Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Többes integrálok matematikai és fizikai alkalmazásai

Témavezető:
Fehér László
Egyetemi docens
Analízis Tanszék

Készítette:
Boda Lívia
Matematika BSc
Elemző szakirány

Budapest
2017

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Fehér Lászlónak, aki precizitásával, szakértelmével és ötleteivel hozzájárult a szakdolgozatom elkészítéséhez.

Emellett szeretném megköszönni szüleimnek és testvéremnek, hogy tanulmányaim során mindvégig mellettem álltak, támogattak és biztattak.

Bevezetés

Mindig is sejtettem, hogy a matematika milyen lenyűgöző és sokrétű tudományág. Ez a feltételezés az egyetemi tanulmányaim alatt egyértelműen be is bizonyosodott, hiszen betekintést nyertem a matematika különböző területeibe. Az évek folyamán a meglévő tudásomat sikerült egyre jobban elmélyítenem, emellett pedig napról napra újabb és újabb ismereteket szereztem. A kedvenc területemmé az analízis vált, így nem is volt kérdés számomra, hogy a szakdolgozatomban valamilyen analízissel kapcsolatos témával foglalkozzak. Így esett a választásom a többváltozós függvények integrálására és a többes integrálok alkalmazásaira.

Szakdolgozatomban tehát a többváltozós függvények integrálásával és a többes integrálok alkalmazásaival foglalkozok.
Munkámat négy részre bontottam:
Az első részben értelmezem a többes integrálok fogalmát egyszerű tégla tartományon.
Ezután, a második részben kiterjesztem ezt a fogalmat általánosabb tartományokra.
Az integráltranszformáció segítségével egyszerűbb tartományokra, könnyebben megoldható integrálási feladatokra vezetem vissza a bonyolult problémákat a harmadik részben.
És végül felsorolok néhány matematikai illetve fizikai felhasználást az utolsó részben.
Minden fejezetben találhatóak példafeladatok, melyek az éppen tárgyalt elmélet megértését és elsajátítását segítik elő.

1. Többváltozós integrál téglán

1.1. Többváltozós integrál értelmezése téglán

Probléma: Egy lapos tetős ház tetején vastag hóréteg van, egy szélvihar hatására a felülete hullámos lett. Szeretnénk meghatározni a hóréteg súlyát.

Jelölje $R = [a, b] \times [c, d]$ téglalap a ház alapterületét. Valamint legyenek $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ és $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{k-1} < y_k = d$ tetszőleges felosztásai az R téglalapnak.
Jelölje R_{ij} az R téglalap tetszőleges felbontásából származó kis téglalapot, ahol $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq k$.
Továbbá jelölje $z = f(x, y)$ kétváltozós függvény a hó magasságát az $(x, y) \in R$ pontban.
Ekkor $m_{ij} = \inf\{f(x, y) : (x, y) \in R_{ij}\}$ jelöli az R_{ij} kis téglalapra eső hóréteg vastagságának minimumát, és $M_{ij} = \sup\{f(x, y) : (x, y) \in R_{ij}\}$ jelöli az ugyanezen R_{ij} kis téglalapon lévő hóréteg vastagságának maximumát.
Ekkor az R_{ij} alapterületű test térfogatának közelítése, (V_{ij}) felírható a következőképpen: $t(R_{ij}) \cdot m_{ij} \leq V_{ij} \leq t(R_{ij}) \cdot M_{ij}$, ahol $t(R_{ij})$ az R_{ij} téglalap területét jelöli.
Nyilván, ha az egész hóréteg térfogatát szeretnénk megkapni, akkor összegeznünk kell a kapott V_{ij} közelítéseket. Tehát az R alapterületű test térfogatának, (V) közelítése felírható

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} V_{ij}$$

alakban.
Tehát

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} t(R_{ij}) \cdot m_{ij} \leq V \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} t(R_{ij}) \cdot M_{ij}$$

A célunk az, hogy ezt az egyenlőtlenséget egyetlen szám elégítse ki, mégpedig az általunk keresett hóréteg térfogata.

1.1.1. Definíció. *Az $R = [a, b] \times [c, d]$ tégla felosztásán az $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ téglák rendszerét értjük, ahol $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ és $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{k-1} < y_k = d$.*
Az x_i és y_i pontokat a felosztás osztópontjainak, az R_{ij} téglákat pedig a felosztás osztótégláinak nevezzük.

1.1.2. Definíció. *Legyen $f : R \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, valamint legyen $m_{ij} = \inf\{f(x, y) : (x, y) \in R_{ij}\}$ és $M_{ij} = \sup\{f(x, y) : (x, y) \in R_{ij}\}$ $\forall 1 \leq i \leq n$-re és $1 \leq j \leq k$-ra.*
Az

$$s_F(f) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} t(R_{ij}) \cdot m_{ij}$$

és

$$S_F(f) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} t(R_{ij}) \cdot M_{ij}$$

összegeket az f függvénynek az $F = R_{ij}$ felosztásához tartozó alsó illetve felső összegének nevezzük.

Azokat a függvényeket fogjuk integrálhatónak nevezni, amelyekre teljesül, hogy csak egyetlen szám esik a függvény összes alsó és felső összege közé.
Ez a tulajdonság teljesül minden korlátos függvény esetén. A következőkben ezt fogjuk belátni.

1.1.1. Lemma. *Legyen $f : R \to \mathbb{R}$ korlátos, és legyen az F' felosztás az F felosztás finomítása. Ekkor $s_F(f) \le s_{F'}(f)$ és $S_F(f) \ge S_{F'}(f)$.*

Bizonyítás:
Először is belátjuk, hogy ha az F' felosztás egyetlen új osztópont hozzávételével keletkezik F-ből, akkor $s_F(f) \le s_{F'}(f)$.
Ha az F felosztás valamelyik R_{ij} osztótégláját az új felosztás kettévágja, akkor az f függvény infimuma mindkét részben legalább $m_{ij} = \inf\{f(x) : x \in R_{ij}\}$, és így e két rész együttes adaléka az $s_{F'}$ alsó összeghez legalább $m_{ij} \cdot t(R_{ij})$.
Ebből már egynél több osztópont hozzávételére is következik az állítás, hiszen ezeket egyenként hozzávéve F-hez, az alsó összeg minden lépésben nő vagy változatlan marad.
Ezután hasonlóképpen belátjuk, hogy ha az F' felosztás egyetlen új osztópont hozzávételével keletkezik F-ből, akkor $S_F(f) \ge S_{F'}(f)$.
Ha az F felosztás valamelyik R_{ij} osztótégláját az új felosztás kettévágja, akkor az f függvény szuprémuma mindkét részben legalább $M_{ij} = \sup\{f(x) : x \in R_{ij}\}$, és így e két rész együttes adaléka az $S_{F'}$ felső összeghez legfeljebb $M_{ij} \cdot t(R_{ij})$. ■

Hasonlóan, mint az előbb, egynél több osztópont hozzávételére is következik az állítás, hiszen ezeket egyenként hozzávéve F-hez, a felső összeg minden lépésben csökken vagy változatlan marad.

1.1.2. Lemma. *Legyen $f : R \to \mathbb{R}$ korlátos. Ha F_1 és F_2 két tetszőleges felosztása $[a, b]$-nek, akkor $s_{F_1}(f) \le S_{F_2}(f)$.*

Bizonyítás:
Legyen F az F_1 és F_2 felosztások egyesítése, azaz legyenek F osztópontjai mindazok a pontok, amelyek F_1-nek vagy F_2-nek osztópontjai. Ekkor F finomítása F_1-nek és F_2-nek is.
Figyelembe véve, hogy $s_F(f) \le S_F(f)$ (mert $m_{ij} \le M_{ij}$ $\forall i, j$-re), az előző lemmából azt kapjuk, hogy $s_{F_1}(f) \le s_F(f) \le S_F(f) \le S_{F_2}(f)$. ■

Jelöljük $\mathcal{F}$-fel az R tégla összes felosztásainak halmazát. Az előző lemma szerint bármely $F_2(f) \in \mathcal{F}$ felosztásra az $S_{F_2}(f)$ felső összeg felső korlátja az $\{s_F(f) : F \in \mathcal{F}\}$ halmaznak. Így e halmaz legkisebb felső korlátja, vagyis a $\sup_{F\in\mathcal{F}} s_F(f)$ mennyiség nem nagyobb $S_{F_2}(f)$-nél bármely $F_2 \in \mathcal{F}$-re. Más szóval $\sup_{F\in\mathcal{F}} s_F(f)$ alsó korlátja az $\{S_F : F \in \mathcal{F}\}$ halmaznak, amiből azt kapjuk, hogy

$$\sup_{F\in\mathcal{F}} s_F(f) \le \inf_{F\in\mathcal{F}} S_F(f)$$

Nyilvánvaló, hogy egy I valós számra akkor és csak akkor teljesül $s_F(f) \leq I \leq S_F(f)$ minden F felosztásra, ha

$$\sup_{F\in\mathcal{F}} s_F(f) \leq I \leq \inf_{F\in\mathcal{F}} S_F(f)$$

Ezzel beláttuk, hogy bármely korlátos f függvényre van olyan szám, amely az összes alsó és felső összeg közé esik.

1.1.3. Definíció. *Legyen $f : R \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Az f függvényt az R téglán integrálhatónak nevezzük, ha $\sup_{F\in\mathcal{F}} s_F(f) = \inf_{F\in\mathcal{F}} S_F(f)$. A $\sup_{F\in\mathcal{F}} s_F(f) = \inf_{F\in\mathcal{F}} S_F(f)$ számot az f függvény R téglán vett integráljának nevezzük és $\int_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ -nal jelöljük.*

1.1.4. Definíció. *Legyen $f : R \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. A $\sup_{F\in\mathcal{F}} s_F(f)$ mennyiséget f alsó integráljának nevezzük és $\underline{\int_R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ -nal jelöljük.*
Az $\inf_{F\in\mathcal{F}} S_F(f)$ számot pedig f felső integráljának nevezzük és $\overline{\int_R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ -nal jelöljük.

Az előzőekben bevezetett jelölésekkel a következőképp írható fel az 1.1.1. Definíció és az 1.1.1.Lemma:

1.1.1. Tétel.

1. *Tetszőleges korlátos $f : R \to \mathbb{R}$ függvényre fennáll $\underline{\int_R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \overline{\int_R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.*
2. *Egy I valós számra akkor és csak akkor teljesül $s_F(f) \leq I \leq S_F(f)$ minden F felosztásra, ha $\underline{\int_R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq I \leq \overline{\int_R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.*
3. *Az f akkor és csak akkor integrálható R-en, ha $\underline{\int_R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \overline{\int_R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, és ekkor*

$$\int_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \underline{\int_R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \overline{\int_R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

1.2. Kettős integrál kiszámítása

1.2.1. Tétel. *Legyen $T = [a,b] \times [c,d]$ zárt téglalaptartomány. Ha az $f(x,y)$ függvény folytonos T-n, akkor*

$$\iint_T f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

1.2.1. Definíció. *Az $F(x,y)$ függvény kétszer differenciálható, ha egyszer differenciálható és parciális deriváltjai is differenciálhatóak.*

1.2.2. Tétel (Young-tétel). *Ha a kétváltozós $f(x,y)$ függvény $\partial_x f(x,y)$ és $\partial_{\boldsymbol{y}} f(x,y)$ parciális deriváltjai léteznek az $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pont egy környezetében és differenciálhatóak az (a,b) pontban, akkor $\partial_{xy} f(a,b) = \partial_{yx} f(a,b)$.*

1.2.3. Tétel. *Ha $F(x,y)$ kétszer differenciálható és $F''_{xy} = f$, akkor*

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_a^b \big(F'_x(x,d) - F'_x(x,c)\,\mathrm{d}x \big) =$$

$$= F(b,d) - F(b,c) - \big(F(a,d) - F(a,c) \big)$$

1.3. Példafeladatok

1.3.1. Feladat

Legyen $R = [0,1] \times [0,1]$ és $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x,y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$

Kérdés: integrálható-e az $f(x,y)$ függvény az R tartományon?

