geqslant 0$, $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ sorozat, amely mellett

$$|x_{n+1} - x^*| \leqslant c_n |x_n - x^*|^\alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Ekkor $\alpha = 1$ esetén **szuperlineáris konvergenciáról** beszélünk.

1.1.5. *Megjegyzés.* Vizsgáljuk meg, milyen kapcsolat van a *kvadratikus* és a *szuperlineáris* konvergencia között.
Tegyük föl, hogy (1.1)-ben $\alpha = 2$-t helyettesítünk be (kvadratikus konvergencia)

$$|x_{n+1} - x^*| \leqslant c|x_n - x^*|^2 = \underbrace{c|x_n - x^*|}_{c_n}|x_n - x^*| = c_n|x_n - x^*|$$

Mivel $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ és $c$ konstans, így $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$.
Tehát *minden kvadratikus konvergencia* egyben *szuperlineáris konvergencia is.*

**1.1.6. Definíció.** Tegyük föl, hogy az $\{x_n\}$ sorozatra

$$|x_{n+1} - x^*| \leqslant c|x_n - x^*|^{\alpha_n} \tag{1.3}$$

teljesül valamely $c > 0$ konstans mellett, ahol $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha^* \in \mathbb{R}$.
Ekkor azt mondjuk, hogy a konvergencia **aszimptotikusan $\alpha^*$-ad rendű**.

**1.1.7. Definíció.** Azt mondjuk, hogy az $\{x_n\}$ sorozat korlátos, ha $\exists K \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}^+$ esetén $|x_n| \leq K$.

**1.1.8. Tétel.** *[4] Ha $\{x_n\}$ sorozat konvergens, akkor $\{x_n\}$ korlátos.* $\square$

**1.1.9. Tétel.** *[4] Ha $x_n \to 0$ és $\{c_n\}$ korlátos, akkor $x_n c_n \to 0$.* $\square$

**1.1.10. Definíció.** Adott $f$ és $g$ természetes számokon értelmezett valós függvények esetén az $f = \mathcal{O}(g)$ azt jelenti, hogy van olyan $c > 0$ konstans és $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbszám, amelyek mellett $\forall n \geq n_0$ esetén $|f(n)| \leq c|g(n)|$ teljesül.

Az (1.1.3) definícióban már definiáltuk a konvergenciasebességet. Most az (1.1) egyenlet egy átírását tekintjük (könnyű meggondolni, hogy a kettő ekvivalens).

**1.1.11. Definíció.** Legyen $\{x_n\}$ valós vagy komplex sorozat, és $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$.
Azt mondjuk, hogy az $\{x_n\}$ sorozat $\alpha$ **rendben konvergens**, ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^\alpha} = c, \quad 0 < c < \infty. \tag{1.4}$$

Ha $c = 0$, azt mondjuk, hogy az $\{x_n\}$ sorozat **legalább $\alpha$ rendben** konvergens.

Itt is igaz, hogy ha $\alpha = 1$, akkor $c < 1$ feltétel mellett *lineáris*, $\alpha = 2$ esetén pedig *kvadratikus a konvergencia*.
A dolgozat további részében, ha külön nem hangsúlyozunk mást, akkor feltesszük, hogy $x_n$ és $\alpha$ komplexek.

Vegyük észre, hogy (1.4) azt jelenti:

$$\frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^\alpha} \approx c \quad \forall n \text{ elég nagy esetén.} \tag{1.5}$$

Ezt átírhatjuk a következő alakra:

$$|x_{n+1} - x^*| \approx c|x_n - x^*|^\alpha \quad \forall n \text{ elég nagy esetén.} \tag{1.6}$$

Ha $\alpha = 1$, akkor ez azt jelenti, hogy az $x_{n+1}$ $x^*$-tól vett eltérése körülbelül $c$-szerese az $x_n$ iterációs lépés $x^*$-tól vett eltérésének. Ebből látható, hogy a konvergencia sebessége függ attól, hogy $c$ milyen messze van az 1-től. Nyilvánvalóan, minél messzebb van $c$ az 1-től, annál gyorsabb a konvergencia. Célunk tehát olyan módszert adni, amellyel az $\{x_n\}$ sorozatból olyan $\{\hat{x}_n\}$ sorozatot tudunk generálni, amely gyorsabban fog $x^*$-hoz konvergálni, a következő értelemben:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\hat{x}_n - x^*}{x_n - x^*} = 0. \tag{1.7}$$

Azt is mondjuk ilyenkor, hogy a módszer gyorsítja az $\{x_n\}$ sorozat konvergenciáját.

A legegyszerűbb módszer, amely egyben népszerű és hatékony is, a lineáris konvergencia gyorsítására alkalmazható Aitken-féle $\Delta^2$-módszer.

# 2. fejezet

# Az Aitken-módszer konvergens sorozatok gyorsítására

## 2.1. Az Aitken-féle $\Delta^2$-módszer

Azzal kezdjük, hogy az (1.4) pontban megadott konvergenciát átfogalmazzuk a lineáris esetre ($\alpha = 1$) úgy, hogy az abszolútértéket elhagyjuk.

**2.1.1. Definíció.** Legyen adott $\{x_n\}$ sorozat és $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$. Ekkor azt mondjuk, hogy $\{x_n\}$ lineárisan konvergens, ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = c, \quad 0 < |c| < 1, \tag{2.1}$$

ahol $x_n$, $x^*$ és $c$ komplexek.

Legyen adva egy $\{x_n\}$ sorozatunk, amely konvergál $x^*$-hoz. A célunk egy olyan $\{\hat{x}_n\}$ sorozat előállítása, amely gyorsabban fog konvergálni $x^*$-hoz.

A (2.1) alapján elég nagy $n$ esetén

$$\frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} \approx c. \tag{2.2}$$

Természetesen a reláció igaz lesz egy iterációs lépés alkalmazása után is:

$$\frac{x_{n+2} - x^*}{x_{n+1} - x^*} \approx c. \tag{2.3}$$

A (2.2) és (2.3) alapján

$$\frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} \approx \frac{x_{n+2} - x^*}{x_{n+1} - x^*}. \tag{2.4}$$

Tekintsünk erre a következőképpen: az egyetlen ismeretlen paraméterünk az $x^*$. Oldjuk most meg ezt $x^*$-ra. Keresztbeszorzás után az

$$(x_{n+1} - x^*)^2 \approx (x_n - x^*)(x_{n+2} - x^*) \tag{2.5}$$

közelítő egyenlőséget kapjuk. A szorzások elvégzése és a bal oldalon $x^*$ kiemelése után

$$(x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2})x^* \approx x_n x_{n+2} - x_{n+1}^2. \tag{2.6}$$

Ebből egyszerű átalakítás után $x^*$ kifejezhető a következő alakban:

$$x^* \approx \frac{x_n x_{n+2} - x_{n+1}^2}{x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2}}. \tag{2.7}$$

Jelölje $\hat{x}_n$ a következőt:

$$\hat{x}_n = \frac{x_n x_{n+2} - x_{n+1}^2}{x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2}}. \tag{2.8}$$

Ezt a módszert, amely során az eredeti $\{x_n\}$ sorozatból generáltuk az $\{\hat{x}_n\}$ sorozatot, **Aitken-féle $\Delta^2$-módszernek** nevezzük. Könnyű ellenőrizni, hogy a (2.8) átírható az alábbi formákra:

$$\hat{x}_n = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}, \tag{2.9}$$

$$\hat{x}_n = x_{n+1} - \frac{(\Delta x_n)(\Delta x_{n+1})}{\Delta^2 x_n}, \tag{2.10}$$

ahol

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n \quad \text{és} \quad \begin{aligned} \Delta^2 x_n &= \Delta(\Delta x_n) = \Delta(x_{n+1} - x_n) \\ &= \Delta x_{n+1} - \Delta x_n \\ &= x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Megjegyezzük, hogy (2.9) és (2.10) numerikusan stabilabb módot ad az $\{\hat{x}_n\}$ kiszámítására, mint a (2.8). (Numerikusan stabilabb, amely alatt azt értjük, hogy a kerekítési hiba hatását kevésbé növeli meg a két utóbbi algoritmus).

2.1.2. *Megjegyzés.* A (2.11)-et a következőképp általánosíthatjuk:

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n, \quad \Delta^0 x_n = x_n \text{ és}$$

$$\Delta^k x_n = \Delta(\Delta^{k-1} x_n), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Megmutatható $k$-ra való indukcióval, hogy

$$\Delta^k x_n = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} x_{n+i}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

## 2.2. Lineáris konvergencia gyorsítása

Belátjuk, hogy az előzőekben bemutatott Aitken-féle módszer alkalmas lineárisan konvergens sorozatok gyorsítására.

