Módszerek szélsőérték feladatok vizsgálatára

Szakdolgozat

Írta: **Muhari Ágnes**
Matematika BSc, elemző szakirány

Témavezető: **Dr. Kós Géza**
egyetemi adjunktus
Analízis Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Budapest 2017.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Már középiskolás koromban megtetszettek a szélsőérték feladatok, de akkor még nem sejtettem, hogy több módszer is foglalkozik ilyen példákkal. Legjobban az tetszett benne, hogy bonyolult feladványokat (akár egy bizonyítás, vagy akár egy testbe mekkora maximális térfogatú másik testet helyezhetünk) is vissza tudtunk vezetni egyszerűbb módszerre, például a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenségre.

Később az egyetemen is megjelent ez az ismerős témakör, és kiderült számomra, hogy többrétűbb, mint gondoltam. Egyetemi éveim alatt többször is újra előkerült ez a téma, és mindig bővítettük tudásunkat. Így végül ez lett a szakdolgozatom témája is, ezzel kicsit összefoglalva a róla szerzett ismereteimet.

Szakdolgozatomban minden fejezetet elméleti résszel kezdek, ismertetem a témához kapcsolódó definíciókat, tételeket, következményeket, olykor példával is szemléltetem a leírtak alkalmazását. Majd minden fejezetet feladatokkal zárok, ezzel is tükrözve az elmélet elsajátítását, és az alkalmazhatóság színességét. Az elejétől, vagyis a középiskolás ismeretekkel kezdem a módszerek bemutatását, majd áttérek az egy- és többváltozós függvények megoldási módszereire, végül a feltételes szélsőérték kereséssel fejezem be a munkámat.

1. Számtani és mértani közepek alkalmazása

Közepek közti összefüggések

A közepek közötti összefüggések szélsőérték feladatok megoldására akkor alkalmazhatók, ha valamelyik közép állandó, így egy másik középre adhatunk minimumot vagy maximumot. Az összefüggések közül leggyakrabban a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget használjuk.

1.1. Definíció. Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok számtani közepe

$$A = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

1.2. Definíció. Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok mértani közepe

$$G = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

1.1. Tétel. *Ha $a_1, \ldots, a_n$ tetszőleges nemnegatív számok, akkor*

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a_1 = \ldots = a_n$.

Következmény. Ha n pozitív szám szorzata állandó, akkor az összegük akkor minimális, ha a számok egyenlők.
Ha n pozitív szám összege állandó, akkor a szorzatuk akkor maximális, ha a számok egyenlők.

Feladatok

1.1. Tudjuk, hogy $a, b, c > 0$ és $a+b+c = 18$. Határozzuk meg a, b és c értékét úgy, hogy a következő kifejezések értéke maximális legyen:

$$a \cdot b \cdot c$$

$$\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c} \leq \frac{a+b+c}{3} = \frac{18}{3} = 6$$
$$a \cdot b \cdot c \leq 216$$

Akkor lesz maximális érték, ha egyenlőség van. Egyenlőség pedig akkor és csak akkor áll fenn, ha $a = b = c = \sqrt[3]{216} = 6$.

1.2. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b és c pozitív számok, akkor

$$(a+b) \cdot (b+c) \cdot (c+a) \geq 8 \cdot a \cdot b \cdot c.$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$$
$$\frac{b+c}{2} \geq \sqrt{b \cdot c}$$
$$\frac{c+a}{2} \geq \sqrt{c \cdot a}$$

A fentieket összeszorozva az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk

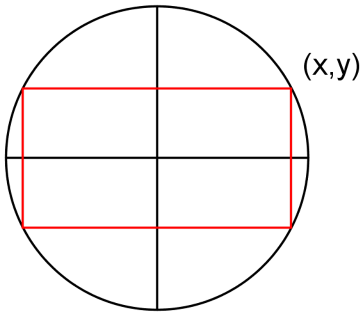
$$\frac{(a+b) \cdot (b+c) \cdot (c+a)}{8} \geq \sqrt{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2} = a \cdot b \cdot c$$

8-cal beszorozva az egyenlőtlenséget, a bizonyítandó állítást kapjuk.

1.3. Melyik az egységkörbe írható maximális területű téglalap?

Az 1. ábra jelöléseit használva, a téglalap területe:
$T = 4F$, ahol $F = x \cdot y$ és mivel egységkörünk van, így a Pitagorasz-tételt használva $x^2+y^2 = 1$. Rendezve az egyenletet $y = \sqrt{1-x^2}$ -et kapjuk, melyet beírva F-be, az eredmény $F = x \cdot \sqrt{1-x^2}$. Számoljuk ki F^2 maximumát:

$$F^2 = x^2 \cdot (1-x^2) \leq \left(\frac{x^2 + (1-x^2)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$



1. ábra. Körbe írható téglalap

Egyenlőség csak akkor van, ha $x^2 = 1 - x^2$, azaz

$$x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Tehát a maximális terület: $T = 2$, mégpedig négyzet esetén.

