

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

NEM KORLÁTOS DIFFÚZIÓS  
FOLYAMATOK EGZAKT MEGOLDÁSA

BSc Szakdolgozat

*Készítette:*  
**Várai Anita**  
matematika szakos  
hallgató

*Témavezető*  
**Pröhle Tamás**  
tanársegéd

Budapest  
2015

# Tartalomjegyzék

Bevezetés . . . . .	3
Motiváció . . . . .	3
Tartalmi összefoglaló . . . . .	4
Introduction . . . . .	5
<b>1. Sztochasztikus folyamatok</b>	<b>6</b>
1.1. Wiener-folyamat . . . . .	6
1.2. Sztochasztikus differenciálegyenletek . . . . .	7
1.3. Diffúziós és Itô folyamat . . . . .	9
1.4. Ito formula . . . . .	9
1.5. Lamperti transzformáció . . . . .	10
<b>2. Elfogadás-elvetés módszere</b>	<b>12</b>
2.1. Sűrűségáramnyok diffúziós folyamatokhoz . . . . .	13
2.2. Az elfogadási valószínűséghez vezető gyakorlati út . . . . .	14
2.3. Lokalizációs eljárás . . . . .	17
<b>3. Implementáció</b>	<b>21</b>
3.1. Lokalizációs eljárás . . . . .	21
3.2. $\varsigma$ választása . . . . .	25
3.3. $I$ mintavételezése . . . . .	26
3.4. $\varsigma < T - \zeta_{i-1}$ eset . . . . .	29
3.5. $\varsigma > T - \zeta_{i-1}$ eset . . . . .	31
3.5.1. Megfelelő szint választása . . . . .	32
3.6. Összegzés . . . . .	32
<b>4. Tesztelés</b>	<b>35</b>
4.1. Ornstein-Uhlenbeck Mean-Reverting folyamat . . . . .	35
4.2. Szinuszos drift tag hatása . . . . .	36
4.3. Double-Well Potential Modell . . . . .	40
4.4. Eredmények összefoglalása . . . . .	42
<b>5. Függelék</b>	<b>43</b>
5.1. A program forráskódja . . . . .	43
5.1.1. Beérkezési idők generálása . . . . .	43
5.1.2. $I$ mintavételezése, ajánlott skeleton tesztelése . . . . .	44
5.1.3. Összefoglaló működés . . . . .	47
Irodalomjegyzék . . . . .	51

# Bevezetés

## Motiváció

A pénzügyi elmélet, a pénzügyi tervezés – angolul: financial engineering – ma már multidiszciplináris tudománynak tekinthető, mely a matematikai eszközök, mérnöki módszerek és a programozási gyakorlat tudományát ötvözi.

Ezt a szakdolgozatot egy olyan kutatás-fejlesztési projekt hívta életre, melynek célja a pénzügyi tervezés témaköréhez kapcsolódik. A szakdolgozat célja, hogy bemutassa hogyan kaphatjuk meg a sztochasztikus differenciál-egyenletek (későbbiekben: SDE) reálisztikusan bejárt útjait és a megoldáshalmazát. Célom bemutatni egy módszert, mely a SDE-k megoldását reális, nem idő-diszkrétizált utakon közelíti.

A probléma megközelíthető hagyományos, idő-diszkrétizációs módszerekkel is, úgy mint az Eule vagy Runge-Kutta típusú módszerek [1]. Természetesen ezek a megközelítési módszer is generálnak idősorokat (trajektóriákat)  $x_i = (x_i[1], x_i[2], \dots, x_i[t])$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ám ezen módszerek megoldását terheli egy adott hibatag (bias), melynek elfogadható szintre való csökkentése egyes esetekben számítógépigényes feladat. Ez az oka annak, hogy az egzakt szimulációs módszerek magukra vonták a figyelmet az elmúlt években. Az egzakt módszerek abban az értelemben pontosak, vagyis egzaktak, hogy az általuk leírt idősorok pontosan az adott SDE eloszlásából következnek, így a szimulált értékek együttes eloszlása egybeesik a folytonos idejű folyamatéval.

Ebben a szakdolgozatban szeretném bemutatni az elfogadás-elvetés módszerét alkalmazva egy egy-dimenziós, nem korlátos Ito diffúziós folyamat egzakt megoldását. Ezt a meglepően egyszerű algoritmust először 2005-ben Beskos és Roberts [2] alkalmazta korlátos diffúziós folyamat esetére, majd később általánosított, nem korlátos esetre Burq és Jones [3] és Chen [4]. Az egyik legújabb fejlesztés a pénzügyi elemzés ezen a területén, amikor egy olyan SDE-re alkalmazzuk az egzakt módszert, mely egy Poisson eloszlású, úgynevezett "jump", magyarul ugró tagot is tartalmaz. Ezt először Giesecke és Smelov [5] vezette be.

## Tartalmi összefoglaló

A dolgozat felépítését tekintve három nagy részre osztható. Első rész az ELMÉLETI ÖSSZEFOGLALÓ, melyben a szükségesnek megfelelően részletezem az sztochasztikus folyamatok matematikáját [6] [7] és az elfogadás-elvetés módszerét [8] [9] [10]. Még ezen a részen belül összefűzöm a két elméleti háttérrel, tehát megmutatom, hogyan lehet alkalmazni az elfogadás-elvetés módszerét adott sztochasztikus differenciálegyenletek megoldására. A második rész az IMPLEMENTÁCIÓ, melyben bemutatom, hogy hogyan épül fel matematikailag és programozástechnikailag egy nem korlátos diffúziós folyamat megoldása. A harmadik rész pedig a program TESZTELÉSÉRŐL szól, melyben bemutatom néhány egyszerűbb példafüggvényen keresztül, hogy milyen a futási idő és összehasonlítom hagyományos, numerikus módszerek eredményével.

## Introduction

Our research and development project was triggered by the general need in financial engineering to obtain realistic path solutions for stochastic differential equations (SDEs). Naturally, the most conventional approach to generate sample time series is the usage of standard *time-discretization* methods (e.g. Euler, Runge-Kutta, etc.). Such schemes introduce a certain *bias* to the simulations which can be computationally expensive to reduce to an acceptable accuracy level. This is the reason why the so-called *exact* simulation schemes attracted much attention in the recent years. These methods are exact in the sense that they draw sample paths „exactly” from the distributions corresponding to the SDEs, therefore, by definition, the joint distributions of the simulated values coincide with that of the continuous-time process on the simulation time grid.

In the present report we discuss the application of the acceptance-rejection sampling method to the general type of one-dimensional unbounded Itô diffusion processes. The core of this surprisingly simple algorithm has first been applied by *Beskos and Roberts* in 2005 [2] for bounded diffusions, and was further generalized for the unbounded case by *Burq and Jones* [?] and *Chen* [4]. As a more recent development in this field *Giesecke and Smelov* [5] introduced a Poissonian random jump term to the standard diffusion SDE, and discussed the implementation of exact sampling in that case. As the treatment of jumps is quite straightforward and well documented in [5], we intended to focus merely on the unbounded Itô diffusion process in this work.

The paper is organized as follows: Section I gives a brief introduction to the mathematical basics of the problem, Section II describes the implementation itself with MatLab example scripts, and Section III discusses the results of the numerical testing.

# 1. fejezet

## Sztochasztikus folyamatok

A sztochasztikus folyamat [6], vagy más néven véletlenszerű folyamat, melyet részben vagy teljesen valószínűségi változók jellemeznek. Ennek az ellentéte a determinisztikus folyamat, ahol a folyamat nem véletlenszerűen változik. A sztochasztikus folyamat időben végbemenő folyamat. A folyamat lehet diszkrét idejű, ahol a valószínűségi változók egy idősrnak felelnek meg, vagy folytonos idejű folyamatról beszélünk, amikor egy adott időtartományban folytonosan változhatnak a folyamatot részben, vagy teljesen jellemző valószínűségi változók. Az folytanos változás nem jelenti, hogy a tarjektória is folytonos.

### 1.1. Wiener-folyamat

A folyamatok elméletének egyik nagyon fontos fogalma a Wiener-folyamat, amelyet Brown-mozgásként említ még a szakirodalom [11]. Az első elnevezés a fogalom első matematikailag precíz bevezetőjére, Norbert Wienerre (1894 -1964), amerikai matematikusra, a második pedig Robert Brown (1773-1858), angol botanikusra utal, aki egy folyadékban levő, egymással ütköző apró részecskék (virágpór) mozgását tanulmányozta. A Wiener-folyamat nagyon fontos szerepet játszik a sztochasztikus folyamatok elméletében, és tulajdonképpen úgy tekinthető, mint a standard normális eloszlású valószínűségi változók megfelelője a sztochasztikus folyamatok körében. Több módja is van, hogy definiáljuk egy  $W = \{W(t), t > 0\}$  Wiener-folyamatot. Én a következőekben a később leghasznosabb definíciót mutatom be.

**1.1. Definíció.** *A Wiener-folyamat, vagy Brown-mozgás olyan folytonos idejű, független stacionárius növekményű  $W(t)$  Gauss-folyamat, melyre  $W(0) = 0$ ,  $EW(t) = 0$  és  $Var(W(t) - W(s)) = t - s$ ,  $\forall 0 \leq s \leq t$ .*

**1.2. Definíció.** *A független növekményűség azt jelenti, hogy ha  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k$ , akkor  $W(t_i) - W(t_{i+1})$  és  $W(t_j) - W(t_{j+1})$  független valószínűségi változók  $\forall 1 \leq i < j < k$  esetén.*

A gyakorlatban, a mi szempontunkból fontos, hogy  $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$ ,  $\forall 0 \leq s \leq t$  és a független növekményűség. Mivel, ha adva van egy adott  $t > 0$  időlépés könnyen szimulálni tudjuk a Wiener-folyamat trajektóriáját  $[0, T]$  időintervallumon, hiszen az előzőekből következik, hogy

$$W(t + \Delta t) - W(t) \sim N(0, \Delta t) \sim \sqrt{\Delta t} \cdot N(0, 1) \quad (1.1)$$

A Wiener-folyamat fontos tulajdonsága, hogy trajektóriája minden pontban folytonos 1 valószínűséggel, de sehol sem differenciálható. Ennek a bizonyításától itt eltekintek.

## 1.2. Sztochasztikus differenciálegyenletek

Először heurisztikusan fogom bevezetni a sztochasztikus differenciálegyenletek világát [6]. Tegyük fel, hogy van egy olyan  $S(t)$   $t > 0$  függvény, mely reprezentálja a folyamatot  $t$  időpontban. Tekintsük most  $S$  változását  $\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$  egy rövid  $[t, t + \Delta t)$  időbenintervallumon. A visszatérési értékét a folyamatnak, melynek dinamikáját az  $S$  függvény írja le, definiáljuk úgy, mint  $\Delta S/S$ , tehát mint az  $S$  függvény relatív változása. Ekkor a modell, úgy néz ki hogy

$$\Delta S/S = \text{determinisztikustag} + \text{sztochasztikustag}. \quad (1.2)$$

Míg a determinisztikus tag kapcsolható valamely nem kockázatos tevékenységhez, folyamathoz és így leírható, mint például az időegység lineáris függvénye:

$$\text{determinisztikustag} = \mu \Delta t, \quad (1.3)$$

ahol a  $\mu$  egy konstans, de később látni fogjuk, hogy ez lehet  $S(t)$  függvénye is lehet. A sztochasztikus tag pedig egy zajforrást ad hozzá, mely például a tőzsdei kereskedelem természetes változékonyságát jelezheti. Így a változékonysága megadható úgy, mint egy véletlen folyamat,  $\Delta W = W(t + \Delta t) - W(t)$ , melyről feltételezzük, hogy  $\Delta W \sim N(0, 1)$ , tehát Wiener-folyamat. A folyamat intenzitása pedig egy  $\sigma$  szorzótényezőn keresztül realizálódik, melyről később szintén látni fogjuk, hogy függhet a folyamat állapotától ( $S$ -től) vagy az időtől ( $t$ -től) is. Tehát

$$\text{sztochasztikustag} = \sigma \Delta W. \quad (1.4)$$

Az előzőeket figyelembe véve megkapjuk, hogy

$$\Delta S/S = \mu \Delta t + \sigma \Delta W. \quad (1.5)$$

Engedve az ördögi kísértésnek, még mindenféle matematikailag pontos bevezető előtt, szeretném felírni a fenti egyenletet infinitezimális időintervallumokra ( $\Delta t \rightarrow 0$ ). Tehát a sztochasztikus alakja a következő:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t). \quad (1.6)$$

Már az előző fejezetben említésre került, hogy a Wiener-folyamat differenciája,  $dW(t)$  nem véges és  $W(t)$  folyamat folytonos, de sehol sem differenciálható. Írjuk fel tehát az integrál formáját

$$S(t) = S(0) + \mu \int_0^t S(u)du + \sigma \int_0^t S(u)dW(u). \quad (1.7)$$

Ezzel bevezetésre is került a sztochasztikus integrálás, mely a következőképp néz ki:

$$I(X) = \int_0^T X(u)dW(u). \quad (1.8)$$

Nem megyek bele részletesen a sztochasztikus integrálás felépítésébe, hiszen ez nem férne bele egy szakdolgozat kereteibe, illetve elterelné a figyelmet a dolgozat célkitűzésétől, így csak felhasználásra kerül. De mindenképp összefoglalnám a tudnivalókat, ami a szimulálás szempontjából fontos lehet. A sztochasztikus integrálás vagy más néven Itó-kalkulus a valószínűségszámítás és az analízis határterülete, amely a klasszikus analízisbeli függvénykalkulus (differenciál- és integrálszámítás) módszereit kiterjeszti a sztochasztikus folyamatokra. A Brown-mozgás pályái nem elégítik ki azon feltételeket, melyek a kalkulus hagyományos eszközeinek használatához szükségesek. Például egyik pontban sem differenciálhatóak és végtelen variációjuk van minden időintervallumon. Ennek eredményeként az integrál nem definiálható a hagyományos módon. Fő meglátás, hogy az integrál definiálható mindaddig, míg  $X$  adaptált. Ez azt jelenti, hogy a  $t$  időpillanatban felvett értéke csak az addig rendelkezésre álló információktól függ. Ekkor a sztochasztikus integrált egy valószínűségi változóként kezelhetjük.

Az Itó-integrált definiálhatjuk a Riemann-Stieltjes integrálhoz [12] hasonló módon, azaz mint Riemann-összegek mértékben való határértékét.

**1.3. Definíció.** *Tegyük fel, hogy  $W(t)$  egy Wiener-folyamat és  $X(t), 0 \leq t \leq T$ , egy balról folytonos, adaptált és  $\int_0^T E(X(t)^2)dt < \infty$ . Ha  $\Pi_n$  a  $[0, t]$  intervallum partícióinak egy minden határon túl finomodó sorozata, akkor a  $X$  Itó-integrálja a  $W$  szerint a  $t$  időpontig egy valószínűségi változó*

$$I(X) = \int_0^T X(u)dW(u) = \lim_{\|\Pi_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} X(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)), \quad (1.9)$$

ahol  $t_i \in \Pi_n$ .

Ha egy folyamat Itó integrálható, akkor

$$E \left( \int_0^T X(t)dW(t) \right) = 0 \quad (1.10)$$

és

$$Var \left( \int_0^T X(t)dW(t) \right) = \int_0^T EX^2(t)dt \quad (1.11)$$

illetve

$$E \left( \left( \int_0^T X(t)dW(t) \right)^2 \right) = E \left( \int_0^T X^2(t)dt \right) \quad (1.12)$$

Ezt nevezzük Itó-izometriának.



### 1.3. Diffúziós és Itô folyamat

A diffúziós folyamatokat a következő formában írhatjuk fel, mint SDE:

$$dX(t) = \nu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \quad (1.13)$$

adott  $T$  és  $X_0$  kezdeti értékkel. A  $\nu(t, X(t))$  és  $\sigma(t, X(t))$  az időtől és a folyamat állapotától függő függvények,  $W(t)$ , pedig a standard Wiener-folyamat. Integrál alakban írva:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \nu(t, X(t))dt + \int_0^t \sigma(t, X(t))dW(t). \quad (1.14)$$

E munka központjába az Itô diffúziós folyamatok állnak, melyek tulajdonképpen nem mások, mint időben homogén diffúziós folyamatok:

$$dX(t) = \nu(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t), \quad (1.15)$$

adott  $T$  és  $X_0$  kezdeti értékkel. A  $\nu(x)$  az úgynevezett drift (várható érték) tag,  $\sigma(x) > 0$  pedig a volatilitás (szórás változása) tag. Mindkettő csak a folyamat állapotától függ a folyamat idejétől, vagy a az addig bejárt úttól nem.  $W(t)$ , pedig a már megszokott standard Wiener-folyamat. Ez a modell elterjedten használt a pénzügyi modellezés témakörében piaci változók leírására. Hiszen egy minimálmodellt tekintve a folyamat adott értéke határozza meg, hogy mennyivel nő vagy csökken átlagosan egy piaci változó értéke és annak a várható kilengése. Innentől kezdve tehát ezzel a modellel foglalkozom.

### 1.4. Ito formula

Egy fontos eredménye az Ito-folyamatok kutatásának az Itô-lemma, mely igen hasznos a szimulálás szempontjából is. Erre a formulára tulajdonképpen úgy érdemes tekinteni, mint sztochasztikus változata az  $f(X)$  függvény Taylor sorfejtésének másodrendig, ahol  $X$  egy diffúziós folyamat.