Megoldás:

Az előző tételt felhasználva, meg kell néznünk, hogy a függvény alsó integrálja illetve felső integrálja megegyezik-e az R tartományon.

Első lépésként osszuk fel tetszőlegesen az R tartományt kis téglalapokra.

Az alsó összeg a következőképpen írható fel:

$$s_F(f) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} t(R_{ij}) \cdot \inf \big\{ f(x,y) \big\}$$

Az f függvény infimuma az F felosztás minden kis téglalapján 0 lesz, mivel minden kis téglalapban létezik olyan x,y, amelyre $x,y \notin \mathbb{Q}$, tehát

$$s_F(f) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} t(R_{ij}) \cdot 0 = 0$$

Definíció szerint

$$\underline{\int_R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sup_{F \in \mathcal{F}} s_F(f) = \sup_{F \in \mathcal{F}} 0 = 0$$

Ezután írjuk fel a felső összeget is:

$$S_F(f) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} t(R_{ij}) \cdot \sup \big\{ f(x,y) \big\}$$

Az f függvény szuprémuma az F felosztás minden kis téglalapján 1 lesz, mivel minden kis téglalapban létezik olyan x,y, amelyre $x,y \in \mathbb{Q}$, azaz

$$S_F(f) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} t(R_{ij}) \cdot 1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} t(R_{ij}) = 1$$

Definíció szerint

$$\overline{\int_R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \inf_{F\in\mathcal{F}} S_F(f) = \sup_{F\in\mathcal{F}} 1 = 1$$

Az alsó integrál értéke tehát 0, a felső integrálé pedig 1, ezért f nem integrálható R-en.

Egy példa olyan függvényre, amely alsó és felső integrálja megegyezik, azaz integrálható R-en:

1.3.2. Feladat

Számítsuk ki az $f(x,y) = xy$ függvény integrálját a közelítő összegek segítségével az $R = [0,1] \times [0,1]$ tartományon, úgy hogy a tartományt négyzetekre osztjuk fel a következőképpen: $x = i/n$ és $y = j/n$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$.

Megoldás:

Az alsó összeg a következőképpen írható fel:

$$s_F(f) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right)\cdot\left(\frac{j}{n} - \frac{j-1}{n}\right)\cdot \inf_{(x,y)\in R_{ij}}\big\{f(x,y)\big\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{i-1}{n}\cdot\frac{j-1}{n} = \frac{1}{n^4}\cdot\sum_{i=1}^{n}(i-1)\cdot\sum_{j=1}^{n}(j-1) =$$

$$= \frac{1}{n^4}\cdot\frac{(n-1)\big((n-1)+1\big)}{2}\cdot\frac{(n-1)\big((n-1)+1\big)}{2} =$$

$$= \frac{1}{4n^4}\cdot\left(n^2-n\right)^2 = \frac{n^4-2n^3+n^2}{4n^4}$$

A felosztást finomítva, azaz n-nel a végtelenbe tartva kapjuk a következőt:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4-2n^3+n^2}{4n^4} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^4}{n^4} - 2\frac{n^3}{n^4} + \frac{n^2}{n^4}}{4\frac{n^4}{n^4}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1 - 2\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{4} = \frac{1}{4}$$

A felső közelítő összeg pedig nem más, mint:

$$S_F(f) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right)\cdot\left(\frac{j}{n} - \frac{j-1}{n}\right)\cdot \sup_{(x,y)\in R_{ij}}\big\{f(x,y)\big\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{i}{n}\cdot\frac{j}{n} = \frac{1}{n^4}\cdot\sum_{i=1}^{n} i\cdot\sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{n^4}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{1}{4n^4}\cdot\left(n^2+n\right)^2 = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4n^4}$$

Hasonlóképpen, mint az alsó összeg esetében, a felosztás finomításával kapjuk a következő eredményt:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+2n^3+n^2}{4n^4} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^4}{n^4} + 2\frac{n^3}{n^4} + \frac{n^2}{n^4}}{4\frac{n^4}{n^4}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1 + 2\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{4} = \frac{1}{4}$$

Tehát

$$\int_R xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \underline{\int_R} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \overline{\int_R} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}$$

azaz az alsó és a felső integrál értéke megegyezik, tehát az f függvény integrálható R-en.
Megjegyzés: A feladat megoldásában felhasználtuk, az első n db pozitív egész szám összegére vonatkozó összefüggést: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

1.3.3. Feladat

Legyen T az alábbi tartomány: $T = [0,\pi] \times [0,\pi]$. Határozzuk meg az $f(x,y) = \sin^2(x) \cdot \sin^2(y)$ függvény integrálját a T négyzeten!

Megoldás:

Felhasználva a $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ trigonometrikus azonosságot, kapjuk a következőt:

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \sin^2(x) \cdot \sin^2(y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{1-\cos(2x)}{2} \cdot \frac{1-\cos(2y)}{2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}\, y =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \int_0^\pi \int_0^\pi 1 - \cos(2y) - \cos(2x) - \cos(2x)\cos(2y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \int_0^\pi \left[x - x\cos(2y) - \frac{1}{2} \cdot \sin(2x) + \cos(2y)\frac{1}{2} \cdot \sin(2x) \right]_0^\pi \mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \int_0^\pi \pi - \pi \cdot \cos(2y) \mathrm{d}y = \frac{1}{4} \cdot \left[\pi y - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \sin(2y) \right]_0^\pi = \frac{1}{4}\pi^2 \approx 2,4649$$

2. Többváltozós integrál Jordan-mérhető halmazon

Eddig csak téglán értelmezett függvények integráljával foglalkoztunk, de érdemes kiterjeszteni az integrál fogalmát általános tartományokra is, hiszen legtöbbször ilyen tartományokon kell integrálnunk.

2.1. Jordan-mérték

Első lépésként definiáljuk a Jordan-mértéket:

2.1.1. Definíció. *Tetszőleges $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_p, b_p] \subset \mathbb{R}^p$ téglára $t(R)$-rel jelöljük a $(b_1 - a_1) \cdots (b_p - a_p)$ szorzatot.*

2.1.2. Definíció. *Az $A \subset \mathbb{R}^p$ halmazt korlátosak nevezzük, ha van olyan $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_p, b_p]$ tégla, amely lefedi.*

Könnyen látható, hogy egy halmaz akkor és csak akkor korlátos, ha lefedhető egy gömbbel.

2.1.3. Definíció. *Két halmazt egymásba nem nyúlónak nevezünk, ha nincs közös belső pontjuk.*

2.1.4. Definíció. *Ha $A \subset \mathbb{R}^p$ korlátos, akkor A külső mértéke a $\sum_{i=1}^{n} t(R_i)$ számok halmazának alsó határa, ahol $R_1, \ldots, R_n$ tetszőleges olyan téglák, melyek egyesítése lefedi A-t. Az A halmaz külső mértékét $k(A)$-val vagy $k_p(A)$-val jelöljük.*

2.1.5. Definíció. *Az A halmaz belső mértéke a $\sum_{i=1}^{n} t(R_i)$ számok halmazának felső határa, ahol $R_1, \ldots, R_n$ tetszőleges A-ban fekvő és páronként nem egymásba nyúló téglák.*
Ha A nem tartalmaz téglát, akkor a belső mértéke nulla.
Az A halmaz belső mértékét $b(A)$-val vagy $b_p(A)$-val jelöljük.

2.1.6. Definíció. *A korlátos $A \subset \mathbb{R}^p$ halmazt Jordan-mérhetőnek nevezzük, ha $b(A) = k(A)$. Ekkor A Jordan-mértéke $t_p(A) = t(A) = b(A) = k(A)$. Ha $p \geq 3$, akkor a Jordan-mérték helyett térfogatot, a $p = 2$ esetben területet, illetve a $p = 1$ esetben hosszúságot is mondhatunk.*

2.2. Többesintegrál Jordan-mérhető halmazon

2.2.1. Definíció. *Legyen $A \in \mathbb{R}^p$ Jordan-mérhető. Az A halmaz felosztásain azokat az $F = \{A_1, \ldots, A_n\}$ halmazrendszereket értjük, amelyekre $A_1, \ldots A_n$ egymásba nem nyúló, nemüres és mérhető halmazok, amelyek uniója A.*

Ha $f : A \to \mathbb{R}$ korlátos, akkor az f függvénynek az F felosztáshoz tartozó alsó összege az $s_F(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot t(A_i)$ összeg, ahol $m_i = \inf\big\{f(x) : x \in A_i\big\}$ $(i = 1, \dots, n)$. Az f függvénynek az F felosztáshoz tartozó felső összege pedig az $S_F(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot t(A_i)$ összeg, ahol $M_i = \sup\big\{f(x) : x \in A_i\big\}$ $(i = 1, \dots, n)$.

2.2.2. Definíció. *Legyen $A \in \mathbb{R}^p$ Jordan-mérhető, és jelöljük $\mathcal{F}$-fel A felosztásainak halmazát. Ha $f : A \to \mathbb{R}$ korlátos, akkor a $\sup_{F\in\mathcal{F}} s_F$ mennyiséget f alsó integráljának nevezzük és $\underline{\int_A} f \,\mathrm{d}x$ -szel jelöljük. Az $\inf_{F\in\mathcal{F}} S_F$ számot pedig f felső integráljának nevezzük és $\overline{\int_A} f \,\mathrm{d}x$ -szel jelöljük.*

2.2.1. Lemma. *Legyen $A \subset \mathbb{R}^p$ Jordan-mérhető és $f : A \to \mathbb{R}$ korlátos. Ha F_1 és F_2 két tetszőleges felosztása A-nak, akkor $s_{F_1}(f) \le S_{F_2}(f)$.*

Az előző lemmából következik, hogy $\underline{\int_A} f \,\mathrm{d}x \le \overline{\int_A} f \,\mathrm{d}x$ minden korlátos $f : A \to \mathbb{R}$ függvényre.

2.2.3. Definíció. *Az f függvényt integrálhatónak nevezzük az A halmazon, ha $\underline{\int_A} f \,\mathrm{d}x = \overline{\int_A} f \,\mathrm{d}x$. Az $\underline{\int_A} f \,\mathrm{d}x = \overline{\int_A} f \,\mathrm{d}x$ számot az f függvény A halmazon vett integráljának nevezzük és $\int_A f \,\mathrm{d}x$ -szel vagy $\int_A f \,\mathrm{d}x_1 \dots x_p$-vel jelöljük.*

Normáltartomány

2.2.4. Definíció. *Az $A \subset \mathbb{R}^2$ halmazt normáltartománynak nevezzük, ha $A = \big\{(x, y) : x \in [a, b], f(x) \le y \le g(x)\big\}$, ahol f és g Riemann-integrálhatóak $[a, b]$-n, és $f(x) \le g(x)$ minden $x \in [a, b]$-re.*

2.2.1. Tétel. *Ha f és g integrálhatóak $[a, b]$-n és $f(x) \le g(x)$ minden $x \in [a, b]$-re, akkor az $A = \big\{(x, y) : x \in [a, b], f(x) \le y \le g(x)\big\}$ által leírt normáltartomány mérhető és a területe:*

$$t_2(A) = \int_a^b g(x) - f(x) \,\mathrm{d}x$$

.