**2.2.1. Tétel.** *[2] Legyen $\{x_n\}$ olyan sorozat, amely a (2.1)-es definíció szerint lineárisan konvergál $x^*$-hoz. Legyen $\hat{x}_n$ definiálva a (2.8) alapján. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \hat{x_n} = x^* \tag{2.12}$$

*és*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\hat{x}_n - x^*}{x_n - x^*} = 0. \tag{2.13}$$

*Bizonyítás.* Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\varepsilon_n := x_n - x^*, \quad \hat{\varepsilon}_n := \hat{x}_n - x^*, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{2.14}$$

A (2.8)-as egyenlet mindkét oldalából kivonunk $x^*$-ot, majd alkalmazzuk a (2.14)-es jelölést.

$$\begin{aligned}
\underbrace{\hat{x}_n - x^*}_{\hat{\varepsilon}_n} &= \frac{x_n x_{n+2} - x_{n+1}^2}{x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2}} - x^* \\
&= \frac{x_n x_{n+2} - x_{n+1}^2 - x^*(x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2})}{x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2}} \\
&= \frac{x_n x_{n+2} - x^* x_n - x^* x_{n+2} - x_{n+1}^2 + 2x_{n+1}x^*}{x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2}} \\
&= \frac{\overbrace{x_n x_{n+2} - x^* x_n - x^* x_{n+2} + (x^*)^2}^{(x_n - x^*)(x_{n+2} - x^*)} \overbrace{- x_{n+1}^2 + 2x_{n+1}x^* - (x^*)^2}^{-(x_{n+1} - x^*)^2}}{x_n - x^* \underbrace{-2x_{n+1} + 2x^*}_{-2(x_{n+1} - x^*)} + x_{n+2} - x^*} \\
&= \frac{\overbrace{(x_n - x^*)}^{\varepsilon_n} \overbrace{(x_{n+2} - x^*)}^{\varepsilon_{n+2}} - \overbrace{(x_{n+1} - x^*)^2}^{{\varepsilon_{n+1}}^2}}{\underbrace{x_n - x^*}_{\varepsilon_n} - 2\underbrace{(x_{n+1} - x^*)}_{\varepsilon_{n+1}} + \underbrace{x_{n+2} - x^*}_{\varepsilon_{n+2}}} \\
\hat{\varepsilon}_n &= \frac{\varepsilon_n \varepsilon_{n+2} - \varepsilon_{n+1}^2}{\varepsilon_n - 2\varepsilon_{n+1} + \varepsilon_{n+2}}.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

A (2.1) definíció és a (2.14) jelölés alapján

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}=c\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\varepsilon_{n+k}}{\varepsilon_n} = \lim_{n\to\infty}\overbrace{\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}}^{c}\overbrace{\frac{\varepsilon_{n+2}}{\varepsilon_{n+1}}}^{c}\cdots\overbrace{\frac{\varepsilon_{n+k-1}}{\varepsilon_{n+k-2}}}^{c}\overbrace{\frac{\varepsilon_{n+k}}{\varepsilon_{n+k-1}}}^{c}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varepsilon_{n+k}}{\varepsilon_n} = c^k, \quad k=1,2,\ldots. \tag{2.16}$$

A (2.15) egyenlet jobb oldalának a számlálójából kiemelhetünk $\varepsilon_n\varepsilon_{n+1}$-et, míg a nevezőjéből $\varepsilon_n$-et, így a következő egyenlőségre jutunk:

$$\hat{\varepsilon}_n=\frac{\varepsilon_n}{1}\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}\frac{\frac{\varepsilon_{n+2}}{\varepsilon_{n+1}}-\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}}{1-2\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}+\frac{\varepsilon_{n+2}}{\varepsilon_n}} \tag{2.17}$$

Vegyük a (2.17) egyenlet jobb oldalán a nevező határértékét. Ehhez használjuk fel a (2.16)-ot és hogy $c\neq 1$, hiszen $|c|<1$, ami a (2.1) definícióból következik (a tételben feltettük). Ekkor

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-2\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}+\frac{\varepsilon_{n+2}}{\varepsilon_n}\right)=1-2c+c^2=\overbrace{(1-c)^2\neq 0}^{\text{mivel } |c|<1}. \tag{2.18}$$

Most (2.17) egyenlet mindkét oldalát osszuk el $\varepsilon_n$-nel, és vegyük a határértékét (használva a (2.16) pontot)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\hat{\varepsilon}_n}{\varepsilon_n}=c\frac{\overbrace{c-c}^{=0}}{\underbrace{(1-c)^2}_{(2.18)\text{ miatt }\neq 0}}=0. \tag{2.19}$$

A (2.19) alapján és visszatérve a (2.14)-es jelölésre, a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\hat{\varepsilon}_n}{\varepsilon_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\hat{x}_n-x^*}{x_n-x^*}=0 \tag{2.20}$$

határértékhez jutunk. Ezzel beláttuk a tétel (2.13) állítását.
A (2.12) állítás igazolásához vegyük figyelembe, hogy nyilvánvalóan

$$\hat{\varepsilon}_n=\left(\frac{\hat{\varepsilon}_n}{\varepsilon_n}\right)\varepsilon_n.$$

Mindkét oldal határértékét véve

$$\lim_{n\to\infty}\hat{\varepsilon}_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\hat{\varepsilon}_n}{\varepsilon_n}\right)\varepsilon_n. \tag{2.21}$$

A (2.20) alapján $\frac{\hat{\varepsilon}_n}{\varepsilon_n}\to 0$, és mivel $\{x_n\}$ konvergens sorozat a feltételeknek megfelelően, ezért az 1.1.8 Tétel miatt korlátos is. Így $\varepsilon_n$ is korlátos. A (2.21) egyenlet jobb oldalán egy 0-hoz tartó sorozat van megszorozva egy korlátos sorozattal, és ennek vizsgáljuk a határértékét. Az 1.1.9 Tétel miatt a keresett határérték 0 lesz, tehát $lim_{n\to\infty}\hat{\varepsilon}_n = 0$. Visszaírva a (2.14) jelölésekkel: $lim_{n\to\infty}(\hat{x}_n - x^*) = 0 \Rightarrow lim_{n\to\infty}\hat{x}_n = x^*$. Ezzel a tétel (2.12) állítását is beláttuk. □

Igazoltuk, hogy ha $\{x_n\}$ egy lineárisan konvergens sorozat, akkor a (2.8) alapján generált $\{\hat{x}_n\}$ sorozatra teljesülnek a (2.12) és (2.13)-as állítások, vagyis

1. $\{\hat{x}_n\}$ sorozat is konvergens és tart $x^*$-hoz,
2. $\{\hat{x}_n\}$ sorozat gyorsabban tart $x^*$-hoz, mint $\{x_n\}$.

Ezzel beláttuk, hogy az *Aitken $\Delta^2$-módszerrel* lineáris konvergenciát tudunk gyorsítani.

## 2.3. Az Aitken-módszer alkalmazása a fixpont-iteráció gyorsítására

**2.3.1. Tétel.** *[2] Legyen $x^*$ egy megoldása az*

$$x = f(x) \tag{2.22}$$

*egyenletnek. Tegyük föl továbbá, hogy $f \in C^1(J)$, ahol $J = [x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon]$ egy $\varepsilon > 0$ számra, és $|f'(x^*)| < 1$.*

1. *Ekkor van olyan $m$ szám, amelyre igaz, hogy $|f'(x^*)| \leq m < 1$, és $x^*$-nak van olyan $I = [x^* - \delta, x^* + \delta]$ környezete, $I \subseteq J$, hogy*
   - *(i)* $|f'(x)| \leq m \quad \forall x \in I$, *és*
   - *(ii)* $x^*$ *egyetlen megoldása az $x = f(x)$ egyenletnek.*
2. *A fixpont-iterációs módszerrel, vagyis az*

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, \ldots \tag{2.23}$$

*rekurzióval előállított $\{x_n\}$ sorozat konvergálni fog $x^*$-hoz, ha $x_0 \in I$. Felírhatjuk továbbá a következőt:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = f'(x^*). \tag{2.24}$$

Az előzőek alapján már tudjuk ((2.1) definíció), hogy $0 < |f'(x^*)| < 1$ esetén $\{x_n\}$ lineárisan konvergál. Ezért a 2.2.1 Tételt használva $c = f'(x^*)$ megválasztással arra jutottunk, hogy a $\Delta^2$-módszer gyorsítja az $\{x_n\}$ sorozat lineáris konvergenciáját. A következő, 2.4 szakaszban megnézzük ezt a gyorsítást, feltételezve hogy $f \in C^2(J)$.

2.3.2. *Megjegyzés.* Tegyük fel, hogy $f \in C^2(J)$. Ekkor ha $f'(x^*) = 0$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^2} = \frac{1}{2} f''(x^*), \tag{2.25}$$

vagyis az $\{x_n\}$ sorozat legalább kvadratikusan konvergál. Ebben az esetben, amint azt a 2.5. szakaszban megmutatjuk, a $\Delta^2$-módszer *nem fogja gyorsítani* az $\{x_n\}$ sorozat konvergenciáját.