1.4. Azok közül a téglatestek közül, amelyek térfogata a felszínük kétszerese, melyiknek legkisebb a térfogata? /OKTV 2000./

A megadott feltételek szerint $V = a \cdot b \cdot c = 2 \cdot A = 2 \cdot 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$.

$$\sqrt[3]{a \cdot b \cdot a \cdot c \cdot b \cdot c} \leq \frac{a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c}{3}$$
$$\sqrt[3]{V^2} \leq \frac{\frac{V}{4}}{3} = \frac{V}{12}$$
$$12^3 \leq V$$

Akkor lesz a legkisebb a térfogat, ha az egyenlőség teljesül, vagyis ha $a \cdot b = a \cdot c = b \cdot c$ teljesül. Ez úgy lehetséges, ha $a = b = c$. Tehát egy 12 cm élű kockának a térfogata a legkisebb, mégpedig 12^3 cm^3 = 1728 cm^3.

2. Szélsőérték keresés másodfokú függvényeknél

Tételek és definíciók

2.1. Definíció. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)$ másodfokú függvény általános alakja:

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c, \quad \text{ahol } a, b \text{ és } c \text{ valós értékű paraméterek.}$$

$(a \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R})$

2.2. Definíció. Az $f : A \to B$ függvénynek az $x_0 \in A$ helyen (abszolút) maximuma van, ha minden $x \in A$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$. A függvény (abszolút) maximuma $f(x_0)$.
Az $f : A \to B$ függvénynek az $x_0 \in A$ helyen (abszolút) minimuma van, ha minden $x \in A$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$. A függvény (abszolút) minimuma $f(x_0)$.
Az abszolút maximumot és minimumot abszolút szélsőértéknek nevezik.

Egy A halmazon egy függvénynek több abszolút minimum-, illetve maximumhelye is lehet.

Ha a vizsgált kifejezés felírható egy x ismeretlen másodfokú függvényeként, ahol x tetszőleges valós szám, akkor $f(x) = a \cdot (x - u)^2 + v$ alakra hozás után megállapítható a függvény szélsőértéke.
A függvénynek minimuma van, ha $a > 0$, minimum értéke v, helye u.
A függvénynek maximuma van, ha $a < 0$, maximum értéke v, helye u.
Ha a másodfokú kifejezés $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ alakú, akkor a négyzetes alakban az $u = -\frac{b}{2 \cdot a}$, $v = -\frac{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}{4 \cdot a}$.

Ha f értelmezési tartománya nem a teljes valós számhalmaz, hanem például egy intervallum, akkor a szélsőérték vizsgálathoz célszerű ábrázolni a függvényt.

2.1. Tétel (Weierstrass tétele)**.** *Ha $f \in C[a, b]$, akkor van olyan $\alpha \in [a, b]$ és $\beta \in [a, b]$, amelyekre teljesül, hogy $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$ minden $x \in [a, b]$-re. Más szóval, egy korlátos, zárt intervallumban folytonos függvénynek mindig van abszolút maximum- és abszolút minimumhelye.*

Feladatok

2.1. Adott kerületű téglalapok közül melyiknek a területe maximális?

A feladat szövege szerint a téglalapok kerülete $k = 2 \cdot (a + b)$ adott. Ebből $b = \frac{k}{2} - a$. Keressük a $t(a) = a \cdot \left(\frac{k}{2} - a\right); 0 < a < \frac{k}{2}$ függvény maximumát.

$$t(a) = -a^2 + \frac{k}{2} \cdot a = -\left(a - \frac{k}{4}\right)^2 + \left(\frac{k}{4}\right)^2;$$

maximum helye $a = \frac{k}{4}$. Itt értelmezve van a függvény, ekkor $b = \frac{k}{2} - \frac{k}{4} = \frac{k}{4}$, a maximum értéke $\frac{k^2}{16}$.
Tehát az adott kerületű téglalapok közül a négyzet területe a maximális.

2.2. Bontsuk fel 30-at két összeadandóra úgy, hogy négyzetösszegük minimális legyen.

A két szám legyen x és $30 - x$.
Négyzetösszegük: $x^2 + (30 - x)^2 = x^2 + 900 - 60 \cdot x + x^2 = 2 \cdot x^2 - 60 \cdot x + 900$
Mivel ennek a másodfokú kifejezésnek a főegyütthatója 2, és $2 > 0$, ezért a függvénygörbének minimuma van.
A szélsőérték helye: $-\frac{b}{2 \cdot a} = -\frac{-60}{4} = 15$
A szélsőérték: $-\frac{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}{4 \cdot a} = -\frac{3600 - 7200}{8} = 450$
Ha két számnak az összege 30, akkor a négyzetösszegük akkor minimális, ha a két szám 15.