**1.4. Lemma.** *Az Ito lemma kimondja, hogy ha  $f(t,x)$  egy kétszer differenciálható függvény mindkét változója szerint, akkor*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_t(u, X_u)du + \int_0^t f_x(u, X_u)dX_u + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}(u, X_u)(dX_u)^2, \quad (1.16)$$

ahol

$$f_t(t, x) = \frac{\partial f(t, x)}{\partial t}, f_x(t, x) = \frac{\partial f(t, x)}{\partial x}, f_{xx}(t, x) = \frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x^2}. \quad (1.17)$$

Differenciál formában:

$$df(t, X_t) = f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X_t)(dX_t)^2. \quad (1.18)$$

Nézzünk egy példát az Ito formula alkalmazására. Legyen  $f(t, x) = f(x) = x^2$  és alkalmazzuk ezt a Wiener-folyamatra, vagyis  $f(W_t)$ , ekkor

$$W_t^2 = 0^2 + \int_0^t 2W_u dW_u + \frac{1}{2} \int_0^t 2du,$$

ebből következik, hogy

$$\int_0^t W_u dW_u = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t, \quad (1.19)$$

## 1.5. Lamperti transzformáció

Az egyszerűség kedvéért, de az általánosság elvesztése nélkül, szeretném transzformálni a Ito diffúziós SDE-t egy egységnyi volatilitású diffúziós-folyamattá. Ezt oldja meg a Lamperti-transzformáció:

$$F(x) = \int_{X_0}^x 1/\sigma(u)du, \quad (1.20)$$

ahol,  $F(x)$  egy szigorúan növekvő függvény (amíg  $\sigma > 0$ ) és invertálható:  $\exists F^{-1}$ . Átírom az eddig ismert SDE-t egységnyi volatilitására, ez lesz  $Y_t$  folyamata:

$$dY_t = \nu_Y(Y_t)dt + dW_t,$$

ahol

$$\nu_Y(y) = \frac{\nu(F^{-1}(y))}{\sigma(F^{-1}(y))} - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma(F^{-1}(y))}{\partial x},$$

Annak érdekében, hogy belássuk, hogy ha a Lamperti-transzformációt alkalmazva a 1.15 egyenleten, akkor egy egységnyi volatilitású SDE-t kapok, szükségünk van az Ito-formula, 1.18 alkalmazására. Tehát alkalmazzuk a 1.18 a 1.15-n. Ehhez szükségünk lesz a következő deriváltakra 1.17 alapján:

$$\begin{aligned} f(t, x) &= F(x) = \int_{X_0}^x 1/\sigma(t)dt, \\ f_t(t, x) &= \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} = 0, \\ f_x(t, x) &= \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} = \frac{1}{\sigma(x)}, \\ f_{xx}(t, x) &= \frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x^2} = \frac{-1}{\sigma^2(x)} \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x}. \end{aligned}$$

Használva a differenciál alakot a következőt kapom:

$$\begin{aligned} df(t, X_t) &= f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X_t)(dX_t)^2 \\ &= 0 \cdot dt + \frac{\nu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t}{\sigma(X_t)} + \frac{1}{2} \frac{-1}{\sigma^2(X_t)} \frac{\partial \sigma(X_t)}{\partial X_t} (\nu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t)^2. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Felhasználva a következő feltevéseket:

- a  $(dt)^2$  elhanyagolható,
- azok a tagok ahol a  $(dtdW_t)$  szerepel szintén elhanyagolhatók,

- a standard Brown-mozgás statisztikai tulajdonságából eredően a  $(dW_t)^2 dt$ -vel helyettesíthet?

megkapjuk az eredeti  $dY_t$ -t leíró egyletet az új drift taggal:

$$df(t, X_t) = dF(X_t) = \left( \frac{\nu(X_t)}{\sigma(X_t)} - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma(X_t)}{\partial X_t} \right) dt + dW_t = dY_t. \quad (1.22)$$

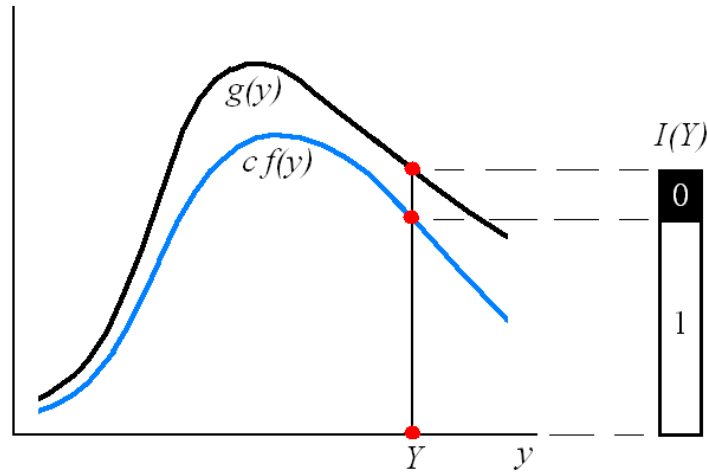
## 2. fejezet

# Elfogadás-elvetés módszere

Az elfogadás-elvetés módszere egy egyszerű és elegáns metódus arra, hogy minta megfigyelés sort generáljunk egy adott sűrűségfüggvényhez - következőekben: PDF, Probability Density Function - még akkor is ha a hagyományos véletlen generátorok nem alkalmasak arra, hogy kezeljék az eloszlást. Hagyományos mód alatt értem, hogy ha kiszámoljuk az inverzét a sűrűségfüggvénynek (IPDF),  $Q(x) = \int f$  és generálunk egy random számot  $z_i$  egyenletes eloszlásból a  $[0, 1]$  intervallumon, majd vesszük az  $x_i = Q^{-1}(z_i)$  értékeket és így mintázni tudjuk az  $f$  eloszlást. Probléma akkor merülhet fel, ha  $Q(x)$ -t nem lehet felírni zárt formában, vagy az inverz függvényt  $Q^{-1}$  nem lehet egyszerűen kezelni. Ha nem szeretnénk alkalmazni olyan közelítő eljárásokat, amikor például  $Q^{-1}$ -t egy polinommal approximálunk, akkor célszerű ezt a módszert választani. A módszer folyamata pontokba szelve:

1. Keressünk egy sűrűségfüggvényt,  $g(y)$ -t, amit könnyű kezelni (könnyen invertálható, stb..) és egy  $0 < c \in R$ , amire igaz, hogy  $g(y) > c \cdot f(y)$ ,  $\forall y$ -ra. Legyen  $H(y) = \frac{cf(y)}{g(y)}$ , ahol  $H(y) \in [0, 1]$  az elfogadási valószínűség függvény. Ekkor tulajdonképpen majoráljuk a  $g(y)$  függvénnyel a  $c \cdot f(y)$ -t.
2. Generáljunk egy  $Y$ -t  $g(y)$  sűrűségfüggvényből.
3. Legyen  $I$  egy független Bernoulli indikátor, melynek elfogadási valószínűség  $H(Y)$ . Vagyis valószínűségekkel elmondva:  $p(I = 1) = H(Y)$  és  $p(I = 0) = 1 - H(Y)$ .
4. Amennyiben  $I = 1$ -et kaptunk,  $Y$  értékét elfogadhatjuk, mint az  $f(y)$  cél-eloszlásból származó változót.  $I = 0$  esetén újabb  $Y$ -et generálunk és kezdjük az eljárást újra.

A  $H(y)$  elfogadási ráta függvényt úgy is interpretálhatjuk, mint geometriai valószínűsége  $c \cdot f(y)$  alatti terület eltalálásának, lásd: 2.1 ábra. Nyilván az olyan  $g(y)$  próbásűrűségfüggvény a jó választás, ami minél közelebb van az  $c \cdot f(y)$  cél-sűrűségfüggvényhez, mert akkor minél kevesebbszer kapunk  $I = 0$ -t és minimalizálni lehet az iterációk számát.



2.1. ábra. Az elfogadás-elvetés módszerének sematikus ábrázolása

## 2.1. Sűrűségarányok diffúziós folyamatokhoz

Beskos és Roberts [2] megvizsgálták, hogy hogyan alkalmazható az elfogadás-elvetés módszer olyan diffúziós folyamatokra, mint 1.15:

$$dY_t = \mu_Y(Y_t)dt + dW_t, \quad (2.1)$$

Feltételezzük, hogy a drift tag,  $\mu_Y$  kielégíti a Novikov feltételt [13] [2]. Ennek pontos leírása és bizonyítása szintén nem férne bele a szakdolgozat kereteibe, így átemelem a fent említett cikkből. Az érdeklődő olvasó a hivatkozásokon utánanézhethet. A Novikov feltétel:

$$\mathbb{E} \left[ \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T \mu_Y(W_t) dt \right\} \right] < +\infty \quad (2.2)$$

A fent említett cikkben [2] a szerzők megadják az elfogadási arányát a cél-sűrűségfüggvénynek  $f_{Y_T}(y)$  (ami tulajdonképpen annak a valószínűsége, hogy az  $Y$  Ito diffúziós folyamat a  $T$  időpontban éppen  $y$ -ba jut). Ehhez be kell vezetniük az  $A(y)$  integrált driftet:

$$A(y) = \int_0^y \mu_Y(u) du. \quad (2.3)$$

Vegyük észre, hogy az integrál  $u$  változója nem a diffúziós folyamatot futja végig, hanem egyedül az  $y$  értékkészletét, így  $A(y)$  könnyen kiszámítható a folyamat időfejlődéséről szóló bármilyen előismeret nélkül. Célszerűen választott próba-sűrűségfüggvény,  $g(y)$  legyen a következő:

$$g^*(y) = \exp(A(y) - y^2/2T)/c, \quad (2.4)$$

ahol a  $c = \int \exp(A(u) - u^2/2T) du$  normalizációs konstansnak köszönhetően  $g^*(u)$  nem más, mint egy Gauss eloszlás sűrűségfüggvénye, amely így megfelel egy  $T$  időpontbeli

standard Brown-mozgás PDF-jének  $\sigma = \sqrt{T}$  szórással, eltolva és torzítva az integrált driftnek megfelelően. [2] alapján, a sűrűségarány a következő formában írható le:

$$\frac{f_{Y_T}(y)}{g^*(y)} \propto \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ - \int_0^T \phi(W_t) dt \right\} \middle| W_T = y \right], \quad (2.5)$$

ahol  $\phi(u) \equiv \frac{1}{2}\mu_Y^2(u) + \frac{1}{2}\mu_Y'(u) - k_1 \geq 0$ ,  $\mu_Y'$  pedig a drift tag állapot változó szerinti deriváltja. Az egyenlet tehát azt jelenti, hogy egy adott  $y$  értékre a  $H(y)$  elfogadási arányt úgy kell számolni, hogy megadjuk az exponenciális funkcionálnak a várható értékét azokra a Brown-mozgásokra, amik  $T$  idő alatt pont  $y$ -ba érkeznek meg. Ennek a numerikus kiszámítása több problémát is felvet, ezeket a következő fejezetben részleteiben is megvizsgálom.

A standard Brown-mozgás határeloszlásához ugyan ilyen módon használhatjuk, a  $g(y) = \exp(-y^2/2T)/c$  függvényt. Ekkor természetesen a 2.5 egyenlet jobb oldalán ugyan úgy megjelenik az  $A(u)$  integrál drift tag.

$$\frac{f_{Y_T}(y)}{g(y)} \propto \exp(A(y)) \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ - \int_0^T \phi(W_t) dt \right\} \middle| W_T = y \right] \equiv H(y), \quad (2.6)$$

Annak, hogy ilyen szép eredményeket kapjanak, persze ára volt. Fel kellett tételezniük, hogy:

$$0 \leq \phi(u) \leq \phi_{\max} \quad \forall u \quad (2.7)$$

Sajnos a legtöbb pénzügyi modellnél nem tudunk optimális felső korlátot mondani  $\phi$ -re, ezért nem korlátos  $\phi$  függvénnyel írják le a változók viselkedését. De még nem korlátos esetben is van lehetőségünk kezelni a folyamatokat azzal a megkötéssel, ha időben "feldaraboljuk". Tehát felosztjuk véges sok időintervallumra és ekkor már minden intervallumhoz találhatunk olyan lokális korlátot, hogy a 2.7 megkötést alkalmazva oldjuk meg a feladatot. Ezt a következő fejezetben látni fogjuk.

## 2.2. Az elfogadási valószínűséghez vezető gyakorlati út

Ha az implementáció során, az eddig bemutatott analitikus utat szeretnénk követni, akkor komplikációt okoz, hogy egy adott  $H(y)$  érték meghatározásához 2.6 szerint végig kell integrálnunk azon *folytonos* Brown-mozgás trajektóriái mentén, amik  $y$ -ban érnek véget  $T$  időpontban. Ezt nyilván nem tudjuk megcsinálni. Numerikusan csak a trajektóriák vázát, *skeletonját*, tudjuk megadni diszkrét időpontokra, de az nem elég az integrál egzakt kiszámításához. De szerencsére ez az egész áthidalható.

Az áthidaláshoz szükségünk lesz a Poisson folyamat definíciójára. Legyen  $\lambda(t, )t \geq 0$  olyan nem-negatív, monoton nemcsökkenő, balról folytonos függvény, melyre  $\lambda(0) = 0$

**2.1. Definíció.** Az  $N(t), 0 \leq t \leq T$  sztochasztikus folyamatot a  $[0, T]$  intervallumon  $\lambda(t)$  várható érték-függvényű Poisson-folyamatnak nevezzük, ha

1.  $N(0) = 0$
2.  $N(t)$  szeparábilis, független növekményű folyamat

3. *Tetszőleges*  $0 \leq s \leq t$  esetén  $N(t)-N(s)$  Poisson eloszlású  $\lambda(t-s)$  paraméterrel.

A homogén Poisson-folyamatot egy időfüggetlen  $\lambda_u$  paraméter jellemzi (intenzitás). A valószínűsége, hogy  $t$  ideig "nincs esemény" a következőképp írható le:

$$P(N(t) - N(0) = 0) = \exp(-\lambda_u t).$$

Inhomogén Poisson folyamat, vagyis időfüggő  $\lambda(t)$ , estén a következőképp írható le:

$$P(N(t) - N(0) = 0) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(t') dt'\right). \quad (2.8)$$

A  $\lambda(t)$  intenzitás-függvény lehet determinisztikus, vagy szintén sztochasztikus függvény is. A duplán sztochasztikus folyamatok lényegüket tekintve olyan Poisson folyamatok, melyeknél az intenzitásfüggvény véletlenszerűen változhat. Számos példa van ilyen folyamatokra a fizika területén is, mint például fotondetektálásnál, sugárterápia alkalmazásában, stb. A duplán sztochasztikus Poisson-folyamatokat szokás Cox-folyamatoknak is nevezni.

**2.2. Definíció.** Legyen  $X_t, t \geq t_0$  balról folytonos sztochasztikus folyamat. Az  $N(t), t \geq t_0$  folyamatot duplán sztochasztikus  $\lambda_t(X_t), t \geq t_0$  intenzitású Poisson-folyamatnak nevezzük, ha az  $X_t, t \geq t_0$  folyamat tetszőleges realizációja mellett az  $N(t)$  folyamat  $\lambda_t(X_t), t \geq t_0$  intenzitású Poisson-folyamat. Az  $X_t, t \geq t_0$  folyamatot - mely meghatározza az  $N(t)$  folyamat intenzitását - információs folyamatnak nevezzük.

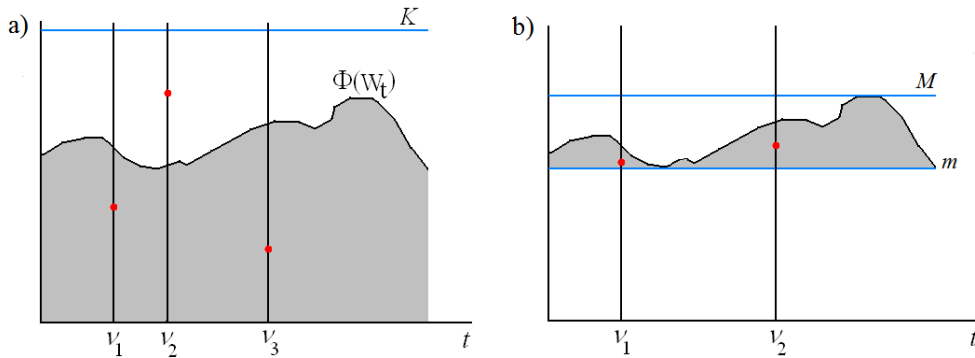
Jelenleg a legnépszerűbb módszer inhomogén Poisson-folyamatok generálására egy az elfogadás-elvetés módszerével analóg metódus, melyet vékonyításnak, angolul *thinning*-nek mondanak [15]. Az eljárás röviden a következő, melyet Lewis és Shadler [16] dolgozott ki: keresünk egy  $\lambda_u(t) \equiv \lambda_u$  alkalmas konstanst, mely majorálja a  $\lambda(t)$  függvényt. Ezután tegyük fel, hogy  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$   $\lambda_u$  paraméterű homogén Poisson-folyamatból vett reprezentációk  $(0, T]$  intervallumon.  $\lambda(t)$  intenzitás függvényről tudjuk, hogy  $0 \leq \lambda(t) \leq \lambda_u$  minden  $t \in [0, T]$  esetén. Ha minden  $i$ -edik eseményt,  $\nu_i$  függetlenül kitöröljük  $1 - \lambda(\nu_i)/\lambda_u$  valószínűséggel, akkor maradék események felfoghatók, mint egy inhomogén Poisson-folyamat reprezentációja  $\lambda(t)$  paraméterrel  $(0, T]$  intervallumon.

Ezzel a tudással felfegyverkezve már készen állunk, hogy megkapjuk  $f_{Y_T}(y)$  megfelelő sűrűségfüggvényt a következő módon nem korlátos folyamatokra [2]):

1. Választunk egy  $y$ -t  $g(y)$ -ből, mint egy lehetséges értéke a folyamatnak  $T$  időpontban. Következő pontokban pedig vizsgáljuk, hogy el is fogadhatjuk e annak.
2. Generálunk beérkezési időket  $\nu_1, \dots, \nu_N$  egy  $K > \phi_{\max}$  intenzitású inhomogén Poisson-folyamatból.
3. Ha az előző halmaz üres, vagyis nincs "beérkezés" ( $N = 0$ ) állítsuk Bernoulli indikátor értékét  $I = 1$  és ugurjunk a 9. lépésre.
4. Legeneráljuk egy  $W$  Brown-mozgás trajektóriáját (Brown-hidak generálásával, lásd később: 3 fejezet)  $Y_0 = 0$ -tól  $Y_T = y$ -ig:  $\nu_i (W_{\nu_1}, \dots, W_{\nu_N})$ .
5. Kiszámítjuk a  $\phi_{\nu_i}$  értékét az előző pontban generált Brown-mozgás lépéseiből.