Bizonyítás:
Adott $\varepsilon > 0$-hoz válasszunk olyan F_1 és F_2 felosztásokat, melyekre $\Omega_{F_1}(f) < \varepsilon$ és $\Omega_{F_2}(g) < \varepsilon$. Ha $F = (x_0, \dots x_n)$ az F_1 és F_2 felosztások egyesítése, akkor $\Omega_F(f) < \varepsilon$ és $\Omega_F(g) < \varepsilon$.
Legyen $m_i(f)$, $m_i(g)$, $M_i(f)$, $M_i(g)$ az f, illetve a g függvény értékeinek infimuma, illetve szuprémuma az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumban.
Ekkor az $[x_{i-1}, x_i] \times [m_i(f), M_i(g)]$ $(i = 1, \dots, n)$ intervallumok lefedik az A halmazt, ezért:

$$k_2(A) \le \sum_{i=1}^{n} \big(M_i(g) - m_i(f)\big) \cdot (x_i - x_{i-1}) = S_F(g) - s_f(f) <$$

$$< \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon - \left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon \right) = \int_a^b g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x + 2\varepsilon$$

Jelöljük I-vel azon i indexek halmazát, melyekre $M_i(f) \leq m_i(g)$.
Ň Ekkor az $[x_{i-1}, x_i] \times [M_i(f), m_i(g)]$ $(i \in I)$ intervallumok részei A-nak és egymásba nem nyúlóak, tehát

$$b_2(a) \geq \sum_{i \in I} \big(m_i(g) - M_i(f)\big) \cdot (x_i - x_{i-1}) \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n} \big(m_i(g) - M_i(f)\big) \cdot (x_i - x_{i-1}) = s_F(g) - S_F(f) >$$

$$> \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon = \int_a^b g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x - 2\varepsilon$$

Mivel ε tetszőleges volt, így a $k_2(A) = \int_a^b g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x + 2\varepsilon$-ből és a $b_2(A) = \int_a^b g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x - 2\varepsilon$-ből következik, hogy A Jordan-mérhető és a területe $\int_a^b g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x$. ■

2.3. Az integrál kiszámítása normáltartományon

2.3.1. Tétel. *Legyen f függvény folytonos a T tartományon.*

1. *Ha T az $a \leq x \leq b$, $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ egyenlőtlenségekkel van megadva, ahol $g_1(x)$ és $g_2(x)$ folytonos függvények, akkor*

$$\iint_T f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

2. *Ha T a $c \leq y \leq d$, $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$ egyenlőtlenségekkel van megadva, ahol $h_1(x)$ és $h_2(x)$ folytonos függvények, akkor*

$$\iint_T f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Ezeket az eredményeket most általánosítjuk többváltozós esetre is:

2.3.1. Definíció. *Ha f és g integrálhatóak a $B \subset \mathbb{R}^2$ mérhető halmazon és $f(x,y) \leq g(x,y)$ minden $(x,y) \in B$-re, akkor az*
$A = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in B, f(x,y) \leq z \leq g(x,y)\big\}$ halmazt az f és g által meghatározott normáltartománynak nevezzük.

2.3.2. Tétel. *Ha f és g integrálhatóak B-n és $f(x,y) \leq g(x,y)$ minden $(x,y) \in B$-re, akkor az $A = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in B, f(x,y) \leq z \leq g(x,y)\big\}$ által leírt normáltartomány mérhető, és térfogata*
$\int_B \big(g(x,y) - f(x,y)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

2.4. Példafeladat

2.4.1. Feladat

Legyen T az $\mid x \mid + \mid y \mid = 1$ egyenletű görbe által határolt tartomány. Számítsuk ki a $\int_T x^2 + y^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ integrál értékét!

Megoldás:

Első lépésként bontsuk fel a T tartományt:

$$\mid x \mid + \mid y \mid = \begin{cases} x + y & \text{ha } x \geq 0 \text{ és } y \geq 0 \\ -x - y & \text{ha } x < 0 \text{ és } y < 0 \\ -x + y & \text{ha } x < 0 \text{ és } y \geq 0 \\ x - y & \text{ha } x \geq 0 \text{ és } y < 0 \end{cases}$$

$$\int\limits_T x^2 + y^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int\limits_{-1}^{0} \int\limits_{-x-1}^{x+1} x^2 + y^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} \int\limits_{x-1}^{1-x} x^2 + y^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{-x-1}^{x+1} \mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{x-1}^{1-x} \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} x^2(x+1) + \frac{1}{3} \cdot (x+1)^3 - \left(x^2(-x-1) + \frac{1}{3} \cdot (-x-1)^3 \right) \mathrm{d}x +$$

$$+ \int\limits_{0}^{1} x^2(1-x) + \frac{1}{3} \cdot (1-x)^3 - \left(x^2(x-1) + \frac{1}{3} \cdot (x-1)^3 \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} \frac{8}{3}x^3 + 4x^2 + 2x + \frac{2}{3} \mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} -\frac{8}{3}x^3 + 4x^2 - 2x + \frac{2}{3} \mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + x^2 + \frac{2}{3}x \right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - x^2 + \frac{2}{3}x \right]_{0}^{1} =$$

$$= -\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{3} + 1 - \frac{2}{3} \right) + \left(-\frac{2}{3} + \frac{4}{3} - 1 + \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{3}$$

3. Integráltranszformáció

3.1. Az integráltranszformáció fogalma

Gyakran előfordulnak olyan problémák, amikor nem tudunk meghatározni egy adott integrált. Az ilyen esetekben hasznos integráltranszformációt alkalmaznunk. Az integráltranszformáció az egyváltozós függvények integrálásánál megismert helyettesítéses integrálás analógiája. Lényege, hogy egy alkalmas helyettesítéssel az integrált egyszerűbb alakra hozzuk, és így könnyebben tudjuk megoldani a problémát.

Egyváltozós függvények helyettesítéses integrálására vonatkozó tételek:

3.1.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy a g függvény differenciálható az I intervallumban, f értelmezve van a $J = g(I)$ intervallumon, és f-nek primitív függvénye J-n. Ekkor az $(f \circ g) \cdot g'$ függvénynek is van primitív függvénye I-n, és*

$$\int f\big(g(t)\big) \cdot g'(t)\,\mathrm{d}t = F\big(g(t)\big) + c$$

ahol $\int f\,\mathrm{d}x = F(x) + c$.

3.1.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy g differenciálható és g' integrálható az $[a, b]$ intervallumban. Ha f folytonos g értékkészletén, azaz a $g\big([a, b]\big)$ intervallumon, akkor*

$$\int_a^b f\big(g(t)\big) \cdot g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Most általánosítjuk többváltozós esetre is:

3.1.1. Definíció. *Legyenek A és B tetszőleges halmazok és $f : A \to B$ egy leképezés. Akkor mondjuk, hogy f injekció, ha tetszőleges $a, b \in A$ és $f(a) = f(b)$ esetén $a{=}b$.*

3.1.3. Tétel. *Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt, és legyen $g : G \to \mathbb{R}^p$ folytonosan differenciálható. Ha H mérhető, $clH \subset G$ és g injektív $intH$-ban, akkor $g(H)$ is mérhető, és*

$$t\big(g(H)\big) = \int_H \left|\det\left(g'(x)\right)\right|\,\mathrm{d}x.$$

Továbbá, ha $f : g(H) \to \mathbb{R}$ korlátos, akkor

$$\int_{g(H)} f\,\mathrm{d}t = \int_H f\big(g(x)\big) \cdot \left|\det\left(g'(x)\right)\right|\,\mathrm{d}x$$

abban az értelemben, hogy ha az egyik oldal létezik, akkor a másik is, és egyenlőek.

Megjegyzés:
Szembetűnő, hogy a többváltozós esetre vonatkozó integráltranszformációs formulában a Jacobi-determináns abszolút értéke, vagyis $\left|\det\big(g'(x)\big)\right|$ szerepel, míg egyváltozós esetben nem $|g'(x)|$, hanem $g'(x)$ van.
Nézzük meg, hogy miért is szükséges az abszolút érték a többváltozós esetben:
Alkalmazzuk az előzőleg kimondott tételünket a $p = 1$ és a $H = [a, b]$ esetre. Legyen $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható egy $[a, b]$-t tartalmazó nyílt intervallumban, és legyen g injektív (a, b)-ben. Könnyen látható, hogy ekkor g szigorúan monoton $[a, b]$-ben, és így g' állandó előjelű.
Két eset lehetséges:

1. Ha g' nemnegatív $[a, b]$-ben, akkor g monoton növő, és $g(H) = \big[g(a), g(b)\big]$. Ekkor a tételünkben szereplő formula a következőt adja:

$$\int\limits_{g(a)}^{g(b)} f \,\mathrm{d}t = \int\limits_{a}^{b} f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$$

.

2. Ha g' nempozitív $[a, b]$-ben, akkor g monoton csökkenő, és $g(H) = \big[g(b), g(a)\big]$. Ekkor a formula a következőképpen néz ki:

$$\int\limits_{g(b)}^{g(a)} f \,\mathrm{d}t = \int\limits_{a}^{b} f\big(g(x)\big) \cdot \big(-g'(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

Mindkét oldal negatívját véve kapjuk, hogy:

$$\int\limits_{g(a)}^{g(b)} f \,\mathrm{d}t = \int\limits_{a}^{b} f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$$

Tehát a 2. eset miatt szükséges a Jacobi-determináns abszolút értékét venni, mert ha nem tennénk, akkor a tételben szereplő összefüggés rossz eredményt adna.

Nézzünk egy feladatot az integráltranszformáció alkalmazására:

3.1.1. Feladat

Legyen T az a tartomány az xy-sík első síknegyedében, melyet az $xy = 1$, $xy = 9$ hiperbolák és az $y = x$, $y = 4x$ egyenesek határolnak.
Határozzuk meg az alábbi integrált a T tartományon:$\int_T \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$!

Megoldás:

Legyen $x = \frac{u}{v}$ és $y = uv$ (ahol $u, v > 0$)

$$g(u, v) = \left(\frac{u}{v}, uv\right)$$

Jacobi-mátrix:

$$g'(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ v & u \end{pmatrix}$$

Jacobi-mátrix determinánsa:

$$\det\begin{pmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ v & u \end{pmatrix} = \frac{u}{v} + \frac{uv}{v^2} = \frac{2u}{v}$$

Az integrálási határok felírása:

$$xy = \frac{u}{v} \cdot uv = u^2$$
$$\pm\sqrt{xy} = u$$

Az elején feltettük, hogy $u > 0$ ezért $\sqrt{xy} = u$

$$y = uv$$
$$y = \sqrt{xy} \cdot v$$
$$y^2 = xy \cdot v^2$$
$$\frac{y}{x} = v^2$$

Oszthatunk xy-nal, hiszen $xy > 0$, mert az első síknegyedben vagyunk.
Ezután négyzetgyököt vonunk mindkét oldalból. Mivel az elején feltettük, hogy $v > 0$, ezért csak a pozitív gyököt vesszük figyelembe:

$$\sqrt{\frac{y}{x}} = v$$

A határok:

$$1 \le xy \le 9$$
$$1 \le \sqrt{xy} \le 3$$
$$1 \le u \le 3$$

$$1 \le \frac{y}{x} \le 4$$
$$1 \le \sqrt{\frac{y}{x}} \le 2$$
$$1 \le v \le 2$$

$$\int_T \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \int_1^3 (u+v) \cdot \left|\frac{2u}{v}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

A Jacobi-mátrix determinánsánál az abszolút érték elhanyagolható, mert $u, v > 0$.

$$\int_1^2 \int_1^3 \left(\frac{2u^2}{v} + \frac{2uv}{v}\right) \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 2 \cdot \int_1^2 \int_1^3 \left(\frac{1}{v}u^2 + u\right) \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v =$$

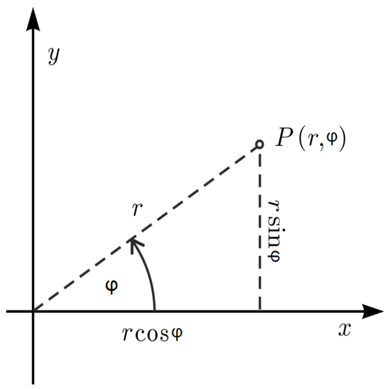
$$= 2 \cdot \int_1^2 \left[\frac{1}{v} \cdot \frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{2}\right]_1^3 \mathrm{d}v = 2 \cdot \int_1^2 \left(\frac{26}{3} \cdot \frac{1}{v} + 4\right) \mathrm{d}v = 2 \cdot \left[\frac{26}{3} \ln|\, v \,| + 4v\right]_1^2 =$$

$$= 2 \cdot (6{,}007 + 4) = 20{,}014$$

3.2. Az integráltranszformáció alkalmazása

Polárkoordináták

A sík origótól különböző P pontjának polárkoordinátáin az (r, φ) számpárt értjük, ahol r a P pont origótól vett távolságát, míg φ az $\overrightarrow{OP}$ félegyenesnek az x-tengely pozitív felével bezárt szögét jelöli. Mivel φ mértéke 2π bármely egész többszörösével megváltoztatható, ezért minden ponthoz többféle koordinátapár adható meg. Az origó polárkoordinátákkal felírva: $(0, \varphi)$, ahol φ tetszőleges lehet.