3. Paraméteres egyenlet

Az f függvény értékkészlete azon p számok halmaza, amelyekre az $f(x) = p$ egyenletnek van megoldása az f függvény értelmezési tartományán. Ezzel a függvény szélsőértékének, illetve értékkészletének vizsgálatát paraméteres egyenlet megoldására vezethetjük vissza.

Feladatok

3.1. Határozzuk meg az $f(x) = \frac{x+2}{x^2+3}, x \in \mathbb{R}$ függvény legkisebb és legnagyobb értékét!

Ha meghatározzuk a kifejezés értékkészletét, akkor annak legkisebb, illetve legnagyobb eleme (ha van) egyben a vizsgált kifejezés minimuma, illetve maximuma is. Ezzel a kifejezés szélsőértékének meghatározását visszavezetjük egy paraméteres egyenlet megoldására.

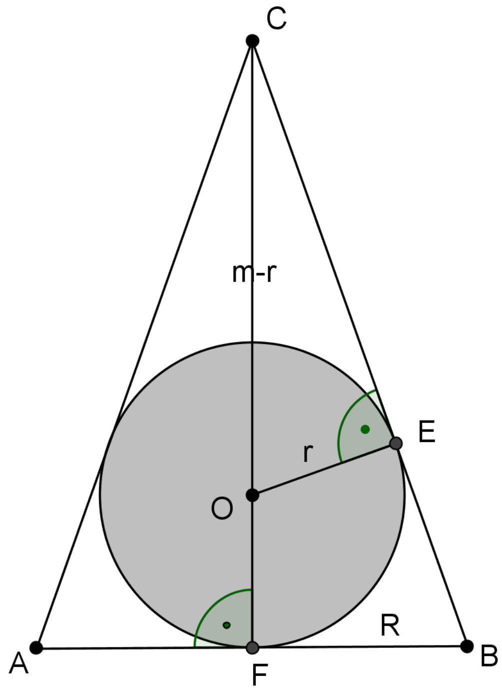
$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x^2+3} &= p \\ x+2 &= p \cdot (x^2+3) \\ p \cdot x^2 - x + 3 \cdot p - 2 &= 0 \end{aligned}$$

$p = 0$ esetén $x = -2$
$p \neq 0$ esetén a másodfokú egyenletnek akkor van valós megoldása, ha a diszkrimináns, $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c \geq 0$.

$$\begin{aligned} D = 1 - 4 \cdot p \cdot (3 \cdot p - 2) = 1 - 12 \cdot p^2 + 8 \cdot p &= -12 \cdot p^2 + 8 \cdot p + 1 \\ -12 \cdot p^2 + 8 \cdot p + 1 \geq 0, \text{ ha } \frac{2-\sqrt{7}}{6} &\leq p \leq \frac{2+\sqrt{7}}{6} \end{aligned}$$

Tehát a függvény legkisebb értéke $\frac{2-\sqrt{7}}{6}$, legnagyobb értéke pedig $\frac{2+\sqrt{7}}{6}$. Ekkor a függvény szélsőérték helyei az $x_{1,2} = \frac{-b}{2 \cdot a} = \frac{1}{2 \cdot p}$, vagyis a minimumhely $\frac{1}{2 \cdot \frac{2-\sqrt{7}}{6}} = -2 - \sqrt{7}$, a maximumhely $\frac{1}{2 \cdot \frac{2+\sqrt{7}}{6}} = -2 + \sqrt{7}$.

3.2. Adott r sugarú gömb köré írható forgáskúpok közül melyiknek legkisebb a térfogata?



2. ábra. Kúp és gömb közös tengelymetszete

Az AFC és OEC derékszögő háromszögek hasonlók, mert $ACF\measuredangle = FCB\measuredangle$, megfelelő oldalaik aránya egyenlő:

$$\frac{r}{m-r} = \frac{R}{\sqrt{m^2+R^2}}$$

Az egyenletet átalakítjuk:

$$
\begin{aligned}
r \cdot \sqrt{m^2 + R^2} &= R \cdot (m - r) \\
r^2 \cdot (m^2 + R^2) &= R^2 \cdot (m - r)^2 \\
r^2 \cdot m^2 + r^2 \cdot R^2 &= R^2 \cdot m^2 - R^2 \cdot 2 \cdot m \cdot r + R^2 \cdot r^2 \\
r^2 \cdot m^2 &= R^2 \cdot m^2 - R^2 \cdot 2 \cdot m \cdot r \\
r^2 \cdot m^2 &= R^2 \cdot m \cdot (m - 2 \cdot r) \\
R^2 &= \frac{r^2 \cdot m}{m - 2 \cdot r}.
\end{aligned}
$$