## 2.4. A $\Delta^2$-módszer és a lineáris konvergencia

**2.4.1. Tétel.** *[2] Legyen $f(x)$ olyan függvény, mint a 2.3 szakaszban, feltéve hogy $0 < |f'(x^*)| < 1$ és legyen $\{x_n\}$ ismét a fixpont-iterációval előállított sorozat, $\{\hat{x}_n\}$ pedig az Aitken-féle módszerrel belőle kapott sorozat. Ekkor, feltételezve, hogy $f \in C^2(J)$, a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\hat{x}_n - x^*}{(x_n - x^*)^2} = \frac{1}{2} \frac{f'(x^*) f''(x^*)}{f'(x^*) - 1} \tag{2.26}$$

*és*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\hat{x}_{n+1} - x^*}{\hat{x}_n - x^*} = [f'(x^*)]^2 \tag{2.27}$$

*összefüggések teljesülnek.*

*Bizonyítás.* Első lépésben fejtsük másodrendig Taylor-sorba a (2.23)-as egyenletben $f(x_n)$-t az $x^*$ pont körül.

$$x_{n+1} = f(x^*) + f'(x^*)(x_n - x^*) + \frac{1}{2} f''(\xi_n)(x_n - x^*)^2 \quad n \to \infty \text{ esetén}, \tag{2.28}$$

ahol $\xi_n$, $x_n$ és $x^*$ közötti szám.
Definiáljuk a következőket:

$$\lambda := f'(x^*), \quad \mu := \frac{1}{2} f''(x^*), \quad \mu_n := \frac{1}{2} f''(\xi_n). \tag{2.29}$$

Világos, hogy mivel $f''(x)$ folytonos az $I$ intervallumon, így $\lim_{n\to\infty} \xi_n = x^*$,

$$\mu_n = \mathcal{O}(1) \quad n \to \infty \text{ esetén és } \quad \lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu. \tag{2.30}$$

Természetesen a (2.24)-es egyenletet átírhatjuk a következő alakba, felhasználva a (2.14)-es jelölést

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{x_{n+1} - x^*}^{\varepsilon_{n+1}}}{\underbrace{x_n - x^*}_{\varepsilon_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \overbrace{f'(x^*)}^{\lambda} = \lambda.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \lambda. \tag{2.31}$$

Írjuk át a (2.28)-as egyenletet, felhasználva a (2.29) és (2.14)-es jelöléseket, valamint azt hogy $x^*$ fixpont, tehát $f(x^*) = x^*$:

$$\begin{aligned}
\underbrace{x_{n+1} - \overbrace{f(x^*)}^{x^*}}_{\varepsilon_{n+1}} &= \underbrace{f'(x^*)}_{\lambda}\underbrace{(x_n - x^*)}_{\varepsilon_n} + \underbrace{\frac{1}{2}f''(\xi_n)}_{\mu_n}\underbrace{(x_n - x^*)^2}_{\varepsilon_n^2} \\
\varepsilon_{n+1} &= \lambda\varepsilon_n + \mu_n\varepsilon_n^2. \qquad (2.32)
\end{aligned}$$

Ebből kapjuk az index megnövelésével az alábbi összefüggést:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{n+2} &= \lambda\varepsilon_{n+1} + \mu_{n+1}\varepsilon_{n+1}^2 \\
&= \lambda\overbrace{(\lambda\varepsilon_n + \mu_n\varepsilon_n^2)}^{\varepsilon_{n+1}} + \mu_{n+1}\overbrace{(\lambda\varepsilon_n + \mu_n\varepsilon_n^2)^2}^{\varepsilon_{n+1}^2} \\
&= \lambda^2\varepsilon_n + (\lambda\mu_n + \lambda^2\mu_{n+1})\varepsilon_n^2 + \mathcal{O}(\varepsilon_n^3) \quad n \to \infty \text{ esetén.} \qquad (2.33)
\end{aligned}$$

A (2.15)-ös egyenletben használjuk fel a (2.32)-es és (2.33)-as eredményeket

$$\begin{aligned}
\hat{\varepsilon}_n &= \frac{\varepsilon_n\varepsilon_{n+2} - \varepsilon_{n+1}^2}{\varepsilon_n - 2\varepsilon_{n+1} + \varepsilon_{n+2}} \\
&= \frac{\varepsilon_n\overbrace{[\lambda^2\varepsilon_n + (\lambda\mu_n + \lambda^2\mu_{n+1})\varepsilon_n^2 + \mathcal{O}(\varepsilon_n^3)]}^{\varepsilon_{n+2}} - \overbrace{[\lambda\varepsilon_n + \mu_n\varepsilon_n^2]^2}^{\varepsilon_{n+1}^2}}{\varepsilon_n - 2\underbrace{[\lambda\varepsilon_n + \mu_n\varepsilon_n^2]}_{\varepsilon_{n+1}} + \underbrace{[\lambda^2\varepsilon_n + (\lambda\mu_n + \lambda^2\mu_{n+1})\varepsilon_n^2 + \mathcal{O}(\varepsilon_n^3)]}_{\varepsilon_{n+2}}} \\
&= \frac{\varepsilon_n[\lambda^2\varepsilon_n + (\lambda\mu_n + \lambda^2\mu_{n+1})\varepsilon_n^2 + \mathcal{O}(\varepsilon_n^3)] - [\lambda^2\varepsilon_n^2 + 2\lambda\mu_n\varepsilon_n^3 + \mathcal{O}(\varepsilon_n^4)]}{\varepsilon_n(\lambda - 1)^2 + \mathcal{O}(\varepsilon_n^2)} \\
&= \frac{\varepsilon_n^3[(\lambda^2\mu_{n+1} - \lambda\mu_n) + \mathcal{O}(\varepsilon_n)]}{\varepsilon_n[(\lambda - 1)^2 + \mathcal{O}(\varepsilon_n)]} \\
&= \varepsilon_n^2\frac{(\lambda^2\mu_{n+1} - \lambda\mu_n) + \mathcal{O}(\varepsilon_n)}{(\lambda - 1)^2 + \mathcal{O}(\varepsilon_n)}.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Mindkét oldalt osszuk el $\varepsilon_n^2$-nel, és vegyük így mindkét oldal határértékét. A (2.30)-as pontban leírtak felhasználásával

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\hat{\varepsilon}_n}{\varepsilon_n^2} = \frac{\lambda^2\mu - \lambda\mu}{(\lambda - 1)^2} = \frac{\lambda\mu(\lambda - 1)}{(\lambda - 1)^2} = \frac{\lambda\mu}{\lambda - 1}. \tag{2.35}$$

Visszatérve a (2.14)-es jelölésekre, kapjuk

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\hat{x}_n - x^*}^{\hat{\varepsilon}_n}}{\underbrace{(x_n - x^*)^2}_{\varepsilon_n^2}} = \frac{\overbrace{f'(x^*)}^{\lambda}\overbrace{\frac{1}{2}f''(x^*)}^{\mu}}{\underbrace{f'(x^*)}_{\lambda}-1}, \tag{2.36}$$

tehát a tétel (2.26) részét ezzel beláttuk. Ahhoz, hogy igazoljuk a (2.27) állítást, írjuk fel bonyolultabb alakban az $\frac{\hat{\varepsilon}_{n+1}}{\hat{\varepsilon}_n}$ hányadost:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\varepsilon}_{n+1}}{\hat{\varepsilon}_n} &= \frac{\hat{\varepsilon}_{n+1}}{\varepsilon_{n+1}^2}\frac{\varepsilon_{n+1}^2}{\varepsilon_n^2}\frac{\varepsilon_n^2}{\hat{\varepsilon}_n} \\ &= \frac{\frac{\hat{\varepsilon}_{n+1}}{\varepsilon_{n+1}^2}}{\frac{\hat{\varepsilon}_n}{\varepsilon_n^2}}\left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}\right)^2. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Vegyük mindkét oldal határértékét $n \to \infty$ esetén, és használjuk fel a (2.31)-et és (2.35)-öt. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\hat{\varepsilon}_{n+1}}{\hat{\varepsilon}_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\frac{\hat{\varepsilon}_{n+1}}{\varepsilon_{n+1}^2}}^{\frac{\lambda\mu}{\lambda-1}}}{\underbrace{\frac{\hat{\varepsilon}_n}{\varepsilon_n^2}}_{\frac{\lambda\mu}{\lambda-1}}}\overbrace{\left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}\right)^2}^{\lambda^2} = \lambda^2. \tag{2.38}$$

Átírva a (2.38)-at a (2.14)-es jelölésekkel:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\hat{x}_{n+1} - x^*}^{\hat{\varepsilon}_{n+1}}}{\underbrace{\hat{x}_n - x^*}_{\hat{\varepsilon}_n}} = \underbrace{[f'(x^*)]^2}_{\lambda^2}, \tag{2.39}$$

amely a tétel (2.27) állítása. Ezzel bebizonyítottuk a tételt. □

2.4.2. *Megjegyzés.* Az $\{\hat{x}_n\}$ sorozat lineárisan konvergál $x^*$-hoz, de kétszer olyan gyorsan, mint az $\{x_n\}$ sorozat. Más szavakkal: $\{\hat{\varepsilon}_n\}$ sorozat kétszer olyan gyorsan konvergál, mint $\{\varepsilon_n\}$.

Ezt heurisztikusan a következőképpen lehet belátni. A (2.31) pontból következik, hogy

$$\varepsilon_{n+1} \approx \lambda\varepsilon_n, \quad \text{ha } x_0 \text{ elég közel van } x^*\text{-hoz (vagy } n \text{ elég nagy).}$$

Ebből teljes indukcióval belátható, hogy

$$\varepsilon_{2n} \approx \varepsilon_0 \lambda^{2n}. \tag{2.40}$$

Valamint analóg módon a (2.38) alapján

$$\hat{\varepsilon}_{n+1} \approx \lambda^2 \hat{\varepsilon}_n,$$

amelyből pedig az

$$\hat{\varepsilon}_n \approx \hat{\varepsilon}_0 \lambda^{2n} \tag{2.41}$$

becslés adódik. Így, ha a (2.41)-es és (2.40)-es egyenletet elosztjuk egymással, az

$$\hat{\varepsilon}_n \approx \left(\frac{\hat{\varepsilon}_0}{\varepsilon_0}\right)\varepsilon_{2n} \tag{2.42}$$

közelítő egyenlőségre jutunk, ami azt mutatja, hogy $\hat{\varepsilon}_n$ és $\varepsilon_{2n}$ ugyanolyan pontosságú.

