Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Kapui Dóra

Differenciálszámítás normált terekben

Szakdolgozat
Matematika BSc, elemző szakirány

Témavezető:
Tarcsay Zsigmond
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Budapest, 2017

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Tarcsay Zsigmondnak, akinek segítsége és hasznos tanácsai nélkül nem jöhetett volna létre ez a dolgozat.
Köszönettel tartozom családomnak, akik a tanulmányaim során mindvégig támogattak és mellettem álltak. Emellett köszönöm párom és barátaim biztatását.

Bevezetés

A szakdolgozatom témája a normált térbeli differenciálszámítás. A dolgozatom első felében ismertetem a normált térhez kapcsolódó alapfogalmakat és tételeket, valamint mutatok példát normára. Továbbá az első fejezet második részében bevezetem a korlátos lineáris operátor és az operátornorma fogalmát, és nem-triviális példát adok végtelen dimenziós tér felett nem korlátos lineáris transzformációra.
A második fejezetben az alapfogalmak definiálása után elsőként a Fréchet-deriváltat mutatom be, majd az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineáris transzformációk leírásának segítségével megmutatom, hogy a klasszikus értelemben vett differenciálszámítás és a normált térbeli Fréchet-deriválás lényegében ugyanaz. Ezt követően - hasonlóan, mint az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények esetében - ismertetem az összeg-, és skalárral megszorzott függvények, valamint a kompozíciófüggvény differenciálási szabályát. Majd egy példán végigvezetem, hogy egy adott függvény differenciálható-e, és mi a deriváltja. Ezután bemutatom a Gâteaux-deriváltat, valamint azt, hogy milyen összefüggés van a Gâteaux-derivált és a Fréchet-derivált között. Ezt követően az egyváltozós differenciálható függvényekhez hasonlóan szükséges feltételt mondok ki a lokális szélsőérték létezéséhez normált térben. Végül egy konkrét példa segítségével legrövidebb ívhosszúságú görbét keresek.

Dolgozatomban használt jelölések

- $\mathbb{R}_+$: Pozitív valós számok halmaza
- $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$: Végtelen sor
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$: Végtelen sor összege
- $\mathbb{K}$ számtest $= \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$ számtestek
- $A(x) := Ax$, ahol A lineáris operátor
- $L(X, Y)$: Lineáris leképezések halmaza
- $\|\cdot\|_\infty$: Maximum norma

1. fejezet

A normált tér

1.1. Alapfogalmak

1.1.1. Definíció. Legyen X vektortér $\mathbb{K}$ felett, ahol $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$. Normának nevezünk egy $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}_+$ függvényt, ha teljesülnek rá a következő normaaxiómák:

i) minden $x \in X$-re: $\|x\| \geq 0$ és $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

ii) minden $\lambda \in \mathbb{K}$ és minden $x \in X$ esetén $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,

iii) minden $x, y \in X$-re $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Ekkor az $(X, \|\cdot\|)$ párt normált térnek nevezzük.

Nézzünk néhány példát normált terekre.

- Legyen $X := \mathbb{R}$, mint önmaga feletti vektortér, ekkor $\mathbb{R}$ normált tér az $\|x\| := |x|$ $(x \in \mathbb{R})$ normára nézve.
- Az $X = \mathbb{C}$ komplex számtest ugyancsak normált tér az $\|x\| := |x|$ $(x \in \mathbb{C})$ normára nézve.
- Ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor az $X := \mathbb{R}^n$ is normált tér az euklideszi normával, azaz $x = (x_1, x_2, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$ esetén: $\|x\|_2 := \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} {x_i}^2}$.
- Legyen adott egy $I = [a, b]$ intervallum. Ekkor az
$$X := C(I) = \{f : I \to \mathbb{R} \text{ folytonos függvények}\}$$
is normált tér az $\|f\|_{\max} := \max_I |f|$ normával.

1.1.2. Definíció. Legyen X normált tér. Adott egy $x_0 \in X$ pont, valamint egy $r > 0$ szám. Ekkor az r sugarú, x_0 középpontú nyílt és zárt gömböt a következő halmazokként definiáljuk:
nyílt gömb: $B(x_0, r) := \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}$,
zárt gömb: $\overline{B}(x_0, r) := \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\}$.

1.1.3. Definíció. Legyen X normált tér. Egy $G \subseteq X$ halmazt nyíltnak nevezünk, ha minden $x \in G$ esetén létezik $r > 0$, hogy $B(x, r) \subseteq G$.
Egy $F \subseteq X$ halmazt zártnak nevezünk, ha az $F^C := X \backslash F$ komplementer halmaz nyílt.

Nem nehéz belátni, hogy a normált térbeli $B(x_0, r)$ nyílt (illetve a $\overline{B}(x_0, r)$ zárt) gömbök valóban nyíltak (illetve zártak).

1.1.4. Állítás. *Az $F \subseteq X$ halmaz akkor és csak akkor zárt, ha minden F-ben haladó (x_n) ($n \in \mathbb{N}$) konvergens sorozatra $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ esetén $x \in F$ is teljesül.*

1.1.5. Definíció. Egy $K \subseteq X$ nem üres halmazt korlátosnak nevezünk, ha létezik $x \in X$ és $r > 0$, hogy $K \subseteq B(x, r)$, vagyis minden $k \in K$-ra $\|x - k\| < r$. Ekkor a $K \subseteq X$ nem üres, korlátos halmaz átmérője $diam(K) := \sup\limits_{x,y \in K} \|x - y\|$.

1.1.6. Definíció. Legyen $(X, \|\cdot\|)$ normált tér, $(x_n) \subset X$ sorozat és $x \in X$ vektor. Ekkor azt mondjuk, hogy

i) az (x_n) sorozat az x vektorhoz konvergál (jelölésben $x_n \to x$, vagy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$), ha $\|x_n - x\| \to 0$.

ii) a $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n$ végtelen sor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ összege egyenlő x-el, ha az $s_n := \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ részletösszeg sorozat x-hez konvergál, vagyis $s_n \to x$.

1.1.7. Definíció. Legyenek X és Y normált terek. Az $f \colon X \to Y$ függvény folytonos valamely $a \in X$ pontban, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy ha $x \in X$ és $\|x - a\| < \delta$, akkor $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.

1.1.8. Definíció. Legyen $f \colon X \to Y$ függvény (X és Y normált terek) és $x_0 \in X$-beli pont. Azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke az x_0 pontban az a $y_0 \in Y$ vektor, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy $0 < \|x - x_0\| < \delta$ esetén $\|f(x) - y_0\| < \varepsilon$.

1.1.9. Lemma. *Ha X normált tér, akkor minden $x, y \in X$ esetén $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$.*

Bizonyítás. Legyen $x = (x - y) + y$. A normatulajdonságot használva:

$$\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\| \Leftrightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

Az állítás szimmetriája miatt az is igaz, hogy

$$\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|(-1) \cdot (x - y)\| = \|x - y\|,$$

amiből a bizonyítandó egyenlőtlenség már adódik. $\square$

1.1.10. Állítás. *Az $\|\cdot\| \colon X \to \mathbb{R}_+$ normafüggvény folytonos, azaz ha $x_n \to x$, akkor $\|x_n\| \to \|x\|$.*

Bizonyítás. Az előző lemmát használva kapjuk, hogy $\big|\|x_n\| - \|x\|\big| \leq \|x_n - x\| \to 0$, ha $n \to \infty$. $\square$

1.1.11. Állítás. *Legyen X normált tér, (x_n) és (y_n) $(n \in \mathbb{N})$ X-beli sorozat. Ha $x_n \to x$, $y_n \to y$ és (λ_n) $(n \in \mathbb{N})$ olyan $\mathbb{K}$-beli, hogy $\lambda_n \to \lambda$, akkor*

i) $x_n + y_n \to x + y$,

ii) $\lambda_n \cdot x_n \to \lambda \cdot x$.

Bizonyítás. i) A feltétel szerint $\|x_n - x\| \to 0$, illetve $\|y_n - y\| \to 0$, amiből a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$\|x_n + y_n - (x + y)\| = \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0,$$

ami éppen azt jelenti, hogy $x_n + y_n \to x + y$.
ii) Ismét a háromszög-egyenlőtlenséget alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\|\lambda_n \cdot x_n - \lambda \cdot x\| &= \|\lambda_n \cdot x_n - \lambda_n \cdot x + \lambda_n \cdot x - \lambda \cdot x\| \leq \\
&\leq \|\lambda_n \cdot x_n - \lambda_n \cdot x\| + \|(\lambda_n - \lambda) \cdot x\| = \\
&= |\lambda_n| \cdot \|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda| \cdot \|x\|.
\end{aligned}$$

Mivel $|\lambda_n| \to |\lambda|$, $\|x_n - x\| \to 0$ és $|\lambda_n - \lambda| \to 0$, így a fenti kifejezés nullához tart. $\square$

1.1.12. Definíció. Az (x_n) $(n \in \mathbb{N})$ X-beli sorozatot Cauchy-sorozatnak nevezzük, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$ és $n, m \geq N$ esetén $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

1.1.13. Tétel. *Egy $X = \mathbb{R}^n$-beli sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.*

1.1.14. Állítás. *Normált térben minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat.*

Bizonyítás. Legyen (x_n) $(n \in \mathbb{N})$ olyan X-beli sorozat, amely konvergál valamely $x \in X$ vektorhoz, és legyen $\varepsilon > 0$ rögzített szám. Ekkor létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy $n \geq N$ esetén $\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor $n, m \geq N$ esetén

$$\|x_n - x_m\| = \|(x_n - x) + (x - x_m)\|.$$

A normára vonatkozó háromszög-egyenlőtlenséget használva:

$$\|(x_n - x) + (x - x_m)\| \leq \|x_n - x\| + \|x - x_m\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

amivel az állítást beláttuk. $\square$

1.1.15. Definíció. Az X normált teret Banach-térnek nevezzük, ha minden X-ben haladó Cauchy-sorozat konvergens.

Igazolható, hogy bármely véges dimenziós normált tér Banach-tér, illetve folytonos függvények $C(I)$ tere is Banach-tér a $\|\cdot\|_{\max}$ normára nézve.

1.1.16. Példa. Legyen $[a,b]$ egy zárt intervallum és definiáljuk a $\|\cdot\|_1 \colon C[a,b] \to \mathbb{R}_+$ függvényt az $\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\,dx$ egyenlőséggel. Megmutatjuk, hogy $\|\cdot\|_1$ norma. Ehhez elegendő azt igazolni, hogy az $\|f\|_1 = 0$ felvetésből $f = 0$ következik, ugyanis a többi normaaxióma egyszerűen ellenőrizhető.