Összefüggések:
$x = r \cdot \cos\varphi$
$y = r \cdot \sin\varphi$
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$, ha $x \neq 0$
ha $x = 0$, akkor $\varphi = \frac{\pi}{2}$ vagy $-\frac{\pi}{2}$

Integrálás polárkoordinátákkal:

Jacobi-determináns:

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial r\cos\varphi}{\partial r} & \frac{\partial r\cos\varphi}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial r\sin\varphi}{\partial r} & \frac{\partial r\sin\varphi}{\partial\varphi} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= r \cdot \cos^2\varphi + r \cdot \sin^2\varphi = r \cdot (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r$$

3.2.1. Tétel. *Legyen $P(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ minden r, $\varphi \in \mathbb{R}$ esetén. Ha az $A \subset [0, \infty) \times [0, 2\pi]$ halmaz mérhető, akkor $P(A)$ is mérhető, és $t\big(P(A)\big) = \int_A r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi$. Továbbá, ha $f : P(A) \to \mathbb{R}$ korlátos, akkor*

$$\int\limits_{P(A)} f(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int\limits_{A} \big(f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot r\big) \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi$$

abban az értelemben, hogy ha az egyik oldal létezik, akkor a másik is, és egyenlőek.

Példafeladatok

3.2.1. Feladat

Legyen az A a következő tartomány: $A = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 3\}$.
Számítsuk ki az $\int_A \ln(x^2 + y^2) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$ integrál értékét!

Megoldás:

Térjünk át polárkoordinátákra, hogy könnyebb feladatot kapjunk.
Az integrálási határok felírása:

$1 \leq r \leq \sqrt{3}$ $\qquad\qquad$ $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$\int\limits_A \ln(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_1^{\sqrt{3}}\int\limits_0^{2\pi} r\cdot\ln(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r =$$

$$= \int\limits_1^{\sqrt{3}}\int\limits_0^{2\pi} r\cdot\ln(r^2)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = 2\int\limits_1^{\sqrt{3}}\left[r\cdot\ln(r)\cdot\varphi\right]_0^{2\pi}\mathrm{d}r = 4\pi\int\limits_1^{\sqrt{3}} r\cdot\ln(r)\,\mathrm{d}r =$$

$$= 4\pi\left(\left[\ln(r)\cdot\frac{r^2}{2}\right]_1^{\sqrt{3}} - \int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{r}\cdot\frac{r^2}{2}\,\mathrm{d}r\right) = 4\pi\left(\ln\left(\sqrt{3}\right)\cdot\frac{3}{2} - \ln(1)\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{r^2}{2}\right]_1^{\sqrt{3}}\right) =$$

$$= 4\pi\left(\ln\left(\sqrt{3}\right)\cdot\frac{3}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) = 2\pi\left(3\ln(\sqrt{3}) - 1\right) \approx 4,0689$$

A feladat megoldása során felhasználtuk a parciális integrálás szabályának határozott integrálokra vonatkozó formuláját: $\int_a^b f'g\,\mathrm{d}x = [fg]_a^b - \int_a^b fg'\,\mathrm{d}x$

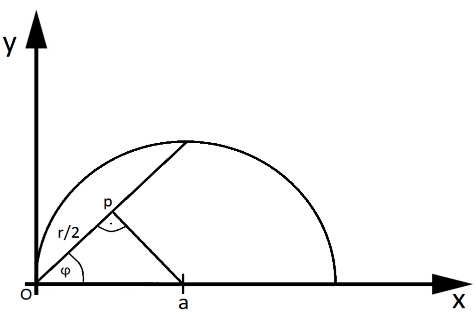
3.2.2.Feladat

Legyen A az $(x-1)^2+y^2=1$ és az $(x-2)^2+y^2=4$ egyenletű körök közé eső tartomány az első síknegyedben.
Integráljuk az $f(x,y)=y$ függvényt ezen a tartományon!

Megoldás:

Térjünk át polárkoordinátákra, ezzel sokkal egyszerűbbé tesszük a feladat megoldását.
Az integrálási határok felírása:
$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

Általánosan az r:



Az ábrán jelölje r a húrt.
Állítsunk merőlegest a kör középpontjából a húrra. Jelölje a merőleges egyenes és a húr metszéspontját P. Ekkor az OP szakasz $\frac{r}{2}$ hosszúságú lesz, mivel a középpontból a húrra húzott merőleges egyenes felezi a húrt.
Az így keletkezett derékszögű háromszögben felírhatjuk a φ szög koszinuszát:
$\cos\varphi = \frac{\frac{r}{2}}{a} \longrightarrow r = 2a\cos\varphi$

A kis kör sugara $a=1$, tehát $r = 2\cos\varphi$, a nagy kör sugara pedig $a=2$, tehát $r = 4\cos\varphi$.
Tehát: $2\cos\varphi \leq r \leq 4\cos\varphi$

Az $f(x,y)=y$ függvény polárkoordinátákkal: $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r\sin\varphi$

Ezek után felírhatjuk az integrált:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} (r \cdot \sin\varphi \cdot r)\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} r^2 \cdot \sin\varphi\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \left[\frac{r^3}{3}\right]_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \mathrm{d}\varphi =$$

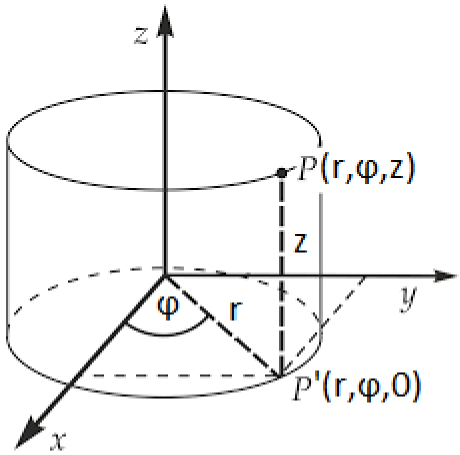
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{56}{3} \cdot \sin\varphi \cdot \cos^3\varphi\, \mathrm{d}\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{56}{3} \cdot (-\sin\varphi) \cdot \cos^3\varphi\, \mathrm{d}\varphi = -\frac{56}{3}\left[\frac{\cos^4\varphi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{56}{3}\left(\left(\frac{\cos^4\frac{\pi}{2}}{4}\right) - \left(\frac{\cos^4 0}{4}\right)\right) = \left(-\frac{56}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{14}{3}$$

Megjegyzés: Az integrálás során felhasználtuk a következő összefüggést: $\int f^{\alpha} \cdot f' = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

Hengerkoordináták

A hengerkoordináta-rendszer a polárkoordináta-rendszer térbeli általánosítása a z-tengely irányában bevezetett magassággal.
Legyen P egy térbeli pont és legyen P' a P pont xy-síkbeli vetülete. Ekkor a P pont hengerkoordinátáin az (r, φ, z) számhármast értjük, ahol r és φ a P' pont polárkoordinátái az xy-síkon, z pedig a PP' szakasz előjeles hosszát jelöli.



Összefüggések:
$x = r \cdot \cos\varphi$
$y = r \cdot \sin\varphi$
$z = z$
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$, ha $x \neq 0$
ha $x = 0$, akkor $\varphi = \frac{\pi}{2}$ vagy $-\frac{\pi}{2}$
$r \geq 0$
$0 \leq \varphi \leq 2\pi$
$z \in \mathbb{R}$

Integrálás hengerkoordinátákkal:

Jacobi-determináns:

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial r\cos\varphi}{\partial r} & \frac{\partial r\cos\varphi}{\partial \varphi} & \frac{\partial r\cos\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial r\sin\varphi}{\partial r} & \frac{\partial r\sin\varphi}{\partial \varphi} & \frac{\partial r\sin\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 0 \cdot \det\begin{pmatrix} -r\sin\varphi & 0 \\ r\cos\varphi & 0 \end{pmatrix} - 0 \cdot \det\begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 \\ \sin\varphi & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= r \cdot \cos^2\varphi + r \cdot \sin^2\varphi = r \cdot (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r$$

3.2.2. Tétel. *Legyen* $P(r, \varphi, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$ *minden* $r, \varphi, z \in \mathbb{R}$ *esetén. Ha az* $A \subset [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times (-\infty, \infty)$ *halmaz mérhető, akkor* $P(A)$ *is mérhető,és* $t\big(P(A)\big) = \int_A r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}z$. *Továbbá, ha* $f : P(A) \to \mathbb{R}$ *korlátos, akkor*

$$\int\limits_{P(A)} f(x, y, z) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \int\limits_{A} \big(f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \cdot r\big) \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}z$$

abban az értelemben, hogy ha az egyik oldal létezik, akkor a másik is, és egyenlőek.

Példafeladat

3.2.3. Feladat

Legyen A a következő tartomány: $A = \big\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\big\}$.
Számítsuk ki az $\int_A \frac{z}{(1+x^2+y^2)^3} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$ integrál értékét!