6. Generálunk véletlen értékeket  $U_i$  egyenletes eloszlásból  $(0; 1)$  intervallumon  $\forall \nu_i$ -hez.
7. Tartsuk meg  $\nu_i$ , ha  $U_i \leq \phi(W_{\nu_i})/K$ , különben töröljük.
8. Ha nem maradt "beérkezés"  $(0; T]$  időintervallumon, legyen  $I = 1$ . Különben  $I = 0$ .
9. Fogadjuk el  $y$ -t, ha  $I = 1$  és utasítsuk vissza, ha  $I = 0$ .

Geometriai értelmezése a ritkítás (thinning) algoritmusnak a 2.2 ábrán látható. Vegyük észre, hogy egy  $U_i$  független indikátor változó generálása ugyan az, mintha egy egyenletes eloszlásból vennénk véletlen pontokat 0 és  $K$  között  $\nu_i$  Poisson eloszlású időpontokba. Megfelelő átskálázás mellett:  $T \times K := 1$ , könnyen beláthatjuk, hogy egy véletlen pont  $\phi(W_t)$  görbe alá kerülésének valószínűsége megegyezik  $p = \int_0^T \phi(W_t) dt$ . Ez garantálja, hogy  $U_i \leq \phi(W_{\nu_i})/K$  feltétel teljesülése esetén a kapott "beérkezések" intenzitása pont a kívánt lesz, annak ellenére, hogy az integrál kiszámítása nem lehetséges. A 2.2a. ábrán ennek egy példája látható, ahol két "beérkezés" esetén is ( $\nu_1$  és  $\nu_3$  időpillanatokban) teljesült ez a feltétel, de ennek ellenére ez a 3 pontból álló Brown-trajektória  $W_{\nu_i}$  elvetésre kerül  $\nu_2$  pont miatt.



2.2. ábra. A ritkító algoritmus geometriai értelmezése.

Vegyük észre, hogy nagyobb  $K$  érték esetén a geometriai valószínűsége alacsonyabb, hogy  $\phi(W_t)$  görbe alá kerül a véletlen pont. Ez azt jelenti, hogy átlagosan kevesebb Brown-trajektória lesz generálva. A ritkító algoritmus olyan esetben is használható, ha  $\phi(W_t)$  negatív értékeket is felvesz. Így tehát még hatásosabbá tudjuk tenni a numerikát:

- Legyen  $m$  a  $\phi(W_t)$  függvény minimuma és  $M$  pedig a maximuma a folyamat teljes hosszán.
- Használjuk a *thinning* algoritmust ahogy eddig, de az alsó korlátja legyen  $\phi(W_t) - m$ , a felső pedig  $M - m$  (ahogy a 2.2b. ábrán láthatjuk)
- Habár már nem maradt több beérkezés az előző lépésben, de számolnunk kell annak a valószínűségével, hogy lehet néhány esemény, mely a  $m$  alsó intenzitáskorlát alatt érkezett be. Ezért be kell vezetnünk egy újabb független Bernoulli indikátort,  $I_2$ -t, olyan elfogadási valószínűséggel, mely arányos  $\exp(-mT)$ , vagyis azzal, hogy nincs beérkező esemény  $T$ -ig egy  $m$  intenzitású Poisson-folyamat esetén.



- Az  $y$  jelölt értéket elfogadjuk, ha mind  $I = 1$ , mind  $I_2 = 1$  egyszerre teljesül.

Habár egy negatív intenzitású Poisson-folyamatnak nincs igazán értelme, a *thinning* algoritmus képes kezelni  $m$  negatív értéként is. Ezért nincs már szükség a  $\phi$  definíciójában leírt  $k_1$  konstansra. Mostantól kezdve a következő formulát használom az intenzitásra:

$$\phi(u) \equiv \frac{1}{2}\mu_Y^2(u) + \frac{1}{2}\mu_Y'(u). \quad (2.9)$$

Ha ezt a formulát használjuk a 2.6 egyenletben az elfogadási valószínűség a következőképp néz ki:

$$H(y) = c \exp(A(y)) \exp(-mT) \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ - \int_0^T (\phi(W_t) - m) dt \right\} \middle| W_T = y \right]. \quad (2.10)$$

Az  $A(y)$  integrált drift tagot viszonylag könnyű kiszámolni, hiszen ez csak  $y$  egy függvénye. Ennek ellenére az egyenlet jobb oldalának kiszámítása korán sem egyszerű feladat, hiszen összességében három független Bernoulli indikátort kell kezelünk. Egyet-egyét minden szorzófaktor szerint:

$$A(y), \exp(-mT), \exp - \int_0^T (\phi(y) - m) dt.$$

Annak érdekében, hogy kiszámoljuk a 2.10 egyenletet, még hátra van a skálázási prefaktor  $c$  meghatározása. Mivel biztosítani szeretnénk az iterációk minimalizálását, szükség lesz az optimális  $c$  majoráns prefaktor kiválasztására, vagyis egy maximális  $c$ -re. Hiszen ha  $c$  a lehető legnagyobb, az elfogadási valószínűség  $H(y)$  is ettől függően a lehető legnagyobb lesz, így lehető legtöbb trajektória kerül elfogadásra és ezzel minimalizáljuk az iterációk számát. Ne feledkeznünk el a 2.10 egyenletben szereplő többi tagról sem. Már tudjuk, hogy három Bernoulli indikátorra lesz szükségünk az egyenlet meghatározásához. Ha  $H(y)$  elfogadási valószínűséget tekintem és azt szeretném maximalizálni, akkor mind a három független Bernoulli indikátor elfogadási valószínűségét maximalizálnom kell.

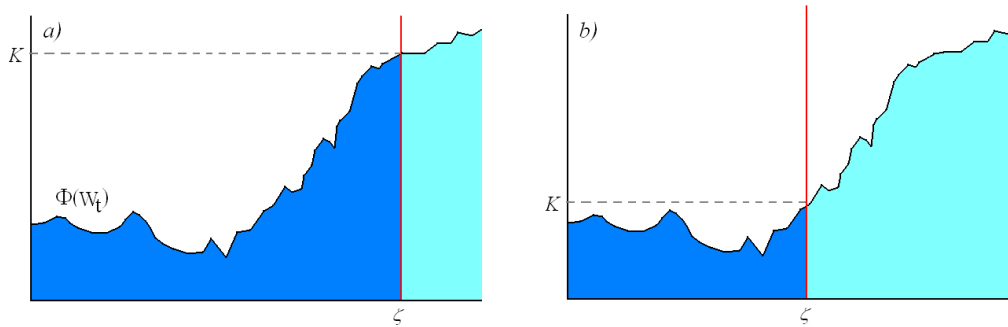
Már tudjuk, hogy egy Bernoulli indikátor elfogadási valószínűsége arányos az adott érték felső korlátjával. Így vegyük sorrendben a használt indikátorok elfogadási valószínűségét. A harmadik ilyen, az integrállal szereplő  $\phi(y) - m$  tag, melyről már láttuk, hogy a felső korlátja  $M - m$ , így tehát az ehhez kapcsolódó Bernoulli indikátor elfogadási valószínűsége  $(\phi(y) - m)/(M - m)$ . A második  $\exp(-mT)$  tag pozitív  $m$  esetén felülről korlátos 1-gyel. Tehát az elfogadási valószínűsége:  $\exp(-mT)/1$ . Ami az első faktort, az  $A(y)$  integrált driftet illeti, ha létezik egy  $A_m ax$  felső korlát, akkor ezt lehet használni, mint az adott Bernoulli indikátorhoz tartozó elfogadási valószínűség nevezője.

Ám nagyon sok esetben ilyen nem létezik, még korlátos drift esetén sem. Ez az egyik oka, hogy érdemes bevezetni egyfajta lokalizációt, vagyis részekre darabolást, ami csak egy  $D_Y$  véges tartományra koncentrál, amiben viszont már létezik egy felső korlátja az  $A(y)$  integrált drift tagnak is. A következő részben ezt fogom bemutatni.

### 2.3. Lokalizációs eljárás

A fent említett módszert általánosította *Burq és Jones* [3] és *Chen* [4], illetve tették hatásosabban kezelhetővé azokban az esetekben, amikor  $\mu_Y$  drift tag és  $\lambda$  vagy  $\phi$  intenzitás nem korlátos.

Eddigieket összefoglalva elmondható, hogy amíg  $\mu_Y$  és  $\phi$  függvények folytonosak és folytonosan deriválhatóak, mindig létezik egy olyan  $K$  felső határ adott  $T$  időpontig, hogy az eddig leírt algoritmus alkalmazható legyen. Habár ez a  $K$  felső határ nem jelenti a leghatékonyabb eljárást. Érdekes észrevenni, hogy adott  $W_t$  trajektória esetén a  $\phi(W_t)$  intenzitás mutathat éles növekedést, ahogy az a 2.3 ábrán is látjuk. Ilyen esetben nem hatékony egy egyszeri  $K$  értéket használni, ami nagyobb, mint  $\phi(W_t)$  maximuma  $(0, T]$  intervallumon, mivel ez nagyon nagy mennyiségű elvetett beérkezést jelentene. Érdekes kisebb részekre osztani ezt az intervallumot a numerika hatékonyságának érdekében. Erre ad példát a 2.3 ábra.



2.3. ábra. Az (a) ábra egy nem optimális esetet mutat be, ahol a  $\phi(W_t)$  függvényben bekövetkező növekedés miatt a Bernoulli indikátor nem hatékony, a (b) ábra pedig már egy hatékonyabb eset  $(0, \zeta]$  intervallumon.

Ebben a fejezetben szeretném bemutatni a *localizációs folyamat* alapjait, melyet később alkalmazok. A lokalizáció tulajdonképpen azt jelenti, hogy a Brown-mozgás trajektóriáit szabdaljuk kisebb részekre. Az ötlet alapja, hogy a helyett, hogy  $Y_T$  egy lépésben szimulálnánk le, generálunk  $(\zeta_i, Y_{\zeta_i})$  kilépési idő és érték párokat egymás után  $T$ -ig. Ennek az elgondolásnak egy sematikus megjelenítése látható a 2.4 ábrán.

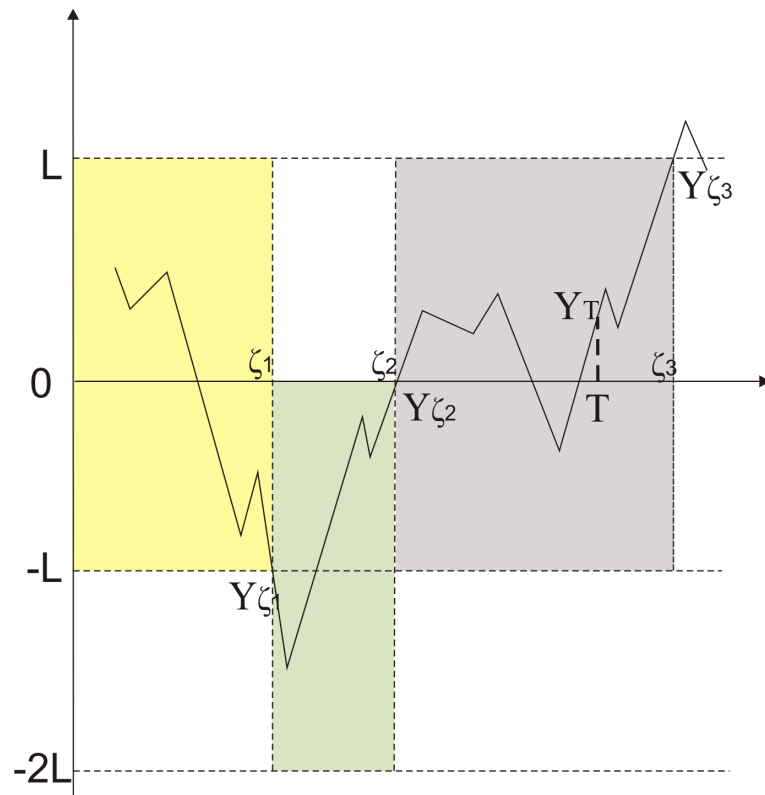
Először is vezessünk be egy lokális korlátot:  $L > 0$ . Feltéve, hogy  $Y_0 = W_0 = 0$ , vegyünk egy elérési időt (*hitting time*)  $\zeta_1$ , amely a legelső időpontnak felel meg, ami először eléri az  $L$  küszöböt, vagyis  $|W_{\zeta_1}| \geq L$ . Ekkor alkalmazzuk a ritkító algoritmust  $(0; \zeta_1]$  intervallumon. Ezzel az eljárással már megkapjuk a  $\phi(W_t)$  intenzitást, ha kiszámítjuk a lokális minimum  $m$  és maximum  $M$  értékeket  $[-L; L]$  korlátos folyamatra. Innentől kezdve ugyanezt a lokalizációs módszert lehet alkalmazni a következő intervallumokra is. Vagyis a következő kilépési idő és értékpár  $(\zeta_2, Y_{\zeta_2})$  feltéve, hogy  $(\zeta_1, Y_{\zeta_1})$  a kezdő érték. Ezt meg lehet tenni, mivel az Ito diffúziós folyamat rendelkezik a Markov-tulajdonsággal, vagyis a feltételes eloszlása a folyamat következő állapotának csak a jelen állapotától függ, az azt megelőző eseményektől nem.

Ám nem feltétlenül szükséges konstans  $L$  kilépési sugárral dolgoznunk. Az  $L_i$  függhet a folyamat aktuális értékétől  $Y_{\zeta_{i-1}}$ -től, ahogy ennek sematikus ábráját láthatjuk, 2.5.

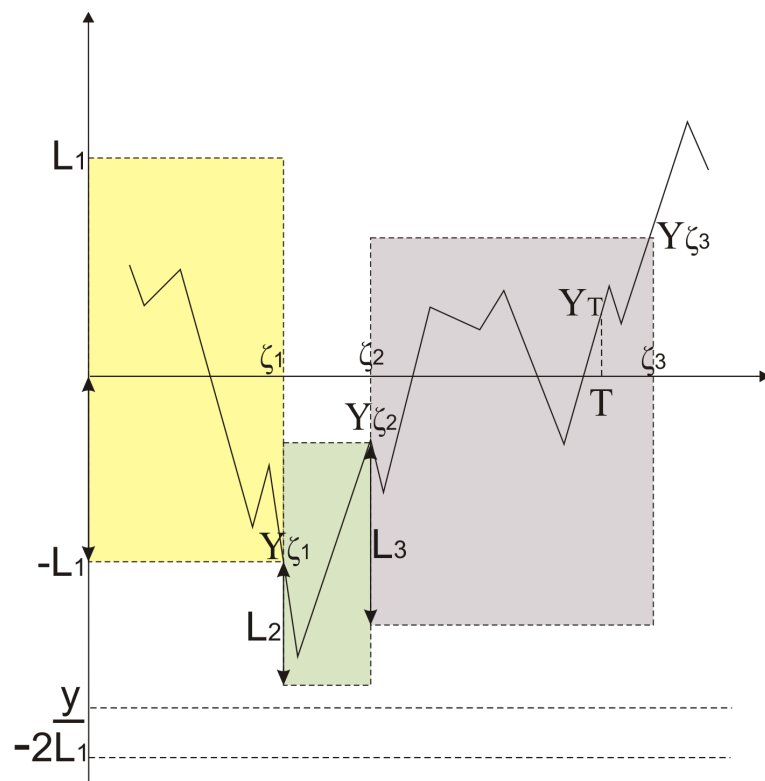
Az  $L$  érték vagy értékek választása esetén legalább két komplikációt okozó hatást számításba kell vennünk számítási hatékonyság szempontjából:

- Annak érdekében, hogy minimalizálni tudjuk az  $L_i$  választások számát, az az előnyös, ha  $\zeta_i$  időközök olyan hosszúak amennyire csak lehet.

- Fontos még, hogy akkora legyen az ajánlott skeleton elfogadási aránya amekkora csak lehetséges.



2.4. ábra. Példa a lokalizációs algoritmusra fix küszöb,  $L$  esetén. Először ezt az  $L$  küszöböt  $\zeta_1$  időpontban éri el, és az értékét most  $Y_{\zeta_1}$ -el jelölhetjük. A következő esetet, amikor kiér a folyamat a  $[0, -2L]$  tartományból az  $\zeta_2$  időpontba  $Y_{\zeta_2} = 0$  értékkel.



2.5. ábra. Példa a lokalizációs algoritmusra nem fix küszöbök,  $L_i(\mu)$  esetén. Először ezt az  $L_1$  küszöböt  $\zeta_1$  időpontban éri el, és az értékét most  $Y_{\zeta_1}$ -el jelölhetjük. A következő esetben már választunk egy  $L_2$ -t melyre igaz hogy  $y > L_1 - L_2$  abszolútértékben. A folyamat a  $[0, -L_2]$  tartományból az  $\zeta_2$  időpontba  $Y_{\zeta_2} = 0$  értékkel.

## 3. fejezet

# Implementáció

Ezen fejezet célja az eddig ismeretett matematikai leírás egy alkalmazásának ismertetése. Szeretném bemutatni, hogy milyen gyakorlati lépések vezetnek el egy ilyen egzakt szimuláció megvalósításához. A fejezet minden alfejezete egy-egy újabb kiterjesztése lesz az alkalmazásnak. Először is be fogom mutatni a lokalizációs algoritmus működését. Ez a rész fogja számunkra megalapozni, hogy meghatározzuk a beérkezések idejét és ennek helyét. A lokalizációs algoritmussal tulajdonképpen mi  $(\zeta_i, Y_i)$  értékpárokat akarunk generálni, mely első értéke a beérkezési idő a második pedig a folyamat értéke.