Legyen $f \in C([a,b])$ olyan nemnegatív függvény, hogy $f \neq 0$, megmutatjuk, hogy $\int_a^b f > 0$. Legyen $x_0 \in [a,b]$ olyan, hogy $f(x_0) > 0$. Feltehető, hogy a $x_0 \in]a,b[$. Az f folytonossága miatt az $\varepsilon := \frac{f(x_0)}{2}$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy $]x_0-\delta, x_0+\delta[\subseteq [a,b]$ és minden $x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$ esetén

$$f(x_0) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon,$$

azaz

$$f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2} = \varepsilon.$$

Emiatt

$$2\delta \cdot \varepsilon = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \varepsilon \leq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f \leq \int_a^b f,$$

amivel igazoltuk, hogy $\int_a^b f > 0$.

Legyen ezek után $f \in C[a,b]$ tetszőleges olyan függvény, hogy $\|f\|_1 = 0$, azaz $\int_a^b |f| = 0$, akkor a fentiek szerint $|f| = 0$, azaz $f = 0$, amivel igazoltuk hogy $\|f\|_1 = 0$ akkor és csak akkor, ha $f = 0$.

Az alábbiakban példát mutatunk nem teljes normált térre.

1.1.17. Állítás. *A $(C[a,b], \|\cdot\|_1)$ nem teljes, azaz nem Banach-tér.*

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $[a,b] = [-1,1]$. Rögzített $n \in \mathbb{N}$ esetén értelmezzük az $f_n \in C[a,b]$ függvényt a következőképp: $f_n(x) = 0$, ha $x \in [-1,0]$ és $f_n(x) = 1$, ha $x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$, illetve legyen f_n lineáris a $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ halmazon úgy, hogy folytonos legyen. Megmutatjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat Cauchy-sorozat a fenti $(C[-1,1], \|\cdot\|_1)$ térben, de nem konvergens. Ugyanis, bármely $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$ esetén:

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_{-1}^{1} |f_n - f_m| = \int_0^{\frac{1}{m}} |f_n - f_m| \leq \int_0^{\frac{1}{m}} |f_n| + |f_m| \leq \int_0^{\frac{1}{m}} 2 = \frac{2}{m},$$

amiből látható, hogy (f_n) $(n \in \mathbb{N})$ Cauchy-sorozat.
Tegyük fel indirekt módon, hogy $\|f_n - f\|_1 \to 0$ teljesül valamely $f \in C[-1,1]$ folytonos függvényre. Ekkor

$$\int_{-1}^{0} |f| = \int_{-1}^{0} |f - f_n| \leq \int_{-1}^{1} |f - f_n| = \|f - f_n\|_1 \to 0,$$

vagyis $\int_{-1}^{0} |f| = 0$, ezért $f(x) = 0$ minden $x \in [-1, 0]$ számra.
Legyen $m \in \mathbb{N}$ tetszőleges, ekkor bármely $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$ esetén

$$\int_{\frac{1}{m}}^{1} |f - 1| = \int_{\frac{1}{m}}^{1} |f - f_n| \leq \int_{-1}^{1} |f - f_n| \to 0,$$

ezért $f(x) = 1$ minden $x \in \left[\frac{1}{m}, 1\right]$ számra. Ez minden m-re igaz, amiből következik, hogy $f(x) = 1$ minden $x \in]0, 1]$, de ez lehetetlen, mert f folytonos függvény. $\square$

A teljesség egy érdekes következményét mutatja be az alábbi eredmény.

1.1.18. Tétel. (Cantor-féle közöspont-tétel) *Legyen X Banach-tér. Ha $(F_n) \subset X$ nem üres, zárt halmazok egymásba skatulyázott sorozata, vagyis $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n$, melyre $diam(F_n) \to 0$, akkor a $\cap F_n$ egy pont.*

Bizonyítás. Legyen $x_n \in F_n$ $(\forall n)$ esetén egy pont. Ezek a pontok egy Cauchy-sorozatot alkotnak, mert minden $n, m \in \mathbb{N}$ küszöbindexre $m \geq n$ esetén

$$\|x_n - x_m\| \leq diam(F_n) \to 0.$$

Tudjuk, hogy X teljes, így a határértékre vonatkozó állításból következik, hogy létezik $x^* := \lim x_n$. Az $\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$ sorozat is x^*-hoz tart és része az F_n-nek. Mivel F_n zárt, így $x^* \in F_n$, amiből az $x^* \in \cap F_n$ következik. A metszetnek csak az x^* pont az egyetlen eleme, mert a $diam(F_n) \to 0$ feltétel miatt nem létezik másik pont, ami minden F_n-nek eleme lenne. $\square$

1.1.19. Állítás. (Weierstass-kritérium) *Legyen X Banach-tér. Ekkor $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ konvergens, ha $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|$ konvergens.*

Bizonyítás. Legyen $a_n := \sum_{i=1}^{n} x_i$ és $b_n := \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$ megfelelő részletösszeg sorozat. Ekkor (b_n) Cauchy-sorozat a $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|$ konvergenciája miatt. Továbbá felírható, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$ indexre, $n > m$ esetén

$$\|a_n - a_m\| = \left\| \sum_{i=m+1}^{n} x_i \right\| \leq \sum_{i=m+1}^{n} \|x_i\| = b_n - b_m = |b_n - b_m|.$$

Ebből következik, hogy (a_n) is Cauchy-sorozat. A feltevés szerint X teljes, azaz Banach-tér, ezért (a_n) konvergens is, ami éppen azt jelenti, hogy $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ is konvergens. □

Megjegyezzük, hogy az olyan $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ sorokat, amelyekre a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$ numerikus sor konvergens, abszolút konvergens soroknak nevezzük. Ezzel a szóhasználattal a Weierstrass-kritérium úgy is átfogalmazható, hogy Banach-térben minden abszolút konvergens sor konvergens.

1.1.20. Definíció. Legyen X Banach-tér. Ekkor az $f\colon X \to X$ leképezés kontrakció, ha létezik $q < 1$ szám, melyre $\|f(x) - f(y)\| \le q \cdot \|x - y\|$, minden $x, y \in X$ esetén.

1.1.21. Tétel. (Banach-féle fixponttétel) *Legyen X Banach-tér és $f\colon X \to X$ egy kontrakció. Ekkor teljesülnek a következők:*

i) *f-nek egyértelműen létezik fixpontja, vagyis létezik egyetlen $x^* \in X$ pont, melyre $x^* = f(x^*)$;*

ii) *bármely $x_0 \in X$ esetén az $x_{n+1} := f(x_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ iterációval értelmezett (x_n) sorozat x^*-hoz konvergál;*

iii) *minden $n \in \mathbb{N}$-re teljesül az alábbi becslés:*

$$\|x_n - x^*\| \le \frac{q^n}{1-q}\|x_1 - x_0\|.$$

Bizonyítás. Tekintsük az $x_{n+1} = f(x_n)$, $(\forall n \in \mathbb{N})$ rekurzióval előállított sorozatot, ahol minden $x_0 \in X$. Ekkor a kontrakciós tulajdonságból felírható a következő:

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|f(x_n) - f(x_{n-1})\| \le q\|x_n - x_{n-1}\| \le \ldots \le q\|x_1 - x_0\|.$$

Legyen $m > n$ tetszőleges index, ekkor

$$\begin{aligned}
\|x_m - x_n\| &= \|(x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \ldots + (x_{n+1} - x_n)\| \le \\
&\le \|x_m - x_{m-1}\| + \|x_{m-1} - x_{m-2}\| + \ldots + \|x_{n+1} - x_n\| \le \\
&\le q^{m-1}\|x_1 - x_0\| + q^{m-2}\|x_1 - x_0\| + \ldots + q^n\|x_1 - x_0\| = \\
&= q^n\|x_1 - x_0\|(1 + q + q^2 + \ldots + q^{m-1-n}) < \\
&< \frac{q^n}{1-q}\|x_1 - x_0\|.
\end{aligned}$$

Tehát $\|x_m - x_n\| < \frac{q^n}{1-q}\|x_1 - x_0\|$.
Az $n \to +\infty$ esetén a jobb oldal határértéke nulla. Ebből következik, hogy minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $N = N(\varepsilon)$, hogy $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$, minden $m > n > N$ esetén. Ekkor $f(x_n)$ Cauchy-sorozat, így konvergens is.

Jelölje $x^* \in \mathbb{R}^n$ a határértéket, azaz $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$. Mivel $x_{n+1} = f(x_n)$ minden n-re, ennek véve a folytonosság miatt a határértékét:

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x^*).$$

Tehát $x^* = f(x^*)$.
A becslés bizonyításához mindkét oldalon határértéket véve kapjuk, hogy

$$\lim_{m\to\infty} \|x_m - x_n\| \leq \lim_{m\to\infty} \frac{q^n}{1-q}\|x_1 - x_0\|$$

$$\|x^* - x_n\| \leq \frac{q^n}{1-q}\|x_1 - x_0\|.$$

Végül megmutatjuk, hogy egyetlen fixpont létezik. Indirekt tegyük fel, hogy $x^*, y^* \in \mathbb{R}^n$ is fixpontok és $x^* \neq y^*$. Ekkor $x^* = f(x^*)$ és $y^* = f(y^*)$. Ebből felírva a kontrakcióra vonatkozó definíciót:

$$\|x^* - y^*\| = \|f(x^*) - f(y^*)\| \leq q\|x^* - y^*\|.$$

Ez csak akkor lehetséges, ha $\|x^* - y^*\| = 0$, ami ellentmond az indirekt feltevésünknek, hogy $x^* \neq y^*$. $\square$

1.2. Lineáris operátorok

1.2.1. Definíció. Legyen X és Y vektortér $\mathbb{K}$ számtest felett. Ha minden $x, y \in \operatorname{dom} A$ és $c \in \mathbb{K}$ esetén teljesül, hogy:

i) $A(x + y) = A(x) + A(y)$

ii) $A(cx) = c \cdot A(x)$

akkor az $A\colon X \to Y$ leképezés lineáris. Azaz minden $x, y \in X$ és $c, d \in \mathbb{K}$ esetén teljesül $A(cx + dy) = c \cdot A(x) + d \cdot A(y)$.

A lineáris leképezéseket szokás lineáris operátoroknak is nevezni, valamint legyen a továbbiakban az $Ax := A(x)$.