## 2.5. A $\Delta^2$-módszer és a kvadratikus konvergencia

**2.5.1. Tétel.** *[2] Legyen $f(x)$ olyan függvény, mint a 2.3 szakaszban, feltéve hogy $f'(x^*) = 0$ és legyen $\{x_n\}$ ismét a fixpont-iterációval előállított sorozat, $\{\hat{x}_n\}$ pedig az Aitken-féle módszerrel belőle kapott sorozat. Ekkor, feltételezve, hogy $f \in C^2(J)$*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\hat{x}_n - x^*}{(x_n - x^*)^3} = -\left[\frac{1}{2}f''(x^*)\right]^2 \tag{2.43}$$

*és*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\hat{x}_{n+1} - x^*}{(\hat{x}_n - x^*)^2} = -\frac{1}{2}f''(x^*), \tag{2.44}$$

*vagyis az $\{\hat{x}_n\}$ sorozat legalább kvadratikusan konvergál, ahogy az $\{\hat{x}_n\}$ sorozat is.*

*Bizonyítás.* A (2.25)-ös egyenletet átírjuk, felhasználva a (2.14)-es és (2.30)-as jelöléseket:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{x_{n+1} - x^*}^{\varepsilon_{n+1}}}{\underbrace{(x_n - x^*)^2}_{\varepsilon_n^2}} &= \underbrace{\frac{1}{2}f''(x^*)}_{\mu} \\
\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^2} &= \mu.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

A (2.45)-ös egyenlőségből következik

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^2}\right)\varepsilon_n\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\varepsilon_{n+k}}{\varepsilon_n} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{2.46}$$

Az első egyenlőségjel után kihasználtuk, hogy tetszőleges korlátos sorozatot szorozva egy nullához tartó sorozattal, nulla határértéket kapunk. Most írjuk át a (2.15)-ös egyenletet az alábbi formába:

$$\hat{\varepsilon}_n = \varepsilon_n^3 \frac{\left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^2}\right)^2 \left(\varepsilon_n \frac{\varepsilon_{n+2}}{\varepsilon_{n+1}^2} - 1\right)}{1 - 2\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} + \frac{\varepsilon_{n+2}}{\varepsilon_n}}. \tag{2.47}$$

Könnyű belátni, hogy ekvivalens átalakítást végeztünk.
Mindkét oldalt osszuk el $\varepsilon_n^3$-nel és vegyük mindkét oldal határértékét $n \to \infty$ esetén, felhasználva a (2.45) és (2.46) eredményeket:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\hat{\varepsilon}_n}{\varepsilon_n^3} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^2}\right)^2}^{\mu^2} \left(\overbrace{\varepsilon_n \frac{\varepsilon_{n+2}}{\varepsilon_{n+1}^2}}^{0} - 1\right)}{1 - 2\underbrace{\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}}_{0} + \underbrace{\frac{\varepsilon_{n+2}}{\varepsilon_n}}_{0}} \\
\lim_{n\to\infty} \frac{\hat{\varepsilon}_n}{\varepsilon_n^3} &= -\mu^2.
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Visszaírva a (2.48)-at a (2.14)-es jelölésekkel:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\hat{x}_n - x^*}^{\hat{\varepsilon}_n}}{\underbrace{(x_n - x^*)^3}_{\varepsilon_n^3}} = -\underbrace{\left[\frac{1}{2} f''(x^*)\right]^2}_{\mu^2}, \tag{2.49}$$

amely éppen a tétel (2.43) állítása.
A (2.44)-es állítás igazolásához először írjuk át ekvivalens alakba az $\frac{\hat{\varepsilon}_{n+1}}{\hat{\varepsilon}_n^2}$ hányadost:

$$\frac{\hat{\varepsilon}_{n+1}}{\hat{\varepsilon}_n^2} = \frac{\frac{\hat{\varepsilon}_{n+1}}{\varepsilon_{n+1}^3}}{\left(\frac{\hat{\varepsilon}_n}{\varepsilon_n^3}\right)^2} \left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^2}\right)^3. \tag{2.50}$$

Mindkét oldalnak vegyük a határértékét $n \to \infty$ esetén, és használjuk fel a (2.45)-ös és (2.48)-as összefüggéseket

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\hat{\varepsilon}_{n+1}}{\hat{\varepsilon}_n^2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\frac{\hat{\varepsilon}_{n+1}}{\varepsilon_{n+1}^3}}^{-\mu^2}}{\underbrace{\left(\frac{\hat{\varepsilon}_n}{\varepsilon_n^3}\right)^2}_{(-\mu^2)^2=\mu^4}} \overbrace{\left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^2}\right)^3}^{\mu^3} \\
&= -\mu.
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Visszaírva a (2.14)-es jelölésekkel, a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\hat{x}_{n+1} - x^*}^{\hat{\varepsilon}_{n+1}}}{\underbrace{(\hat{x}_n - x^*)^2}_{\hat{\varepsilon}_n^2}} = \overbrace{-\frac{1}{2}f''(x^*)}^{-\mu} \tag{2.52}$$

egyenlőséget nyerjük, ami a tétel (2.44)-es állítása.
Ezzel beláttuk a tétel mindkét állítását. □

2.5.2. *Megjegyzés.* A 2.5.1 Tétel következménye, hogy a $\Delta^2$-módszer nem gyorsít kvadratikus konvergenciát. Összehasonlítva az $\varepsilon_{n+2}$-nek és az $\hat{\varepsilon}_n$-nak a konvergenciasebességét, azt tapasztaljuk, hogy az előbbi jobbnak mondható. A (2.45) felhasználásával

$$\varepsilon_{n+2} \sim \mu\varepsilon_{n+1}^2 \sim \mu(\mu\varepsilon_n^2)^2 = \mu^3\varepsilon_n^4 \quad n \to \infty \text{ esetén.} \tag{2.53}$$

A (2.48) alapján pedig a következőt kapjuk

$$\hat{\varepsilon}_n \sim -\mu^2\varepsilon_n^3 \quad n \to \infty \text{ esetén.} \tag{2.54}$$

A (2.54)-es és (2.53)-as egyenletet elosztva egymással

$$\frac{\varepsilon_{n+2}}{\hat{\varepsilon}_n} \sim -\mu\varepsilon_n \quad n \to \infty \text{ esetén} \tag{2.55}$$

adódik, amiből

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+2}}{\hat{\varepsilon}_n} = 0 \tag{2.56}$$

következik. Ennél a határértéknél is felhasználtuk az 1.1.9 Tételt.

Tehát kvadratikus konvergenciánál nem érdemes az Aitken $\Delta^2$-módszert használnunk a sima fixpont-iteráció helyett.

## 2.6. A $\Delta^2$-módszer és a Steffensen-módszer

Az előző alfejezetekben a $\Delta^2$-módszert a fixpont-iterációval előállított $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0, 1, \dots$ sorozatra alkalmaztuk. Külön érdemes megemlíteni, hogy ezekben az alkalmazásokban az $f(x)$ függvényt nem volt szükséges ismernünk.

Ebben az alfejezetben egy másik használatát nézzük meg a $\Delta^2$-módszernek, amelyhez az $f(x)$ függvényt is felhasználjuk. Ezt *Steffensen-módszernek* is hívják. Itt is, ahogy a fixpont-iterációnál, egy kezdeti $x_0$ érték adott, amely már egy közelítése az $x = f(x)$ egyenlet $x^*$ megoldásának. Ekkor kiszámoljuk az $x_1$ és $x_2$ értékeket az $x_1 = f(x_0)$ és

$x_2 = f(x_1)$ egyenletekből. Ezután alkalmazzuk a $\Delta^2$-módszert az $\{x_0, x_1, x_2\}$-re és kiszámoljuk az $\hat{x}_0 = x_0 - (x_1 - x_0)^2/(x_2 - 2x_1 + x_0)$ új közelítést. Ezek után beállítjuk a régi $x_0$ értékének a már kiszámolt új $\hat{x}_0$ értékét, vagyis $x_0 = \hat{x}_0$, és ezt ismételjük végtelenségig, vagy addig, amíg a kívánt pontossággal meg nem közelítjük az $x^*$ megoldást. Ha szeretnénk ezt implementálni a különböző programozási nyelvekre, akkor az alábbi pszeudo kód áll rendelkezésünkre:

[1] STEFFENSEN($f$, $x_0$):
[2] **for** $i = 1, \ldots$,n **do**:
[3] $x_1 = f(x_0);\quad x_2 = f(x_1);$
[4] $\hat{x}_i = x_0 - (x_1 - x_0)^2/(x_2 - 2x_1 + x_0)$ # Aitken $\Delta^2$-módszert használjuk hogy jobb kö-
[5] # zelítést kapjunk az $x^*$-hoz, mint $x_0$ volt.
[6] $x_0 = \hat{x}_i;$ # frissítjük $x_0$ értékét az új kiszámolt értékkel
[7] **endfor (i)**
[8] END

Megjegyezzük, hogy a [4]. sorban az Aitken-féle $\Delta^2$-módszert a (2.9) alapján írtuk föl. Ez átírható kompaktabb formába a következőképp:

$$\begin{aligned}\hat{x}_i = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0} &= \frac{\overbrace{x_0(x_2 - 2x_1 + x_0)}^{x_0x_2 - 2x_1x_0 + x_0^2}\overbrace{-(x_1^2 - 2x_1x_0 + x_0^2)}^{-x_1^2 + 2x_1x_0 - x_0^2}}{x_2 - 2x_1 + x_0} \\ &= \frac{x_0x_2 - x_1^2}{x_2 - 2x_1 + x_0} \qquad (2.57)\end{aligned}$$

Mi a későbbi szimulációk során a (2.57)-es formát fogjuk használni.