Mivel az utolsó beérkezési időt külön generáljuk le, így szükséges meghatároznunk azt az időpontot, mely előtt „általános” módon folyik a folyamat generálása, utána pedig már számítunk az utolsó beérkezésre. Ez az időpont lesz  $\varsigma$ . A  $\varsigma$  választása sok gyakorlati problémát vetett fel, ezek megoldásának tárgyalását nem a teljesség erejével vettem papírra a dolgozat terjedelme miatt. Az esetleg kérdéses részeket a behivatkozott cikkekre visszavezetve írtam meg.

Minden alfejezet tartalmazni fog *összegzést*, mely a száraz matematikát igyekszik algoritmusbeli lépésekbe foglalni. Illetve szintén mindenhol található egy *matlab* rész, mely a függelékben található kódrészletre mutat, mely kód az adott alfejezethez tartozó matematikát valósítja meg. Ezen felül az utolsó alfejezet itt önmagában is egy összegzés, mely lépésről lépésre végigvezet minket az algoritmuson.

### 3.1. Lokalizációs eljárás

A most leírásra kerülő lokalizációs eljárás általánosan kezelhető a  $D_Y(-\infty, \infty)$  és a  $D_Y(\underline{y}, \infty)$  vagy a  $D_Y(-\infty, \underline{y})$  estekben is, ahol  $\underline{y}$ -ről feltételezzük, hogy nem érhetjük el. Pénzügyi modelleknél éreklődés a  $D_Y(\underline{y}, \infty)$  felé irányul. De először célszerű a  $D_Y(-\infty, \infty)$  esetet vizsgálni és csak azután adaptálni az SDE szimulációját a  $D_Y(\underline{y}, \infty)$  tartományon.

Nos akkor kezdjük a  $D_Y(-\infty, \infty)$  esetet. Vegyünk egy fix, pozitív  $L$  konstanst és vezessük be az első beérkezési időt, úgy mint:

$$\zeta_1 = \inf\{t \geq 0 : |Y_t| \geq L\} \quad \text{and} \quad \zeta_i = \inf\{t \geq \zeta_{i-1} : |Y_t - Y_{\zeta_{i-1}}| \geq L\}$$

minden  $i \geq 1$ .

Vegyük észre, hogy  $\zeta_1$  az első időpont, amikor  $Y$  eléri  $[-L, L]$  határt és  $\zeta_i$  pedig az első időpont, amikor  $Y_t - Y_{\zeta_{i-1}}$  - folyamat újabb növekménye- eléri a következő  $[-L, L]$  (Lásd Fig. 2.4).

Először  $\Delta\zeta_i := \zeta_i - \zeta_{i-1}$  szimulálása szükséges, hogy legeneráljuk  $(\zeta_i, Y_{\zeta_i})$  párt lépésről lépésre  $T$  időpontig. Osszuk a szimulációt két részre attól függően, hogy  $\Delta\zeta_i := \zeta_i - \zeta_{i-1}$  igaz vagy sem. Így az első rész tartalmazza azt a generált  $\Delta\zeta_i$ -ket, ahol  $\Delta\zeta_i \leq T - \zeta_{i-1}$  vagyis még nem érjük el  $T$  időpontot. A második rész pedig a szimuláció utolsó lépése, ahol  $\Delta\zeta_i > T - \zeta_{i-1}$ .

Ha tehát  $\Delta\zeta_i < T - \zeta_{i-1}$ , akkor válasszunk egy  $\Delta Y_{\zeta_i} := Y_{\zeta_i} - Y_{\zeta_{i-1}}$ , majd állítsuk  $\zeta_i := \zeta_{i-1} + \Delta\zeta_i$  és  $Y_{\zeta_i} := Y_{\zeta_{i-1}} + \Delta Y_{\zeta_i}$  értékekre. Definíció szerint, két lehetséges érték lehet  $\Delta Y_{\zeta_i}$ -ra: vagy  $\Delta Y_{\zeta_i} = L$  vagy  $\Delta Y_{\zeta_i} = -L$ . Eután hasonlóképp generálhatjuk a következő  $(\zeta_i, Y_{\zeta_{i-1}})$  értéket. Kivétel ha  $\Delta\zeta_i > T - \zeta_{i-1}$ , ekkor válasszunk egy  $\Delta Y_{\zeta_i} := Y_{\zeta_i} - Y_{\zeta_{i-1}}$ . Ne felejtsük el, ez az érték muszáj, hogy  $[-L, L]$  tartományon belül maradjon. Az algoritmus megáll a  $Y_T := Y_{\zeta_{i-1}} + \Delta Y_{\zeta_i}$  visszatérési értékkel.

Tegyük fel, hogy  $W$  egy standard Brown-mozgás azzal a feltétellel, hogy  $\varsigma := \inf\{t \geq 0 : |W_t| \geq L\}$  és  $W_\varsigma$  tudott. Ezeket a feltevéseket Beskos-Roberts exakt szimulációjára alapozhatjuk [2].

$Y$  értéke  $[0, \zeta_1]$  tartományon  $[-L, L]$ -en belül található definíció szerint. Most már generálhatjuk az első  $Y$ -t az elfogadás-elvetés módszerét alkalmazva a standard Brown-mozgásból vett értékeken. Közben ne felejtsük el, hogy  $\varsigma = \inf\{t \geq 0 : |W_t| \geq L\}$ .  $(\zeta_1, Y_{\zeta_1})$  feltételes valószínűsége  $(\varsigma, W_\varsigma)$ -re nézve a következő arányként írhatjuk fel, *Burq and Jones* [3] alapján:

$$\frac{f_Y(\zeta_1, Y_{\zeta_1})}{f_W(\varsigma, W_\varsigma)} \propto \exp(A(Y_0 + W_u)) \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_0^\varsigma \phi(Y_0 + W_u) du \right) \middle| \varsigma, W_\varsigma \right] \quad (3.1)$$

Érdemes észrevenni, hogy ez a felírás igen hasonló (2.6) egyenletben felírt sűrűség-arányhoz.

A lokalizációs algoritmussal tulajdonképpen mi  $(\zeta_i, Y_i)$  párokat akarunk generálni. Ehhez először is szükségünk van egy  $(\zeta_1, Y_{\zeta_1})$  párra. Ezután számításra kerülő növekmény,  $\{Y_t - Y_{\zeta_1}, t \geq \zeta_1\}$  független  $\zeta_1$  előzményeitől  $Y$  Markov tulajdonságának köszönhetően. Most következhet  $(\Delta\zeta_2, \Delta Y_{\zeta_2})$  és  $(\varsigma, W_\varsigma)$  valószínűségi aránya, melyről tudjuk, hogy arányos  $\exp(-\int_0^\varsigma \phi(Y_{\zeta_1} + W_u) du)$ -val. Azt megint feltehetjük, hogy  $\phi(Y + W_u)$  határos, hiszen  $\phi$  folytonos és  $W_u \in [-L, L]$  minden  $u \leq \varsigma$ . Ha alkalmazzuk a elfogadás-elvetés módszerét a  $(\varsigma, W_\varsigma)$ -ra megkaphatjuk  $(\Delta\zeta_2, \Delta Y_{\zeta_2})$ -t majd  $(\zeta_2, Y_{\zeta_2})$ -t. A fenti eljárást kell folytatni  $Y_T$  eléréséig.

Feltesszük, hogy a Novikov feltétel: 2.2 egyenlet teljesül, akkor:

$$\frac{P[\Delta\zeta_i \in ds, \Delta Y_{\zeta_i} = y | Y_{\zeta_{i-1}} = x, \zeta_{i-1} = t]}{P[\varsigma \in ds, W_\varsigma = y]} \propto \exp(A(x + y)) \cdot \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_0^s \phi(x + W_u) du \right) \middle| \varsigma = ds, W_\varsigma = y \right] \quad (3.2)$$

ha  $s \leq T - t, y = \pm L$  és

$$\frac{P[\Delta\zeta_i \in ds, \Delta Y_{\zeta_i} \in dy | Y_{\zeta_{i-1}} = x, \zeta_{i-1} = t]}{P[\varsigma \in ds, W_{T-t} \in dy]}$$

$$\propto \exp(A(x+y)) \cdot \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_0^{T-t} \phi(x+W_u) du \right) \mid \varsigma = s, W_{T-t} = y \right] \quad (3.3)$$

ha  $s > T - t, y \in [-L, L]$ .

Szükséges két random szám bevezetése,  $H_1$  and  $H_2$ , annak érdekében, hogy használni tudjuk a elfogadás-elvetés módszerét a 3.4 és 3.5.1 alfejezetekben.  $H_1$  és  $H_2$  teljesíti a következő feltételeket:

$$P[\varsigma \in ds, H_1 = y] \propto \exp(A(x+y)) \cdot P[\varsigma \in ds, W_\varsigma = y] \quad (3.4)$$

minden  $s \leq T - t, y = \pm L$  esetén és és

$$P[\varsigma \in ds, H_1 \in dy] \propto \exp(A(x+y)) \cdot P[\varsigma \in ds, W_{T-t} \in dy] \quad (3.5)$$

minden  $s > T - t, y \in [-L, L]$  esetén.

A módszer, mellyel  $H_1$ -t és  $H_2$ -t mintavételezzük már a következő alfejezet témáját képezi. Most nézzük, meg hogy a fent leírt egyenletek hogyan tudjuk együtt használni: alkalmazzuk 3.4-t 3.2-re és 3.5-re, így mintavételezni tudjuk  $(\zeta_i, Y_{\zeta_i})$  egy adott  $(\zeta_{i-1}, Y_{\zeta_{i-1}})$  pár alapján a következő módon:

$$\frac{P[\Delta\zeta_i \in ds, \Delta Y_{\zeta_i} = y \mid Y_{\zeta_{i-1}} = x, \zeta_{i-1} = t]}{P[\varsigma \in ds, H_1 = y]} \propto \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_0^s \phi(x+W_u) du \right) \mid \varsigma = s, W_\varsigma = y \right] \quad (3.6)$$

ha  $s \leq T - t, y = \pm L$  és

$$\frac{P[\Delta\zeta_i \in ds, \Delta Y_{\zeta_i} \in dy \mid Y_{\zeta_{i-1}} = x, \zeta_{i-1} = t]}{P[\varsigma \in ds, H_2 \in dy]} \propto \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_0^{T-t} \phi(x+W_u) du \right) \mid \varsigma = s, W_{T-t} = y \right] \quad (3.7)$$

és  $s > T - t, y \in [-L, L]$ .

**Lokalizációs algoritmus működése:**  $D_Y(-\infty, \infty)$  és adott  $(\zeta_{i-1}, Y_{\zeta_{i-1}})$  pár esetén.  
**Cél:** mintavételezzük  $(\zeta_i, Y_{\zeta_i})$ -t:

1. Vegyünk egy  $\varsigma$ -t standard Brown mozgásból generálva.

2. Ha  $\varsigma \leq T - \zeta_{i-1}$ , szimuláljuk le  $H_1$ -et a következőképpen:

Generáljuk le egy  $I$  Bernoulli indikátort a következő valószínűséggel:

$$P[I = 1 \mid y] \propto \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_0^s \phi(x+W_u) du \right) \mid \varsigma = s, W_\varsigma = y \right];$$

Ha  $I = 0$ , térjünk vissza az 1-es lépéshez;

Ha  $I = 1$ , legyen  $(\Delta\zeta_i, \Delta Y_{\zeta_i}) = (\varsigma, H_1)$ , majd frissítsük  $\zeta_i = \zeta_{i-1} + \Delta\zeta_i$  és  $Y_{\zeta_i} = Y_{\zeta_{i-1}} + \Delta Y_i$ . Térjünk vissza az 1-es lépéshez.

3. Ha  $\varsigma > T - \zeta_{i-1}$ , vegyünk egy  $H_2$ -t a következő képpen:

Generáljuk le egy  $I$  Bernoulli indikátort a következő valószínűséggel:

$$P[I = 1 \mid y] \propto \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_0^{T-t} \phi(x+W_u) du \right) \mid \varsigma \in ds, W_{T-t} = y \right];$$

Ha  $I = 0$ , térjünk vissza az 1-es lépéshez;

Ha  $I = 1$ , frissítsük  $Y_T = Y_{\zeta_{i-1}} + H_2$ . Az algoritmus megáll  $Y_T$  visszatérési értékkel.

Most már elkezdhetjük vizsgálni a  $D_Y(y, \infty)$  esetet. Látható, hogy a fő különbség az eddig ismertettekhez képest  $\underline{y}$ ,  $D_Y$  értékészlet alsó határára lesz. Most már ahelyett, hogy előre fixálnánk  $L$  konstans végig a lokalizációs művelet során, adaptívan szeretnénk a változtatni ezt a határt a különböző  $(\zeta_i, Y_{\zeta_i})$  párokkal egy időben. Tehát most legyen adott egy  $L_i$  sorozat és a hozzá tartozó beérkezési idők egy sorozata:  $\zeta_1 = \inf \{u \geq 0 : |Y_u| \geq L_1\}$  és  $\zeta_i = \inf \{u \geq \zeta_{i-1} : |Y_u - Y_{\zeta_{i-1}}| \geq L_i\}$  ha  $i \geq 1$ .

Emlékezzünk vissza a 2.4 és 2.5 ábrára, mely a különbséget szemlélteti. Kezdjünk egy  $L_1$ -t úgy, hogy  $-L_1 > \underline{y}$ . Használjuk az előző,  $D_Y(-\infty, \infty)$  esetben alkalmazott technikát é generáljuk egy  $(\zeta_1, Y_{\zeta_1})$ -t. Ha  $Y_{\zeta_1} = -L_1$ , akkor  $L_1$  nyilvánvalóan nem alkalmas, hogy generáljuk a következő elemet, vagyis  $(\zeta_2, Y_{\zeta_2})$ -t, mert ez annak a lehetőségéhez vezetne, hogy  $Y_{\zeta_2} = Y_{\zeta_1} - L_1 = -2L_1 < \underline{y}$ , amelyről feltettük, hogy nem lehetséges. Ezért szükséges egy  $L_1$ -nél kisebb  $L_2$ -t választanunk, úgy, hogy  $-L_1 - L_2 > \underline{y}$ , annak érdekében, hogy a megakadályozzuk a  $\underline{y}$  határ elérését. Az SDE megoldása szerencsére Markov tulajdonságú, így  $\zeta_1$  szimulált értékek függetlenek a  $\zeta_1$  előtti értékektől.

Most érdeklődésünk célpontjában  $(\Delta\zeta_i, \Delta Y_{\zeta_i})$  pár valószínűségi aránya áll. Az eddigi esethez hasonlóan próbáljuk megkapni ezt az arányt, ám itt már figyelembe kell vennünk  $(\zeta_i, W_{\zeta_i})$ -t. Definiáljuk  $\varsigma_i := \inf \{u \geq 0 : |W_u| \geq L_i\}$ . Ha adott  $Y_{\zeta_{i-1}} = x$ ,  $\zeta_{i-1} = t$  és egy  $L_i$  pozitív szám, melyre igaz, hogy  $x - L_i > \underline{y}$ . Ekkor a valószínűségi arányt következő módon kaphatjuk meg:

$$\frac{P[\Delta\zeta_i \in ds, \Delta Y_{\zeta_i} = y | Y_{\zeta_{i-1}} = x, \zeta_{i-1} = t]}{P[\varsigma \in ds, W_\varsigma = y]} \propto \exp(A(x+y)) \cdot \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_0^s \phi(x + W_u) du \right) | \varsigma = ds, W_\varsigma = y \right] \quad (3.8)$$

ha  $s \leq T - t$ ,  $y = \pm L_i$  és

$$\frac{P[\Delta\zeta_i \in ds, \Delta Y_{\zeta_i} \in dy | Y_{\zeta_{i-1}} = x, \zeta_{i-1} = t]}{P[\varsigma \in ds, W_{T-t} \in dy]} \propto \exp(A(x+y)) \cdot \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_0^{T-t} \phi(x + W_u) du \right) | \varsigma = ds, W_{T-t} = y \right] \quad (3.9)$$

ha  $s > T - t$ ,  $y \in [-L_i, L_i]$ .

Annak érdekében, hogy konstruálni tudjuk  $H_{1, \zeta_i}$ -t és  $H_{2, \zeta_i}$ -t vegyünk egy  $I$ , Bernoulli indikátort és alkalmazzuk (3.4) egyenletet (3.8)-re és (3.5)-et (3.9)-re. Így már tudunk adni egy értéket  $(\zeta_i, Y_{\zeta_i})$ -nek, ha adva van  $(\zeta_{i-1}, Y_{\zeta_{i-1}})$  pár:

$$\frac{P[\Delta\zeta_i \in ds, \Delta Y_{\zeta_i} = y | Y_{\zeta_{i-1}} = x, \zeta_{i-1} = t]}{P[\varsigma_i \in ds, H_{1, \zeta_i} = y]} \propto \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_0^s \phi(x + W_u) du \right) | \varsigma_i = s, W_{\zeta_i} = y \right]$$

ha  $s \leq T - t$ ,  $y = \pm L_i$ , és

$$\frac{P[\Delta\zeta_i \in ds, \Delta Y_{\zeta_i} \in dy | Y_{\zeta_{i-1}} = x, \zeta_{i-1} = t]}{P[\varsigma_i \in ds, H_{2, \zeta_i} \in dy]} \propto \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_0^{T-t} \phi(x + W_u) du \right) | \varsigma_i = s, W_{T-t} = y \right]$$

ha  $s > T - t$ ,  $y \in [-L_i, L_i]$ .