1.2.2. Állítás. *Ha X, Y normált tér és $A\colon X \to Y$ lineáris operátor, akkor a következő állítások ekvivalensek egymással.*

i) *Az A operátor folytonos, vagyis ha $x_n \to x$, akkor $Ax_n \to Ax$.*

ii) *Az A leképezés folytonos a nullában, azaz ha $x_n \to 0$, akkor $Ax_n \to 0$.*

iii) *Az A operátor folytonos minden $x_0 \in X$ pontban.*

iv) *Az A operátor korlátos, azaz* $\|A\| := \sup\{\|Ax\| \,\big|\, x \in X, \|x\| \leq 1\} < \infty$.

v) *Létezik olyan* $C \geq 0$, *melyre* $\|Ax\| \leq C \cdot \|x\|$, *minden* $x \in X$.

Bizonyítás.
Az i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) implikációk nyilvánvalóak.
iii) $\Rightarrow$ i) Tegyük fel, hogy A folytonos x_0-ban. Be kell látni, hogy mindenütt folytonos. Legyen $x \in X$ és $x_n \to x$, ekkor az $Ax_n \to Ax$ igaz-e.
Ha $x_n \to x$, akkor $x_n - x \to 0$, amiből következik, hogy $x_0 + (x_n - x) \to x_0$. Mivel A folytonos x_0-ban, ezért

$$A(x_0 + x_n - x) = Ax_0 + Ax_n - Ax \to Ax_0.$$

Ekkor $Ax_n - Ax \to 0$, így $Ax_n \to Ax$.
iv) $\Rightarrow$ v) Tegyük fel, hogy $\sup\{\|Ax\| \,\big|\, x \in X, \|x\| \leq 1\} < \infty$. Ekkor van olyan $C \geq 0$, hogy $\|Ax\| \leq C$, minden $x \in X$ és $\|x\| \leq 1$. Legyen $y \in X$ és $y \neq 0$. Ekkor $\frac{y}{\|y\|}$-ra felírható a következő:

$$\left\|\frac{y}{\|y\|}\right\| = \left\|\frac{1}{\|y\|} \cdot y\right\| = \frac{1}{\|y\|} \cdot \|y\| = 1.$$

Így az

$$A\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = \left\|\frac{1}{\|y\|} \cdot Ay\right\| = \frac{1}{\|y\|} \cdot \|Ay\| \leq C,$$

amiből következik, hogy $\|Ay\| \leq C \cdot \|y\|$.
Az $y = 0$ eset triviális.
v) $\Rightarrow$ iv) Ha $x \in X$ és $\|x\| \leq 1$, akkor $\|Ax\| \leq C \cdot \|x\| \leq C$. Ebből következik, hogy

$$\sup\{\|Ax\| \,\big|\, x \in X, \|x\| \leq 1\} \leq C < \infty.$$

v) $\Rightarrow$ ii) Tegyük fel, hogy $\|Ax\| \leq C \cdot \|x\|$ és legyen (x_n) $(n \in \mathbb{N})$ olyan X-beli sorozat, amelyre $x_n \to 0$, akkor azt kell belátnunk, hogy $Ax_n \to 0$. Ez viszont nyilvánvaló, hiszen

$$\|Ax_n\| \leq C\|x_n\| \to 0, \text{ így } \|Ax_n\| \to 0, \text{ ami miatt } Ax_n \to 0,$$

tehát A folytonos nullában.
ii) $\Rightarrow$ iv) Tegyük fel, hogy A folytonos a nullában és tegyük fel indirekt, hogy

$$\sup\{\|Ax\| \,\big|\, x \in X, \|x\| \leq 1\} = \infty.$$

Legyen $n \in \mathbb{N}$ egy rögzített szám, ekkor létezik $x_n \in X$, $\|x_n\| \leq 1$ és $\|Ax_n\| \geq n$. Ebből felírható, hogy

$$\left\|\frac{x_n}{n}\right\| \leq \frac{1}{n} \to 0, \text{ tehát } \frac{x_n}{n} \to 0.$$

Emiatt $\left\|A\left(\frac{x_n}{n}\right)\right\| \to 0$. Viszont

$$\left\|A\left(\frac{x_n}{n}\right)\right\| = \frac{1}{n}\|Ax_n\| \geq \frac{1}{n} \cdot n \geq 1,$$

és ez ellentmond annak, hogy az $\left\|A\left(\frac{x_n}{n}\right)\right\|$ kifejezés a nullához tart. $\square$

1.2.3. Definíció. (Folytonos lineáris operátor normája) Ha $A\colon X \to Y$ folytonos lineáris operátor, akkor az

$$\|A\| := \sup\{\|Ax\| \,\big|\, x \in X, \|x\| \leq 1\}$$

számot az A normájának nevezzük.

1.2.4. Definíció. Jelölje $L(X,Y)$ az $A\colon X \to Y$ korlátos lineáris operátorok halmazát.

1.2.5. Állítás. *A $L(X,Y)$ valóban normált tér a $\|\cdot\|$ operátornormára nézve:*

i) $\|A\| = 0$ *csak akkor teljesül, ha* $A = 0$,

ii) $\|\lambda \cdot A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$,

iii) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

Bizonyítás. i) Ha $A = 0$, akkor $\|A\| = \sup\{\|Ax\| \,\big|\, x \in X, \|x\| \leq 1\} = \sup\{0\} = 0$.
Ha $\|A\| = 0$ abból következik-e hogy $A = 0$. Legyen $0 \neq x \in X$, akkor $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1$. Ekkor

$$0 \leq \left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \sup\{\|Ay\| \,\big|\, y \in X, \|y\| \leq 1\} = 0.$$

Amiből következik, hogy $\left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = 0$, továbbá $\|Ax\| = 0$, amiből kapjuk, hogy $Ax = 0$.
Tehát $A = 0$.
ii) Legyen $\lambda \in \mathbb{K}$ rögzített szám.

$$\begin{aligned}
\|\lambda A\| &:= \sup\{\|(\lambda A)x\| \,\big|\, x \in X, \|x\| \leq 1\} = \\
&= \sup\{|\lambda| \cdot \|Ax\| \,\big|\, x \in X, \|x\| \leq 1\} = \\
&= |\lambda| \cdot \sup\{\|Ax\| \,\big|\, x \in X, \|x\| \leq 1\} = \\
&= |\lambda| \cdot \|A\|.
\end{aligned}$$

iii) Legyen $A, B \in L(X,Y)$ és alkalmazzuk a háromszög-egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned}
\|A + B\| &= \sup\{\|(A+B)x\| \,\big|\, x \in X, \|x\| \leq 1\} \leq \\
&\leq \sup\{\|Ax\| + \|Bx\| \,\big|\, x \in X, \|x\| \leq 1\} \leq \\
&\leq \sup\{\|Ax\| + \|By\| \,\big|\, x, y \in X, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\} = \\
&= \sup\{\|Ax\| \,\big|\, x \in X, \|x\| \leq 1\} + \sup\{\|By\| \,\big|\, y \in X, \|y\| \leq 1\} = \\
&= \|A\| + \|B\|.
\end{aligned}$$

Az állításokat beláttuk. $\square$

1.2.6. Állítás. *Legyen $A \in L(X,Y)$. Ekkor teljesülnek a következők:*

i) $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$, *minden* $x \in X$,

ii) *Legyen* $C := \|A\|$ *a legkisebb olyan konstans, melyre* $\|Ax\| \leq C \cdot \|x\|$, *minden* $x \in X$*-re fenn áll.*
Speciálisan: $\|A\| = \min\{C \geq 0 \,\big|\, \|Ax\| \leq C \cdot \|x\|, \forall x \in X\}$.

1.2.7. Állítás. *Ha* X *normált tér és* Y *Banach-tér akkor az* $L(X, Y)$ *is Banach-tér.*

1.2.8. Definíció. Lineáris funkcionáloknak nevezzük az $A\colon X \to \mathbb{K}$ lineáris leképezéseket.

1.2.9. Következmény. *Ha* X *normált tér akkor* $L(X, \mathbb{K}) = X^*$ *Banach-tér.* X^**-ot az* X *duális terének nevezzük és elemeit folytonos lineáris funkcionáloknak nevezzük.*

1.2.10. Példa. Legyen $f \in C[a, b]$ függvény, $x_0 \in [a, b]$ egy rögzített pont, valamint legyen f maximum normája a következőképp értelmezve: $\|f\|_\infty := \max|f|$. Tekintsük a $\varphi\colon C[a, b] \to \mathbb{R}$, $\varphi(f) := f(x_0)$ egyenlőséggel értelmezett leképezést. Ekkor a φ folytonos lineáris funkcionál és $\|\varphi\| = 1$. Ugyanis bármely $f \in C[a, b]$ mellett

$$|\varphi(f)| = |f(x_0)| \leq \max|f| =: \|f\|_\infty,$$

vagyis φ folytonos (korlátos) és $\|\varphi\| \leq 1$. Továbbá be kell látni, hogy $\|\varphi\| \geq 1$. Legyen $f \in C[a, b]$ a konstans $f \equiv 1$ függvény, akkor $\|f\|_\infty \leq 1$, és $|f(x_0)| = |\varphi(f)| = 1$ teljesül. Ebből és a funkcionálnorma definíciójából látható, hogy $\|\varphi\| \geq 1$ is teljesül, vagyis $\|\varphi\| = 1$.

A következőben arra láthatunk példát, amikor egy $A\colon X \to Y$ lineáris operátor normája nem korlátos.

1.2.11. Példa. Legyenek $X = C^1[0, 1]$ és $Y = C[0, 1]$ folytonosan differenciálható függvények, és $\|f\| = \|f\|_\infty$. Legyen $A\colon X \to Y$ lineáris operátor, melyre $Af = f'$. Ekkor az A nem korlátos, azaz

$$\sup\{\|Af\|_\infty \,\big|\, f \in X, \|f\|_\infty \leq 1\} = \infty.$$

A bizonyításhoz egy olyan (f_n) $(n \in \mathbb{N})$ $C[0, 1]$-beli függvénysorozat keresünk, melyre $\|f_n\|_\infty \leq 1$ és $\|f_n{}'\| \to +\infty$. Vegyük az $f_n(x) = e^{-nx}$ függvénysorozatot. Vegyük a maximum normáját, azaz $\|f_n\|_\infty = \max|f_n| = 1$. Deriváljuk le $f_n(x)$-et, ekkor kapjuk, hogy $f_n{}'(x) = -n \cdot e^{-nx}$. Vegyük ennek is a maximum normáját, azaz

$$\|f_n{}'\|_\infty = \max|f_n{}'| = \max|-n \cdot e^{-nx}| = |-n| \cdot \max|e^{-nx}| = n \cdot \max|f_n| = n \to \infty.$$

A megadott feltételek teljesülnek, tehát A nem korlátos.