Megoldás:

Mivel az A tartomány egy henger, ezért térjünk át hengerkoordinátákra!
Integrálási határok:

$0 \leq r \leq 1$ $\qquad$ $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ $\qquad$ $0 \leq z \leq 1$

$$\int\limits_A \frac{z}{(1 + x^2 + y^2)^3} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^1 r \cdot \frac{z}{(1 + r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi)^3} \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r =$$

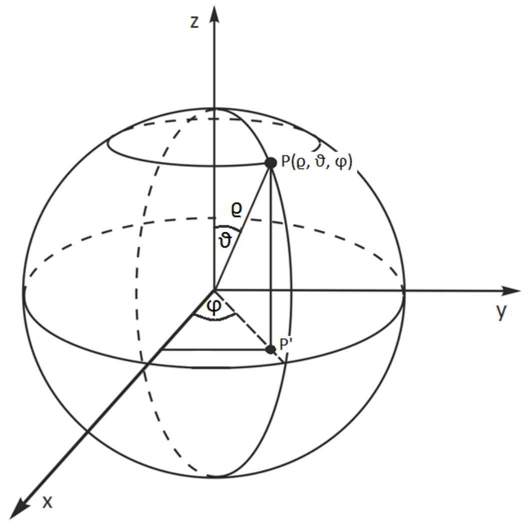
$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^1 r \cdot \frac{z}{(1 + r^2)^3} \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} r \cdot \frac{1}{(1 + r^2)^3} \cdot \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^1 \mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 r \cdot (1 + r^2)^{-3} \cdot \big[\varphi\big]_0^{2\pi} \mathrm{d}r = \pi \int\limits_0^1 r \cdot (1 + r^2)^{-3} \,\mathrm{d}r = \pi \left[-\frac{1}{4} \cdot (1 + r^2)^{-2}\right]_0^1 =$$

$$= \pi \left(-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16}\pi \approx 0,5887$$

Gömbi koordináták

Egy térbeli P pont gömbi koordinátáin a $(\rho, \vartheta, \varphi)$ rendezett számhármast értjük, ahol ρ a P pont távolsága az origótól, ϑ az $\overrightarrow{OP}$ szakasz és a z-tengely pozitív fele által bezárt szög, a φ pedig megegyezik a polár-, és hengerkoordinátáknál megismert φ szöggel. Azaz, ha P' a P pont xy-síkbeli vetülete, akkor φ az $\overrightarrow{OP'}$ szakasz x-tengely pozitív felével bezárt szögét jelöli.



Összefüggések:
$x = \rho \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi$
$y = \rho \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi$
$z = \rho \cdot \cos\vartheta$
$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$, ha $x \neq 0$
ha $x = 0$, akkor $\varphi = \frac{\pi}{2}$ vagy $-\frac{\pi}{2}$
$\cos\vartheta = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
$\rho \geq 0$
$0 \leq \varphi \leq 2\pi$
$0 \leq \vartheta \leq \pi$

Integrálás gömbi koordinátákkal:

Jacobi-determináns:

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial\rho\sin\vartheta\cos\varphi}{\partial\rho} & \frac{\partial\rho\sin\vartheta\cos\varphi}{\partial\vartheta} & \frac{\partial\rho\sin\vartheta\cos\varphi}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial\rho\sin\vartheta\sin\varphi}{\partial\rho} & \frac{\partial\rho\sin\vartheta\sin\varphi}{\partial\vartheta} & \frac{\partial\rho\sin\vartheta\sin\varphi}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial\rho\cos\vartheta}{\partial\rho} & \frac{\partial\rho\cos\vartheta}{\partial\vartheta} & \frac{\partial\rho\cos\vartheta}{\partial\varphi} \end{pmatrix} =$$

$$\det\begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & \rho\cos\vartheta\cos\varphi & -\rho\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & \rho\cos\vartheta\sin\varphi & \rho\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -\rho\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \cos\vartheta \cdot \det\begin{pmatrix} \rho\cos\vartheta\cos\varphi & -\rho\sin\vartheta\sin\varphi \\ \rho\cos\vartheta\sin\varphi & \rho\sin\vartheta\cos\varphi \end{pmatrix} -$$

$$-(-\rho\sin\vartheta) \cdot \det\begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & -\rho\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & \rho\sin\vartheta\cos\varphi \end{pmatrix} +$$

$$+0 \cdot \det\begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & \rho\cos\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & \rho\cos\vartheta\sin\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \cos\vartheta \cdot (\rho^2\cos\vartheta\sin\vartheta) + \rho\sin\vartheta \cdot (\rho\sin^2\vartheta) + 0 =$$

$$= \rho^2\cos^2\vartheta\sin\vartheta + \rho^2\sin^3\vartheta = \rho^2\sin\vartheta \cdot (\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta) =$$

$$= \rho^2\sin\vartheta$$

3.2.3. Tétel. *Legyen* $P(\rho, \vartheta, \varphi) = (\rho\sin\vartheta\cos\varphi, \rho\sin\vartheta\sin\varphi, \rho\cos\vartheta)$ *minden* ρ, ϑ, $\varphi \in \mathbb{R}$ *esetén. Ha az* $A \subset [0, \infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ *halmaz mérhető, akkor* $P(A)$ *is mérhető, és* $t\big(P(A)\big) = \int_A \rho^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$. *Továbbá, ha* $f : P(A) \to \mathbb{R}$ *korlátos, akkor*

$$\int\limits_{P(A)} f(x, y, z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int\limits_{A} \big(f(\rho\sin\vartheta\cos\varphi, \rho\sin\vartheta\sin\varphi, \rho\cos\vartheta) \cdot \rho^2\sin\vartheta\big)\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$$

abban az értelemben, hogy ha az egyik oldal létezik, akkor a másik is, és egyenlőek.

Példafeladat

3.2.4. Feladat Legyen A a következő térbeli tartomány: $A = \big\{(x,y,z) : 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 9,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\big\}$.
Integráljuk az $f(x,y,z) = xy + z$ függvényt az A tartományon!

Megoldás:
Térjünk át gömbi koordinátákra!
Ekkor az integrálási határok a következők:

$1 \leq \rho \leq 3$ $\qquad$ $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

Az integrál:

$$\int_A (xy+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^3 (\rho\sin\vartheta\cos\varphi\cdot\rho\sin\vartheta\sin\varphi + \rho\cos\vartheta)\cdot\rho^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^3 \rho^4\sin^3\vartheta\sin\varphi\cos\varphi + \rho^3\cos\vartheta\sin\vartheta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^5}{5}\cdot\sin^3\vartheta\sin\varphi\cos\varphi + \frac{\rho^4}{4}\cdot\cos\vartheta\sin\vartheta\right]_1^3 \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{242}{5}\cdot\sin^3\vartheta\sin\varphi\cos\varphi + \frac{80}{4}\cdot\cos\vartheta\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{121}{5}\sin^3\vartheta\sin 2\varphi + 20\cos\vartheta\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{121}{5}\sin^3\vartheta\cdot\frac{-\cos 2\varphi}{2} + \varphi\cdot 20\cos\vartheta\sin\vartheta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{121}{5}\sin^3\vartheta + 5\pi\sin 2\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta$$

Az átláthatóság kedvéért számoljuk ki külön az $\int \frac{121}{5}\sin^3\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta$ értékét:

$$\frac{121}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\cdot\sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{121}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\cdot\frac{1-\cos 2\vartheta}{2}\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \frac{121}{10}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta - \sin\vartheta\cos 2\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{121}{10}\big[-\cos\vartheta\big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{121}{10}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\cos 2\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta$$

Integráljuk parciálisan az $\int \sin\vartheta \cos 2\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta$-t:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta \cos 2\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta = \big[-\cos\vartheta \cos 2\vartheta\big]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta \sin 2\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta \cos 2\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta = 1 - 2\left(\big[\sin\vartheta \sin 2\vartheta\big]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta \cos 2\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta\right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta \cos 2\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta = 1 + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta \cos 2\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta$$

Mindkét oldalból kivonva $4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta \cos 2\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta$ -t:

$$-3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta \cos 2\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta = 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta \cos 2\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta = -\frac{1}{3}$$

Ebből megkaptuk, hogy:

$$\frac{121}{5}\int_{-0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta = \frac{121}{10} + \frac{121}{30} = \frac{484}{30} = \frac{242}{15}$$

Tehát ezt az eredményt felhasználva, az előző számolást folytatva kapjuk meg a végeredményt:

$$\frac{121}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta + 5\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta = \frac{242}{15} + 5\pi\left[\frac{-\cos 2\vartheta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{242}{15} + 5\pi = \frac{317}{15}\pi$$

4. Alkalmazások

4.1. Területszámítás

4.1.1. Definíció. *Egy R korlátos zárt síktartomány területe:*

$$t(R) = \iint\limits_R 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

ha ez az integrál létezik.

Számoljuk ki néhány speciális síkidom területét integrálás segítségével!

1. Téglalap területe:

Integráljuk az $f(x,y) = 1$ függvényt az $A = [0,a] \times [0,b]$ tartományon!

$$T_{Teglalap} = \iint\limits_A 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int\limits_0^a \int\limits_0^b 1 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int\limits_0^a \big[y\big]_0^b \mathrm{d}x = b \int\limits_0^a 1 \,\mathrm{d}x = b\big[x\big]_0^a = ab$$

2. Kör területe:

Integráljuk az $f(x,y) = 1$ függvényt az $A = \big\{(x,y) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\big\}$ tartományon!

Térjünk át polárkoordinátákra!
Integrálási határok:
$0 \leq r \leq R$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$T_{Kor} = \iint\limits_A 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^R r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R \mathrm{d}\varphi = \frac{R^2}{2} \int\limits_0^{2\pi} 1 \,\mathrm{d}\varphi = \frac{R^2}{2} \big[\varphi\big]_0^{2\pi} = R^2\pi$$

3. Ellipszis területe:

Az ellipszis egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ahol a, b pozitív valós számok.
Alkalmazzuk az integráltranszformációt:
Legyen $x = au$ és $y = bv$
$g(u,v) = (au, bv)$
Ekkor

$$\frac{a^2u^2}{a^2} + \frac{b^2v^2}{b^2} = 1 \longrightarrow u^2 + v^2 = 1$$

Az integráltranszformáció után kapott H tartományunk tehát az 1 sugarú origó középpontú kör.
Számoljuk ki a Jacobi-determinánst:

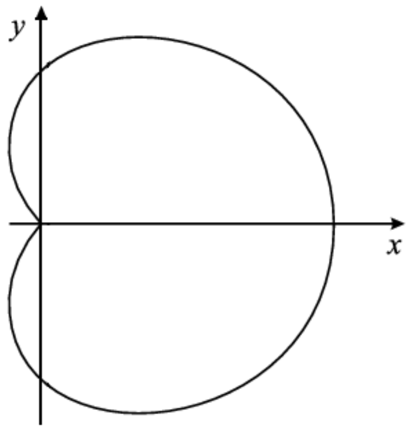
$$\det\big(g'(u,v)\big) = \det\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = ab$$

$$T_{Ellipszis} = \iint\limits_{g(H)} 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint\limits_{H} 1 \cdot \mid ab \mid \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

A Jacobi-determinánsnál elhagyható az abszolút érték, mivel a és b pozitív számok. Térjünk át polárkoordinátákra, ekkor az integrál felírható a következőképpen:

$$T_{Ellipszis} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 abr \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi = ab \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^1 \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} 1 \, \mathrm{d}\varphi = \frac{ab}{2} [\varphi]_0^{2\pi} = ab\pi$$

4. Kardioid területe:



4.1.2. Definíció. *A kardioid olyan síkgörbe, amit egy rögzített körön kívül csúszás nélkül legördülő, vele azonos sugarú kör egy rögzített pontja ír le.*

Egyenlete polárkoordinátákkal:
$r = a(1 + \cos\varphi)$, ahol a a kör sugarát jelöli.

Integráljuk az $f(r, \varphi) = 1$ függvényt az $A = \{(r, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq a(1 + \cos\varphi)\}$ tartományon!

$$T_{Kardioid} = \int_0^{2\pi} \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{a(1+\cos\varphi)} \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} 1 + 2\cos\varphi + \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \mathrm{d}\varphi = \frac{a^2}{2} \left[\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{2} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \right]_0^{2\pi} = \frac{a^2 3\pi}{2}$$

4.2. Térfogatszámítás

4.2.1. Definíció. *A tér egy korlátos zárt R tartományának térfogata:*

$$V(R) = \iiint\limits_{R} 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

ha ez az integrál létezik.

Számoljuk ki néhány speciális térbeli test térfogatát integrálás segítségével!