**Lokalizációs algoritmus működése:**  $D_Y(y, \infty)$  és adott  $(\zeta_i, Y_{\zeta_i})$  pár esetén. Cél, hogy mintavételezzünk  $(\zeta_{i-1}, Y_{\zeta_{i-1}})$  párokat:



1. Konstruáljunk egy  $L_i$  értéket, mely megfelel a  $Y_{\zeta_{i-1}} - L_i > \underline{y}$  feltételnek.

2. Vegyünk egy  $\varsigma_i$ -t standard Brown mozgásból generálva.

3. Ha  $\varsigma_i \leq T - \zeta_{i-1}$ , szimuláljuk  $H_{1,\varsigma_i}$ -et a következőképpen:

Generáljunk egy  $I$  Bernoulli indikátort

$P[I = 1|y] \propto \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_0^s \phi(x + W_u) du \right) \mid \varsigma_i = s, W_{\varsigma_i} = y \right]$  valószínűséggel.

Ha  $I = 0$ , térjünk vissza az 1-es lépéshez;

Ha  $I = 1$ , legyen  $(\Delta\zeta_i, \Delta Y_{\zeta_i}) = (\varsigma_i, H_{1,\varsigma_i})$  és frissítsük  $\zeta_i = \zeta_{i-1} + \Delta\zeta_i$ ,  $Y_{\zeta_i} = Y_{\zeta_{i-1}} + \Delta Y_i$ , majd térjünk vissza az 1-es lépéshez.

4. Ha  $\varsigma > T - \zeta_{i-1}$ , vegyünk egy  $H_2$ -t a következőképpen:

Generáljunk egy  $I$  Bernoulli indikátort

$P[I = 1|y] \propto \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_0^{T-t} \phi(x + W_u) du \right) \mid \varsigma_i = s, W_{T-t} = y \right]$  valószínűséggel.

Ha  $I = 0$ , térjünk vissza az 1-es lépéshez;

Ha  $I = 1$ , frissítsük  $Y_T = Y_{\zeta_{i-1}} + H_{2,\varsigma_i}$ . Az algoritmus megáll  $Y_T$  visszatérési értékkel.

## 3.2. $\varsigma$ választása

A standard Brown mozgás önhasonló tulajdonsága miatt  $\{LW_{t/L^2}, t \geq 0\}$  és  $\{W_t, t \geq 0\}$  eloszlása azonos és igaz, hogy  $\varsigma \stackrel{d}{=} L^2\varsigma_1$ .

A  $\varsigma_1 = \inf\{t \geq 0 : |W_t| = 1\}$  sűrűségfüggvénye expliciten megadható a következő végtelen sor formájában:

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{1}{2t}} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\sqrt{2\pi t^3}} \left[ (2j+1) \exp\left(-\frac{(2j+1)^2}{2t}\right) - (2j-1) \exp\left(-\frac{(2j-1)^2}{2t}\right) \right].$$

Burq és Jones [3] alapján már tudjuk, hogy ez felülről korlátos egy Gamma sűrűségfüggvény által. Pontosabban léteznie kell  $a, b, \gamma$  állandóknak, úgy hogy teljesüljön:

$$h(t) \leq ag(t; b; \gamma) := a \frac{\gamma b t^{b-1} e^{-\gamma t}}{\Gamma(b)},$$

ahol az optimális értékek:  $a = 1.243707$ ,  $b = 1.088870$  és  $\gamma = 1.233701$ , melyeket numerikus kísérletekből kaptak[3]. Ez azt jelenti, hogy veszünk egy  $\varsigma_1$ -t az elfogadás- elvetés módszer (ARM) segítségével  $h_1$ -ből, majd generálunk egy  $v$  értéket  $g(t; b; \gamma)$  eloszlásból és elfogadjuk  $v$ -t mint  $\varsigma_1$  értéke ha  $aUg(v; b; \gamma) \leq h(v)$ , ahol  $U \sim U(0; 1)$ . Azt tudnunk kell, hogy  $h$  sűrűségfüggvénye nem számítható egzakt módon. Ámbár kiszámítható egy speciális (oszciláló) összeg segítségével. Ezt a számítást itt nem mutatom be, megtalálható a fentebb említett munkában, melyben Burq és Jones bebizonyította, hogy véges számú művelet elegendő  $n$  megtalálásához, ahol  $n$  az oszciláló összeg tagjának számát jelöli, melytől kezdve igaz az egyenlőtlenség. Ráadásul ez az érték  $n \geq \max\left(\frac{t(\log 3)}{4}, 3\right)$ .

**MatLab kód:**

A függelék 5.1.1 alfejezete tartalmazza.

### 3.3. $I$ mintavételezése

Adott  $\varsigma$ -hoz szükségünk van egy  $W_\varsigma$  generálására. Ez triviálisan megoldható, mivel  $P(W_\varsigma = L) = P(W_\varsigma = -L) = 1/2$ . Következően már adott  $(\varsigma, W_\varsigma)$  és generálhatunk  $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$  minden  $t_i < \varsigma$ -hez. Ahhoz, hogy ezeket a  $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$  értékeket megkapjuk szimulálunk Poisson beérkezéseket:

$$\{t_1 < \dots < t_n\}$$

még hozzá  $M - m$  intenzitással, ahogy azt már szerepel az 3.1 fejezetben. Itt  $m := \min_{y \in [-L, L]} \phi(x + y)$ ,  $M := \max_{y \in [-L, L]} \phi(x + y)$ .

Vegyük észre, hogy  $m \leq (x + W_u) \leq M$  minden  $u \leq \varsigma$ -ra. Figyelembe véve  $W_t$  önhasznó tulajdonságát és adott  $(\varsigma_1, W_{\varsigma_1})$  minden  $0 \leq t \leq \varsigma_1$  esetén, így megállapítható minden  $0 < t_1 < \dots < t_n < \varsigma = \varsigma_1 L^2$  esetén,

$$(W_{t_1}, \dots, W_{t_n} | \varsigma, W_\varsigma) \stackrel{d}{=} L(W_{t_1/L^2}, \dots, W_{t_n/L^2} | \varsigma_1, W_{\varsigma_1}).$$

Adva van  $(\varsigma_1, W_{\varsigma_1})$  értékpár és  $(W_t)_{t \leq \varsigma_1}$  folyamat, mely tulajdonképpen egy időtükrözéses *Brown-meander*.

**3.1. Definíció.** *A Brown-meander, vagy más néven Bessel híd (Bessel bridge) egy olyan sztochasztikus idősor, melynek statisztikus tulajdonságai megegyeznek a standard Brown mozgásával, de e mellett biztosítja, hogy egy adott végső értéket ér el adott kilépési idővel az első alkalommal a folyamat során.*

Egy Brown meandert így fel lehet bontani 3 független Brown-hídra  $B^i$ , ahol minden  $i$  érték esetén 0-tól 0-ig megy  $[0, \varsigma_1]$  intervallumon. Kihasználjuk ezt a felbontást, ahogy Chen [4] cikkében olvasható, hogy mintavételezzünk  $W_t$  értékét adott  $(\varsigma_1, W_{\varsigma_1})$  párhoz. Formálisabban leírva: Vezessünk be egy új folyamatot :

$$\widetilde{W}_t := \begin{cases} 1 - W_{\varsigma_1 - t} & W_{\varsigma_1} = 1 \\ 1 + W_{\varsigma_1 - t} & W_{\varsigma_1} = -1 \end{cases} \quad (3.10)$$

$t \leq \varsigma_1$  és jegyezzük meg, hogy  $B_t^i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , 3 független Brown híd.

Egy Brown híd létrehozása a következőképp írható le:

$$\widetilde{B}_t := \sqrt{(t/\varsigma_1 + B_{\varsigma_1 - t}^1)^2 + (B_{\varsigma_1 - t}^2)^2 + (B_{\varsigma_1 - t}^3)^2}. \quad (3.11)$$

Ne felejtsük el, hogy  $t/\varsigma_1$  biztosítja, hogy  $\widetilde{B}_t$  végső értéke 1 lesz.

Most vizsgáljuk meg  $\widetilde{W}$  és  $\widetilde{B}$  valószínűségi arányát minden  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = \varsigma_1$  és  $y_1, \dots, y_n > 0$  esetén és nézzük meg hogyan írható le explicit formában. A  $(\widetilde{W}_{t_1}, \dots, \widetilde{W}_{t_n})$  és  $(\widetilde{B}_{t_1}, \dots, \widetilde{B}_{t_n})$  kapcsolt feltételes eloszlása következőképp írható fel:

$$\frac{P \left[ \widetilde{W}_{t_1} \in dy_1, \dots, \widetilde{W}_{t_n} \in dy_n \mid \varsigma_1, W_{\varsigma_1} \right]}{P \left[ \widetilde{B}_{t_1} \in dy_1, \dots, \widetilde{B}_{t_n} \in dy_n \right]} \propto \begin{cases} \prod_{i=1}^n p(t_i, y_i; t_{i+1}, y_{i+1}) q(t_1, y_1) & y_i \in (0, 2) \\ 0 & \text{egybknt.} \end{cases} \quad (3.12)$$

Mind  $p$ -nek, mind  $q$ -nek van zárt formája minden  $0 < s < t < \varsigma_1$  és  $x, y \in (0, 2)$  esetén,

$$p(s, x; t, y) = \frac{1 - \sum_{j=1}^{\infty} (\theta_j - \vartheta_j)}{1 - \exp(-xy/(t-s))}, \quad (3.13)$$

ahol

$$\theta_j(s, x; t, y) = \exp\left(-\frac{2(2j-x)(2j-y)}{t-s}\right) + \exp\left(-\frac{2(2(j-1)+x)(2(j-1)-y)}{t-s}\right), \quad (3.14)$$

$$\vartheta_j(s, x; t, y) = \exp\left(-\frac{2j(4j+2(x-y))}{t-s}\right) + \exp\left(-\frac{2j(4j-2(x-y))}{t-s}\right); \quad (3.15)$$

és

$$q(s, x) = 1 - \frac{1}{x} \sum_{j=1}^{\infty} (\rho_j - \varrho_j), \quad (3.16)$$

ahol

$$\rho_j = (4j-x) \exp\left(\frac{-4j(2j-x)}{s}\right), \quad (3.17)$$

$$\varrho_j = (4j+x) \exp\left(\frac{-4j(2j+x)}{s}\right). \quad (3.18)$$

A valószínűségi arány elősegíti az elfogadás-elvetés módszerének (ARM) alkalmazását úgy, hogy javaslatot teszünk egy szkeletonra (proposal sceleton),  $(\widetilde{B}_{t_1}, \dots, \widetilde{B}_{t_n})$ . Habár a fenti kifejezést nem lehet pontosan leírni, Chen [4] cikkben megmutatják a szerzők, hogy  $p(s, x; t, y)$  és  $q(s, x)$  -ben a véges summák oszcilláló tulajdonsága lehetővé teszi az ARM alkalmazását, mivel így véges számú tagból álló összegeként kezelhető. A szummák száma:

(i) Ha  $x, y \in (0, 2)$  és  $0 < s < t$ , minden egész esetén

$$J \geq \frac{(\log 3)(t-s)}{8} \max\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) + 1,$$

akkor  $p_J(s, x; t, y)$  kielégíti a következő egyenletet:

$$0 < p_{2J+1} - p_{2J} \leq \frac{2}{3}(p_{2J-1} - p_{2J}) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 (p_{2J-1} - p_{2J-2}).$$

(ii). Ha  $x \in (0, 2)$  és  $0 < s$ , minden egész esetén

$$J \geq \frac{(\log 4)s}{8} \frac{1}{x} + 2,$$

akkor  $q_J(s, x)$  kielégíti a következő egyenletet:

$$0 < q_{2J+1} - q_{2J} \leq \frac{1}{2}(q_{2J-1} - q_{2J}) \leq \frac{1}{4}(q_{2J-1} - q_{2J-2}).$$

**Összegezzük a szükséges lépéseket  $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n} | \varsigma, W_\varsigma)$  generálásához:**

1. Mintavételezzünk  $W_{\varsigma_1}$   $P(W_{\varsigma_1} = 1) = P(W_{\varsigma_1} = -1) = 1/2$  felhasználásával és vegyük  $W_{\varsigma_1} = H_{1,\varsigma}$ .
2. Generáljunk Brown hidakat:  $(B_t^i, \dots, B_{t_n}^i)$   $i = 1, 2, 3$ .
3. Konstruáljuk meg  $(\tilde{B}_{\varsigma_1-t_n}, \dots, \tilde{B}_{\varsigma_1-t_1})$ .
4. Generáljunk  $n + 1$  darab Bernoulli indikátort:  $U_j \sim U(0, 1)$ ,  $0 \leq j \leq n$ .
5. Fogadjuk el  $(\tilde{B}_{\varsigma_1-t_n}, \dots, \tilde{B}_{\varsigma_1-t_1})$  mint egy mintája a  $(\tilde{W}_{\varsigma_1-t_n}, \dots, \tilde{W}_{\varsigma_1-t_1})$ -nek ha  $U_0 < q(\varsigma_1 - t_n, \tilde{B}_{\varsigma_1-t_n})$  és  $U_j < p(\varsigma_1 - t_j, \tilde{B}_{\varsigma_1-t_j}; \varsigma_1 - t_{j+1}, \tilde{B}_{\varsigma_1-t_{j+1}})$  minden  $1 \leq j \leq n$  estén.
6. Alakítsuk át  $(\tilde{W}_{\varsigma_1-t_n}, \dots, \tilde{W}_{\varsigma_1-t_1})$   $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$ -á 3.10-es egyenlet szerint.

**MatLab kód:**

A függelék 5.1.2 alfejezete tartalmazza.

### 3.4. $\varsigma < T - \zeta_{i-1}$ eset

A cél itt is az, hogy legeneráljuk  $W_\varsigma$ -t, ehhez az előző lépésekben már szimuláltunk Poisson beérkezéseket  $\{t_1 < \dots < t_n < \varsigma\}$  méghozzá  $M-m$  intenzitással és  $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$  értékekkel. Adott  $(\varsigma_i, H_{1,\varsigma_i})$  pár lesz az ajánlott érték az ARM-hez. Ekkor el kell döntünk, hogy ez a proposal(ajánlott értékpár) megfelelő mintája-e  $(\Delta\zeta_i, \Delta Y_{\zeta_i})$ -nak vagy sem. Ha alkalmazzuk az ARM-et a localizációs algoritmussal karöltve, ahogy a 3.1 fejezetben le van írva.

Az elfogadási arány függvénye:

$$P[I = 1] \propto \exp(A(x+y)) \cdot \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_0^s \phi(x+W_u) du \right) \mid \varsigma = s, W_\varsigma = y \right],$$

ahogy az a 2.10 egyenletben is láthatjuk.

Ahogy azt a 2.2 fejezetben már leírtam, itt egyszerűbb szétszedni ezt az egyenletet három részre és független Bernoulli indikátorok segítségével alkalmazni a ARM tesztet a ajánlott szkeletonon. Bontsuk tehát szét a várható értéket tartalmazó tagot két tényezőre: az első rész tartalmazza az  $m$  alatti értékeket, a második rész pedig  $m$  és  $\phi(x+W_u)$  közötti intervallumot.

Vizsgáljuk meg a beérkezések valószínűségét ezen két intervallumon. Annak a valószínűsége, hogy nincs több beérkezés  $m$  alatt  $s$  intervallumon  $\exp(-ms)$ -vel egyenlő. Annak a valószínűsége pedig, hogy nincs több beérkezés  $m$  és  $\phi(x+W_u)$  között  $s$  intervallumon:

$\mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_0^s [\phi(x+W_u) - m] du \right) \mid \varsigma = ds, W_\varsigma = y \right]$ . Ezekeből már levezethető, hogy az elfogadási arány egyenlete a következőképp néz ki:

$$P[I = 1] \propto \exp(A(x+y)) \cdot \exp(-ms) \cdot \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_0^s [\phi(x+W_u) - m] du \right) \mid \varsigma = s, W_\varsigma = y \right] \quad (3.19)$$

A homogén Poisson folyamat valószínűségi eloszlása egy fix intervallum  $P\{\text{interarrival time} > s\} = \exp(-\lambda s)$ -vel írható le, ha egy konstans  $\lambda$  lambda intenzitást feltételezünk és a kiinduló egyenletünk:  $P\{\text{interarrival time} > s\} = \exp \left( - \int_0^s \lambda(t) dt \right)$ , ahogy az a 2.8 egyenletből következik, ha a  $\lambda(t)$  időfüggő.

A fontosabb valószínűségen ennek függvényében:

1. Annak a valószínűsége, hogy megtartjuk ezt a beérkezési időt:

$$P\{\text{interarrival time} > s\} = \exp \left( - \int_0^s [\phi(x+W_u) - m] du \right)$$

2. Annak a valószínűsége, hogy nem történt beérkezés  $m$  alatt:  $\frac{\exp(-m\varsigma)}{\max(1, \exp(-m(T-t)))}$ .
3. Annak a valószínűsége, hogy megtartunk egy beérkezést mely  $m$  fölött, de természetesen  $M$  alatt történt pedig:  $\frac{\phi(x+W_u) - m}{M - m}$ .