2.6.1. *Megjegyzés.* Igazolható, hogy a Steffensen-módszerrel $f \in C^2, f(x^*) = 0$ és $f'(x^*) \neq 0$ esetén kvadratikus konvergenciát kapunk *[8]*.

## 2.7. Egy további alkalmazás

A $\Delta^2$-módszer gyorsítja az $\{x_n\}$ sorozat konvergenciáját, amikor

$$x_n = x^* + c\omega^n + d\sigma^n + \mathcal{O}(\theta^n) \quad n \to \infty \text{ esetén}, \qquad (2.58)$$

ahol $c$ és $d$ nemnulla konstansok és

$$1 > |\omega| > |\sigma| > |\theta|. \qquad (2.59)$$

Az $\{x_n\}$ sorozat lineárisan konvergál $x^*$-hoz, mert

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x^*}{x_n-x^*} &= \lim_{n\to\infty}\frac{c\omega^{n+1}+d\sigma^{n+1}+\mathcal{O}(\theta^{n+1})}{c\omega^n+d\sigma^n+\mathcal{O}(\theta^n)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\omega^{n+1}[c+d(\frac{\sigma}{\omega})^{n+1}+\mathcal{O}((\frac{\theta}{\omega})^{n+1})]}{\omega^n[c+d(\frac{\sigma}{\omega})^n+\mathcal{O}((\frac{\theta}{\omega})^n)]} \\
&= \omega\lim_{n\to\infty}\frac{c+d\,\overbrace{(\frac{\sigma}{\omega})^{n+1}}^{0}+\mathcal{O}(\overbrace{(\frac{\theta}{\omega})^{n+1}}^{0})}{c+d\,\underbrace{(\frac{\sigma}{\omega})^{n}}_{0}+\mathcal{O}(\underbrace{(\frac{\theta}{\omega})^{n}}_{0})} \\
&= \omega\lim_{n\to\infty}\frac{c}{c}=\omega\lim_{n\to\infty}1=\omega, \qquad (2.60)
\end{aligned}$$

tehát

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x^*}{x_n-x^*}=\omega. \qquad (2.61)$$

Mivel beláttuk, hogy lineárisan konvergens a fent említett $\{x_n\}$ sorozat-család, ezért a $\Delta^2$-mószer gyorsítani fogja azok konvergenciáját.

**2.7.1. Tétel.** *[2] Legyen $\{x_n\}$ egy (2.58)-(2.59) alakú sorozat. Ekkor a $\Delta^2$-módszerrel generált $\{\hat{x}_n\}$ sorozatra*

$$\hat{x}_n-x^*=d\frac{(\omega-\sigma)^2}{(\omega-1)^2}\sigma^n\left[1+\mathcal{O}\left(\left|\frac{\sigma}{\omega}\right|^n\right)\right]\quad n\to\infty \text{ esetén.} \qquad (2.62)$$

*Tehát az $\{\hat{x}_n\}$ sorozat konvergál $x^*$-hoz, és*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\hat{x}_{n+1}-x^*}{\hat{x}_n-x^*}=\sigma. \qquad (2.63)$$

*Az $\{\hat{x}_n\}$ sorozat lineárisan konvergál, de gyorsabban mint $\{x_n\}$, mivel (2.59) miatt $|\sigma|<|\omega|$.*

*Bizonyítás.* A (2.62) belátásához használjuk a (2.15)-ös egyenletet az

$$\varepsilon_n=c\omega^n+d\sigma^n+O(\theta^n)\quad n\to\infty \text{ esetén,} \qquad (2.64)$$

helyettesítéssel, ami a (2.58)-ból következik, hiszen $\varepsilon_n=x_n-x^*$. Ezeket felhasználva, hosszas számolás után igazolható a (2.62) egyenlőség. A (2.63) belátásához használjuk föl a (2.62) pontot, és vezessük le ugyanúgy, ahogy a (2.60)-nál tettük (ehhez föl kell használni a (2.58) és (2.59) összefüggéseket). □

## 2.8. Iterált $\Delta^2$-módszer

Az előző szakaszban a $\Delta^2$-módszer segítségével egy $\{x_n\}$ lineárisan konvergens sorozatból generáltunk egy olyan $\{\hat{x}_n\}$ sorozatot, amely gyorsabban konvergál ugyanahhoz a határértékhez, mint az eredeti. Ekkor a generált $\{\hat{x}_n\}$ sorozat is lineárisan konvergál, így alkalmazhatjuk a $\Delta^2$-módszert ismét a $\{\hat{x}_n\}$ sorozatra, és ezzel az $\{\hat{\hat{x}}_n\}$ sorozatot kapjuk, ahol

$$\hat{\hat{x}}_n = \frac{\hat{x}_n \hat{x}_{n+2} - \hat{x}_{n+1}^2}{\hat{x}_n - 2\hat{x}_{n+1} + \hat{x}_{n+2}}. \tag{2.65}$$

Ekkor az $\{\hat{\hat{x}}_n\}$ sorozat gyorsabban konvergál, mint $\{\hat{x}_n\}$. Természetesen ezt az eljárást folytathatjuk iteratívan a következőképpen:

$x_n^{(0)} = x_n, \quad n = 0, 1, \ldots, N$

**for** $p = 0, 1, \ldots$ **do**:

$\quad x_n^{(p+1)} = \frac{x_n^{(p)} x_{n+2}^{(p)} - [x_{n+1}^{(p)}]^2}{x_n^{(p)} - 2x_{n+1}^{(p)} + x_{n+2}^{(p)}}, \quad n = 0, 1, \ldots.$

**endfor (p)**

A könnyebb jelölés érdekében a kitevőbe $(p)$-t írtunk, a változóra kalap írása helyett. A $(p)$ azt jelöli, hányszor használtuk a $\Delta^2$-módszert az eredeti sorozatra. Ekkor világos, hogy $x_n^{(0)} = x_n$, $x_n^{(1)} = \hat{x}_n$, $x_n^{(2)} = \hat{\hat{x}}_n$ és így tovább. Az $x_n^{(p)}$ értékeit egy kétdimenziós táblázatba foglalhatjuk az alábbi módon:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_0^{(0)}$ | | | | |
| $x_1^{(0)}$ | | | | |
| $x_2^{(0)}$ | $x_0^{(1)}$ | | | |
| $x_3^{(0)}$ | $x_1^{(1)}$ | | | |
| $x_4^{(0)}$ | $x_2^{(1)}$ | $x_0^{(2)}$ | | |
| $x_5^{(0)}$ | $x_3^{(1)}$ | $x_1^{(2)}$ | | |
| $x_6^{(0)}$ | $x_4^{(1)}$ | $x_2^{(2)}$ | $x_0^{(3)}$ | |
| $x_7^{(0)}$ | $x_5^{(1)}$ | $x_3^{(2)}$ | $x_1^{(3)}$ | |
| ... | ... | ... | ... | ... |

Tehát, ha $x_0, x_1, \ldots, x_N$ adottak, akkor $\left\lceil \frac{N+1}{2} \right\rceil$ darab oszlopból áll a táblázat.

Az iterált $\Delta^2$-módszert is használhatjuk tehát olyan $\{x_n\}$ sorozatok konvergenciájának gyorsítására, amelyeket fixpont-iterációval állítunk elő $x = f(x)$ nemlineáris egyenletek megoldására, ha az a sorozat lineárisan konvergens. Az iterált $\Delta^2$-módszer mögötti elmélet mélységének nehézségéből adódóan nem volt célunk ezt kifejteni, csak magát a módszert bemutatni.

A következő tétel az iterált $\Delta^2$-módszer konvergenciájáról szól.

**2.8.1. Tétel.** *[2] Legyen $x^*$ egy megoldása az $x = f(x)$ egyenletnek, és legyen az $f(x)$ függvény és az $\{x_n\}$ sorozat a 2.3.1 Tétel szerinti, az ottani jelölésekkel és $0 < |f'(x^*)| < 1$, tehát $\{x_n\}$ sorozat lineárisan konvergens. Tegyük föl továbbá, hogy $f \in C^\infty(J)$. Legyen $x_n^{(p)}$ oly módon generálva, ahogy a (2.65) egyenlet utáni algoritmusban leírtuk. Ekkor minden oszlopban lévő $\{x_n^{(p)}\}_{n=0}^\infty$ (adott p-re) sorozat lineárisan konvergál, és*

$$x_n^{(p)} - x^* = \mathcal{O}([f'(x^*)]^{(p+1)n}) \quad n \to \infty \text{ esetén.} \tag{2.66}$$

$\square$

Ez a tétel a fönti táblázat oszlopainak az $\{x_n^{(p)}\}_{n=0}^\infty$ sorozataira vonatkozik. A (2.66) alapján levonhatjuk azt a következtetést, hogy mindegyik oszlop a fönti táblázatban gyorsabban konvergál, mint az előző oszlop, mivel $|f'(x^*)| < 1$.