2. fejezet

Differenciálszámítás normált térben

2.1. Bevezető fogalmak és Fréchet-derivált

Az alábbiakban legyenek X és Y tetszőleges normált terek.

2.1.1. Definíció. (Kis rendű függvény) Egy $r\colon X \to Y$ függvényt az $a \in X$ pontban kis rendű függvénynek nevezzük, ha $r(a) = 0$ és létezik a

$$\lim_{x \to a} \frac{\|r(x)\|}{\|x - a\|} = 0$$

határérték.

2.1.2. Állítás. *Az $r\colon X \to Y$ kis rendű függvény az a pontban akkor és csak akkor, ha r előáll az a pont egy U környezetében a következő alakban:*

$$r(x) = \|x - a\| \cdot r^*(x) \qquad (x \in U),$$

ahol $r^*\colon X \to Y$ olyan függvény, mely folytonos az a pontban és $r^*(a) = 0$.

Bizonyítás. Legyen $r^*(x) := \frac{r(x)}{\|x-a\|}$, ha $x \in U$ és $x \neq a$, valamint $r^*(a) := 0$. Ekkor átalakítással kapjuk, hogy $r(x) = r^*(x) \cdot \|x - a\|$, ha $x \in U$. Továbbá be kell még látni, hogy r^* folytonos az a pontban, vagyis létezik $\lim\limits_{x \to a} r^*(x) = r^*(a) = 0$. Valóban,

$$\lim_{x \to a} r^*(x) = \lim_{x \to a} \frac{r(x)}{\|x - a\|} = 0 = r^*(a)$$

Fordítva: Legyen $r\colon U \to Y$ olyan függvény, hogy létezik $r^*\colon U \to Y$ függvény, melyre $r^*(a) = 0$, r^* folytonos az a pontban és $r(x) = \|x-a\| \cdot r^*(x)$, ahol $x \in U$. Ekkor teljesülnie kell, hogy r kis rendű függvény a-ban, azaz $r(a) = 0$ és $\lim\limits_{x \to a} \frac{\|r(x)\|}{\|x-a\|} = 0$. Először az $r(a) = 0$ feltételt bizonyítjuk a következőképp:

$$r(a) = \|a - a\| \cdot r^*(a) = 0.$$

Végül a hátérték bizonyítása:

$$\lim_{x\to a}\frac{\|r(x)\|}{\|x-a\|}=\lim_{x\to a}\frac{\big\|\|x-a\|\cdot r^*(x)\big\|}{\|x-a\|}=\lim_{x\to a}\|r^*(x)\|,$$

ahol r^* folytonos az a pontban és $r^*(a)=0$, ezért $\lim\limits_{x\to a} r^*(x)=r^*(a)=0$. Ebből következik, hogy $\lim\limits_{x\to a}\|r^*(x)\|=0\in\mathbb{R}$. $\square$

2.1.3. Definíció. Legyenek $f\colon X\to Y$ és $g\colon X\to Y$ függvények, valamint $a\in X$ pont. Azt mondjuk, hogy az f és g függvények érintkeznek az a pontban, ha $f-g$ kis rendű függvény az a pontban, azaz

$$\lim_{x\to a}\frac{\|f(x)-g(x)\|}{\|x-a\|}=0.$$

2.1.4. Definíció. Az $L(x):=Ax+y$, $(x\in X)$ egyenlőséggel értelmezett $L\colon X\to Y$ leképezést folytonos inhomogén lineáris leképezésnek nevezzük, ha $A\in L(X,Y)$ és $y\in Y$ adott vektor.

2.1.5. Definíció. Fréchet-differenciálhatónak (vagy röviden: differenciálhatónak) nevezzük az $f\colon X\to Y$ függvényt az $a\in X$ pontban, ha $a\in\operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$ és létezik $L\colon X\to Y$ folytonos inhomogén lineáris függvény, melyre $f-L$ kis rendű függvény az a-ban, azaz L érintkezik az a pontban az f függvénnyel.

A definícióból következik, hogy $(f-L)(a)=0$, vagyis $L(a)=f(a)$, amiből az L függvényt a következő alakban tudjuk felírni:

$$L(x)=f(a)+A(x-a)\qquad(x\in X),$$

ahol $A\in L(X,Y)$.

2.1.6. Definíció. Az f függvény a pontbeli Fréchet-deriváltjának (vagy röviden: deriváltjának) nevezzük az $L(x)=f(a)+A(x-a)$, $(x\in X)$ egyenlőségben szereplő $A\in L(X,Y)$ folytonos lineáris leképezést, és $f'(a)$-val jelöljük.

Tehát az f függvény differenciálhatósága egy $a\in\operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$ pontban a következőt jelenti: létezik $f'(a)\in L(X,Y)$ folytonos lineáris leképezés, melyre az $L\colon X\to Y$ inhomogén lineáris folytonos függvény érintkezik az a pontban f-vel, azaz

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-L(x)}{\|x-a\|}=0,$$

ahol $L(x)$ az alábbi alakban áll elő:

$$L(x):=f(a)+f'(a)(x-a)\qquad(x\in X).$$

Az előbbieket felhasználva a differenciálhatóság egy ekvivalens definícióját írjuk le.

2.1.7. Definíció. Az $f\colon X \to Y$ függvényt differenciálhatónak nevezzük az $a \in X$ pontban, ha létezik olyan $f'(a)$-val jelölt $L(X,Y)$-beli folytonos lineáris leképezés, valamint létezik $r\colon X \to Y$ kis rendű függvény a-ban és az a pont egy U környezetében

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + r(x) \qquad (x \in U).$$

Azaz, az f függvény $f = L + r$ alakban áll elő az a egy környezetében, ahol r kis rendű függvény a-ban, valamint L az $L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ egyenlőséggel értelmezett folytonos inhomogén lineáris függvény.

Az előző definícióban az $f(x)$-re felírt egyenlőséget a továbbiakban a következő alakban fogjuk használni:

$$f(x) - f(a) = A(x-a) + r(x) \qquad (x \in U),$$

ahol $A := f'(a)$.

Az alábbiakban megvizsgáljuk egy $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény egy $a \in \mathbb{R}$ pontbeli (klasszikus értelemben vett) differenciálhatóságának és az imént bevezetett Fréchet-differenciálhatóságának, illetve a megfelelő derivált fogalmak kapcsolatát. Ehhez először jellemezzük az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineáris operátorokat.

Legyen $M_A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ az a függvény ($A \in \mathbb{R}$), melyre $M_A(x) = A \cdot x$. Könnyen ellenőrizhető, hogy M_A lineáris operátor. Megfordítva, legyen $M\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineáris operátor és jelölje $A := M(1)$. Ekkor $M = M_A$, ugyanis bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén:

$$M(\lambda) = M(\lambda \cdot 1) = \lambda \cdot M(1) = \lambda \cdot A = A \cdot \lambda = M_A(\lambda).$$

Ebből következik, hogy az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineáris operátorok éppen a számmal való szorzások.

Tegyük fel, hogy f függvény (klasszikus értelemben) differenciálható az a pontban, akkor megmutatjuk, hogy Fréchet-differenciálható és $f'(a) = M_A$, azaz létezik r kis rendű függvény a-ban, hogy

$$f(x) - f(a) = M_A(x-a) + r(x),$$

ahol

$$r(x) := f(x) - f(a) - A \cdot (x-a).$$

Ekkor $r(x)$ valóban kis rendű függvény a-ban, ugyanis:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{|r(x)|}{|x-a|} &= \lim_{x\to a} \left| \frac{f(x)-f(a)-A\cdot(x-a)}{x-a} \right| = \\
&= \lim_{x\to a} \left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - A \right| = \\
&= A - A = 0.
\end{aligned}$$

Megfordítva: Tegyük fel, hogy az f függvény Fréchet-differenciálható az a pontban, azaz létezik $M\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineáris operátor, és létezik r kis rendű függvény a-ban, hogy

$$f(x) - f(a) = M(x-a) + r(x).$$

Láttuk, hogy $M = M_A$ alkalmas $A \in \mathbb{R}$-re. Megmutatjuk, hogy f (klasszikus értelemben) is differenciálható az a pontban és $f'(a) = A$, azaz létezik a következő határérték:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A.$$

Tudjuk, hogy

$$f(x) - f(a) = A(x - a) + r(x),$$

melyből átalakítással kapjuk, hogy:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A + \frac{r(x)}{x - a}.$$

Vegyük mindkét oldal határértékét, azaz

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A + \lim_{x \to a} \frac{r(x)}{x - a} = A.$$

Itt kihasználtuk, hogy r kis rendű függvény az a pontban, ezért $\lim\limits_{x \to a} \left| \frac{r(x)}{x-a} \right| = 0$, ami csak akkor teljesül, ha $\lim\limits_{x \to a} \frac{r(x)}{x-a} = 0$. Megmutattuk, hogy $A = f'(a)$.

2.1.8. Állítás. *Minden $A \in L(X, Y)$ folytonos lineáris leképezés bármely $a \in X$ pontban differenciálható és ekkor $A'(a) = A$.*

Bizonyítás. Legyen $f(x) = Ax$ és legyen $a \in X$ tetszőleges pont. Meg kell mutatni, hogy $f(x) - f(a) = A(x - a) + r(x)$ teljesül valamely r a-ban kis rendű függvényre.