Ezen tudás mellett már alkalmazhatjuk az ARM-et (elfogadás-elvetés methodusát). Ehhez először is generálhatunk  $n+2$  random random számot. Majd elfogadjuk  $(\varsigma_i, H_{1,\varsigma_i})$

jelöltet, mint egy mintavétele  $(\Delta\zeta_i, \Delta Y_{\zeta_i})$ -nek, akkor és csak akkor ha a következő feltételek fennállnak:

$$U_j > \frac{\phi(y+W_{\tau_j})^{-m}}{M-m}; \text{ minden } 1 \leq j \leq n;$$

$$U_{n+1} \leq \frac{\exp(-m\zeta)}{\max(1, \exp(-m(T-t)))};$$

$$U_{n+2} \leq \frac{\exp(A(y+W_\zeta))}{\max_{y \in [-L, L]} \exp(A(x+y))}.$$

**Összegezzük a szükséges lépéseket  $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n} | \zeta, W_\zeta)$  legenerálásához és a  $(\zeta_i, H_{1, \zeta_i})$  ARM tesztjéhez, mellyel  $(\Delta\zeta_i, \Delta Y_{\zeta_i})$ -t mintavételezzük:**

1. Szimuláljuk a Poisson beérkezéseket  $\{t_1 < \dots < t_n < \zeta\}$   $M - m$  intenzitással. Ehhez felhasználjuk  $W$  önhasznos tulajdonságát, ami azt jelenti, hogy  $0 < t_1 < \dots < t_n < \zeta = \zeta_1 L^2, (W_{t_1}, \dots, W_{t_n} | \zeta, W_\zeta) \stackrel{d}{=} L(W_{t_1/L^2}, \dots, W_{t_n/L^2} | \zeta_1, W_{\zeta_1})$ .
2. Mintavételezzük  $W_{\zeta_1}$  úgy, hogy felhasználjuk  $P(W_{\zeta_1} = L) = P(W_\zeta = -L) = 1/2$  és  $W_\zeta = H_{1, \zeta}$ .
3. Generáljunk Brown hidakat  $(B_{t_1}^i, \dots, B_{t_n}^i)$  minden  $i = 1, 2, 3$ -hez.
4. Konstruáljuk  $(\tilde{B}_{\zeta_1 - t_n}, \dots, \tilde{B}_{\zeta_1 - t_1})$ -t.
5. Generáljunk  $n + 1$  darab  $U_j \sim U(0, 1), 0 \leq j \leq n$ .
6. Fogadjuk el  $(\tilde{B}_{\zeta_1 - t_n}, \dots, \tilde{B}_{\zeta_1 - t_1})$ -t mint egy mintavétele  $(\tilde{W}_{\zeta_1 - t_n}, \dots, \tilde{W}_{\zeta_1 - t_1})$ -nak, ha  $U_0 < q(\zeta_1 - t_n, \tilde{B}_{\zeta_1 - t_n})$  és  $U_j < p(\zeta_1 - t_j, \tilde{B}_{\zeta_1 - t_j}; \zeta_1 - t_{j+1}, \tilde{B}_{\zeta_1 - t_{j+1}})$  minden  $1 \leq j \leq n$ .
7. Transzformáljuk  $(\tilde{W}_{\zeta_1 - t_n}, \dots, \tilde{W}_{\zeta_1 - t_1})$ -t  $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$ -vé a 3.10 egyenlet alapján.
8. Generáljunk  $n + 2$  darab  $U_j \sim U(0, 1), 1 \leq j \leq n + 2$ .
9. Fogadjuk el  $(\zeta, H_{1, \zeta})$ -t, mint egy minatvétele  $(\Delta\zeta_i, \Delta Y_{\zeta_i})$ -nak ha

$$U_j > \frac{\phi(y+W_{\tau_j})^{-m}}{M-m}, \text{ minden } 1 \leq j \leq n\text{-hez,}$$

$$U_{n+1} \leq \frac{\exp(-m\zeta)}{\max(1, \exp(-m(T-t)))},$$

$$U_{n+2} \leq \frac{\exp(A(y+W_\zeta))}{\max_{y \in [-L, L]} \exp(A(x+y))}.$$

**MatLab kód:**

A függelék 5.1.2 alfejezete tartalmazza.

### 3.5. $\varsigma > T - \zeta_{i-1}$ eset

Ebben az esetben is – csak úgy mint előzőleg – szükséges Poisson beérkezéseket szimulálni  $M - m$  intenzitással, hogy javasolt értékeink legyenek. De most már szükségünk lesz egy jelölt generálására, ami  $Y_T$ , a folyamat végső értéke lehet. Ez az érték az, ami  $W_{T-\zeta_{i-1}}$ , Brown meander értéke  $T - \zeta_{i-1}$ , előírt beérkezési időben. Ennek érdekében szimulálunk Poisson beérkezéseket:

$$\{t_1 < \dots < t_{n-1} < T - \zeta_{i-1}\}$$

$T - \zeta_{i-1}$  időpontig és aztán hozzá vesszük még  $\varsigma$ - az utolsó beérkezésnek:

$$\{t_1 < \dots < t_{n-1} < T - \zeta_{i-1} < \varsigma\}.$$

Az ezt követő lépések alapvetően hasonlóak az előző szakaszban leírtakéval. Generálunk Brown hidakat és konstruálunk Brown meandereket ajánlott szkeleton céljából. Ha elfogadjuk mint  $(W_{t_1}, \dots, W_{T-\zeta_{i-1}} | \varsigma, W_\varsigma)$  mintavétele, akkor lesz egy ajánlott értékünk,  $(T - \zeta_{i-1}, W_{T-\zeta_{i-1}})$ , mint  $(\Delta\zeta_i, \Delta Y_{\zeta_i})$  mintája. Ehhez ismét alkalmazzuk az elfogadás-elfvetés módszerét lokalizációs algoritmus taglaló fejezetben leírtaknak megfelelően. Az elfogadási arány függvénye a következő:

$$P[I = 1] \propto \exp(A(x + y)) \cdot \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_0^{T-t} \phi(x + W_u) du \right) | \varsigma = s, W_{T-t} = y \right].$$

Ez hasonló, mint a 3.9 egyenlet.

A különbség a két eset módszere között (vagyis  $\varsigma < T - \zeta_{i-1}$  és  $\varsigma > T - \zeta_{i-1}$  között), hogy ebben az esetben egyszerűen csak hozzáadunk egy új beérkezési időt, mégpedig  $T - \zeta_{i-1}$ -t. Ezután ugyan úgy járunk el, mint az előző esetben, egészen az utolsó ARM-ig, amikor is teszteljük  $W_{T-\zeta_{i-1}}$ -t mint  $H_2$  mintavétele.

Ám ezen a ponton is célszerű összegezni a szükséges lépéseket, azért hogy lássuk az eltérést az eddigi esettől.

**Összegezzük a szükséges lépéseket a  $(W_{t_1}, \dots, W_{T-\zeta_{i-1}} | \varsigma, W_\varsigma)$  generálásához és az ARM lépéseit, mellyel teszteljük  $(T - \zeta_{i-1}, W_{T-\zeta_{i-1}})$ -t mint egy mintavétele  $(\Delta\zeta_i, \Delta Y_{\zeta_i})$ -nak:**

1. Szimuláljunk Poisson beérkezéseket  $M - m$  intenzitással:  $\{t_1 < \dots < t_n < \varsigma\}$ . Használjuk ki  $W$  önhasonló tulajdonságát, mely azt jelenti, hogy  $0 < t_1 < \dots < t_n < \varsigma = \varsigma_1 L^2, (W_{t_1}, \dots, W_{t_n} | \varsigma, W_\varsigma) \stackrel{d}{=} L(W_{t_1/L^2}, \dots, W_{t_n/L^2} | \varsigma_1, W_{\varsigma_1})$ .
2. Mintavételezzük  $W_{\varsigma_1}$ -t, úgy hogy  $P(W_{\varsigma_1} = 1) = P(W_{\varsigma_1} = -1) = 1/2$ .
3. Generáljunk Brown hidakat  $(B_{t_1}^i, \dots, B_{t_n}^i)$  minden  $i = 1, 2, 3$  esetén.
4. Konstruáljuk meg  $(\tilde{B}_{\varsigma_1-t_n}, \dots, \tilde{B}_{\varsigma_1-t_1})$ -t.
5. Generáljunk  $n+1$  darab  $U_j \sim U(0, 1), 0 \leq j \leq n$ .

6. Fogadjuk el  $(\tilde{B}_{\varsigma_1-t_n}, \dots, \tilde{B}_{\varsigma_1-t_1})$ -t mint egy mintája  $(\tilde{W}_{\varsigma_1-t_n}, \dots, \tilde{W}_{\varsigma_1-t_1})$ -nak ha,  $U_0 < q(\varsigma_1 - t_n, \tilde{B}_{\varsigma_1-t_n})$  és  $U_j < p(\varsigma_1 - t_j, \tilde{B}_{\varsigma_1-t_j}; \varsigma_1 - t_{j+1}, \tilde{B}_{\varsigma_1-t_{j+1}})$  minden  $1 \leq j \leq n$  esetén.
7. Transzformáljuk  $(\tilde{W}_{\varsigma_1-t_n}, \dots, \tilde{W}_{\varsigma_1-t_1})$   $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$ -á a 3.10 egyenlet alapján.
8. Generáljunk  $n + 2$  darab  $U_j \sim U(0, 1)$ ,  $1 \leq j \leq n + 2$ .
9. Fogadjuk el  $W_{T-\zeta_{i-1}}$ -t mint egy mintája  $H_2$ -nek ha
 
$$U_j > \frac{\phi(y+W_{\tau_j})-m}{M-m}, \text{ minden } 1 \leq j \leq n \text{ esetén,}$$

$$U_{n+1} \leq \frac{\exp(-m\varsigma)}{\max(1, \exp(-m(T-t)))},$$

$$U_{n+2} \leq \frac{\exp(A(y+W_\varsigma))}{\max_{y \in [-L, L]} \exp(A(x+y))}.$$

### 3.5.1. Megfelelő szint választása

A legegyszerűbb megoldás a megfelelő szint kiválasztásához  $D_Y(-\infty, \infty)$  intervallumon az, ha választunk egy  $L$  konstans. A  $D_Y(\underline{y}, \infty)$  esetben az egzakt szimulációs algoritmus effektívebben használható, ha alkalmazunk egy  $L_i$  adaptív sorozatot. A Chen [4] cikk ajánl egy nagyon egyszerű szabályt a szint körönkénti frissítéséhez:  $L_{i+1} = (Y_{\zeta_i} - \underline{y})/2$ . Ez lehet az új  $L_{i+1}$  érték, melyet annak érdekében határozzunk meg, hogy legeneráljuk  $Y_{\zeta_{i+1}}$ -t azután, hogy simuláltuk  $Y_{\zeta_i}$ . Így biztosítani tudjuk, hogy a sugár soha nem éri el a  $\underline{y}$  határt.

## 3.6. Összegzés

Szeretném még teljes egészében összegezni a lokalizációs algoritmus lépéseit  $D_Y(\underline{y}, \infty)$ -hoz, mellyel mintázzuk  $(\zeta_i, Y_{\zeta_i})$ -t adott  $(\zeta_{i-1}, Y_{\zeta_{i-1}})$  párhoz:

1. Konstruáljuk  $L_i$ -t úgy, hogy  $Y_{\zeta_{i-1}} - L_i > \underline{y}$ -t.
2. Vizsgáljuk  $\varsigma_i$  mint ajánlott érték a standard Brown mozgásból.
3. Ha  $\varsigma_i \leq T - \zeta_{i-1}$

Szimuláljuk le  $H_{1, \varsigma_i}$ ,  $P(W_\varsigma = L) = P(W_\varsigma = -L) = 1/2$ -ből.

Generáljuk le  $I$ -t  $P[I = 1|y] \propto \mathbb{E}[\exp(-\int_0^s \phi(x + W_u) du) | \varsigma_i = s, W_{\varsigma_i} = y]$  valószínűséget feltételezve

- (a) Szimuláljunk Poisson beérkezéseket  $\{t_1 < \dots < t_n < \varsigma\}$   $M - m$  intenzitással. Itt használjuk ki  $W$  önhasznósági tulajdonságát, mely azt jelenti hogy  $0 < t_1 < \dots < t_n < \varsigma = \varsigma_1 L^2, (W_{t_1}, \dots, W_{t_n} | \varsigma, W_\varsigma) \stackrel{d}{=} L(W_{t_1/L^2}, \dots, W_{t_n/L^2} | \varsigma_1, W_{\varsigma_1})$ .
- (b) Mintázzuk  $W_{\varsigma_1}$ -t úgy, hogy használjuk  $P(W_\varsigma = L) = P(W_\varsigma = -L) = 1/2$  és legyen  $W_\varsigma = H_{1, \varsigma}$ .
- (c) Generáljuk Brown hidakat  $(B_t^i, \dots, B_{t_n}^i)$  minden  $i = 1, 2, 3$  esetén.



- (d) Konstruáljuk  $(\tilde{B}_{\varsigma_1-t_n}, \dots, \tilde{B}_{\varsigma_1-t_1})$ -t.
- (e) Generáljunk  $n + 1$  különböző  $U_j \sim U(0, 1)$ ,  $0 \leq j \leq n$ .
- (f) Fogadjuk el  $(\tilde{B}_{\varsigma_1-t_n}, \dots, \tilde{B}_{\varsigma_1-t_1})$ -t, mint egy mintája  $(\tilde{W}_{\varsigma_1-t_n}, \dots, \tilde{W}_{\varsigma_1-t_1})$ -nak, ha  
 $U_0 < q(\varsigma_1 - t_n, \tilde{B}_{\varsigma_1-t_n})$  and  $U_j < p(\varsigma_1 - t_j, \tilde{B}_{\varsigma_1-t_j}; \varsigma_1 - t_{j+1}, \tilde{B}_{\varsigma_1-t_{j+1}})$   
 minden  $1 \leq j \leq n$ -hez.
- (g) Transzformáljuk  $(\tilde{W}_{\varsigma_1-t_n}, \dots, \tilde{W}_{\varsigma_1-t_1})$ -t  $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$ -á a 3.10-es egyenlet szerint.
- (h) Generáljunk  $n + 2$  különböző  $U_j \sim U(0, 1)$ ,  $1 \leq j \leq n + 2$ .
- (i) Fogadjuk el  $(\varsigma, H_{1,\varsigma})$ -t, mint egy mintája  $(\Delta\zeta_i, \Delta Y_{\zeta_i})$ -nak, ha  
 $U_j > \frac{\phi(y+W_{\tau_j})-m}{M-m}$ , minden  $1 \leq j \leq n$ -hez,  
 $U_{n+1} \leq \frac{\exp(-m\varsigma)}{\max(1, \exp(-m(T-t))}$ ,  
 $U_{n+2} \leq \frac{\exp(A(y+W_\varsigma))}{\max_{y \in [-L, L]} \exp(A(x+y))}$ .

Ha  $I = 0$ , térjünk vissza a 1-es lépéshez;

Ha  $I = 1$ , legyen  $(\Delta\zeta_i, \Delta Y_{\zeta_i}) = (\varsigma_i, H_{1,\varsigma_i})$  és frissítsük  $\zeta_i = \zeta_{i-1} + \Delta\zeta_i$ ,  $Y_{\zeta_i} = Y_{\zeta_{i-1}} + \Delta Y_i$ , majd menjünk vissza az 1. lépéshez,

4. Ha  $\varsigma > T - \zeta_{i-1}$ , a javasolt érték legyen  $H_2$ .

Szimuláljuk  $W_\varsigma$ -t  $P(W_\varsigma = L) = P(W_\varsigma = -L) = 1/2$ -ből.

Generáljuk le  $I$ -t  $P[I = 1|y] \propto \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_0^{T-t} \phi(x + W_u) du \right) \mid \varsigma_i = s, W_{T-t} = y \right]$  valószínűséggel.

- (a) Szimuláljuk Poisson beérkezéseket:  $\{t_1 < \dots < t_{n-1} < T - \zeta_{i-1}\}$ , with  $M - m$  valószínűségelés adjuk a sorozat végéhez  $\varsigma$ . Használjuk  $W$  önazonosságát, ami azt jelenti hogy  $0 < t_1 < \dots < t_n < \varsigma = \varsigma_1 L^2, (W_{t_1}, \dots, W_{t_n} | \varsigma, W_\varsigma) \stackrel{d}{=} L(W_{t_1/L^2}, \dots, W_{t_n/L^2} | \varsigma_1, W_{\varsigma_1})$ .
- (b) Mintázzuk  $W_{\varsigma_1}$ -t, úgy hogy felhasználjuk  $P(W_\varsigma = L) = P(W_\varsigma = -L) = 1/2$ .
- (c) Generáljunk Brown hidakat  $(B_t^i, \dots, B_{t_n}^i)$  minden  $i = 1, 2, 3$ -hez.
- (d) Konstruáljuk  $(\tilde{B}_{\varsigma_1-t_n}, \dots, \tilde{B}_{\varsigma_1-t_1})$ .
- (e) Generáljunk  $n + 1$  darab  $U_j \sim U(0, 1)$ ,  $0 \leq j \leq n$ .
- (f) Fogadjuk el  $(\tilde{B}_{\varsigma_1-t_n}, \dots, \tilde{B}_{\varsigma_1-t_1})$ -t mint egy mintája  $(\tilde{W}_{\varsigma_1-t_n}, \dots, \tilde{W}_{\varsigma_1-t_1})$ -nak, ha  
 $U_0 < q(\varsigma_1 - t_n, \tilde{B}_{\varsigma_1-t_n})$  és  $U_j < p(\varsigma_1 - t_j, \tilde{B}_{\varsigma_1-t_j}; \varsigma_1 - t_{j+1}, \tilde{B}_{\varsigma_1-t_{j+1}})$   
 minden  $1 \leq j \leq n$  esetén.
- (g) Transzformáljuk  $(\tilde{W}_{\varsigma_1-t_n}, \dots, \tilde{W}_{\varsigma_1-t_1})$   $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$ -á a 3.10-es egyenlet szerint.
- (h) Generáljunk  $n + 2$  darab  $U_j \sim U(0, 1)$ ,  $1 \leq j \leq n + 2$ .

(i) Fogadjuk el  $W_{T-\zeta_{i-1}}$ -t mint egy mintája  $H_2$ -nek ha

$$U_j > \frac{\phi(y+W_{\tau_j})^{-m}}{M-m}, \text{ minden } 1 \leq j \leq n\text{-hez,}$$

$$U_{n+1} \leq \frac{\exp(-m\zeta)}{\max(1, \exp(-m(T-t)))},$$

$$U_{n+2} \leq \frac{\exp(A(y+W_\zeta))}{\max_{y \in [-L, L]} \exp(A(x+y))}.$$

Ha  $I = 0$ , térjünk vissz az első lépéshez;

Ha  $I = 1$ , frissítsük  $Y_T = Y_{\zeta_{i-1}} + H_2$ . Az algoritmus leáll  $Y_T$  kimenettel.