1. Téglatest térfogata:

Integráljuk az $f(x, y, z) = 1$ függvényt az $R = [0, a] \times [0, b] \times [0, c]$ tartományon!

$$V_{Teglatest} = \int\limits_0^a \int\limits_0^b \int\limits_0^c 1 \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int\limits_0^a \int\limits_0^b \big[z\big]_0^c \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = c \int\limits_0^a \int\limits_0^b 1 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x =$$

$$= c \int\limits_0^a \big[y\big]_0^b \mathrm{d}x = bc \int\limits_0^a 1 \, \mathrm{d}x = bc\big[x\big]_0^a = abc$$

2. Henger térfogata:

Integráljuk az $f(x,y,z) = 1$ függvényt az $A = \big\{(x,y,z) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h\big\}$ tartományon!

Térjünk át hengerkoordinátákra!
Integrálási határok:

$0 \leq r \leq R$ $\qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ $\qquad 0 \leq z \leq h$

$$V_{Henger} = \iiint\limits_A 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^h \int\limits_0^R r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^h \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{R^2}{2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^h 1 \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\varphi = \frac{R^2}{2} \int\limits_0^{2\pi} \big[z\big]_0^h \mathrm{d}\varphi = \frac{R^2 h}{2} \int\limits_0^{2\pi} 1 \, \mathrm{d}\varphi = \frac{R^2 h}{2} \big[\varphi\big]_0^{2\pi} = R^2 \pi h$$

3. Kúp térfogata:

Integráljuk az $f(x,y,z) = 1$ függvényt az $A = \big\{(x,y,z) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq \big(\frac{(h-z)R}{h}\big)^2, 0 \leq z \leq h\big\}$ tartományon!
Térjünk át hengerkoordinátákra!
Integrálási határok:

$0 \leq r \leq \frac{(h-z)R}{h}$ $\qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ $\qquad 0 \leq z \leq h$

$$V_{Kup} = \iiint\limits_A 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^h \int\limits_0^{\frac{(h-z)R}{h}} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^h \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\frac{(h-z)R}{h}} \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{R^2}{2h^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^h h^2 - 2zh + z^2 \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\varphi = \frac{R^2}{2h^2} \int\limits_0^{2\pi} \left[h^2 z - hz^2 + \frac{z^3}{3}\right]_0^h \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{R^2}{2h^2} \int\limits_0^{2\pi} \frac{h^3}{3} \, \mathrm{d}\varphi = \frac{R^2 h}{6} \big[\varphi\big]_0^{2\pi} = \frac{R^2 \pi h}{3}$$

4. Gömb térfogata:

Integráljuk az $f(x,y,z) = 1$ függvényt az $A = \big\{(x,y,z) : 0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\big\}$ tartományon!
Mivel az A tartomány egy gömb, térjünk ár gömbi koordinátákra!
Integrálási határok:

$0 \leq \rho \leq R \qquad\qquad 0 \leq \vartheta \leq \pi \qquad\qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$V_{Gomb} = \iiint\limits_A 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{R} \rho^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\vartheta \,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin\vartheta \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^R \mathrm{d}\vartheta \,\mathrm{d}\varphi = \frac{R^3}{3} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta \,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{R^3}{3} \int\limits_0^{2\pi} \big[-\cos\vartheta\big]_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi = \frac{2R^3}{3} \int\limits_0^{2\pi} 1 \,\mathrm{d}\varphi = \frac{2R^3}{3} \big[\varphi\big]_0^{2\pi} = \frac{4R^3\pi}{3}$$

Megjegyzés: A gömb térfogatát egyszerűbben is, egy egyváltozós integrál segítségével is megkaphatjuk: $\pi \int_{-R}^{R} \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right) \mathrm{d}x$

5. Ellipszoid térfogata:

Az ellipszoid egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

ahol a, b, c pozitív valós számok.
Alkalmazzunk integráltranszformációt:
Legyen $x = au$, $y = bv$, $z = cw$
$g(u, v, w) = (au, bv, cw)$
Ekkor:

$$\frac{a^2u^2}{a^2} + \frac{b^2v^2}{b^2} + \frac{c^2w^2}{c^2} = 1 \longrightarrow u^2 + v^2 + w^2 = 1$$

Az integráltranszformáció után kapott H tartományunk tehát az 1 sugarú origó középpontú gömb.
Számoljuk ki a Jacobi-determinánst:

$$\det\big(g'(u, v, w)\big) = \det \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = abc$$

Ekkor az integrál felírható a következőképpen:

$$V_{Ellipszoid} = \iiint\limits_{g(H)} 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{H} 1 \cdot \mid abc \mid \mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}w$$

Az abszolút érték jel elhagyható, hiszen $a, b, c > 0$.
Mivel az új tartományunk egy gömb, térjünk át gömbi koordinátákra:

$$V_{Ellipszoid} = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{1} abc\rho^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\vartheta \,\mathrm{d}\varphi = abc \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin\vartheta \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 \mathrm{d}\vartheta \,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}abc \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta \,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{3}abc \int\limits_0^{2\pi} \big[-\cos\vartheta\big]_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi = \frac{2}{3}abc \int\limits_0^{2\pi} 1 \,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{2}{3}abc\big[\varphi\big]_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi abc$$

4.3. Átlagérték

4.3.1. Definíció. *Legyen $A \subset \mathbb{R}^2$ és $f : A \to \mathbb{R}$. Ekkor az f függvény átlagértéke az A tartományon:*

$$\frac{\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{T(A)} = \frac{\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_A 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$

4.3.2. Definíció. *Legyen $A \subset \mathbb{R}^3$ és $f : A \to \mathbb{R}$. Ekkor az f függvény átlagértéke az A tartományon:*

$$\frac{\iiint_A f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{V(A)} = \frac{\iiint_A f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_A 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

Példafeladatok:

4.3.1. Feladat

A $[0,10]\times[0,20]$ téglalap alakú kert (x,y) pontjában a termőföld vastagsága $f(x,y) = 30 + 10\cos(x+y)$ cm.
Határozzuk meg a termőföld átlagos vastagságát a kertben!

$$T_{Kert} = 10 \cdot 20 = 200$$

Ekkor a föld átlagos vastagsága:

$$\frac{1}{200}\int_0^{20}\int_0^{10} 30 + 10\cos(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{200}\int_0^{20}\big[30x + 10\sin(x+y)\big]_0^{10}\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{200}\int_0^{20} 300 + 10\sin(10+y) - 10\sin y\,\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{200}\big[300y - 10\cos(10+y) + 10\cos y\big]_0^{20} = \frac{6000,585}{200} = 30,002925cm$$

4.3.2. Feladat

A $[0,2]\times[0,2]\times[0,2]$ kocka (x,y,z) pontjában a hőmérsékletét az $f(x,y,z) = x^2 + 9$ függvény írja le.
Határozzuk meg a kocka átlaghőmérsékletét!

$$V_{Kocka} = 2^3 = 8$$

Ekkor az átlaghőmérséklet:

$$\frac{1}{8}\int_0^2\int_0^2\int_0^2 x^2 + 9\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{1}{8}\int_0^2\int_0^2\left[\frac{x^3}{3} + 9x\right]_0^2\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{31}{12}\int_0^2 [y]_0^2\mathrm{d}z = \frac{31}{6}[z]_0^2 = \frac{31}{3} \approx 10,33$$

4.3.3. Feladat

A $z = 1$ sík az $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ egyenletű gömböt két részre osztja. Legyen az A tartomány a $z = 1$ sík feletti rész.
Határozzuk meg az $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ függvény átlagértékét az A tartományon!

Térjünk át hengerkoordinátákra!
A határok ekkor:

$$1 \le z \le \sqrt{4} = 2 \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi \qquad 0 \le r \le \sqrt{4 - z^2}$$

Az A tartomány térfogata:

$$V_A = \iiint_A 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\int_1^2\int_0^{\sqrt{4-z^2}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\int_1^2 \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{4-z^2}} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_1^2 4 - z^2 \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[4z - \frac{z^3}{3}\right]_1^2 \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{5}{6}\left[\varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{10}{6}\pi = \frac{5}{3}\pi$$

Az átlagérték:

$$\frac{1}{\frac{5\pi}{3}}\int_0^{2\pi}\int_1^2\int_0^{\sqrt{4-z^2}} r(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi = \frac{3}{5\pi}\int_0^{2\pi}\int_1^2\int_0^{\sqrt{4-z^2}} r^3\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{3}{5\pi}\int_0^{2\pi}\int_1^2\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{4-z^2}} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi = \frac{3}{5\pi}\cdot\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_1^2 16 - 8z^2 + z^4\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{3}{20\pi}\int_0^{2\pi}\left[16z - 8\frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5}\right]_1^2 \mathrm{d}\varphi = \frac{3}{20\pi}\cdot\frac{53}{15}\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\varphi = \frac{53}{100\pi}\left[\varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{53}{50} \approx 1,06$$

4.4. Tömeg

Ha egy T vékony lemez sűrűségét a $\delta : (x, y) \mapsto \delta(x, y)$, $(x, y) \in T$ függvény írja le, akkor a tömege a következőképp számítható ki:

$$M_T = \iint_T \delta(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Ha egy térbeli T test sűrűségét a $\delta : (x, y, z) \mapsto \delta(x, y, z)$, $(x, y, z) \in T$ függvény írja le, akkor T tömegét a következőképp tudjuk kiszámítani:

$$M_T = \iiint_T \delta(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Példafeladat:

4.4.1. Feladat

Legyen T az a vékony lemez, amelyet az $y = x^2$ parabola és az $y = 1$ egyenes határol. Az (x, y) pontban a lemez sűrűségét a $\delta(x, y) = x^2 + y^2$ függvény írja le. Adjuk meg a lemez tömegét!

Megoldás:

$$M_T = \iint\limits_T \delta(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{x^2}^{1} x^2 + y^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1}\left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^{1}\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} x^2 + \frac{1}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^7}{7}\right]_{-1}^{1} = \frac{88}{105} \approx 0,8381$$

4.5. Tömegközéppont

Egy vékony lemez tömegközéppontja: $S(S_x, S_y)$, ahol

$$S_x = \frac{\iint_A x\cdot\delta(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_A \delta(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$

$$S_y = \frac{\iint_A y\cdot\delta(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_A \delta(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$

Egy térbeli test tömegközéppontja: $S(S_x, S_y, S_z)$, ahol

$$S_x = \frac{\iiint_A x\cdot\delta(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_A \delta(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

$$S_y = \frac{\iiint_A y\cdot\delta(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_A \delta(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

$$S_z = \frac{\iiint_A z\cdot\delta(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_A \delta(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

Ha a vékony lemez vagy térbeli test homogén, azaz sűrűsége állandó $\big(\delta(x,y) = konstans\ /\delta(x,y,z) = konstans\big)$, akkor a tömegközéppont egybeesik a geometriai súlyponttal.

Papposz-Guldin tételek:

A tömegközéppont ismeretében meg tudjuk határozni forgástestek felszínét és térfogatát.
A forgástest felszíne illetve térfogata és a tömegközéppont által leírt kör kerülete közötti összefüggést adják meg a Papposz-Guldin tételek.