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= A(x - a) + r(x) \\ Ax - Aa &= A(x - a) + r(x) \\ A(x - a) &= A(x - a) + r(x) \end{aligned}$$

Válasszuk $r(x)$-nek az azonosan nulla függvényt, azaz $r(x) :\equiv 0$, ekkor r nyilvánvalóan kis rendű függvény, azaz f differenciálható a-ban és $f'(a) = A$. Tehát $A'(a) = A$. $\square$

2.1.9. Példa. Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, melyre $f(x) = x^2$. Ismeretes, hogy az f függvény (klasszikus értelemben) minden $a \in \mathbb{R}$ pontban differenciálható és $f'(a) = 2a$. Ennek mintájára tekintsük az X normált tér esetén az $f\colon L(X) \to L(X)$ leképezést, melyre $f(A) = A^2$. Megvizsgáljuk az f függvényt a differenciálhatóság szempontjából.
Ha $T \in L(X)$ lineáris operátor, akkor $M_T\colon L(X) \to L(X)$ folytonos lineáris leképezés, melyre $M_T(A) = T \cdot A$. M_T valóban lineáris leképezés, mert teljesülnek a következők:

$$M_T(A + B) = T \cdot (A + B) = T \cdot A + T \cdot B = M_T(A) + M_T(B)$$

$$M_T(\lambda A) = T \cdot \lambda A = \lambda \cdot TA = \lambda M_T(A)$$

Továbbá M_T folytonos is, mert

$$\|M_T(A)\| = \|T \cdot A\| \leq \|T\| \cdot \|A\|$$

teljesül. Tehát M_T korlátos és $\|M_T\| \leq \|T\|$.
Választ keresünk arra, miszerint ha $f(A) = A^2$, akkor igaz-e, hogy $f'(A) = M_{2A}$. A válasz tagadó, mert az összeg négyzetre emelése normált térben a $L(X)$-beli operátorszorzás nemkommutativitása miatt nem ugyanaz, mint $\mathbb{K}$ számtest felett. Ezért azt állítjuk, hogy az $f\colon L(X) \to L(X)$ függvény differenciálható minden $A \in L(X)$ pontban és $f'(A) = M$, ahol $M \in L(L(X))$ az a lineáris operátor, melyre $M(S) = AS + SA$.
Először megmutatjuk, hogy M folytonos lineáris operátor. Lineáris, mert teljesül rá, hogy összegtartó és skalár-szoros tartó, azaz

$$\begin{aligned} M(S+R) &= A(S+R) + (S+R)A = \\ &= AS + AR + SA + RA = \\ &= (AS+SA) + (AR+RA) = \\ &= M(S) + M(R) \end{aligned}$$

$$M(\lambda S) = \lambda \cdot AS + \lambda \cdot SA = \lambda \cdot (AS + SA) = \lambda \cdot M(S)$$

Valamint M folytonos is, mert

$$\begin{aligned} \|M(S)\| &= \|AS + SA\| \leq \|AS\| + \|SA\| \leq \\ &\leq \|A\| \cdot \|S\| + \|S\| \cdot \|A\| = \\ &= 2 \cdot \|A\| \cdot \|S\|, \end{aligned}$$

vagyis $\|M\| \leq 2 \cdot \|A\|$. Továbbá megmutatjuk, hogy teljesül a következő egyenlőség:

$$f(B) - f(A) = M(B-A) + r(B),$$

ahol r alkalmas kis rendű függvény A-ban. Valóban, $r(B) := (A-B)^2$ választással:

$$\begin{aligned} M(B-A) \neq r(B) &= A \cdot (B-A) + (B-A) \cdot A + (A-B)^2 = \\ &= AB - A^2 + BA - A^2 + A^2 - AB - BA + B^2 = \\ &= B^2 - A^2 = \\ &= f(B) - f(A). \end{aligned}$$

Meg kell mutatnunk, hogy r kis rendű A-ban, azaz

$$\lim_{B \to A} \frac{\|r(B)\|}{\|B-A\|} = 0.$$

Ehhez vegyük észre, hogy

$$\frac{\|r(B)\|}{\|B-A\|} = \frac{\|(A-B) \cdot (A-B)\|}{\|B-A\|} \leq \frac{\|A-B\|^2}{\|B-A\|} = \|B-A\|,$$

ahol $\|B-A\|$ tart a nullához. Ezzel tehát megmutattuk, hogy f minden $A \in L(X)$-ben differenciálható és $f'(A) = M$, vagyis $f'(A)B = AB + BA$ teljesül minden $B \in L(X)$.

2.1.10. Állítás. *Ha f és $g\colon X \to Y$ differenciálható függvények az $a \in X$ pontban, akkor az $f+g$ és a $c \cdot f$ $(c \in \mathbb{K})$ függvények is differenciálhatók az a pontban és*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$

$$(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a).$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f, g differenciálható függvények az a pontban. Ekkor létezik $U \subseteq X$ nyílt halmaz, hogy $a \in U \subseteq \operatorname{dom} f$, és létezik olyan $V \subseteq X$ halmaz, melyre $a \in V \subseteq \operatorname{dom} g$, ekkor $a \in U \cap V \subseteq \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g =: \operatorname{dom}(f+g)$. Ekkor $U \cap V$ is nyílt halmaz, valamint a belső pontja a $\operatorname{dom}(f+g)$-nek. Bevezetjük a következő jelöléseket: $A := f'(a)$ és $B := g'(a)$, ahol $A, B \in L(X,Y)$, valamint $A + B =: C \in L(X,Y)$. Megmutatjuk, hogy $f+g$ differenciálható az a pontban és ekkor $(f+g)'(a) = C$, azaz

$$(f+g)(x) - (f+g)(a) = C(x-a) + r(x),$$

ahol r kis rendű függvény a-ban. Alkalmazzuk f és g differenciálhatóságára vonatkozó definíciót, vagyis

$$f(x) - f(a) = A(x-a) + r_1(x),$$

$$g(x) - g(a) = B(x-a) + r_2(x),$$

ahol r_1 és r_2 kis rendű függvények a-ban. Ekkor

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) - (f+g)(a) &= (f(x) - f(a)) + (g(x) - g(a)) = \\
&= A(x-a) + B(x-a) + r_1(x) + r_2(x) = \\
&= C(x-a) + r_1(x) + r_2(x) = \\
&=: C(x-a) + r(x).
\end{aligned}$$

Meg kell mutatnunk, hogy r kis rendű a-ban, azaz:

$$\lim_{x \to a} \frac{\|r(x)\|}{\|x-a\|} \leq \lim_{x \to a} \frac{\|r_1(x) + r_2(x)\|}{\|x-a\|} = \lim_{x \to a} \frac{\|r_1(x)\|}{\|x-a\|} + \lim_{x \to a} \frac{\|r_2(x)\|}{\|x-a\|} = 0,$$

mivel r_1 és r_2 is kis rendű függvények a-ban.
A konstans-szoros deriváltja hasonlóan igazolható. □

2.1.11. Lemma. *Ha $g\colon X \supseteq \operatorname{dom} g \to Y$ differenciálható az $a \in \operatorname{Int}(\operatorname{dom} f)$ pontban, akkor létezik olyan $U \subseteq \operatorname{dom} f$ nyílt környezet, hogy a*

$$h(x) := \frac{\|g(x) - g(a)\|}{\|x-a\|}, \qquad x \in U \setminus \{a\}$$

függvény korlátos $U \setminus \{a\}$-n, azaz létezik olyan $M \geq 0$, melyre $\|h(x)\| \leq M$, minden $x \in U \setminus \{a\}$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy létezik $A(=g'(a))$ folytonos lineáris operátor, és a g differenciálható a-ban, vagyis $g(x)-g(a)=A(x-a)+r(x)$, ahol r kis rendű függvény a-ban. Azaz $\lim\limits_{x\to a}\frac{\|r(x)\|}{\|x-a\|}=0$, ami csak akkor teljesül, ha minden $\varepsilon>0$-hoz létezik olyan $\delta>0$, hogy $\|x-a\|<\delta$, $x\neq a$ esetén

$$\frac{\|r(x)\|}{\|x-a\|}<\varepsilon.$$

Válasszuk az $\varepsilon=1$, ekkor létezik olyan $\delta>0$, hogy $\|x-a\|<\delta$, $x\neq a$ esetén

$$\|r(x)\|<\varepsilon\cdot\|x-a\|=\|x-a\|.$$

Jelölje $U:=B(a,\delta)$, ekkor g korlátos az $U\backslash\{a\}$ halmazon. Legyen $x\in U\backslash\{a\}$, ekkor az $\|x-a\|<\delta$, $x\neq a$ esetén

$$\|h(x)\|=\frac{\|g(x)-g(a)\|}{\|x-a\|}=\frac{\|A(x-a)+r(x)\|}{\|x-a\|}\leq\frac{\|A\|\cdot\|x-a\|+r(x)\|}{\|x-a\|}.$$

A következő lépésben felhasználjuk az $\varepsilon=1$ esetben $r(x)$-re kapott becslést:

$$\frac{\|A\|\cdot\|x-a\|+r(x)\|}{\|x-a\|}\leq\frac{\|A\|\cdot\|x-a\|+\|x-a\|}{\|x-a\|}\leq\|A\|+1=:M.$$

Így a lemmát beláttuk. □

2.1.12. Tétel. (Kompozíció-függvény differenciálhatósága) *Legyenek X, Y és Z normált terek, valamint $g\colon X\to Y$ és $f\colon Y\to Z$ függvények. Tegyük fel, hogy g függvény differenciálható az $a\in X$ pontban, és f differenciálható a $b:=g(a)\in Y$ pontban, akkor az $f\circ g\colon X\to Z$ függvény differenciálható az a pontban és*

$$(f\circ g)'(a)=f'(g(a))\cdot g'(a).$$

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy az a pont belső pontja az $f\circ g$ kompozíció-függvény értelmezési tartományának. Tudjuk, hogy $a\in\operatorname{Int}(\operatorname{dom}g)$, és legyen

$$\operatorname{dom}(f\circ g):=\{x\in\operatorname{dom}g\,\big|\,g(x)\in\operatorname{dom}f\}.$$

Megmutatjuk, hogy $a\in\operatorname{Int}(\operatorname{dom}(f\circ g))$. A bizonyításhoz felhasználjuk azt az állítást, mely szerint: ha g differenciálható az a pontban, akkor g folytonos is a-ban. Valóban, a g függvény a pontbeli differenciálhatósága miatt és a 2.1.2 Állítás alapján

$$g(x)-g(a)=A(x-a)+r(x)=A(x-a)+r^*(x)\cdot\|x-a\|,$$

ahol r^* folytonos a-ban és $r^*(a)=0$, amiből

$$\lim_{x\to a}(g(x)-g(a))=\lim_{x\to a}(A(x-a)+r^*(x)\cdot\|x-a\|)=0,$$

mert $r^*(x)\to 0$ és $\|x-a\|\to 0$, valamint $A(x-a)\to 0$, ugyanis A folytonos és $A(0)=0$. Tehát g folytonos az a pontban. Alkalmazzuk az előbbi állítás egy speciális esetét, vagyis minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy $\|x - a\| < \delta$ esetén $\|g(x) - g(a)\| < \varepsilon$. Másképp fogalmazva $x \in B(a, \delta)$ esetén $g(x) \in B(g(a), \varepsilon)$. Ha f differenciálható a $g(a)$-ban, akkor létezik $\varepsilon > 0$, hogy $B(g(a), \varepsilon) \subseteq \operatorname{dom} f$. Mivel g folytonos az a pontban, ezért létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden $x \in B(a, \delta)$ esetén $g(x) \in B(g(a), \varepsilon) \subseteq \operatorname{dom} f$. Ekkor $x \in B(a, \delta) \subseteq \operatorname{dom} g$, amiből következik, hogy $g(x) \in \operatorname{dom} f$. Ezzel beláttuk, hogy minden $x \in B(a, \delta)$ esetén $x \in \operatorname{dom}(f \circ g)$, amiből kapjuk, hogy $B(a, \delta) \subseteq \operatorname{dom}(f \circ g)$, vagyis az a belső pont.