**MatLab kód:**

A függelék 5.1.3 alfejezete tartalmazza.

## 4. fejezet

### Tesztelés

A következő részben röviden bemutatom a módszert néhány gyakorlati példán keresztül. A pontos megértés érdekében válsztottam négy modellt mellyen alkalmazni fogom a lokalizációs algoritmust. Az első folyamat, melyet tesztelek a *Ornstein-Uhlenbeck* „mean-reverting” folyamat. Itt közvetlenül ellenőrizhető a numerikus megoldás, mivel a PDF-je analitikusan is levezethető, ahogy azt a Chen cikkben [4] is láthatjuk. Másodszor, érdemesnek találtam reprodukálni egy folyamatot, melyben korlátos, szinuszos drift tag van:  $\mu(x)$ , melyet teszteléshez a Beskos and Roberts [2] cikkben is használta. Itt a numerikus módszerünk pontosságát össze lehet hasonlítani a különböző lépésidejű Euler módszerekével Harmadik teszként pedig – a biztonság kedvéért – a *Double-Well potenciál modellt* választottam, ahogy az szintén a Cheh cikkben is szerepelt [4].

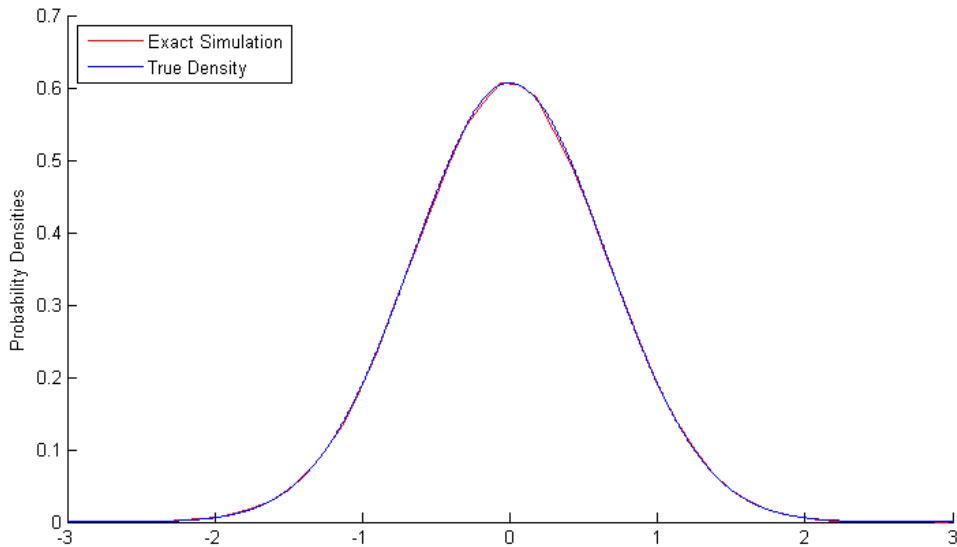
#### 4.1. Ornstein-Uhlenbeck Mean-Reverting folyamat

A Chen [4] cikk alapján először az Orsnstein-Uhlenbeck folyamatot mutatom be:

$$dX_t = -bX_t dt + dW_t, \quad (4.1)$$

$b = 1$  esetén. Ez azt jelenti, hogy a drift tag pozitív, ha  $X_t < 0$  és negatív, ha  $X_t > 0$ . Habár  $X = 0$  egy taszító (nyereg) fixpontként viselkedik, vagyis  $X$  folyamat értékeit mindig elhúzzák ezen a 0 érték környezetében. Azt már tudjuk, hogy  $X_T$  matringális eloszlása (peremeloszlása) normális eloszlású  $X_0 \exp(-bT)$  átlaggal és  $(1 - \exp(-2bT))/2b$  szórással. Ez a példa már egy diffúziós folyamatot ír le, mely egységnyi volatilitással rendelkezik. A Lamperti traszformáció itt azt eredményezi, hogy  $Y_t = X_t$ .

A 4.1 ábra mutatja, hogy az analitikai megoldás és az egzact szimuláció szinte teljesen megegyező eredményét ebben a  $T = 1$  és  $X_0 = 0$  esetben. Ezenen eredmény PDF-jéhez 500,000 mintát generáltam.



4.1. ábra. Az elméleti és az 500,000 mintás,  $T = 1$  és  $X_0 = 0$  paraméterű egzakt szimuláció összehasonlító eredménye.

## 4.2. Szinuszos drift tag hatása

Bár ebben a konkrét példában a  $\mu(x)$ , drift tag korlátos, mégis hasznos lehet reprodukálni az eredményét, ahogy azt a Beskos and Roberts [2] cikkben publikálták. Hiszen ha az egzakt szimulációkat például az Euler methodussal vetjük össze, célszerű egy olyan folyamatot válsztani, amivel az Euler módszer nem bírkozik meg olyan hatékonyan, hogy ne érje meg egy nálánál jóval bonyolultabb módszert használni. Ez a folyamat pont ilyen az erős nem-linearitása miatt. Az SDE a következőképp néz ki:

$$dX_t = \sin(X_t)dt + dW_t. \quad (4.2)$$

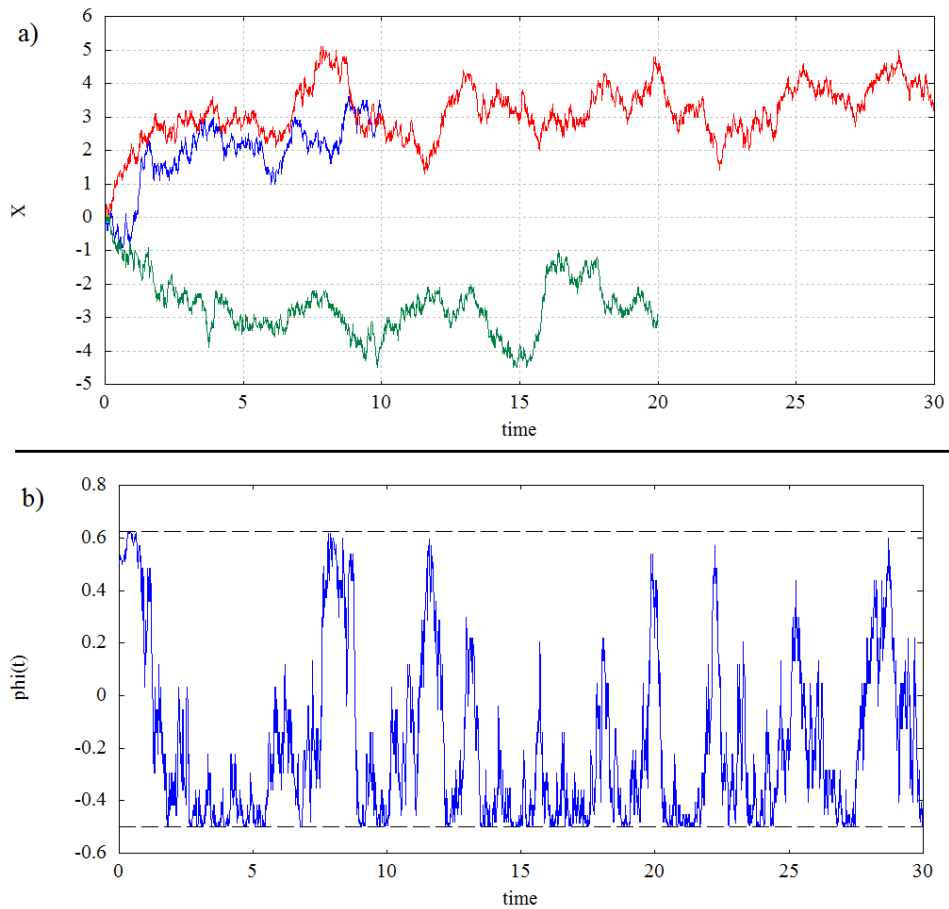
Mivel ismét egységnyi volatiritású a folyamat az intenzitásfüggvény:  $\phi(x) = 1/2 \sin^2(x) + 1/2 \cos(x)$ , az alsó korlát:  $m = -1/2$  a felső pedig:  $M = 5/8$ .

Note, that again, the Brownian term is of unit volatility, therefore no Lamperti transform is needed to capture the dynamics. The intensity function then takes the form of  $\phi(x) = 1/2 \sin^2(x) + 1/2 \cos(x)$ , with lower bound  $m = -1/2$  and upper bound  $M = 5/8$ .

Bemutatok a 4.2a ábrán három legenerált idősort ( $X_t$ ) és a4.2b ábrán a leghosszabb futási idejű idősor intezitását ( $\phi(X_t)$ ).

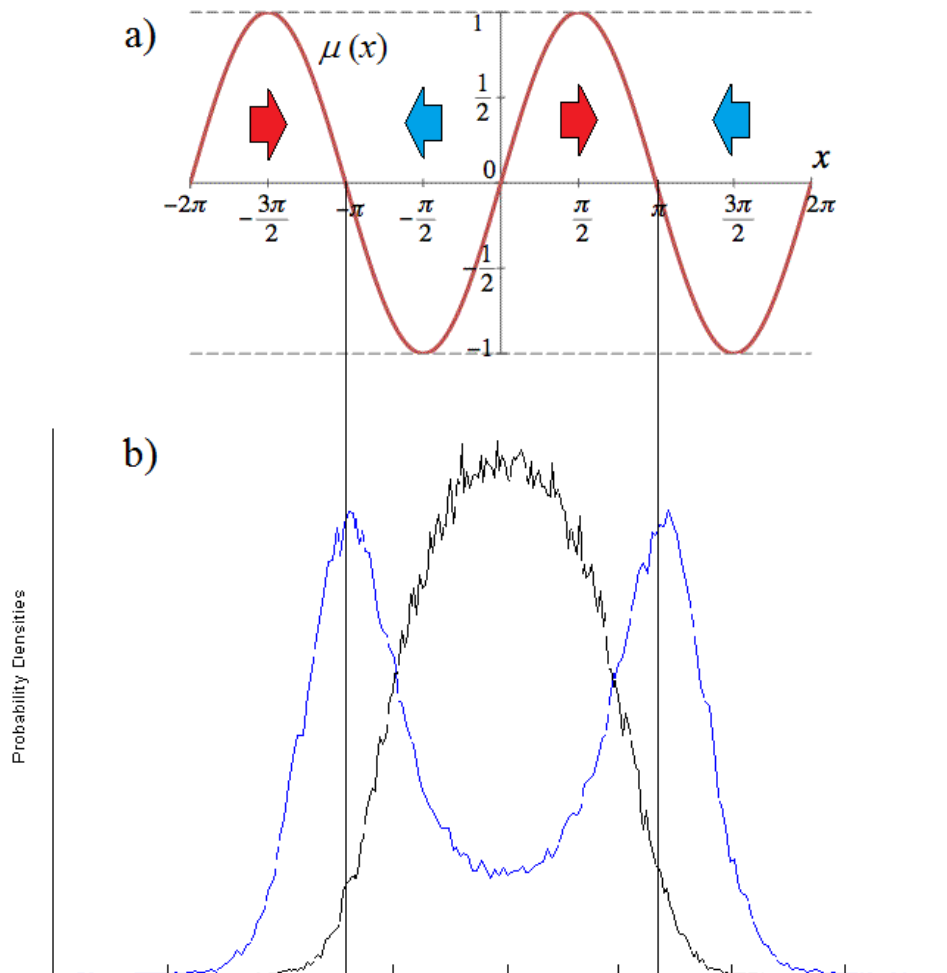
Ellentétben a fentebbi fejezetben bemutatott esettel ennél a folyamatnál  $X_0 = 0$  instabil fix pont, ahogy azt a 4.3a ábra mutatja. Az első stabil pontok ennél a folyamatnál  $-\pi$  és  $\pi$ . A 4.3b ábrán 10,000 Euler-mintavételezés látszik. Van egy kezdeti csúcs  $X_0 = 0$ -nál gyűlik.  $T = 1$ -nál még szintén 0 környezetében van, ám  $T = 3$ -nál már jól látszika kettéválás, vagyis az állandó fixpontok környezetében való gyülekezés.

Ugyan úgy, ahogy azt a [2] cikkben is tették a szerzők én is szeretném összehasonlítani a becsült sűrűségfüggvényt különböző időlépésű Euler-módszer és az egzakt módszer esetén. A kapott eredményt a 4.4 ábra tartalmazza, melynél a minta-nagyság 500,000,

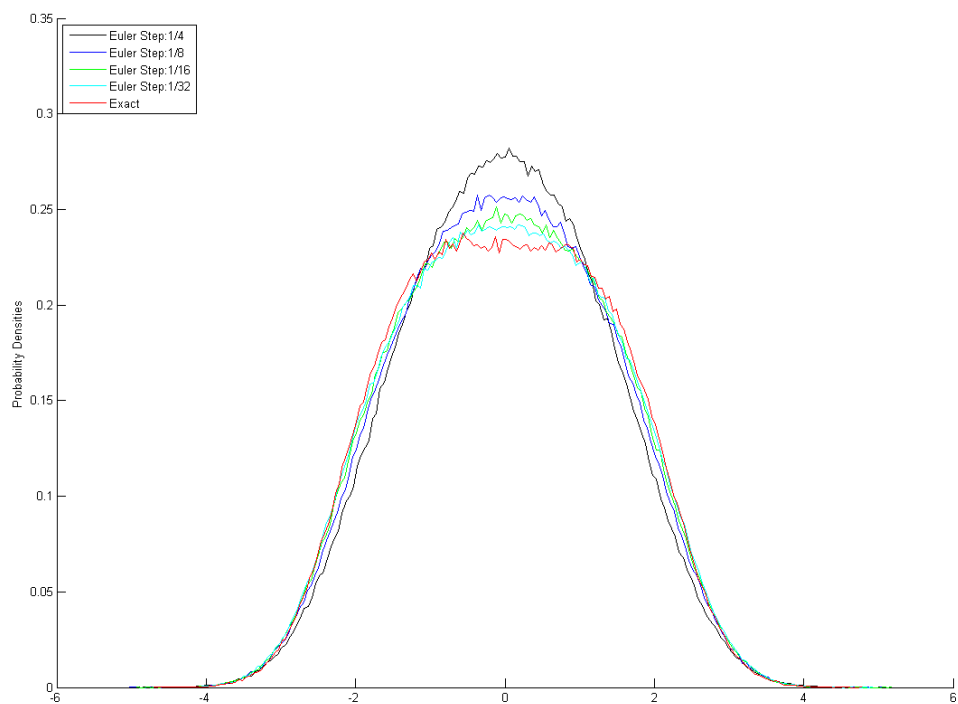


4.2. ábra. Három különböző futtatásból kapott idősor azonos kiindulási feltétellel:  $X_0 = 0$ , szinuszos  $\mu$  taggal. (a) ábra a  $X_t$  állapotokat mutatja  $T = 10; 20$  és  $30$  esetén. A (b) ábra a leghosszabb futási idejű idősorintenzitását,  $\phi$ . Szintén a (b) ábrán látható szaggatott vonalak mutatják az alsó:  $m = -1/2$ , illetve felső korlátot:  $M = 5/8$ .

peremfeltétel:  $X_0 = 0$ , vizsgált időpillanat:  $T = 1$ .



4.3. ábra. A szinuszos drift tag topográfiája (a) és a PDF-je az  $X_T$  értékeknek 10,000 mintából (b). Időlépés szerint:  $T = 1$  (fekete görbe) and  $T = 3$  (kék görbe).



4.4. ábra. Az egzakt módszerrel becsült és az Euler módszerrel számolt sűrűségfüggvények összehasonlítása. A különböző lépésközű Euler módszerek börbéjének színezését a bal felső sarokban lévő legend tartalmazza. Mintaméret: 500,000, vizsgált időpillanat:  $T = 1$ .