Ezt behelyettesítjük a kúp térfogatképletébe:

$$V = \frac{R^2 \cdot \Pi \cdot m}{3} = \frac{r^2 \cdot m}{m - 2 \cdot r} \cdot \frac{\Pi}{3} \cdot m = r^2 \cdot \frac{\Pi}{3} \cdot \frac{m^2}{m - 2 \cdot r}.$$

Az első két tényező adott, vizsgáljuk meg, hogy a harmadik tényező milyen értékeket vehet fel.

Adjuk meg, hogy az $\frac{m^2}{m-2 \cdot r} = p$ paraméteres egyenletnek mely p számokra van megoldása, feltéve, hogy $m > 2 \cdot r$.

Rendezve az egyenletet az $m^2 - p \cdot m + 2 \cdot p \cdot r = 0$ egyenletet kapjuk. Ennek akkor van megoldása, ha a diszkrimináns nemnegatív, vagyis $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = p^2 - 8 \cdot p \cdot r \geq 0$, így $p^2 \geq 8 \cdot p \cdot r$. Mivel $p = 0$ esetén $m^2 = 0$ lenne, ami nem lehetséges, mert a kúpnak kell lennie magasságának, ezért $p > 0$. A $p^2 \geq 8 \cdot p \cdot r$ képletet p-vel elosztva a $p > 8 \cdot r$ egyenlőtlenséget kapjuk, amellyel megkapjuk a vizsgált kifejezés minimumát, ami $8 \cdot r$.

Így az r sugarú gömb köré írható minimális térfogatú kúp térfogata $V = r^2 \cdot \frac{\Pi}{3} \cdot 8 \cdot r = \frac{8}{3} \cdot r^3 \cdot \Pi$.

4. Szélsőérték számítás deriválással

A derivált fogalma

4.1. Definíció. Az f függvény $a \in D_f$ pontjához tartozó különbségihányados-függvénye (vagy differenciahányados-függvénye) a $D_f \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ függvény.

4.2. Definíció. Az f függvény differenciálható (vagy deriválható) az $a \in D_f$ pontban, ha létezik és véges a $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ határérték. Ekkor ezt az értéket az f függvény a-beli differenciálhányadosának (vagy deriváltjának) nevezzük. Jelölés:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a).$$

4.3. Definíció. Az f függvény differenciálható, ha értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható.

4.4. Definíció. Ha a

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

véges határérték létezik, ezt az f függvény a-beli jobb oldali differenciálhányadosának (vagy deriváltjának) nevezzük. Ugyanígy értelmezzük a bal oldali differenciálhányadost.

Az a pontbeli jobb oldali differenciálhányadost $f'_+(a)$-val, a bal oldali differenciálhányadost $f'_-(a)$-val jelöljük.

Nyilvánvaló, hogy f akkor és csak akkor differenciálható a-ban, ha f jobb és bal oldali differenciálhányadosa is létezik a-ban, és $f'_+(a) = f'_-(a)$. Ekkor a közös érték $f'(a)$.

4.1. Tétel. *Ha f konvex az (a, b) intervallumban, akkor f jobbról is és balról is differenciálható minden $c \in (a, b)$ pontban.*

4.2. Tétel (Darboux tétele). *Ha a és b olyan intervallum pontjai, amelyen az f függvény differenciálható, akkor az f' deriváltfüggvény $f'(a)$ és $f'(b)$ között minden értéket felvesz.*

4.5. Definíció. Az f függvény differenciálhányados-függvénye (vagy deriváltfüggvénye) az az f' függvény, amely azokban az $a \in D_f$ pontokban értelmezett, ahol f differenciálható, és ott értéke $f'(a)$.

4.6. Definíció. Ha az f' deriváltfüggvény deriválható, akkor az $f''(x) = (f')'(x)$ függvényt az f második deriváltfüggvényének nevezzük. Ha az f függvény $n-1$-edik deriváltfüggvénye is deriválható $n \in \mathbb{Z}^+$, akkor az f-et n-szer deriválhatónak nevezzük, az n-edik deriváltfüggvényt $f^{(n)}(x)$ jelöli. Ekkor

$$f^{(n)}(a) = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a}$$

4.3. Tétel. *Ha az f függvény differenciálható az $a \in D_f$ pontban, akkor folytonos is az a-ban.*

A derivált és a szélsőérték kapcsolata

4.7. Definíció. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban lokális maximuma (illetve minimuma) van, ha a-nak van olyan U környezete, amelyben f értelmezve van, és minden $x \in U$-ra $f(x) \leq f(a)$ (illetve $f(x) \geq f(a)$). Ekkor az a pontot az f függvény lokális maximumhelyének (illetve lokális minimumhelyének) nevezzük.