# 3. fejezet

# Gyakorlati alkalmazás

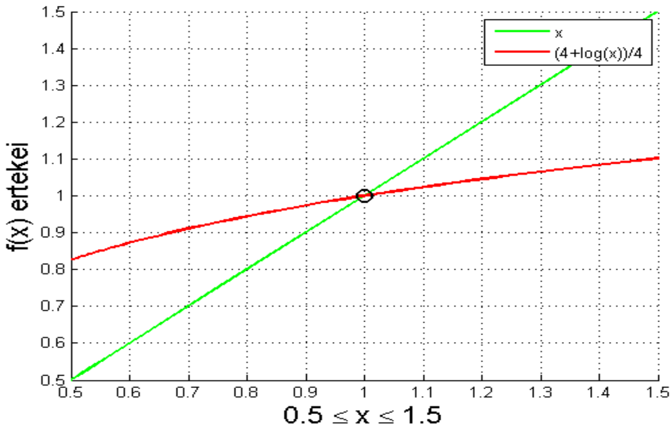
Ebben a fejezetben szeretném az eddig megismert módszereket a gyakorlati alkalmazásokban is kipróbálni.

## 3.1. A $\Delta^2$-módszer és a lineáris konvergencia

Ebben a részben az alábbi $F(x) = 0$ alakú egyenlet megoldását akarjuk közelíteni $\varepsilon < 10^{-7}$ hibával:

$$4x - ln(x) - 3 = 0 \tag{3.1}$$

(Tudjuk, hogy az $x = 1$ megoldása az egyenletnek). Először írjuk át a (3.1)-et az $x = \frac{4+ln(x)}{4}$ iterációs alakra. Ábrázoljuk a $g(x) = x$ és $f(x) = \frac{4+ln(x)}{4}$ függvényeket közös koordináta-rendszerben.




3.1. ÁBRA. $f(x)$ és $g(x)$ függvények ábrázolása egy koordináta-rendszerben.

Látható a 3.1 ábrán, hogy az eredeti egyenlet gyöke, vagyis az $f(x)$ függvény fixpontja benne van az $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] = H$ intervallumban.

Most nézzük meg a konvergencia feltételeit a $H$ intervallumra nézve.

$$|f'(x)| = \left|\frac{1}{4x}\right| \leq \left|\frac{1}{4\frac{1}{2}}\right| = \frac{1}{2} < 1 \quad \text{(kontrakció)} \tag{3.2}$$

és

$$\frac{1}{2} < f\left(\frac{1}{2}\right) < f(x) < f\left(\frac{3}{2}\right) < \frac{3}{2}, \quad x \in H. \tag{3.3}$$

Mivel $f : H \to H$ kontrakció és $0 < f'(x^*) = f'(1) = \frac{1}{4} < 1$ (2.3.1 Tétel és 2.1-es definíció), így egy tetszőleges $x_0 \in H$ pontból indított

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) \\ x_{n+1} &= \frac{4 + ln(x_n)}{4} \end{aligned} \tag{3.4}$$

egyszerű iteráció lineárisan fog konvergálni az $f$ egyértelműen létező fixpontjához, ami egyben az $F(x) = 0$ egyenlet megoldása.

| $n$ | **Fixpont iteráció** $x_n$ | **Módszer hibája** $\lvert x_n - 1\rvert$ | **Aitken $\Delta^2$ módszer** $\hat{x}_n$ | **Módszer hibája** $\lvert \hat{x}_n - 1\rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.101366277027041 | 0.101366277027041 | 1.005581154639322 | 0.005581154639322 |
| 2 | 1.024137869774517 | 0.024137869774517 | 1.000368970993313 | 0.000368970993313 |
| 3 | 1.005962789001513 | 0.005962789001513 | 1.000023400315286 | 0.000023400315286 |
| 4 | 1.001486270482333 | 0.001486270482333 | 1.000001467937159 | 0.000001467937159 |
| 5 | 1.000371291768883 | 0.000371291768883 | 1.000000091831168 | 0.000000091831168 |
| 6 | 1.000092805714288 | 0.000092805714288 | | |
| 7 | 1.000023200352026 | 0.000023200352026 | | |
| 8 | 1.000005800020726 | 0.000005800020726 | | |
| 9 | 1.000001450000976 | 0.000005800020726 | | |
| 10 | 1.000000362499981 | 0.000000362499981 | | |
| 11 | 1.000000090624979 | 0.000000090624979 | | |
| 12 | 1.000000022656244 | 0.000000022656244 | | |

3.1. TÁBLÁZAT. **Fixpont-iterációs- és Aitken $\Delta^2$-módszer összehasonlítása lineáris konvergenciára**

Mivel az $\{x_n\}$ egyszerű iteráció lineárisan konvergens sorozat, így az Aitken $\Delta^2$-módszerrel kapott új $\{\hat{x}_n\}$ sorozat az eredeti $\{x_n\}$ sorozat konvergenciáját gyorsítani fogja.

Indítsuk el az iterációt példaként az $x_0 = \frac{3}{2}$ pontból. A 3.1 táblázat azt mutatja, hogy $\varepsilon < 10^{-7}$ hibához a sima iterációval 12 lépést kellett tennünk, míg az Aitken $\Delta^2$-módszerrel 5 lépést. Látható, hogy az utóbbi ténylegesen gyorsította a lineáris konvergenciát.

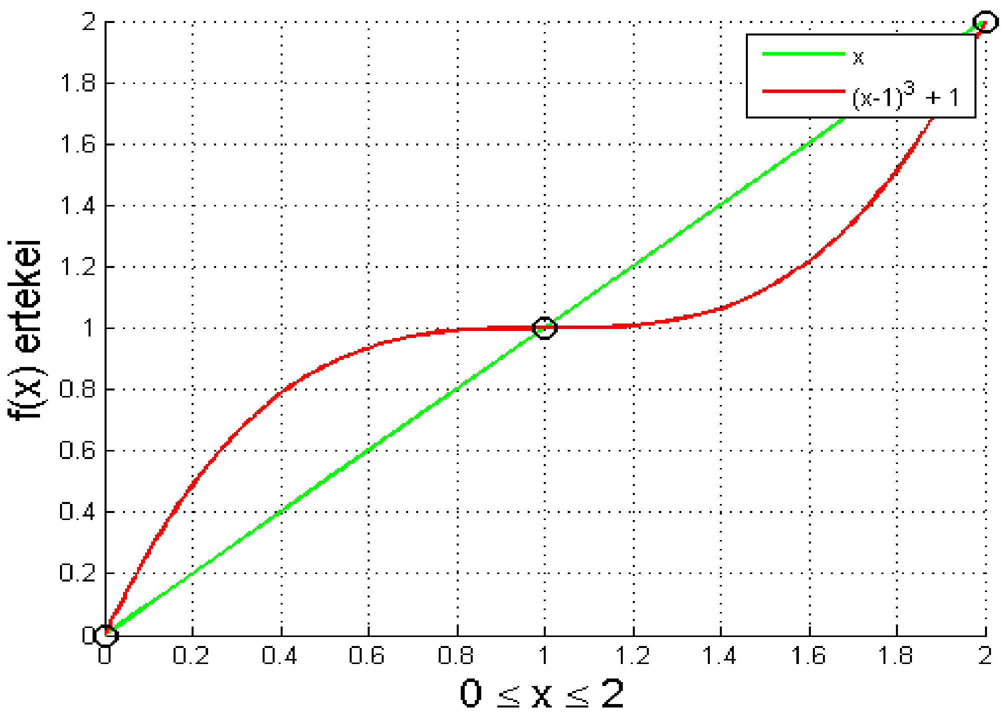
## 3.2. A $\Delta^2$-módszer és a kvadratikus konvergencia

Ebben a részben megvizsgáljuk az Aitken féle $\Delta^2$-módszer alkalmazását kvadratikus konvergenciára.

Ehhez tekintsük az alábbi $F(x) = 0$ alakú egyenlet megoldását $\varepsilon < 10^{-7}$ hibával:

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0. \tag{3.5}$$

(Tudjuk, hogy $x = 0, 1, 2$ megoldások). Átírjuk a (3.5)-öt az $x = (x-1)^3 + 1$ iterációs alakra, majd ábrázoljuk a $g(x) = x$ és $f(x) = (x-1)^3+1$ függvényeket közös koordináta-rendszerben.




3.2. Ábra. $f(x)$ és $g(x)$ függvények ábrázolása egy koordináta-rendszerben.

Mivel harmadfokú függvényről van szó, és ahogy a 3.2 ábrán is látszik, a $[0,2]$ intervallumon három megoldása van a (3.5)-ös egyenletnek. Szeretnénk az $f(x)$ függvény $x^* = 1$ fixpontját megtalálni, ami az eredeti $F(x)$ függvény egyik gyöke.