### 4.3. Double-Well Potential Modell

Az előző folyamattal ellentétben itt most a drift tag nem korlátos. Az SDE a következőképp néz ki:

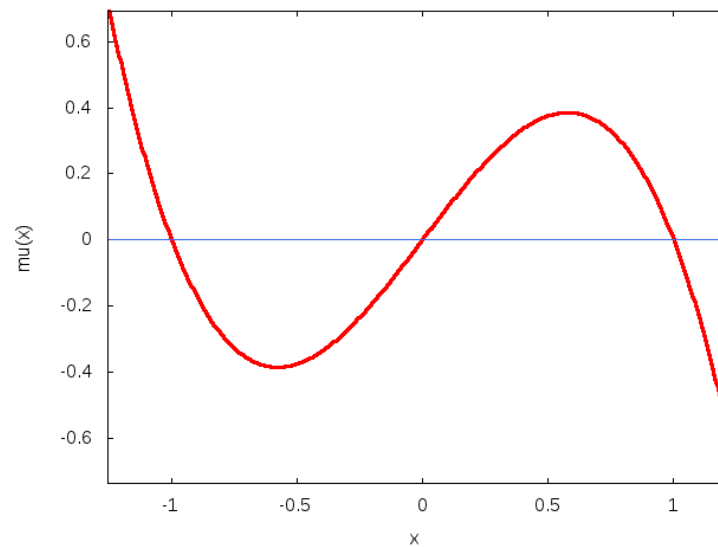
$$dX_t = (X_t - X_t^3)dt + dW_t, \quad (4.3)$$

És a megfelelő  $\mu(x)$  a 4.5 ábrán látható. Látható, hogy van két stabil fix pont  $x = \pm 1$ -nél. Az intenzitásfüggvény leírható mint:

$$\phi(x) = 1 - 2x^2 - 2x^4 + x^6,$$

az integrált drift tag pedig:

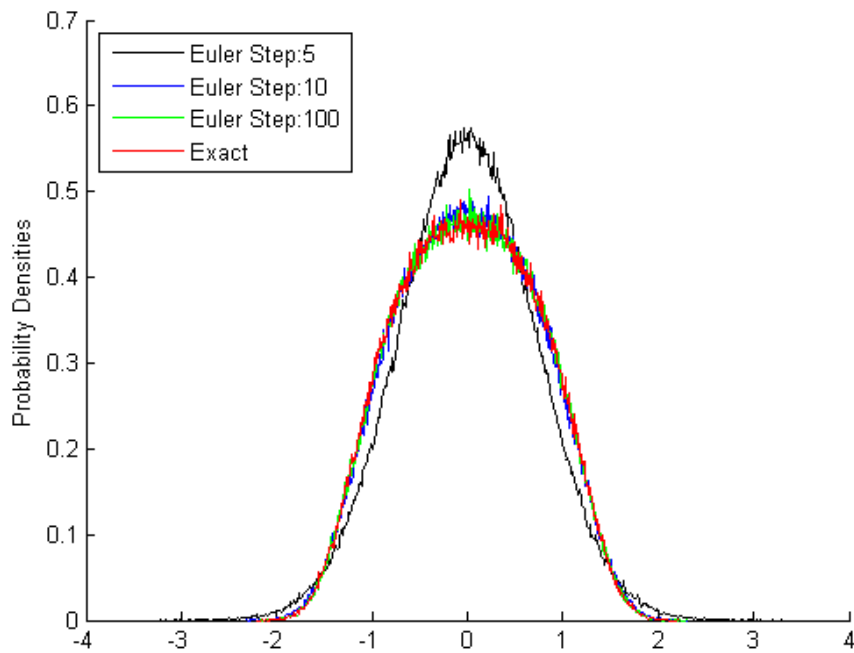
$$A(x) = x^2/2 - x^4/4.$$



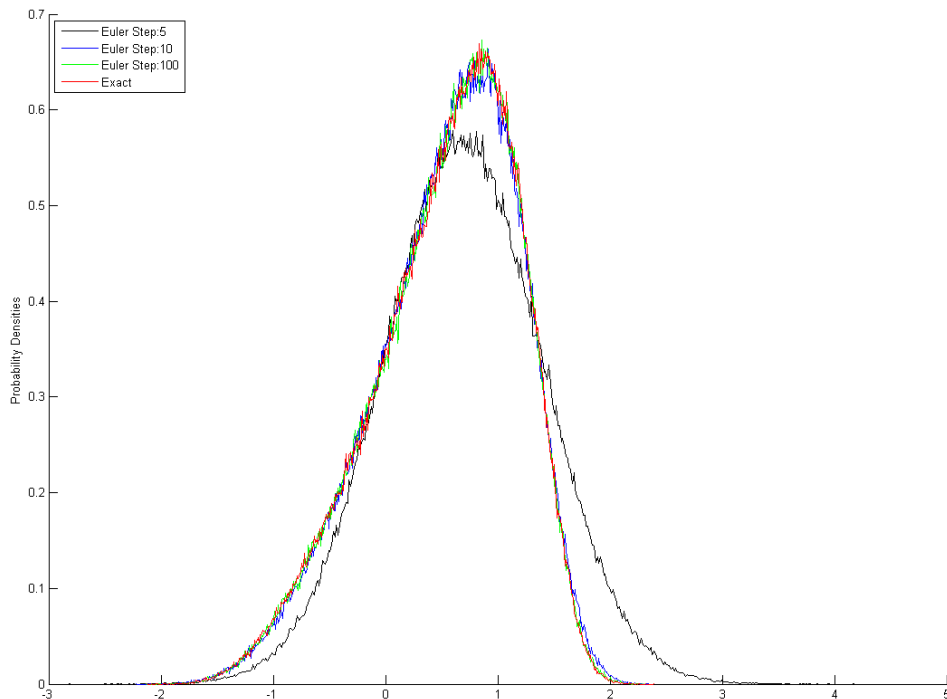
4.5. ábra. A  $\mu(x)$  függvény Double-Well Potenciál Modell esetén.

Összehasonlításképp itt is elvégeztem a kísérletet, melyben összehasonlítom az Euler módszer és az egzakt módszer között. Két esetben is:  $X_0 = 0$  és  $X_0 = 0.5$ . Mintamennyiség: 500,000, vizsgált időpillanat:  $T = 1/2$ . Az eredményeket a 4.6 és 4.7 ábrák mutatják.





4.6. ábra. Az egzakt módszerrel becsült és az Euler módszerrel számolt sűrűségfüggvények összehasonlítása. A különböző lépésközű Euler módszerek görbéjének színezését a bal felső sarokban lévő legend tartalmazza. Mintaméret: 500,000, vizsgált időpillanat:  $T = 1/2$ , peremfeltétel:  $X_0 = 0$ .



4.7. ábra. Az előző ábrával azonos ám a peremfeltétel:  $X_0 = 0.5$ .

## 4.4. Eredmények összefoglalása

Összefoglalásképp elmondható, hogy az egzakt módszer alkalmazása igen hasznos lehet bizonyos stochasztikus differenciál egyenletek megoldásánál. Ilyenek a való életben legfőképp a pénzügyi elemzés területén fordulnak elő, mint például egy „jump,, azaz ugró drift taggal kibővített affine diffúziós SED, mellyel már szépen leírható egy piaci index változása, mint például a Federal Funds. Ezt a folyamatot az Affine Jump-Diffusion (AJD)-t implementálta egzakt módszerrel Giesecke és Smelov [5]. Így mindenképp megéri foglalkozni a témával.

Habár mindenképp megemlíteném, hogy több folyamatot is megvizsgálva arra jutottam, hogy más esetekben egy egyszerűbb Euler módszer is hasonló eredményre vezet kevésbé számítógépigényes módon.

# 5. fejezet

## Függelék

### 5.1. A program forráskódja

#### 5.1.1. Beérkezési idők generálása

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Generating exit times
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% generate next exit time for standard BM, Li: level
function varsigma=GenerateNextExitTime(Li)
V=xing(); % Burq & Jones
varsigma=Li^2*V;

% genrate standard BM exit time according to Burq & Jones
function X = xing
accepted = 0;
while ~accepted
X = gamrnd(1.088870, 0.810570);
Y = rand*1.243707*gampdf(X, 1.088870, 0.810570);
sqrt2piX3 = sqrt(2*pi*X^3);
N = max([ceil(0.275*X), 3]);
K = (1+2*[-N:N]);
fN0 = sum((-1).^[-N:N].*K.*exp(-K.^2./(2*X)))/sqrt2piX3;
N = N + 1;
fN1 = fN0 + (-1)^N*((1-2*N)*exp(-(1-2*N)^2/(2*X)) ...
+ (1+2*N)*exp(-(1+2*N)^2/(2*X)))/sqrt2piX3;
while sign((Y - fN0)*(Y - fN1)) == -1
fN0 = fN1;
N = N + 1;
fN1 = fN0 + (-1)^N*((1-2*N)*exp(-(1-2*N)^2/(2*X)) ...
+ (1+2*N)*exp(-(1+2*N)^2/(2*X)))/sqrt2piX3;
end
```

## FEJEZET 5. FÜGGELÉK

---

```
if Y <= fN1, accepted = 1;
end
end

% exit value generation
function H=GenerateWsigma(Li)
U=rand;
if U<=0.5
    H=-Li;
else
    H=Li;
end

%scaling meander to standard BM with exit boundary L
function t=SigmaNormalize(tau,L)
t=zeros(1,length(tau));
for i=1:length(tau)
    t(i)=tau(i)/L^2;
end
end
```

### 5.1.2. $I$ mintavételezése, ajánlott skeleton tesztelése

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Testing the proposal from Brownian Meanders
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%meander testing function
function I=TestI(U,taul,varsigma,BB)
dif=0;
Accepted=true;
Resolved=false;
q=0;
n=0;
x=BB(length(BB)-1);
s=taul(length(taul))-taul(length(taul)-1);
while ~Resolved
    qprev=q;
    n=n+1;
    if (mod(n,2))
        m=ceil(n/2);
        q=q-(1/x)*(4*m-x)*exp(-4*m*(2*m-x)/s);
    else
        m=n/2;
        q=q+(1/x)*(4*m+x)*exp(-4*m*(2*m+x)/s);
    end
end
```

## FEJEZET 5. FÜGGELÉK

---

```
if n>=log(4)* (s)/8*1/x+2
    if ((qprev<=q) && (q+1<U(length(U))))
        Resolved=true;
        Accepted=false;
    else
        if ((qprev>=q) && (q>U(length(U))-1))
            Resolved=true;
            Accepted=Accepted&&true;
        end
    end
end
end
end
for i=1:length(U)-1
    t=taul(length(taul))-taul(length(taul)-i-1);
    s=taul(length(taul))-taul(length(taul)-i);
    y=BB(length(BB)-i-1);
    x=BB(length(BB)-i);
    p1=1/(1-exp(-2*x*y/(t-s)));
p=p1;
n=0;
Resolved=false;
while ~Resolved
    pprev=p;
    n=n+1;
    if (mod(n,2))
        m=ceil(n/2);
        p=p-p1*(exp(-2*(2*m-x)*(2*m-y)/(t-s))...
            +exp(-2*(2*(m-1)+x)*(2*(m-1)+y)/(t-s)));
    else
        m=n/2;
        p=p+p1*(exp(-2*m*(4*m+2*(x-y))/(t-s))...
            +exp(-2*m*(4*m+2*(x-y))/(t-s)));
    end
    if n>=log(3)*(t-s)/8*max(1/x,1/y)+1
        if ((pprev<=p) && (p<U(i)))
            Resolved=true;
            Accepted=false;
        else
            if ((pprev>=p) && (p>U(i)))
                Resolved=true;
                Accepted=Accepted&&true;
            end
        end
    end
end
end
if ~Accepted
```

## FEJEZET 5. FÜGGELÉK

---

```
        break;
    end
end
I=Accepted;

%construct meander from triplets
function b=GenerateBB(varsigma,tau,Triplets)

for i=1:length(tau)
b(i)=sqrt(((varsigma-tau(i))/varsigma...
+Triplets(i,1))^2...
+(Triplets(i,2))^2...
+(Triplets(i,3))^2);
end

%generate a triplet of Brownian Bridges used
%in meander construction
function b=GenerateBBTriplets(varsigma,tau)
for j=1:3
    b(1,j)=0;
    b(length(tau),j)=0;
end
z=randn(3,length(tau));
for i=2:length(tau)-1
    for j=1:3
        b(i,j)=(varsigma-tau(i))*b(i-1,j)...
        /(varsigma-tau(i-1))+z(j,i)...
        *sqrt((varsigma-tau(i))*(tau(i)-tau(i-1))...
        /(varsigma-tau(i-1)));
    end
end
end

%Poisson arrivals generation for acceptance
function tau=GenerateBrownianThinning(m,M,varsigma)
tau(1)=0;
i=1;
while (tau(i)<varsigma)
    dt=exprnd(1/(M-m));
    if (tau(i)+dt<varsigma)
        tau(i+1)=tau(i)+dt;
    else
        tau(i+1)=varsigma;
    end
end
```

```

    i=i+1;
end

```

### 5.1.3. Összefoglaló működés

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%This is the 'main' algorithm!
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function f=generateFinal(x0,T)
currenttt=0; %current time
x=x0;        %starting x0
H1_past=0;
while currenttt<T
    restart=true;
    y=F(x0,x);
    Li=GetLi(H1_past); %selecting new Li based on current Xt and bounds

    %THE OPTIMAL m, M, mA SELECTION
    %(see section I.F. in the Varai-Vincze report.)

    [YMIN fval]=fminbnd(@(x) phi(x0,x),y-Li,y+Li);
    [YMAX fval]=fminbnd(@(x) -phi(x0,x),y-Li,y+Li);
    [AMIN fval]=fminbnd(@(x) -A(x0,x),y-Li,y+Li);

    mA=exp(A(x0,AMIN));
    M=phi(x0,YMAX);
    m=phi(x0,YMIN);

    while restart
        restart=false;
        %generating exit time with xing (xing is from Burq and Jones, 2008)
        varsigma=GenerateNextExitTime(Li);

        H1=GenerateWsigma(Li); %generating W_varsigma candidate
        H1_past=H1_past+H1;
        V=rand;
        W=rand;
        %if we hit the time horizon
        if (T-currenttt<varsigma)
            vsigma=T-currenttt;
            I=false;

```

## FEJEZET 5. FÜGGELÉK

---

```
while ~I %until we encounter a qualified meander, we keep on generating it
    %generating Poisson arrivals for ARM on DIFFUSION (not JUMP)
    tau0=GenerateBrownianThinning(m,M,vsigma);
    tau0(length(tau0)+1)=varsigma;
    %scaling the times to fit usual meander at hitting time 1
    tau1=SigmaNormalize(tau0,Li);

    BB=3;
    while max(BB)>2
        B=GenerateBBTriplets(varsigma/Li^2,tau1);
        %generating meander from triplets
        BB=GenerateBB(varsigma/Li^2,tau1,B);
    end
    %now BB is  $W_{\{\text{varsigma}_1-t_1\}}, W_{\{\text{varsigma}_1-t_2\}}$  etc
    U=rand(1,length(tau1)-1);

    %testing meander or not hitting the UPPER Li
    I=TestI(U,tau1,varsigma/Li^2,BB);

    if I %if it qualifies, scale it back
        if (H1<0)
            for i=1:length(BB)
                BB(i)=Li*(-1+BB(i));
            end
        else
            for i=1:length(BB)
                BB(i)=Li*(1-BB(i));
            end
        end
    end
end
I2=TestAll(BB,tau0,x0,y,M,m,l,mA,T-currentt,V,W);
if I2
    x=Finverse(x0,y+BB(length(BB)-1));
    currentt=T;
    restart=false;
else
    restart=true;
end
%if we dont hit the time horizon
else
    %HERE WE JUST GENERATE EXIT TIME AND VALUE
    tau0=GenerateBrownianThinning(m,M,varsigma);
    if length(tau0)>2
        tau1=SigmaNormalize(tau0,Li);
        I=false;
```



## FEJEZET 5. FÜGGELÉK

---

```
while ~I
    BB=3;
    while max(BB)>2
        B=GenerateBBTriplets(varsigma/Li^2,taul);
        %generating meander from triplets
        BB=GenerateBB(varsigma/Li^2,taul,B);
    end

    U=rand(1,length(taul)-1);
    I=TestI(U,taul,varsigma/Li^2,BB);
    if I
        if (H1<0)
            for i=1:length(BB)
                BB(i)=Li*(-1+BB(i));
            end
        else
            for i=1:length(BB)
                BB(i)=Li*(1-BB(i));
            end
        end
    end
end
end
else
    BB=[0 H1];
end
I1=TestAll(BB,tau0,x0,y,M,m,0,mA,T-currentt,V,W);
%disp('jonapot kedves anita');
if I1
    x=Finverse(x0,y+H1);
    currentt=currentt+varsigma;
    fprintf(fid, '%6.12f %12.12f %12.12f\n', [currentt,x,phi(x0,x)]);
    restart=false;

else
    restart=true;
end
end
end
end
f=x;

%Here comes the main candidate testing function
function I0=TestAll(B,t,x0,x,M,m,hf,mA,Tb,V,W)
I0=true;
J=false;
```

## FEJEZET 5. FÜGGELÉK

---

```
I=rand(1,length(B));
for i=2:length(t)-1-hf
    if (I(i)<((phi(x0,x+B(i))-m)/(M-m)))
        I0=false;
        break;
    end
end

if I0
    I0=I0&&(V<exp(-m*t(length(t)-hf))/max(1,exp(-m*Tb)));
    if I0
        I0=(W<exp(A(x0,x+B(length(B)-hf)))/mA);
    end
end
```

o

# Irodalomjegyzék

- [1] <http://tankonyvtar.ttk.bme.hu/pdf/30.pdf>
- [2] Beskos, A., Roberts, G., Exact simulation of diffusions. *Ann. Appl. Probab.*, **15** (2005), 2422-2444
- [3] Burq, Zaem and Jones, O. Simulation of Brownian motion at first passage times. *Mathematics and Computers in Simulation*, **77** (2008), 64-81
- [4] Chen, Nan (2009), Localization and exact simulation of Brownian motion driven stochastic differential equations. Working Paper, Chinese University of Hong Kong
- [5] Kay Giesecke, Dmitry Smelov, Exact Sampling of Jump Diffusions. *Operations Research*, 61(4):894-907, 2013
- [6] Stefano M. Iacos, *Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations*, Springer Science+Business Media, LLC, New York, 2008.
- [7] D. Frei Tamás, *Sztochasztikus folyamatok*, Tankönyvkiadó, 1970.
- [8] [http://www.wikicoursenote.com/wiki/Acceptance-Rejection\\_Sampling](http://www.wikicoursenote.com/wiki/Acceptance-Rejection_Sampling)
- [9] <http://www.columbia.edu/~ks20/4703-Sigman/4703-07-Notes-ARM.pdf>
- [10] [https://en.wikipedia.org/wiki/Rejection\\_sampling](https://en.wikipedia.org/wiki/Rejection_sampling)
- [11] <https://hu.wikipedia.org/wiki/Wiener-folyamat>
- [12] [https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann-Stieltjes\\_integral](https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann-Stieltjes_integral)
- [13] [https://en.wikipedia.org/wiki/Novikov's\\_condition](https://en.wikipedia.org/wiki/Novikov's_condition)
- [14] John C. Hull, *Options, futures, and other derivatives - 8th ed.*, Edwards Brothers, USA, 2012.
- [15] Pasupathy, R., Generating Nonhomogeneous Poisson Processes, working paper, Department of Industrial and Systems Engineering, Virginia Tech
- [16] Lewis, P., Shedler, G., Simulation of nonhomogenous Poisson processes with log-linear rate function. *Biometrika*, **63** (1976), 501-505