Ha minden $x \in U \backslash a$-ra $f(x) < f(a)$ (illetve $f(x) > f(a)$), akkor szigorú lokális maximumról és maximumhelyről (illetve minimumról és minimumhelyről) beszélünk.

A lokális maximumot, illetve minimumot közösen lokális szélsőértéknek, a lokális maximumhelyet, illetve minimumhelyet közösen lokális szélsőértékhelynek nevezzük.

Megjegyzés. Az abszolút szélsőérték fogalmát a 2.2 Definícióban értelmeztük. Az abszolút szélsőérték és a lokális szélsőértékhely fogalmai között a következő kapcsolat áll fenn.

Egy abszolút szélsőértékhely nem szükségképpen lokális szélsőértékhely, mert az utóbbinak feltétele, hogy a függvény értelmezve legyen a pont egy környezetében. Így például a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett x függvénynek a 0 pontban abszolút minimuma van, de ez nem lokális minimum. Azonban, ha az $f : A \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in A$ pontban abszolút szélsőértéke van és A tartalmazza a egy környezetét, akkor a lokális szélsőértékhely.

Egy lokális szélsőértékhely nem szükségképpen abszolút szélsőértékhely, hiszen attól, hogy az f függvénynek az a pont egy környezetében nincs $f(a)$-nál nagyobb értéke, a környezeten kívül f felvehet $f(a)$-nál nagyobb számot.

4.4. Tétel. *Legyen f folytonos $[a, b]$-ben és differenciálható (a, b)-ben.*

(i) f akkor és csak akkor monoton növekedő (illetve monoton csökkenő) $[a, b]$-ben, ha $f'(x) \geq 0$ (illetve $f'(x) \leq 0$) minden $x \in (a, b)$-re.

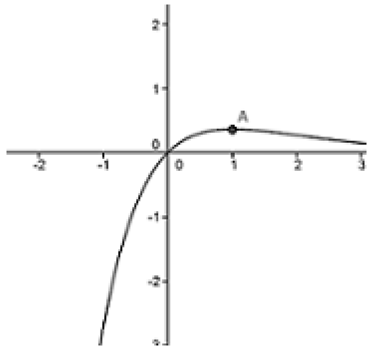
(ii) f akkor és csak akkor szigorúan monoton növő (illetve szigorúan monoton csökkenő) $[a, b]$-ben, ha $f'(x) \geq 0$ (illetve $f'(x) \leq 0$) minden $x \in (a, b)$-re, és ha $[a, b]$-nek nincs olyan részintervalluma, amelyen f' azonosan nulla.

Egy tetszőleges differenciálható függvény lokális és abszolút szélsőértékeit megkereshetjük akkor is, ha a függvény nem egy korlátos és zárt intervallumon van értelmezve. Ugyanis a derivált előjeléből megállapíthatjuk, hogy a függvény mely intervallumokon nő és melyeken csökken, és ez általában elegendő információt ad a szélsőértékek megkereséséhez.

Tekintsük például az $f(x) = x \cdot e^{-x}$ függvényt. Mivel $f'(x) = e^{-x} - x \cdot e^{-x}$, ezért $f'(x) > 0$, ha $x < 1$, és $f'(x) < 0$, ha $x > 1$. Így f szigorúan monoton nő $(-\infty, 1]$-ben, és szigorúan monoton csökken $[1, \infty)$-ben. Ebből azonnal következik, hogy f-nek 1-ben abszolút maximuma van (ami lokális maximumhely is egyben), és hogy f-nek nincs sem lokális, sem abszolút minimumhelye.

4.5. Tétel (Az első derivált és a lokális szélsőérték)**.** *Ha az f függvénynek lokális maximuma vagy lokális minimuma van értelmezési tartományának valamely a belső pontjában, és f' értelmezve van az a pontban, akkor*

$$f'(a) = 0.$$



3. ábra. $x \cdot e^{-x}$ függvény maximuma

Abból, hogy $f'(a) = 0$, nem következik, hogy az f függvénynek lokális szélsőértékhelye van a-ban. Például az $f(x) = x^3$ függvényre $f'(0) = 0$, de f-nek nincs 0-ban lokális szélsőértékhelye (hiszen x^3 az egész számegyenesen szigorúan monoton növekedő). Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy ha f differenciálható a-ban, akkor az $f'(a) = 0$ feltétel szükséges, de nem elégséges ahhoz, hogy f-nek lokális szélsőértéke legyen a-ban.