Ehhez tekintsük a $H = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ intervallumot, és nézzük meg a konvergencia feltételeit:

$$|f'(x)| = 3(x-1)^2 \leq 3 \overbrace{\left(\frac{3}{2} - 1\right)^2}^{\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}} = \frac{3}{4} < 1 \quad \text{(kontrakció)} \tag{3.6}$$

Felhasználtuk, hogy az $f'(x)$ függvény a maximumát a $H$ intervallum szélein veszi föl.

Továbbá

$$\frac{1}{2} < f\left(\frac{1}{2}\right) < f(x) < f\left(\frac{3}{2}\right) < \frac{3}{2}, \quad x \in H \tag{3.7}$$

miatt $f : H \to H$ függvény kontrakció, és $|f'(x^*)| = |f'(1)| = 0$, így a 2.5.1 Tétel szerint egy tetszőleges $x_0 \in H$ pontból indított

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) \\ x_{n+1} &= (x_n - 1)^3 + 1 \end{aligned} \tag{3.8}$$

iteráció kvadratikusan fog konvergálni az $f$ egyértelműen létező fixpontjához, ami egyben az $F(x) = 0$ egyenlet megoldása.

| $n$ | **Fixpont iteráció** $x_n$ | **Módszer hibája** $\lvert x_n - 1\rvert$ | **Aitken $\Delta^2$ módszer** $\hat{x}_n$ | **Módszer hibája** $\lvert\hat{x}_n - 1\rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.875000000000000 | 0.125000000000000 | 1.058139534883721 | 0.058139534883721 |
| 2 | 0.998046875000000 | 0.001953125000000 | 1.000031494323269 | 0.000031494323269 |
| 3 | 0.999999992549419 | 7.450581041013038e-09 | 1.000000000000028 | 0.000000000000028 |
| 4 | 1 | 0 | 1 | 0 |

3.2. TÁBLÁZAT. **Fixpont-iterációs- és Aitken $\Delta^2$-módszer összehasonlítása kvadratikus konvergenciára**

Indítsuk el az iterációt példaként az $x_0 = \frac{1}{2}$ pontból. A 3.2 táblázat azt mutatja, hogy $\varepsilon < 10^{-7}$ hibához a sima iterációval és az Aitken $\Delta^2$-módszerrel is 4 iterációt kellett lépnünk. Látható, amit a 2.5.1 Tételben ki is mondtunk, hogy az Aitken $\Delta^2$-módszer kvadratikus konvergenciát nem gyorsít.

## 3.3. Steffensen-módszer

Ebben az alfejezetben megvizsgáljuk, hogy a Steffensen-módszer a gyakorlatban gyorsabban konvergál-e, mint az Aitken $\Delta^2$-módszer.

Ehhez tekintsük a 3.1 szakaszban tekintett egyenletet, amelynek keressük a megoldását $\varepsilon < 10^{-12}$ hibával. Beláttuk, hogy a $H = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ intervallumban egy tetszőleges $x_0 \in H$ pontból indított

$$x_{n+1} = \frac{4 + ln(x_n)}{4} \tag{3.9}$$

iteráció konvergálni fog az $f$ függvény $x^* = 1$ fixpontjához.

Indítsuk el az iterációt az $x_0 = \frac{1}{2}$ pontból.

| | **Fixpont-módszer** | **Aitken $\Delta^2$-módszer** | **Steffensen-módszer** |
|---|---|---|---|
| $n$ | $x_n$ | $\hat{x}_n$ | $s_n$ |
| 1 | 1.101366277027041 | 1.005581154639322 | 1.005581154639322 |
| 2 | 1.024137869774517 | 1.000368970993313 | 1.000001286798988 |
| 3 | 1.005962789001513 | 1.000023400315286 | 1.000000000000069 |
| 4 | 1.001486270482333 | 1.000001467937159 | 1.000000000000000 |
| 5 | 1.000371291768883 | 1.000000091831168 | |
| 6 | 1.000092805714288 | 1.000000005740779 | |
| 7 | 1.000023200352026 | 1.000000000358819 | |
| 8 | 1.000005800020726 | 1.000000000022427 | |
| 9 | 1.000001450000976 | 1.000000000001402 | |
| 10 | 1.000000362499981 | 1.000000000000088 | |
| 11 | 1.000000090624979 | | |
| 12 | 1.000000022656244 | | |
| 13 | 1.000000005664061 | | |
| 14 | 1.000000001416015 | | |
| 15 | 1.000000000354004 | | |
| 16 | 1.000000000088501 | | |
| 17 | 1.000000000022125 | | |
| 18 | 1.000000000005531 | | |
| 19 | 1.000000000001383 | | |
| 20 | 1.000000000000346 | | |

3.3. TÁBLÁZAT. **Fixpont-iteráció-, Aitken $\Delta^2$- és a Steffensen-módszer összehasonlítása lineáris konvergenciára**

Az 3.3 táblázatban összefoglaltuk a sima iterációval, az Aitken $\Delta^2$-módszerrel és a Steffensen-módszerrel kapott eredményeket. Látható, hogy a Steffensen-módszerrel kapott sorozat gyorsabban konvergál, mint az Aitken féle $\Delta^2$-módszer. A 2.6.1 Megjegyzés miatt erre számítottunk.

## 3.4. Iterált $\Delta^2$-módszer

A (3.1)-es egyenletre alkalmaztuk elsőnek a fixpont-iterációt az $x_0 = \frac{3}{2}$ pontból indítva, ebből kaptuk az $\{x_n\}$ sorozatot.

| $x_n$ | $\hat{x}_n$ | $\hat{\hat{x}}_n$ | $\hat{\hat{\hat{x}}}_n$ |
|---|---|---|---|
| 1.101366277027041 | | | |
| 1.024137869774517 | | | |
| 1.005962789001513 | 1.005581154639322 | | |
| 1.001486270482333 | 1.000368970993313 | | |
| 1.000371291768883 | 1.000023400315286 | 0.999998861874630 | |
| 1.000092805714288 | 1.000001467937159 | 0.999999981619840 | |
| 1.000023200352026 | 1.000000091831168 | 0.999999999710004 | 1.000000000007061 |
| 1.000005800020726 | 1.000000005740779 | 0.999999999995458 | 1.000000000000034 |
| 1.000001450000976 | 1.000000000358819 | 0.999999999999929 | 1.000000000000000 |
| 1.000000362499981 | 1.000000000022427 | 0.999999999999999 | 1 |
| 1.000000090624979 | 1.000000000001402 | 1.000000000000000 | 1 |
| 1.000000022656244 | 1.000000000000088 | 1 | 1 |
| 1.000000005664061 | 1.000000000000006 | 1 | 1 |
| 1.000000001416015 | 1.000000000000000 | 1 | 1 |
| 1.000000000354004 | 1 | 1 | 1 |
| 1.000000000088501 | 1 | 1 | 1 |
| 1.000000000022125 | 1 | 1 | 1 |
| 1.000000000005531 | 1 | 1 | 1 |
| 1.000000000001383 | 1 | 1 | 1 |
| 1.000000000000346 | 1 | 1 | 1 |
| 1.000000000000086 | 1 | 1 | 1 |
| 1.000000000000022 | 1 | 1 | 1 |
| 1.000000000000005 | 1 | 1 | 1 |
| 1.000000000000001 | 1 | 1 | 1 |
| 1.000000000000000 | 1 | 1 | 1 |

3.4. TÁBLÁZAT. **A $\Delta^2$-módszer iterált alkalmazása**

A 2.2.1 Tételben beláttuk, hogy $\{x_n\}$ lineárisan konvergens sorozatot tudunk gyorsítani az Aitken-féle $\Delta^2$-módszerrel, és így kaptuk az $\{\hat{x}_n\}$ sorozatot, amely szintén lineárisan konvergens sorozat. A 2.8 szakaszban láttuk, hogy a már gyorsított $\{\hat{x}_n\}$ sorozatra ismét alkalmazni tudjuk a $\Delta^2$-módszert, hiszen $\{\hat{x}_n\}$ is lineárisan konvergens sorozat. Ebből kapjuk az $\{\hat{\hat{x}}_n\}$ sorozatot, amelyből iteratív eljárás segítségével kaptuk a 3.4 táblázatot.

A (2.66)-os egyenletből levont következtetést, miszerint mindegyik oszlop gyorsabban konvergál, mint az előző oszlop, a 3.4 táblázat jól szemlélteti.

# 4. fejezet

# Összefoglalás

A szakdolgozatomban az volt a fő célom, hogy bemutassam és numerikus kísérletekben tanulmányozzam a konvergens sorozatok gyorsítására szolgáló Aitken-féle $\Delta^2$-módszert és annak továbbfejlesztett változatait.