4.5.1. Tétel. *Legyen s egy síkgörbe, melynek ívhossza I_s, forgassuk meg a görbét egy a síkjában fekvő, de a görbét nem metsző t egyenes körül α szöggel.*
Legyen d a görbe súlypontjának és a t-tengelynek a távolsága.
Ekkor az így kapott forgásfelület A felszíne egyenlő a görbe I_s ívhossza és a görbe súlypontjának forgatás közben leírt útjának szorzatával, azaz:

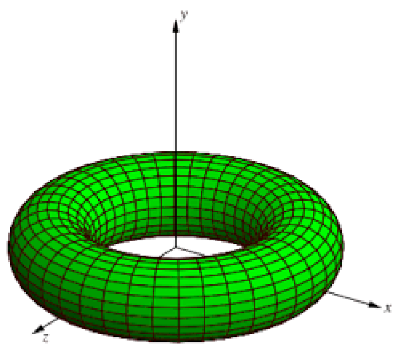
$$A = I_s \cdot d \cdot \alpha$$

4.5.2. Tétel. *Legyen A egy T területű síkidom, és legyen t egy egyenes A-val egy síkban, úgy, hogy nem metszi A-t.*
Ha az A síkidomot a t egyenes, mint tengely körül α szöggel elforgatjuk, egy V térfogatú forgástestet kapunk.
Legyen az A síkidom súlypontja S_A, és jelölje d a súlypont távolságát a t-tengelytől.
Ekkor a kapott forgástest térfogata egyenlő a síkidom területének és a súlypont által leírt pálya ívhosszának a szorzatával, azaz

$$V = T_A \cdot d \cdot \alpha$$

A Papposz-Guldin tételek segítségével könnyedén meghatározhatjuk egy tórusz felszínét és térfogatát:

4.5.1. Definíció. *Egy körlemezt a vele egy síkban lévő (de őt nem metsző) egyenes körüli elforgatásával kapott forgástestet tórusznak nevezzük.*



Legyen a körlemez sugara r, valamint jelölje a forgástengely és a kör középpontjának távolságát R.
Ekkor a tórusz felszíne:

$$A_{Torusz} = (2\pi r)(2\pi R) = 4\pi^2 Rr$$

Térfogata:

$$V_{Torusz} = (r^2\pi)(2\pi R) = 2\pi^2 r^2 R$$

Példafeladatok:

4.5.1. Feladat

Határozzuk meg az egységnyi sugarú félgömb tömegközéppontjának koordinátáit, ha a félgömb (x, y, z) pontjában a sűrűségét a $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2$ függvény írja le.
Térjünk át hengerkoordinátákra!
Az integrálási határok:

$$0 \leq r \leq \sqrt{1-z^2} \qquad\qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \qquad\qquad 0 \leq z \leq 1$$

Először számítsuk ki a test tömegét:

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-z^2}} r^2 r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{1-z^2}} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^1 1-2z^2+z^4 \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left[z-2\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}\right]_0^1 \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{2}{15}\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\varphi = \frac{2}{15}\left[\varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{4\pi}{15}$$

Ekkor a tömegközéppont koordinátái:

$$S_x = \frac{1}{\frac{4\pi}{15}}\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{1-z^2}} r\cos\varphi\cdot r^2\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = \frac{15}{4\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{1-z^2}} r^4\cos\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{15}{4\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\cos\varphi\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^{\sqrt{1-z^2}} \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = \frac{15}{4\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{1}{5}\sqrt{1-z^2}\big(1-z^2\big)^2\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{3}{4\pi}\int_0^1 \sqrt{1-z^2}\big(1-z^2\big)^2\big[\sin\varphi\big]_0^{2\pi}\mathrm{d}z = \frac{3}{4\pi}\int_0^1 \sqrt{1-z^2}\big(1-z^2\big)^2(\sin 2\pi-\sin 0)\,\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{3}{4\pi}\int_0^1 \sqrt{1-z^2}\big(1-z^2\big)^2\cdot 0\,\mathrm{d}z = \frac{3}{4\pi}\int_0^1 0\,\mathrm{d}z = 0$$

$$S_y = \frac{1}{\frac{4\pi}{15}}\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{1-z^2}} r\sin\varphi\cdot r^2\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = \frac{15}{4\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{1-z^2}} r^4\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{15}{4\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\sin\varphi\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^{\sqrt{1-z^2}} \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = \frac{15}{4\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{1}{5}\sqrt{1-z^2}\big(1-z^2\big)^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{3}{4\pi}\int_0^1 \sqrt{1-z^2}\big(1-z^2\big)^2\big[-\cos\varphi\big]_0^{2\pi}\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{3}{4\pi}\int_0^1 \sqrt{1-z^2}\big(1-z^2\big)^2(-\cos 2\pi+\cos 0)\,\mathrm{d}z = \frac{3}{4\pi}\int_0^1 \sqrt{1-z^2}\big(1-z^2\big)^2\cdot 0\,\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{3}{4\pi}\int_0^1 0\,\mathrm{d}z = 0$$

$$S_z = \frac{1}{\frac{4\pi}{15}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} z \cdot r^2 \cdot r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\varphi = \frac{15}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} z \cdot r^3 \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{15}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 z \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{1-z^2}} \mathrm{d}z \,\mathrm{d}\varphi = \frac{15}{16\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 z\bigl(1 - 2z^2 + z^4\bigr) \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{15}{16\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{2} + \frac{z^6}{6}\right]_0^1 \mathrm{d}\varphi = \frac{15}{16\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{6} \mathrm{d}\varphi = \frac{15}{96\pi} [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{30\pi}{96\pi} = \frac{15}{48}$$

Tehát az egység sugarú δ sűrűségű félgömb tömegközéppontja:

$$S(0, 0, \frac{15}{48})$$

Megjegyzés:
Nem meglepő, hogy a tömegközéppont x és y koordinátája is 0 lett, hiszen ez a szimmetriából adódó tulajdonság.

4.5.2. Feladat

Határozzuk meg a kardioid súlypontját!
$A = \bigl\{(r, \varphi) : 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le a(1 + \cos\varphi)\bigr\}$, $\delta(x, y) = 1 \longrightarrow \delta(r, \varphi) = 1$
Ekkor:

$$S_x = \frac{\iint_A x\delta(x,y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y}{T_{Kardioid}} \qquad S_y = \frac{\iint_A y\delta(x,y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y}{T_{Kardioid}}$$

A kardioid területét az előzőekben már kiszámítottuk: $T_{Kardioid} = \frac{a^2 3\pi}{2}$
Ekkor:

$$S_x = \frac{1}{\frac{a^2 3\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r^2 \cos\varphi \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi = \frac{2}{a^2 3\pi} \int_0^{2\pi} \cos\varphi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{a(1+\cos\varphi)} \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{2a^3}{3a^2 3\pi} \int_0^{2\pi} \cos\varphi (1 + \cos\varphi)^3 \,\mathrm{d}\varphi = \frac{2a}{9\pi} \int_0^{2\pi} \cos\varphi + 3\cos^2\varphi + 3\cos^3\varphi + \cos^4\varphi \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{2a}{9\pi} \int_0^{2\pi} \cos\varphi + 3\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} + 3\frac{3\cos\varphi + \cos 3\varphi}{4} + \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2}\right)^2 \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{2a}{9\pi} \int_0^{2\pi} \cos\varphi + 3\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} + 3\frac{3\cos\varphi + \cos 3\varphi}{4} + \frac{1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}}{4} \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{2a}{9\pi} \left(\bigl[\sin\varphi\bigr]_0^{2\pi} + \frac{3}{2}\left[\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{2\pi} + \frac{3}{4}\left[3\sin\varphi + \frac{\sin 3\varphi}{3}\right]_0^{2\pi} \right) +$$

$$+ \frac{2a}{9\pi} \left(\frac{1}{4}\left[\varphi + 2\frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{1}{2}\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{8}\right]_0^{2\pi} \right) =$$

$$= \frac{2a}{9\pi}\left(3\pi + \frac{3}{4}\pi\right) = \frac{2a}{9\pi} \cdot \frac{15\pi}{4} = \frac{5}{6}a$$

$$S_y = \frac{1}{\frac{a^2 3\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \frac{2}{a^2 3\pi} \int_0^{2\pi} \sin\varphi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{a(1+\cos\varphi)} \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{2a}{9\pi} \int_0^{2\pi} \sin\varphi + 3\cos\varphi\sin\varphi + 3\cos^2\varphi\sin\varphi + \cos^3\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{2a}{9\pi} \int_0^{2\pi} \sin\varphi + \frac{3}{2}\sin 2\varphi + 3\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\sin\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi$$

Az $\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$ és $\int_0^{2\pi} \sin 2\varphi\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi$ integrálokat külön, parciális integrálással számítjuk ki:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \left[-\cos\varphi \cdot \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} -\sin 2\varphi \cdot (-\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 0 - 2\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

Hozzáadva mindkét oldalhoz $2\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$-t, majd mindkét oldalt elosztva 3-mal, kapjuk a következőt:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin 2\varphi\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi = \left[\frac{1+\cos 2\varphi}{2} \cdot \left(-\frac{\cos 2\varphi}{2}\right)\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} -\sin 2\varphi \cdot \left(-\frac{\cos 2\varphi}{2}\right)\mathrm{d}\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin 2\varphi\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi = 0 - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 4\cos^3\varphi\sin\varphi - 2\cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin 2\varphi\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi = -\frac{4}{2} \cdot \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2\varphi\frac{1+\cos 2\varphi}{2} - \sin 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin 2\varphi\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi = -\int_0^{2\pi} \sin 2\varphi\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi + \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 2\varphi}{2}\right]_0^{2\pi}$$

Mindkét oldalhoz hozzáadva $\int_0^{2\pi} \sin 2\varphi \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi$-t, majd mindkét oldalt elosztva 2-vel, kapjuk a következőt:

$$\int_0^{2\pi} \sin 2\varphi \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi = 0$$

Folytatva az S_y kiszámítását:

$$S_y = \frac{2a}{9\pi}\left(\big[-\cos\varphi\big]_0^{2\pi} + \frac{3}{2}\left[-\frac{\cos 2\varphi}{2}\right]_0^{2\pi} + 3\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 0\right) = 0$$

Tehát a kardioid súlypontja:

$$S\left(\frac{5}{6}a, 0\right)$$

Megjegyzés: Hasonlóan az 4.5.1. feladathoz, itt is a szimmetriából adódóan a súlypont y koordinátája 0 lett.

4.5.3. Feladat

Legyen az A tartomány az $y = 3$, $y = x$ és $y = 12 - x$ egyenesekkel határolt egyenlő szárú háromszög.
Forgassuk meg ezt a háromszöget az y-tengely körül $\alpha = 2\pi$ szöggel! Majd számoljuk ki az így kapott forgástest térfogatát!

Számoljuk ki az A tartomány területét:

$$T_A = \iint_A 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_3^6 \int_y^{12-y} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_3^6 \big[x\big]_y^{12-y}\mathrm{d}y =$$

$$= \int_3^6 12 - 2y\,\mathrm{d}y = \left[12y - 2\frac{y^2}{2}\right]_3^6 = 9$$

Ezután számítsuk ki A súlypontját: $S_A(S_x, S_y)$

$$S_x = \frac{1}{T_A}\iint_A x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{9}\int_3^6\int_y^{12-y} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{9}\int_3^6 \left[\frac{x^2}{2}\right]_y^{12-y}\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2}\int_3^6 (12-y)^2 - y^2\,\mathrm{d}y = \frac{1}{18}\int_3^6 144 - 24y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{18}\left[144y - 24\frac{y^2}{2}\right]_3^6 = 6$$

$$S_y = \frac{1}{T_A}\iint_A y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{9}\int_3^6\int_y^{12-y} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{9}\int_3^6 \big[xy\big]_y^{12-y}\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{9}\int_3^6 12y - 2y^2 \,\mathrm{d}y = \frac{1}{9}\left[12\frac{y^2}{2} - 2\frac{y^3}{3}\right]_3^6 = 4$$

Tehát a súlypont: $S_A(6,4)$
A súlypont távolsága az y-tengelytől: $d = 6$

Ekkor a második Papposz-Guldin tétel segítségével ki tudjuk számítani az így kapott forgástest térfogatát:

$$V = T_A \cdot d \cdot \alpha = 9 \cdot 6 \cdot 2\pi = 108\pi = 339,12$$

4.5.4. Feladat

Határozzuk meg az $A = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq r^2, 0 \leq y\right\}$ tartományt lefedő homogén síklemez tömegközéppontjának koordinátáit!