4.8. Definíció (Kritikus pont)**.** Az f függvény kritikus pontjának nevezzük f értelmezési tartományának minden olyan pontját, amelyben az f' derivált-függvény értéke nulla, vagy nincs értelmezve.

A függvénynek csak olyan pontban lehet szélsőértéke, amely az értelmezési tartományának vagy kritikus pontja, vagy végpontja.

Tegyük fel, hogy c az f folytonos függvény egy kritikus pontja, és f differenciálható valamely c-t tartalmazó intervallum minden pontjában, kivéve esetleg magát a c pontot. Balról jobbra haladva:
1. Ha f' a c helyen negatívról pozitívra vált, akkor f-nek lokális minimuma van a c pontban.
2. Ha f' a c helyen pozitívról negatívra vált, akkor f-nek lokális maximuma van a c pontban.
3. Ha f' a c helyen nem vált előjelet (f' a c-től jobbra és balra egyaránt pozitív, vagy egyaránt negatív), akkor f-nek nincs lokális szélsőértéke a c helyen.

Az intervallum-végpontokban a vizsgálatot hasonlóképpen végezzük, annyi a különbség, hogy f' értékét c-nek csak egyik oldalán vesszük figyelembe.

Példa. Keressük meg az $f(x) = x^2$ függvény abszolút minimumát és maximumát a $[-2, 1]$ intervallumon.
Megoldás. A függvény értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható. Kritikus pontja az $f'(x) = 2 \cdot x = 0$ egyenlet megoldása, vagyis az $x = 0$. Meg kell vizsgálnunk a függvény értékét $x = 0$-ban, az $x = -2$ és az $x = 1$ végpontokban.
$f(0) = 0, \qquad f(-2) = 4, \qquad f(1) = 1.$
A függvénynek abszolút maximuma van az $x = -2$ pontban, értéke 4, abszolút minimuma van az $x = 0$ pontban, értéke 0.

4.6. Tétel. *Legyen f kétszer differenciálható a-ban. Ha $f'(a) = 0$ és $f''(a) > 0$, akkor f-nek a-ban szigorú lokális minimuma van. Ha $f'(a) = 0$ és $f''(a) < 0$, akkor f-nek a-ban szigorú lokális maximuma van.*

Megjegyzés. Ha $f'(a) = 0$ és $f''(a) = 0$, akkor sem arra nem következtethetünk, hogy f-nek van, sem arra, hogy f-nek nincs lokális szélsőértéke a-ban.

4.9. Definíció (Konvex,konkáv). A differenciálható $y = f(x)$ függvény grafikonja
(a) konvex a nyílt I intervallumon, ha f' növekvő az I-n
(b) konkáv a nyílt I intervallumon, ha f' csökkenő az I-n.

4.7. Tétel. *Legyen f kétszer differenciálható az I intervallumban. Az f függvény akkor és csak akkor konvex (illetve konkáv) I-ben, ha $f''(x) \geq 0$ (illetve $f''(x) \leq 0$) minden $x \in I$-re.*

4.10. Definíció. Azt mondjuk, hogy az a pont az f függvénynek inflexiós pontja, ha f folytonos a-ban, f-nek létezik a (véges vagy végtelen) deriváltja a-ban, és van olyan $\delta > 0$, hogy f konvex $(a-\delta, a]$-ban és konkáv $[a, a+\delta)$-ban, vagy fordítva.

4.8. Tétel. *Legyen f kétszer differenciálható az a pont egy környezetében. Annak, hogy a-ban f-nek inflexiós pontja legyen* *(i) szükséges feltétele, hogy $f''(a) = 0$ teljesüljön,*

(ii) elégséges feltétele, hogy f'' előjelet váltva legyen nulla az a pontban, azaz, hogy $f''(a) = 0$ teljesüljön, továbbá f'' lokálisan növekedő, vagy lokálisan csökkenő legyen a-ban.

Következmény. Legyen f háromszor differenciálható a-ban. Ha $f''(a) = 0$ és $f'''(a) \neq 0$, akkor f-nek inflexiós pontja van a-ban.

Az f' és az f'' deriváltfüggvény együttesen felvilágosítást ad számunkra a függvény grafikonjának alakjáról, azaz arról, hogy hol vannak a függvény kritikus pontjai, hogyan viselkedik a kritikus pontokban, hol csökenő és hol növekvő, valamint hogy hogyan hajlik a görbe, azaz milyen a konvexitása. Ezen információk birtokában vázlatosn felrajzolhatjuk a függvény grafikonját.