A következőkben megmutatjuk, hogy $(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a)$ valóban teljesül. Az f függvény $b = g(a)$ pontbeli differenciálhatósága és a 2.1.2 Állítás alapján:

$$\begin{aligned} f(g(x)) - f(g(a)) &= f'(b)(g(x) - g(a)) + \|g(x) - g(a)\| \cdot r^*(g(x)) = \\ &= f'(b)(g'(a)(x - a) + r(x)) + \|g(x) - g(a)\| \cdot r^*(g(x)) = \\ &= f'(b) \cdot g'(a)(x - a) + f'(b) \cdot r(x) + \|g(x) - g(a)\| \cdot r^*(g(x)), \end{aligned}$$

ahol legyenek

$$A := f'(b)g'(a), \qquad A \in L(X, Z)$$

$$R(x) := f'(b) \cdot r(x) + \|g(x) - g(a)\| \cdot r^*(g(x)).$$

Ezeket behelyettesítve kapjuk a következőt:

$$(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a) = A(x - a) + R(x), \qquad (x \in U_0),$$

ahol azt kell még megmutatni, hogy R kis rendű függvény a-ban. Az $r^* \circ g \colon X \to Z$ függvény folytonos az a pontban, vagyis $\lim_a (r^* \circ g) = r^*(g(a)) = r^*(b) = 0$, ezért az

$$\|R(x)\| \leq \|f'(b)\| \cdot \|r(x)\| + \|g(x) - g(a)\| \cdot \|(r^* \circ g)(x)\|$$

egyenlőtlenségből a 2.1.11 Lemma felhasználásával kapjuk, hogy R kis rendű függvény az a pontban. Ezzel megmutattuk, hogy $f \circ g$ kompozíció-függvény differenciálható az a pontban és $(f \circ g)'(a) = A = f'(g(a))g'(a)$. $\square$

2.1.13. Példa. Legyen $\varphi \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ folytonos, differenciálható függvény, melyre $\varphi(t) := t^p$, ahol $p \in \mathbb{R}$. Ekkor φ deriváltja: $\varphi'(t) = p \cdot t^{p-1}$. Legyen $X = C([a, b])$ normált tér, ahol értelmezzük a következő függvényt: $f \colon C[a, b] \rightarrowtail C[a, b]$, melyre $f(u) = u^p$. Mivel ez a függvény több helyen nincs értelmezve, ezért meg kell határozni a pontos értelmezési tartományt: $\operatorname{dom} f = \{u \in C[a, b] \mid u(t) > 0,\ \forall t \in [a, b]\}$. Tehát $f \colon C[a, b] \supseteq \operatorname{dom} f \to C[a, b]$ és $u \mapsto u^p$. Arra keressük a választ, hogy f differenciálható-e, és ha igen, mi az $f'(a)$ értéke.

Legyen $g \in C[a, b]$ és $M_g \colon C[a, b] \to C[a, b]$ az a lineáris operátor, melyre $M_g u := g \cdot u$, ahol $u \in C[a, b]$. Ekkor azt állítjuk, hogy M_g folytonos lineáris operátor és $\|M_g\| = \|g\|_\infty$. Könnyen látható, hogy M_g valóban lineáris. Folytonos is, mert rögzített $u \in C[a, b]$ esetén létezik olyan $K \geq 0$, hogy $\|M_g u\|_\infty \leq K \cdot \|u\|_\infty$. Valóban:

$$\begin{aligned} \|M_g u\|_\infty &= \|g \cdot u\|_\infty = \max_{t \in [a,b]} |(gu)(t)| = \max_{t \in [a,b]} |g(t)| \cdot |u(t)| \leq \\ &\leq \|g\|_\infty \cdot \max_{t \in [a,b]} |u(t)| = \|g\|_\infty \cdot \|u\|_\infty. \end{aligned}$$

Tehát M_g folytonos és $\|M_g\| \leq \|g\|_\infty$. Meg kell még mutatni, hogy $\|M_g\| \geq \|g\|_\infty$. Válasszuk $u \equiv 1$, ekkor

$$\begin{aligned} \|M_g\| &= \sup\{\|M_g \cdot u\|_\infty \,\big|\, u \in X, \|u\| \leq 1\} = \\ &= \sup\{\|g \cdot u\|_\infty \,\big|\, u \in X, \|u\| \leq 1\} \geq \\ &\geq \|g \cdot 1\|_\infty = \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

Tehát $\|M_g\| \geq \|g\|_\infty$ is teljesül, amiből kapjuk, hogy $\|M_g\| = \|g\|_\infty$.

A következőkben megmutatjuk, hogy az f függvény minden $a \in \operatorname{dom} f$ pontban differenciálható és deriváltjára fennáll az $f'(a) = M_g$ egyenlőség, ahol $g = p \cdot a^{p-1}$, azaz $g(t) = p \cdot a(t)^{p-1}$. Ehhez meg kell mutatni, hogy minden $u \in \operatorname{dom} f$ esetén

$$f(u) - f(a) = M_g(u-a) + r(u),$$

ahol r kis rendű függvény az a pontban. Helyettesítsük be mindkét oldalra a függvények ismert értékeit:

$$M_g(u-a) = g \cdot (u-a) = p \cdot a^{p-1}(u-a),$$

$$f(u) - f(a) = u^p - a^p.$$

A kapott helyettesítéseket írjuk vissza az $f(u) - f(a) = M_g(u-a) + r(u)$ egyenlőségbe:

$$u^p - a^p = p \cdot a^{p-1}(u-a) + r(u) = p \cdot a^{p-1}(u-a) + u^p - a^p - p \cdot a^{p-1}(u-a),$$

ahol $r(u) := u^p - a^p - p \cdot a^{p-1}(u-a)$. Be kell látni, hogy $r(u)$ valóban kis rendű, azaz $\lim\limits_{u \to a} \frac{\|r(u)\|_\infty}{\|u-a\|_\infty} = 0$. Ahhoz, hogy be tudjuk látni a kis rendűséget térjünk vissza a kiindulási függvényünkhöz, ami a következő volt: $\varphi(t) = t^p$, ahol $t \in]0, +\infty[$. Ez a függvény kétszer differenciálható egy $0 < \alpha$ pontban, ezért felírhatjuk a maradéktagos Taylor-formula szerint a következő alakban:

$$\varphi(t) = \varphi(\alpha) + \frac{\varphi'(\alpha)}{1!} \cdot (t-\alpha) + \frac{\varphi''(\xi)}{2!} \cdot (t-\alpha)^2,$$

ahol $\xi \in]\alpha, t[$, ha $\alpha < t$, illetve $\xi \in]t, \alpha[$, ha $t < \alpha$. Helyettesítsük be az f függvény t pontbeli helyettesítési értékét a kapott Taylor-formulába:

$$t^p = \alpha^p + p \cdot \alpha^{p-1}(t-\alpha) + \frac{p \cdot (p-1)}{2} \cdot \xi^{p-2} \cdot (t-\alpha)^2,$$

amiből átalakítva kapjuk, hogy:

$$t^p - \alpha^p - p \cdot \alpha^{p-1}(t-\alpha) = \frac{p \cdot (p-1)}{2} \cdot \xi^{p-2} \cdot (t-\alpha)^2,$$

ahol ξ az α és t között van.
Legyen $x \in [a,b]$, $t = u(x)$ és $\alpha = a(x)$, valamint jelölje $K := \left|\frac{p \cdot (p-1)}{2}\right|$. Ekkor:

$$\left|u^p(x) - \alpha^p(x) - p \cdot a^{p-1}(x) \cdot (u(x) - a(x))\right| = K \cdot \xi^{p-2}(x) \cdot (u(x) - a(x))^2,$$

ahol $\xi(x)$ az $u(x)$ és $a(x)$ között van, vagyis

$$0 < a^{p-2}(x) \leq \xi^{p-2}(x) \leq u^{p-2}(x),$$

vagy

$$0 < u^{p-2}(x) \leq \xi^{p-2}(x) \leq a^{p-2}(x).$$

Ezeket felhasználva kapjuk, hogy:

$$\xi^{p-2}(x) \leq a^{p-2}(x) + u^{p-2}(x) \leq \|a^{p-2}\|_\infty + \|u^{p-2}\|_\infty, \qquad \forall x \in [a,b].$$

Vegyük a szuprémumát ξ-nek:

$$\sup_{x\in[a,b]} \xi^{p-2}(x) \leq \|a^{p-2}\|_\infty + \|u^{p-2}\|_\infty.$$

Most már visszatérhetünk annak a bizonyításához, hogy $r(u)$ kis rendű függvény a-ban, azaz:

$$\begin{aligned}
\|r(u)\|_\infty &= \max_{x\in[a,b]} \left|u^p(x) - a^p(x) - p\cdot a^{p-1}(x)\cdot(u(x)-a(x))\right| = \\
&= \max_{x\in[a,b]} K\cdot \xi^{p-2}(x)\cdot[u(x)-a(x)]^2 \leq \\
&\leq \max_{x\in[a,b]} K\cdot\left[\|a^{p-2}\|_\infty + \|u^{p-2}\|_\infty\right]\cdot[u(x)-a(x)]^2 = \\
&= K\cdot\left[\|a^{p-2}\|_\infty + \|u^{p-2}\|_\infty\right]\cdot\|u(x)-a(x)\|_\infty{}^2,
\end{aligned}$$

amiből kapjuk, hogy:

$$\frac{\|r(u)\|_\infty}{\|u-a\|_\infty} \leq K\cdot\left[\|a^{p-2}\|_\infty + \|u^{p-2}\|_\infty\right]\cdot\|u-a\|_\infty.$$

Ebben az esetben ha $\|u-a\|_\infty \to 0$, akkor $\|u^{p-2}\|_\infty \to \|a^{p-2}\|_\infty$. Az előbbi $u \to a$ esetén $K\cdot 2\cdot\|a^{p-2}\|_\infty\cdot 0 = 0$, azaz $\lim\limits_{u\to a}\frac{\|r(u)\|_\infty}{\|u-a\|_\infty} = 0$, vagyis r kis rendű függvény.
Tehát megmutattuk, hogy f differenciálható és $f'(a) = M_g$.