Az A tartomány egy félkör, az y-tengelyre szimmetrikus, és a tömegközéppont a szimmetriatengelyen helyezkedik, ezért $S_x = 0$.

Az S_y koordinátát Papposz-Guldin második tétele segítségével egyszerűen meg tudjuk határozni:
Forgassuk meg az A félkört az x-tengely körül. Így egy gömböt kapunk, melynek ismerjük a térfogatát: $V_{Gomb} = \frac{4\pi r^3}{3}$
A tartomány egy félkör, tehát területe:

$$T_A = \frac{r^2\pi}{2}$$

Ekkor a Papposz-Guldin második tétele szerint:

$$V_{Gomb} = T_A \cdot S_y \cdot 2\pi \longrightarrow \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{r^2\pi}{2} \cdot S_y \cdot 2\pi$$

Megoldva az egyenletet kapjuk, hogy:

$$S_y = \frac{4r}{3\pi}$$

Tehát a tömegközéppont:

$$S(0, \frac{4r}{3\pi})$$

4.6. Tehetetlenségi nyomaték

A tehetetlenségi nyomaték a tömeggel analóg mennyiség forgómozgás esetében. Vagyis a tehetetlenségi nyomaték a forgást végző merev test forgási tehetetlensége.

Egy A vékony lemez tehetetlenségi nyomatékát a következőképpen számolhatjuk ki:
Az x-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta_x = \iint_A y^2 \delta(x,y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

Az y-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta_y = \iint\limits_A x^2 \delta(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Egy A kiterjedt test tehetetlenségi nyomatékát pedig az alábbi képletek alapján határozhatjuk meg:

Az x-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta_x = \iiint\limits_A \left(y^2+z^2\right)\delta(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Az y-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta_y = \iiint\limits_A \left(x^2+z^2\right)\delta(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Az z-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta_z = \iiint\limits_A \left(x^2+y^2\right)\delta(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

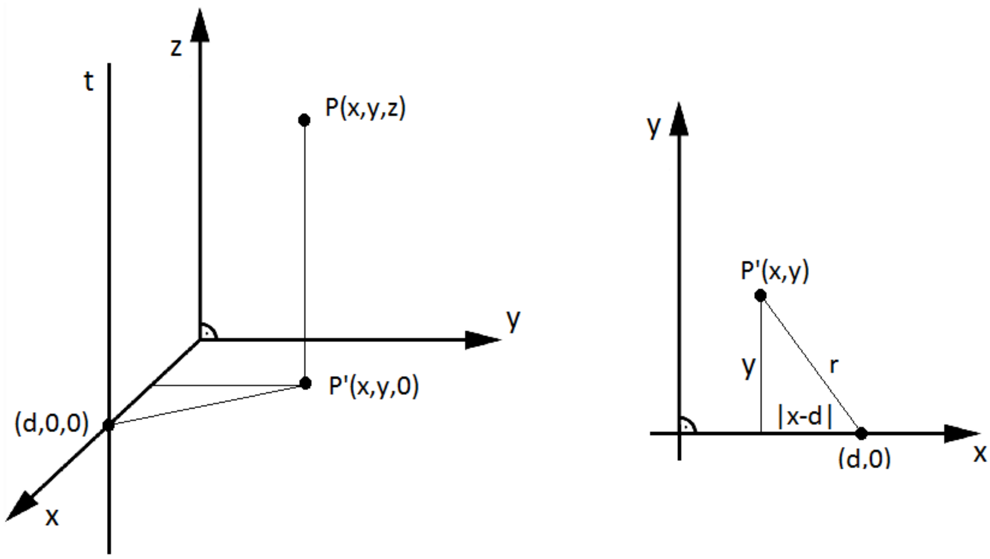
Tetszőleges t-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékot a Steiner-tétel segítségével tudjuk meghatározni.

4.6.1. Tétel (Steiner-tétel).

$$\Theta_t = \Theta_s + Md^2$$

Ahol Θ_s a t-tengellyel párhuzamos, tömegközépponton áthaladó tengelyre vett tehetetlenségi nyomaték, M a test tömege, d pedig a két tengely távolsága.

Helyezzük el a T testet úgy, hogy a tömegközéppontja az origóba essen és a forgástengelye a z-tengely irányába mutasson.
A T test (x,y,z) pontjában a sűrűsége $\delta(x,y,z)$.
Legyen t az a tengely, ami párhuzamos a z-tengellyel és átmegy a $(d,0,0)$ ponton.
Ekkor a $P(x,y,z)$ pont távolságát a t tengelytől a következőképp számolhatjuk ki:
Legyen a $P(x,y,z)$ pont vetülete az xy-síkra $P'(x,y,0)$.



A $P'(x,y)$ és a $(d,0)$ pont r távolságát Pitagorasz-tétel segítségével tudjuk meghatározni:

$$r = \sqrt{y^2 + (x-d)^2}$$

Ekkor a t-tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték felírható a következő módon:

$$\Theta_t = \iiint\limits_T r^2 \delta(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_T \left(y^2 + (x-d)^2\right)\delta(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$$

$$= \iiint\limits_T \left(x^2 + y^2\right)\delta(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - 2d\iiint\limits_T x\delta(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z +$$

$$+d^2\iiint\limits_T \delta(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Az első tag a z-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték:

$$\iiint\limits_T \left(x^2 + y^2\right)\delta(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \Theta_z$$

A második tag S_x-szel egyenlő, de mivel a T testet úgy helyeztük el a koordinátarendszerben, hogy a tömegközéppontja az origóba essen, ezért $S_x = 0$:

$$2d\iiint\limits_T x\delta(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0$$

A harmadik tag pedig a T test tömegét jelöli:

$$d^2\iiint\limits_T \delta(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = d^2 M$$

Tehát a t-tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta_t = \Theta_z + Md^2$$

Példafeladatok:

4.6.1. Feladat

Határozzuk meg egy M tömegű a élhosszúságú homogén kocka, valamelyik élén átmenő tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát!
Megoldás:
Helyezzük el a kockát a koordináta rendszerben úgy, hogy az egyik csúcsa az origó legyen!
Mivel homogén kockáról van szó, ezért a sűrűsége állandó minden pontban. Azaz $\delta(x,y,z) = \frac{M}{V} = \frac{M}{a^3}$.
Az x-tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta_x = \iiint\limits_A \left(y^2 + z^2\right)\delta(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^a\int\limits_0^a\int\limits_0^a \left(y^2 + z^2\right)\frac{M}{a^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{M}{a^3}\int\limits_0^a\int\limits_0^a \left[y^2 x + z^2 x\right]_0^a \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{Ma}{a^3}\int\limits_0^a\int\limits_0^a y^2 + z^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{M}{a^2}\int\limits_0^a \left[\frac{y^3}{3}+z^2y\right]_0^a \mathrm{d}z = \frac{Ma}{a^2}\int\limits_0^a \frac{a^2}{3}+z^2\,\mathrm{d}z = \frac{M}{a}\left[\frac{a^2}{3}z+\frac{z^3}{3}\right]_0^a = \frac{2}{3}Ma^2$$

4.6.2. Feladat

Határozzuk meg az M tömegű, 10 magasságú, 5 és 3 sugarak által meghatározott 2 vastagságú homogén H hengerhéj saját tengelyére vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát!

Megoldás:

Mivel homogén hengerhéjról van szó, ezért a sűrűsége állandó:

$$\delta(x,y,z) = \frac{M_{Hengerhej}}{V_{Hengerhej}} = \frac{M}{5^2\cdot 10\pi - 3^2\cdot 10\pi} = \frac{M}{160\pi}$$

Ekkor a z-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta_z = \iiint\limits_H \left(x^2+y^2\right)\delta(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Mivel a tartomány, amin integrálunk egy henger, ezért térjük át hengerkoordinátákra!
Az integrálási határok:

$3 \le r \le 5 \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi \qquad 0 \le z \le 10$

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{10}\int\limits_3^{5} r\left(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi\right)\frac{M}{160\pi}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi = \frac{M}{160\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{10}\int\limits_3^{5} r^3\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{M}{160\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{10}\left[\frac{x^4}{4}\right]_3^5 \mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi = \frac{136M}{160\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{10} 1\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi = \frac{17M}{20\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left[z\right]_0^{10}\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{10\cdot 17M}{20\pi}\int\limits_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\varphi = \frac{17M}{2\pi}\left[\varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{17M}{2\pi}2\pi = 17M$$

4.6.3. Feladat

Legyen t a $(4,0,0)$ ponton átmenő, z-tengellyel párhuzamos egyenes. Továbbá adott egy H, R sugarú, h magasságú, M tömegű homogén henger. Határozzuk meg a H henger t-tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát!

Megoldás:

Mivel szimmetrikus testről van szó, ezért a tömegközéppontja a z-tengelyen helyezkedik el. Szükség van a tömegközépponton áthaladó tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékra:
A henger homogén, azaz sűrűsége állandó. Tehát: $\delta(x,y,z) = \frac{M}{V} = \frac{M}{R^2\pi h}$.
Mivel a H tartomány egy henger, térjünk át hengerkoordinátákra!
A határok:

$$0 \le r \le R \qquad\qquad 0 \le \varphi \le 2\pi \qquad\qquad 0 \le z \le h$$

Ekkor a z-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték a következő:

$$\Theta_z = \iiint_H \left(x^2 + y^2\right)\delta(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^h\int_0^R \left(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi\right) r \frac{M}{R^2\pi h}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{M}{R^2\pi h}\int_0^{2\pi}\int_0^h\int_0^R r^3\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi = \frac{M}{R^2\pi h}\int_0^{2\pi}\int_0^h \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R \mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{MR^2}{4\pi h}\int_0^{2\pi}\int_0^h 1\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi = \frac{MR^2}{4\pi h}\int_0^{2\pi}\left[z\right]_0^h \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{MR^2}{4\pi}\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\varphi = \frac{MR^2}{4\pi}\left[\varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}MR^2$$

A t-tengely $d = 4$ távolságra van a z-tengelytől.
Ekkor a t-tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta_t = \Theta_z + Md^2 = \frac{1}{2}MR^2 + 16M = M\left(\frac{R^2}{2} + 16\right)$$

Hivatkozások

[1] LACZKOVICH MIKLÓS - T. SÓS VERA: Valós Analízis I., Typotex Kiadó, Budapest, 2012

[2] LACZKOVICH MIKLÓS - T. SÓS VERA: Valós Analízis II., Typotex Kiadó, Budapest, 2013

[3] FEKETE ZOLTÁN - ZALAY MIKLÓS: Többváltozós függvények analízise, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985

[4] GEORGE B. THOMAS: Thomas-féle Kalkulus III., Typotex Kiadó, Budapest, 2007

[5] GÉMES MARGIT: Fejezetek az analízisből, Előadás jegyzet 2016

[6] B.P. GYEMIDOVICS: Matematikai Analízis Feladatgyűjtemény, Tankönyvkiadó, Budapest, 1971

[7] https://hu.wikipedia.org/wiki/Papposz-Guldin-tétel

[8] http://aries.ektf.hu/ hz/pdf-tamop/pdf-01/html/ch03.html

[9] https://hu.wikipedia.org/wiki/Kardioid