Feladatok

4.1. Jellemezzük az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 4$ függvényt monotonitás, szélsőértékek, konvexitás és inflexiós pont szempontjából!

A függvény vizsgálatát az első és a második derivált segítségével végezzük el. $f'(x) = x^2 - 4 \cdot x - 5$, amelynek zérushelyei $x_1 = -1$ és $x_2 = 5$. Mivel f' képe egy felfelé nyíló parabola, ezért $f'(x) > 0$, ha $x < -1$ vagy $x > 5$, illetve $f'(x) < 0$, ha $-1 < x < 5$.

Tehát f menete a következő:

f szigorúan monoton növekvő, ha $x < -1$ vagy $x > 5$

f szigorúan monoton csökkenő, ha $-1 < x < 5$

f-nek szigorú lokális maximuma van $x = -1$-ben

f-nek szigorú lokális minimuma van $x = 5$-ben

f-nek nincsenek abszolút szélsőértékei, ugyanis

$$\lim_{x \to -\infty} = -\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x \to +\infty} = +\infty$$

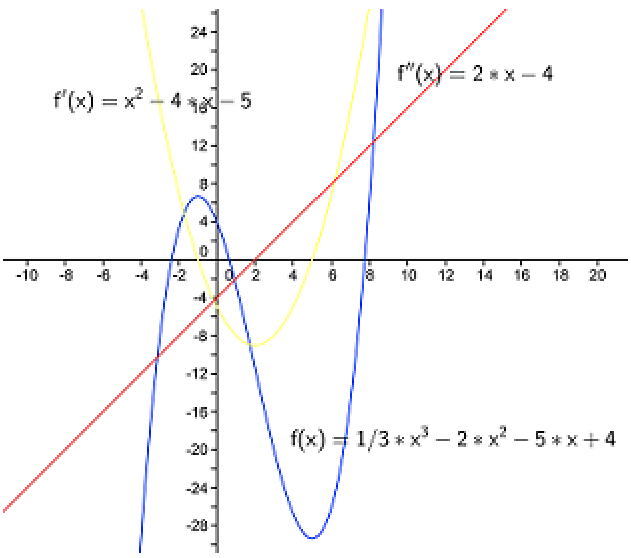
$f''(x) = 2 \cdot x - 4$, amelynek zérushelye $x = 2$. Mivel f'' képe egy pozitív meredekségű egyenes, így $f''(x) > 0$, ha $x > 2$, és $f''(x) < 0$, ha $x < 2$.

Tehát f görbülete a következő:
f szigorúan konvex, ha $x > 2$, szigorúan konkáv, ha $x < 2$
f-nek inflexiós pontja van $x = 2$-ben

Mindezt a következő táblázatban is összefoglalhatjuk:

	x<-1	x=-1	-1<x<2	x=2	2<x<5	x=5	x>5
f'	+	0	-	-	-	0	+
f'	nő	lok.max		csökken		lok.min	nő
f''	-	-	-	0	+	+	+
f		konkáv		inf.pont		konvex	

4. ábra. Összefoglaló táblázat



5. ábra. Függvény és az első két deriváltja

4.2. Osszuk fel a 4-et két pozitív részre úgy, hogy az első rész négyzetének és a második rész köbének az összege minimális legyen!

Legyen az első rész $4-x$, a második rész x. Ekkor a keresett kifejezést az $f(x) = (4-x)^2 + x^3 = 16 - 8 \cdot x + x^2 + x^3$ függvény írja le, ahol $0 < x < 4$. Az $f(x)$ függvény a teljes értelmezési tartományán deriválható. Deriváltja: $f'(x) = 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 8$. $f'(x)$ zérushelyei $x_1 = \frac{4}{3}$ és $x_2 = -2$, ezek közül csak az $x_1 = \frac{4}{3}$ esik az adott intervallumba. A $(0,4)$ intervallumon az $f(x)$ függvénynek $x = \frac{4}{3}$-ban szigorúan lokális minimuma van. Mivel a $\left(0, \frac{4}{3}\right]$ intervallumon f szigorúan monoton csökken, a $\left[\frac{4}{3}, 4\right)$ intervallumon pedig szigorúan monoton nő, így az $x = \frac{4}{3}$ abszolút minimumhely is. Vagyis az első rész $4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$, a második rész $\frac{4}{3}$, a keresett kifejezés pedig $\frac{256}{27}$.

4.3. Egy 12-szer 12 centiméteres bádoglemezből nyitott tetejű dobozt kell készítenünk úgy, hogy sarkaiból négyzeteket vágunk ki, az oldalakat pedig felhajtjuk. Mekkora négyzeteket vágjunk ki a sarkokból, hogy a doboz űrtartalma a lehető legnagyobb legyen?