A szakdolgozat elején bemutattam, hogy a lineárisan konvergens sorozat definíciójának egyszerű átírásával hogyan kapható meg az Aitken-féle $\Delta^2$-módszer. Utána ennek két átírását is megnéztem, amelyek numerikusan stabilabb algoritmust szolgáltatnak a sorozat elemeinek a kiszámítására. Bebizonyítottam, hogy az Aitken $\Delta^2$-módszerrel lineárisan konvergens sorozatot tudunk gyorsítani. Ezután megnéztem, hogy az Aitken $\Delta^2$-módszert miképp lehet alkalmazni, amikor a gyorsítandó sorozat egy nemlineáris egyenlet fixpont-iterációs megoldása során kapott számsorozat. Itt a megfelelő feltételek mellett lineárisan konvergens fixpont-iterációt a $\Delta^2$-módszer gyorsítani tudta, míg kvadratikust már nem gyorsított. Az utóbbi esetben azt is láttuk, hogy nem éri meg az Aitken-féle gyorsítást alkalmazni, hisz az eredeti sorozat ugyanolyan gyorsan konvergál. Megnéztem ezután egy népszerű módszert, a Steffensen-módszert, ami azon alapul, hogy ötvözzük a fixpont-iterációt az Aitken $\Delta^2$-módszerrel. A $\Delta^2$-módszert minden harmadik fixpont-iterációra alkalmazzuk, és a kapott javított becsléssel számolunk tovább a fixpont-iterációban. Utána egy speciális $\{x_n\}$ sorozattípusra igazoltuk az Aitken-féle gyorsítás alkalmazhatóságát. Végül bemutattam az iterált $\Delta^2$-módszert, amely azon alapul, hogy ineárisan konvergens sorozat esetén az Aitken-módszerrel kapott sorozat is lineárisan konvergens lesz, és a gyorsított sorozat is tovább gyorsítható az Aitken-módszerrel.

A dolgozatban mindegyik módszert teszteltük nemlineáris algebrai egyenletek fixpont-iterációval történő megoldására, és eredményeink összhangban voltak az elméleti megfontolásokkal.

# A. függelék

# Matlab-kódok

## A.1. 3.1 részhez

```
%Fuggvenyek abrazolasa kozos koordinata-rendszerben
hold on
   fplot(@(x) x,[1/2 3/2],'g')
   fplot(@(x) (4+log(x))/4,[1/2 3/2],'r')
   plot(1,1,'ko','MarkerSize',10);
hold off
legend('x','(4+log(x))/4')
set(findall(gca, 'Type', 'Line'),'LineWidth',1.5);
xlabel('0.5 \leq x \leq 1.5','FontSize',16)
ylabel('f(x) ertekei','FontSize',16)
grid on
axis([0.5 1.5 0.5 1.5])
%-------------------------------------------------
%Line ris konvergenciara fuggveny (m fajl)
function f = lin_fv(x)
f = (4+log(x))/4;
%-------------------------------------------------
%Fixpont-iteracio alkalmazasa
format long;
sL(1) = 3/2;
for n = 1:20
 sL(n+1) = lin_fv(sL(n));
 x(n) = sL(n+1);
end
%display(x) ebbe taroljuk a fixpont-iteracios lepeseket
%-------------------------------------------------
%Aitken modszer alkalmazasa
format long;
x_0 = 3/2;

sA1 = x_0;
for n = 1:10
 sA2 = lin_fv(sA1);
 sA3 = lin_fv(sA2);
```

```
 x(n) = sA1 - (((sA2-sA1)^2)/(sA3-2*sA2+sA1));
 sA1 = sA2;
end
%display(x);
%--------------------------------------------------
```

## A.2. 3.2 részhez

```
%Fuggvenyek abrazolasa kozos koordinata-rendszerben
hold on
   fplot(@(x) x,[0 2],'g')
   fplot(@(x) (x-1)^3 + 1,[0 2],'r')
   plot(1,1,'ko','MarkerSize',10);
   plot(0,0,'ko','MarkerSize',10);
   plot(2,2,'ko','MarkerSize',10);
hold off
legend('x','(x-1)^3 + 1')
set(findall(gca, 'Type', 'Line'),'LineWidth',1.5);
xlabel('0 \leq x \leq 2','FontSize',16)
ylabel('f(x) ertekei','FontSize',16)
grid on
axis([0 2 0 2])
%--------------------------------------------------
%Kvadratikus konvergenciara fuggveny (m fajl)
function f = kvadr_fv(x)
f = (x-1)^3 + 1;
%--------------------------------------------------
%Fixpont-iteraci
format long;
sL(1) = 1/2;
for n = 1:5
 sL(n+1) = kvadr_fv(sL(n));
 x(n) = sL(n+1);

end
% display(x);
%--------------------------------------------------
%Aitken modszer
format long;
x_0 = 1/2;

sA1 = x_0;
for n = 1:5
 sA2 = kvadr_fv(sA1);
 sA3 = kvadr_fv(sA2);

 x(n) = sA1 - (((sA2-sA1)^2)/(sA3-2*sA2+sA1));
 sA1 = sA2;
end
% display(x);
%--------------------------------------------------
```

## A.3. 3.3 részhez

```
%------------------------------------------------
%Steffensen-modszer elsorendu konvergens sorozatra
format long;
x_0 = 3/2;

sA1 = x_0;
for n = 1:10
 sA2 = lin_fv(sA1);
 sA3 = lin_fv(sA2);

 x(n) = sA1 - (((sA2-sA1)^2)/(sA3-2*sA2+sA1));
 sA1 = x(n);
end
% display(x);
%Figyeljuk meg a Steffensen es az Aitken modszer kozotti kulonbseget! Csak az
%utolso elotti sorban ternek el egymastol:
%Steffensennel: sA1 = x(n)
%Aitkennel: sA1 = sA2
%------------------------------------------------
```

## A.4. 3.4 részhez

```
%------------------------------------------------
%Iteralt $\Delta^2$-modszer:
%Fixpont-iteraci  (3.4-es reszben az elso oszlop)
format long;
sL(1) = 3/2;
for n = 1:25
 sL(n+1) = lin_fv(sL(n));
 x(n) = sL(n+1);
end
%display(x)
%------------------------------------------------
%Aitken alkalmazasa a fixpont-iter ciora
%(3.4-es reszben a masodik oszlop)
format long;
x_0 = 3/2;

sA1 = x_0;
for n = 1:20
 sA2 = lin_fv(sA1);
 sA3 = lin_fv(sA2);

 x(n) = sA1 - (((sA2-sA1)^2)/(sA3-2*sA2+sA1));
 sA1 = sA2;
end
%display(x)
%------------------------------------------------
%Elozo oszlopra alkalmazzuk az Aitkent megint
%(3.4-es reszben a harmadik oszlop)
```

```
format long;
x_0 = 3/2;

sA1 = x_0;
for n = 1:20
 sA2 = lin_fv(sA1);
 sA3 = lin_fv(sA2);

 x(n) = sA1 - (((sA2-sA1)^2)/(sA3-2*sA2+sA1));
 sA1 = sA2;
end

for n = 1:15
 sA1 = x(n);
 sA2 = x(n+1);
 sA3 = x(n+2);

 x2(n) = sA1 - (((sA2-sA1)^2)/(sA3-2*sA2+sA1));
end
%display(x2)
%-----------------------------------------------------
%Elozo oszlopra alkalmazzuk az Aitkent megint
%(3.4-es reszben a negyedik oszlop)
 format long;
x_0 = 3/2;

sA1 = x_0;
for n = 1:20
 sA2 = lin_fv(sA1);
 sA3 = lin_fv(sA2);

 x(n) = sA1 - (((sA2-sA1)^2)/(sA3-2*sA2+sA1));
 sA1 = sA2;
end

for n = 1:15
 sA1 = x(n);
 sA2 = x(n+1);
 sA3 = x(n+2);

 x2(n) = sA1 - (((sA2-sA1)^2)/(sA3-2*sA2+sA1));
end

for n = 1:10
 sA1 = x2(n);
 sA2 = x2(n+1);
 sA3 = x2(n+2);

 x3(n) = sA1 - (((sA2-sA1)^2)/(sA3-2*sA2+sA1));
end
%display(x3)
%-----------------------------------------------------
```

# Irodalomjegyzék

**[1] Faragó István;** *Alkalmazott Analízis I., 2014, előadás jegyzet*

**[2] Avram Sidi.** *Lecture Notes on Acceleration of Linear Convergence by the Aitken $\Delta^2$-process. Computer Science Department. Technion-Israel Institue of Technology. November, 2012, 1-11. o*

**[3] George B. Thomas, Maurice D. Weir, Joel Hass, Frank R. Giordano;** *Thomas-féle Kalkulus 3., Typotex kiadó, Budapest 2007, 66. o*

**[4] Sikolya Eszter;** *Analízis I. előadásjegyzet, 2009/2010. őszi félév, 33-37. o.*

**[5] Faragó István, Horváth Róbert;** *Numerikus módszerek, 2013 javított kiadás, http://tankonyvtar.ttk.bme.hu/pdf/30.pdf, 129 - 150. o.*

**[6] Fixed-Point Iteration Example;**
*http://mysite.science.uottawa.ca/sdesjar2/2384fixedpoint.pdf, 1. o.*

**[7] Mészáros Józsefné;** *Numerikus módszerek, Miskolci Egyetem Földtudományi Kar, 2011*

**[8] Sergey Fomel;** *Nonlinear Equations: Newton, Steffensen, and Others, 2012; http://sepwww.stanford.edu/sep/sergey/128A/answers3.pdf, 4-5. o*

# Nyilatkozat

**Név:** Tábori Ármin
**ELTE Természettudományi Kar, szak:** Elemző matematikus
**NEPTUN azonosító:** AL6OGJ
**Szakdolgozat címe:** Konvergenciagyorsítási módszerek

A szakdolgozat szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2016

*hallgató aláírása*