2.1.14. Példa. A következőkben megvizsgáljuk a skalártesten értelmezett normált tér értékű fügvények differenciálhatóságát. Ehhez először megmutatjuk, hogy egy $A\colon \mathbb{K} \to X$ folytonos lineáris leképezés azonosítható egy X normált térbeli vektorral. Ha $v \in X$ vektor, akkor értelmezzük az $A_v\colon \mathbb{K} \to X$ lineáris operátort, melyre $A_v(\lambda) = \lambda\cdot v$. Nyilvánvaló, hogy A_v lineáris operátor. Továbbá A_v korlátos operátor, amelyre $\|A_v\| = \|v\|$, ugyanis:

$$\|A_v(\lambda)\| = \|\lambda\cdot v\| = |\lambda|\cdot\|v\|, \qquad (\forall\lambda\in\mathbb{K}),$$

amiből már látható, hogy:

$$\|A_v\| = \|v\|.$$

Megfordítva, tekintsünk egy tetszőleges $A\colon \mathbb{K} \to X$ folytonos lineáris operátort, és legyen $v := A(1)$. Megmutatjuk, hogy $A = A_v$, vagyis minden $\mathbb{K} \to X$ folytonos lineáris operátor előáll A_v alakban. Valóban, bármely $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén:

$$A(\lambda) = A(\lambda \cdot 1) = \lambda \cdot A(1) = \lambda \cdot v = A_v(\lambda),$$

amiből következik, hogy $A = A_v$. Tehát $X \cong L(\mathbb{K}, X)$, ahol az azonosítás a fenti $v \mapsto A_v$ leképezésen keresztül értendő.

2.1.15. Tétel. *Legyen x normált tér, $f\colon \mathbb{K} \to X$ függvény és $a \in Int(dom\, f)$ egy belső pont, valamint $v \in X$ vektor. Az f függvény pontosan akkor differenciálható az a pontban, ha a*

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \qquad (x, a \in \mathbb{K}, x \neq a)$$

függvénynek az a pontban létezik határértéke és ez a határérték azonos az $f'(a) \in L(\mathbb{K}, X)$ folytonos lineáris leképezéssel azonosított v vektorral. Az f függvény a pontbeli deriváltját a következőképp értelmezzük:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} =: v.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} =: v$, megmutatjuk, hogy ekkor

$$f(x) - f(a) = A_v(x - a) + r(x),$$

ahol $r(x)$ kis rendű függvény a-ban. Rendezzük az egyenlőséget $r(x)$-re:

$$r(x) = f(x) - f(a) - A_v(x - a).$$

Meg kell mutatni, hogy $\lim\limits_{x \to a} \frac{\|r(x)\|}{|x-a|} = 0$.

$$\frac{\|r(x)\|}{|x - a|} = \left\| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \frac{(x - a) \cdot v}{x - a} \right\| = \left\| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - v \right\|,$$

ha $x \to a$, akkor az $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ határértéke megegyezik v-vel, tehát

$$\left\| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - v \right\| \to 0, \qquad (x \to a).$$

Ekkor f differenciálható és $f'(a) = v(\cong A_v)$. Fordítva, ha f Fréchet-differenciálható, akkor $f'(a) \in L(\mathbb{K}, X)$,ezért $f'(a) = v(\cong A_v)$, valamely $v \in X$ esetén. A fentihez hasonló érveléssel megmutatható, hogy ekkor létezik $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = v$ határérték. $\square$

2.2. Gâteaux-derivált

Legyenek X és Y normált terek, és legyen $f\colon X \to Y$ függvény. Továbbá legyen $v \in X$ adott vektor, melyre $v \neq 0$, valamint egy $a \in \operatorname{Int}(\operatorname{dom} f)$ belső pont. Ekkor létezik olyan $\delta > 0$, hogy $a + t \cdot v \in \operatorname{Int}(\operatorname{dom} f)$ és minden $|t| < \delta$ esetén. Az f függvényt a v irányban differenciálhatónak nevezzük, ha létezik a következő határérték:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + t \cdot v) - f(a)}{t} =: d_v f(a) \in Y.$$

2.2.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy az f függvény Gâteaux-differenciálható az a pontban, ha minden $v \in X$, $v \neq 0$ irányú deriváltja létezik az a pontban és a

$$G : v \mapsto (d_v f)(a), \qquad v \in X \setminus \{0\},$$

$G\colon X \setminus \{0\} \to Y$ függvény folytonos (lineáris).

A következőkben olyan függvényre mutatunk példát, amely a $0 \in \mathbb{R}^2$ pontban Gâteaux-differenciálható, de nem folytonos (ezért nem Fréchet-differenciálható).

2.2.2. Példa. Legyen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény a következőképp értelmezve:

$$f(x,y) := \begin{cases} 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \text{ vagy } (x,y) \notin \{(t,t^2) \,|\, t \in \mathbb{R}\}, \\ 1, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \text{ és } (x,y) \in \{(t,t^2) \,|\, t \in \mathbb{R}\}. \end{cases}$$

Ekkor f nem folytonos a 0-ban, de Gâteaux-differenciálható ebben a pontban, ugyanis bármely $v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$ vektorhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $t \in]-\delta, \delta[$ mellett $t \cdot v \notin \{(s,s^2) \,|\, s \in \mathbb{R}, s \neq 0\}$. Ekkor

$$\frac{f(0 + t \cdot v) - f(0)}{t} = \frac{f(t \cdot v)}{t} = 0, \qquad \forall t \in]-\delta, \delta[\,.$$

Ebből határértéket véve

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(0 + t \cdot v) - f(0)}{t} = \lim_{t \to 0} 0 = 0,$$

amiből következik, hogy f valóban Gâteaux-differenciálható a 0-ban és $(d_v f)(0) = 0$.

2.3. Gâteaux és Fréchet-derivált közti összefüggés

2.3.1. Tétel. *Ha $a \in \operatorname{Int}(\operatorname{dom} f)$ és $f\colon X \to Y$ függvény Fréchet-differenciálható az a pontban, akkor Gâteaux-differenciálható is az a pontban és minden $v \in X$, $v \neq 0$ vektorra*

$$f'(a)v = d_v f(a).$$

Bizonyítás. Legyen $g\colon \mathbb{R} \to X$ függvény, melyre $g(t) := a+t\cdot v$. Ekkor g differenciálható a 0-ban és $g'(0) = v$, ugyanis:

$$\lim_{t\to 0} \frac{g(t)-g(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{t\cdot v}{t} = v.$$

Meg kell mutatni, hogy létezik a következő határérték:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+t\cdot v)-f(a)}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(g(t))-f(g(0))}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{F(t)-F(0)}{t-0},$$

ahol $F = f\circ g\colon \mathbb{R} \to Y$ függvény, ami csak akkor differenciálható az 0 pontban, ha $\lim\limits_{t\to 0} \frac{F(t)-F(0)}{t-0}$. De F differenciálható függvény a 0-ban, mert g differenciálható 0-ban és f differenciálható az $a = g(0)$ pontban, továbbá a kompozíció-függvény deriválása alapján:

$$F'(0) = (f\circ g)'(0) = f'(g(0))\cdot g'(0) = f'(a)\cdot v,$$

$$F'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t\cdot v)-f(a)}{t-0} = (d_v f)(a).$$

Vagyis $f'(a)v = (d_v f)(a)$, amivel a tételt beláttuk. $\square$

2.4. Alkalmazás szélsőérték vizsgálatra

Az alábbiakban feltesszük, hogy $f\colon X \to \mathbb{R}$ függvény és $a \in \operatorname{Int}(\operatorname{dom} f)$ belső pont.

2.4.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek lokális minimuma (illetve maximuma) van az a pontban, ha létezik olyan $U \subseteq \operatorname{dom} f$ nyílt halmaz, hogy $a \in U$ és minden $x \in U$-ra teljesül, hogy $f(a) \leq f(x)$, (illetve $f(a) \geq f(x)$).

Az egyváltozós, azaz $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvények lokális szélsőértékének létezéséhez Pierre de Fermat adott szükséges feltételt, mely szerint ezen függvényeknek csak akkor lehet lokális szélsőértéke az értelmezési tartományuk egy belső pontjában, ha ott a függvény deriváltja nulla. A következő tétel ennek egy analógiáját mondja ki.

2.4.2. Tétel. *Ha az f függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban és ebben a pontban differenciálható is, akkor az $f'(a) = 0$.*

Bizonyítás. Legyen $f'(a) \in L(X,\mathbb{R})$ azt kell megmutatni, hogy $f'(a)v = 0$ teljesül bármely $v \in X$ vektorra. Ha $v \neq 0$, akkor legyen $g\colon \mathbb{R} \to X$ függvény, melyre $g(t) = a + t\cdot v$. Vezessük be a következő függvényt: $F := f\circ g$, ahol $F(t) = f(g(t))$, ekkor $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mivel g differenciálható a 0 pontban és $g'(0) = v$, valamint f differenciálható az $a = g(0)$ pontban, ezért F differenciálható 0-ban és a kompozíció-függvény differenciálhatósága alapján $F'(0) = f'(a)g'(0) = f'(a)v$. Ekkor létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden $|t| < \delta$ esetén az $a + t\cdot v \in U$, ahol U legyen olyan környezete a-nak, hogy az f függvénynek az

a pontban van a minimuma, azaz $f(x) \geq f(a)$ minden $x \in U$ esetén. Ebből következik, hogy $t \in]-\delta, \delta[$ esetén $g(t) = a + t \cdot v \in U$ és ekkor

$$F(t) = f(g(t)) \geq f(a) = f(g(0)) = F(0).$$

Tehát minden $t \in]-\delta, \delta[$-ra $F(t) \geq F(0)$, vagyis F-nek lokális minimuma van 0-ban és mivel F differenciálható 0-ban, vagyis $f'(a)v = F'(0) = 0$ minden v-re, amiből kapjuk, hogy $f'(a) = 0$. Hasonlóan igazolható az állítás lokális maximum esetén. $\square$

2.4.3. Példa. Az alábbi példán keresztül megmutatjuk, hogy melyik az a legrövidebb ívhosszúságú görbe, amely a $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ és $(1,0) \in \mathbb{R}^2$ pontokat köti össze. Legyen $u\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amely folytonosan differenciálható, valamint a 0 és 1 pontokban a nulla értéket veszi fel, azaz $u(0) = u(1) = 0$. Keressük azt az u görbét, hogy az $l(u) = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + (u'(t))^2}\, dt$ ívhossza minimális legyen.
Ha az $u \equiv 0$ választjuk, akkor az $u' \equiv 0$, amelyből kapjuk, hogy

$$\int\limits_0^1 1 \leq \int\limits_0^1 \sqrt{1 + (u')^2} = l(u), \qquad \forall u,$$

tehát az $u \equiv 0$ egy minimális ívhosszú összekötő görbe. A kérdés az, hogy létezik-e más görbe?
Legyen

$$X := \{u \in C^1[0,1] \,\big|\, u(0) = u(1) = 0\}$$

vektortér és legyen $\|\cdot\|_1$ norma a következőképp definiálva:

$$\|u\|_1 := \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty = \max|u| + \max|u'|,$$

továbbá legyen $l\colon X \to \mathbb{R}$ az a függvény, melyre $l(u) := \int\limits_0^1 \sqrt{1 + (u')^2}$. Tegyük fel egy pillanatra, hogy $l\colon X \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható, akkor minden $u \in X$ helyen, ahol l-nek minimuma van $l'(u) = 0$ teljesül. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy l valóban differenciálható és $u \equiv 0$ az egyetlen olyan X-beli függvény, melyre $f'(u) = 0$. Először a kompozíció-függvény deriválási szabályának többszöri alkalmazásával belátjuk, hogy l minden $u \in X$ pontban differenciálható és

$$l'(u)(v) = \int\limits_0^1 \frac{u'}{\sqrt{1 + (u')^2}} \cdot v', \qquad \forall v \in X.$$

Legyen $A\colon X \to C([0,1], \mathbb{R})$ az a lineáris operátor, melyre $Au := u'$. Ekkor A lineáris és folytonos is. A linearitás könnyen látható, a folytonosság pedig következik az alábbi becslésből:

$$\|Au\|_\infty = \|u'\|_\infty \leq \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty = 1 \cdot \|u\|_1,$$

tehát A valóban folytonos és $\|A\| \leq 1$. Ezért a 2.1.8 Állítás szerint A differenciálható és minden $u \in X$ pontban $A'(u) = A$. Legyen $f\colon C[0,1] \to C[0,1]$, melyre $f(u) := u^2$. Ekkor f differenciálható és a deriváltja: $f'(u) = M_{2u}$ (ahol $M_g v = g \cdot v$, ezt láttuk a 2.1.13 Példánál). Vezessük be $g\colon X \to C[0,1]$ függvényt, melyre $g(u) := (u')^2$, ekkor g felírható a következő kompozíció-függvényként: $g = f \circ A$, ezért a 2.1.12 Tétel szerint g differenciálható és:

$$g'(u) = (f \circ A)'(u) = f'(Au) \cdot A'(u) = f'(u') \cdot A = M_{2u'} \cdot A,$$

azaz bármely $v \in X$ esetén:

$$g'(u)(v) = M_{2u'} \cdot Av = M_{2u'} \cdot v' = 2u' \cdot v'.$$

Legyen $h(u) = 1 + g(u)$ és vegyük a deriváltját:

$$h'(u) = 1' + g'(u) = g'(u),$$

vagyis:

$$h'(u)(v) = g'(u)(v) = 2u' \cdot v', \qquad \forall v \in X.$$

Legyen $k\colon C[0,1] \rightarrowtail C[0,1]$ olyan függvény, hogy $k(u) := \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$. Ennek a függvénynek meg kell határozni a pontos értelmezési tartományát, vagyis $k\colon U \to C[0,1]$, ahol $U = \{v \in C[0,1] \,|\, v > 0\}$. Ekkor k a 2.1.13 Példa szerint differenciálható függvény minden $v \in U$ pontban és a deriváltja a következő:

$$k'(v) := M_{\frac{1}{2} \cdot v^{-\frac{1}{2}}},$$

azaz minden $w \in C[0,1]$ mellett:

$$k'(v)(w) = M_{\frac{1}{2} \cdot v^{-\frac{1}{2}}} \cdot w = \frac{1}{2} \cdot v^{-\frac{1}{2}} \cdot w.$$

Vezessünk be egy újabb függvényt, legyen $p\colon X \to C[0,1]$, melyre $p(u) := \sqrt{1 + (u')^2} = k(h(u))$, vagyis $p = k \circ h$. Deriváljuk le ezt a függvényt is:

$$p'(u) = k'(h(u)) \cdot h'(u) = M_{\frac{1}{2} h(u)^{-\frac{1}{2}}} \cdot M_{2u'} \cdot A = M_{\frac{1}{2} \cdot (1 + (u')^2)^{-\frac{1}{2}}} \cdot M_{2u'} \cdot A,$$

vagyis bármely $v \in X$ esetén:

$$\begin{aligned}
p'(u)(v) &= M_{\frac{1}{2} \cdot (1 + (u')^2)^{-\frac{1}{2}}} \cdot M_{2u'} \cdot Av = \\
&= M_{\frac{1}{2} \cdot (1 + (u')^2)^{-\frac{1}{2}}} \cdot M_{2u'} \cdot v' = \\
&= \frac{1}{2} \cdot (1 + (u')^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2u' \cdot v' = \\
&= \frac{u' \cdot v'}{\sqrt{1 + (u')^2}}.
\end{aligned}$$

Legyen $B\colon C[0,1] \to \mathbb{R}$ az a lineáris operátor, melyre $Bv = \int\limits_0^1 v$. Azt állítjuk, hogy B lineáris és folytonos is. Lineáris, mert összegtartó és a skalár-szorostartó, valamint folytonos is, mert

$$|Bv| = \left|\int\limits_0^1 v\right| \leq \int\limits_0^1 |v| \leq 1 \cdot \max|v| = 1 \cdot \|v\|_\infty,$$

tehát B folytonos és $\|B\| \leq 1$. Továbbá a 2.1.8 Állítás szerint B differenciálható és $B'(v) = B$. Vegyük észre, hogy:

$$l(u) = \int\limits_0^1 \sqrt{1+(u')^2} = \int\limits_0^1 p(u) = B(p(u)), \qquad \forall u \in X,$$

azaz $l = B \circ p$ kompozíció-függvény. Ismét a 2.1.12 Tétel szerint l minden $u \in X$ pontban differenciálható és

$$l'(u) = (B \circ p)'(u) = B'(p(u)) \cdot p'(u) = B \cdot p'(u),$$

vagyis a fentiek figyelembevételével minden $u, v \in X$ mellett:

$$l'(u)(v) = B \cdot p'(u)(v) = B\left(\frac{u' \cdot v'}{\sqrt{1+(u')^2}}\right) = \int\limits_0^1 \frac{u' \cdot v'}{\sqrt{1+(u')^2}}.$$

Ha $l(u)$ minimális az u pontban, akkor a 2.4.2 Tétel szerint az $l'(u) = 0$, vagyis minden $v \in X$ vektorra igaz, hogy $l'(u)(v) = 0$. A mi esetünkben teljesülnie kell a következőnek, hogy:

$$\int\limits_0^1 \frac{u' \cdot v'}{\sqrt{1+(u')^2}} = 0, \qquad \forall v \in X.$$

Ahhoz, hogy ez teljesüljön, tegyük fel még azt is, hogy az u függvény kétszer folytonosan differenciálható, ekkor $w := \frac{u'}{\sqrt{1+(u')^2}}$ differenciálható. Ekkor

$$\int\limits_0^1 w \cdot v' = [w \cdot v]_0^1 - \int\limits_0^1 v \cdot w' = 0 - \int\limits_0^1 v \cdot w',$$

ahol a parciális integrálás elvét alkalmaztuk, valamint kihasználtuk hogy minden $v \in X$-re $v(0) = v(1) = 0$. Így az előző levezetésből kapjuk, hogy

$$\int\limits_0^1 v \cdot w' = 0, \qquad \forall v \in X.$$

Számoljuk ki w deriváltját. Tudjuk, hogy $w = \frac{u'}{\sqrt{1+(u')^2}} = u' \cdot (1+(u')^2)^{-\frac{1}{2}}$, ezért

$$\begin{aligned} w' &= u'' \cdot \left(1+(u')^2\right)^{-\frac{1}{2}} - u' \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1+(u')^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2 \cdot u' \cdot u'' = \\ &= u'' \cdot \left(1+(u')^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[1 - (u')^2 \cdot \left(1+(u')^2\right)^{-1}\right] = \\ &= u'' \cdot \left(1+(u')^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1+(u')^2} = \\ &= \frac{u''}{(1+(u')^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Helyettesítsük be az előbb kapott w' értékét:

$$\int_0^1 w' \cdot v = \int_0^1 \frac{u''}{(1+(u')^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot v = 0, \qquad \forall v \in X.$$

A következőkben megmutatjuk, hogy ha $\int_0^1 z \cdot v = 0$ teljesül minden $v \in X$ esetén, valamely $z \in C[0,1]$-re, akkor $z = 0$. Ha ugyanis a z függvény egy $t_0 \in [0,1]$ pontban nem nulla (például $z(t_0) > 0$) volna, akkor a z folytonossága miatt feltehető, hogy $t_0 \in]0,1[$ egy belső pont. Ekkor ismét a folytonosság miatt létezne olyan $\delta > 0$, hogy $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\subseteq [0,1]$ és bármely $t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ esetén $z(t) > 0$. Könnyen látható, hogy létezik olyan v folytonosan differenciálható függvény, melyre $v(t_0) > 0$, $v \geq 0$ és $v(t) = 0$, ha $t \notin [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Ekkor $v \in X$ és $\int_0^1 v \cdot z = 0$ teljesül, ugyanakkor $z \cdot v \geq 0$, valamint $z \cdot v \neq 0$, de akkor a 1.1.16 Példa eredménye alapján $\int_0^1 v \cdot w \neq 0$, ami ellentmondás.

Térjünk vissza a példánkhoz, ahol tehát:

$$\int_0^1 w' \cdot v = \int_0^1 \frac{u''}{(1+(u')^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot v = 0, \qquad \forall v \in X.$$

Az előző állítást felhasználva $\frac{u''}{(1+(u')^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$, vagyis $u'' = 0$. Ekkor u' konstans, azaz $u' = C$, amiből következik, hogy az eredeti u függvény lineáris, vagyis $u(x) = C \cdot x + D$ alakú, ahol $u \in X$. Helyettesítsük be 0 és 1 pontokat, amelyekről tudjuk, hogy $u(0) = u(1) = 0$, vagyis:

$$u(0) = C \cdot 0 + D = D = 0,$$

$$u(1) = C \cdot 1 + D = C + D = C = 0.$$

Ebből már látható, hogy $u = 0$, vagyis a konstans nulla függvény az egyetlen, amelynek az ívhossza minimális.

Irodalomjegyzék

[1] Komornik Vilmos: Valós analízis előadások 1., Typotex kiadó, 2003

[2] Czách László: Differenciálszámítás normált terekben, elektronikus jegyzet

[3] Karátson János: Numerikus funkcionálanalízis, Typotex kiadó, 2014

[4] Faragó István–Horváth Róbert: Numerikus módszerek, Typotex kiadó, 2013

[5] https://hu.wikipedia.org/wiki/Fermat-tétel_(analízis)