A kivágott négyzetek oldala legyen x, továbbá az oldalhosszúság miatt $0 \leq x \leq 6$. Így a doboz űrtartalma $V(x) = (12 - 2 \cdot x) \cdot (12 - 2 \cdot x) \cdot x = 4 \cdot (6-x)^2 \cdot x = 4 \cdot x^3 - 48 \cdot x^2 + 144 \cdot x$. Ahhoz, hogy a térfogat maximális legyen, meg kell vizsgálnunk a deriváltját. $V'(x) = 12 \cdot x^2 - 96 \cdot x + 144$, melyet leegyszerűsítve $V'(x) = x^2 - 8 \cdot x + 12$ függvényt kapjuk, melynek zérushelyei az $x_1 = 6$ és az $x_2 = 2$. Ezek közül az $x_2 = 2$ található az intervallum belsejében. Megnézzük $V(x)$ értékét a kritikus pontban és a végpontokban:

$$V(0) = 0, \qquad V(6) = 0, \qquad V(2) = 128.$$

A kivágott négyzetek oldalhosszúsága tehát 2 cm, a maximális térfogat pedig 128 cm^3.

4.4. Határozzuk meg az alábbi függvény szélsőértékeit!

$$f : [0,5] \to \mathbb{R}; \qquad f(x) = \frac{2 \cdot x^2 - 9 \cdot x - 11}{x^2 - 5 \cdot x - 6}$$

/Felvételi 2000. május/

Tekintsük a függvény deriváltját:

$$f'(x) = \frac{(4 \cdot x - 9) \cdot (x^2 - 5 \cdot x - 6) - (2 \cdot x^2 - 9 \cdot x - 11) \cdot (2 \cdot x - 5)}{(x^2 - 5 \cdot x - 6)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4 \cdot x^3 - 20 \cdot x^2 - 24 \cdot x - 9 \cdot x^2 + 45 \cdot x + 54 - 4 \cdot x^3 + 18 \cdot x^2 + 22 \cdot x}{x^4 - 5 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 - 5 \cdot x^3 + 25 \cdot x^2 + 30 \cdot x - 6 \cdot x^2 + 30 \cdot x + 36} +$$

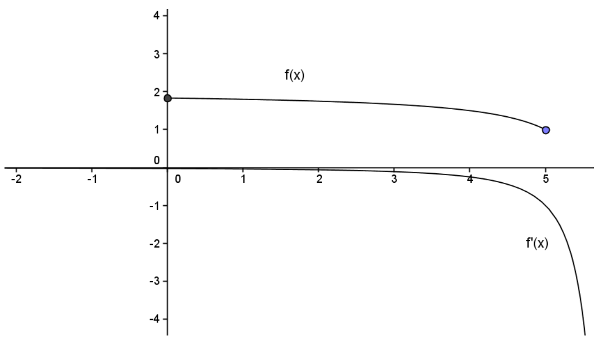
$$+ \frac{10 \cdot x^2 - 45 \cdot x - 55}{x^4 - 5 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 - 5 \cdot x^3 + 25 \cdot x^2 + 30 \cdot x - 6 \cdot x^2 + 30 \cdot x + 36}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2 \cdot x - 1}{x^4 - 10 \cdot x^3 + 13 \cdot x^2 + 60 \cdot x + 36}$$

A derivált akkor lesz 0, ha a számláló értéke 0, vagyis ha $-x^2 - 2 \cdot x - 1 = 0$, amelynek zérushelye az $x = -1$. Ez a zérushely nincs benne az intervallumban, így megnézzük a függvény értékét az intervallum végpontjaiban.

$$f(0) = \frac{11}{6}, \qquad f(5) = 1$$

Tehát a megadott függvénynek minimuma van az $x = 5$ pontban, a minimum értéke 1, maximuma van az $x = 0$ pontban, a maximum értéke $\frac{11}{6}$.



6. ábra. Függvény és a deriváltja a $[0, 5]$ intervallumon

4.5. Az a paraméter milyen értékére van az $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ függvénynek
(a) lokális minimuma az $x = 2$ pontban, illetve
(b) inflexiós pontja az $x = 1$ pontban?

(a) A lokális szélsőérték az $f'(x)$ segítségével határozható meg. $f'(x) = 2 \cdot x - \frac{a}{x^2} = \frac{2 \cdot x^3 - a}{x^2}$. Ha $f'(x) = 0$, akkor x-ben lokális szélsőérték van. A feladat szerint $x = 2$-ben lokális minimuma van, vagyis $f'(2) = 2 \cdot 2 - \frac{a}{4} = 0$ Megoldva az egyenletet, $a = 16$-ot kapjuk.

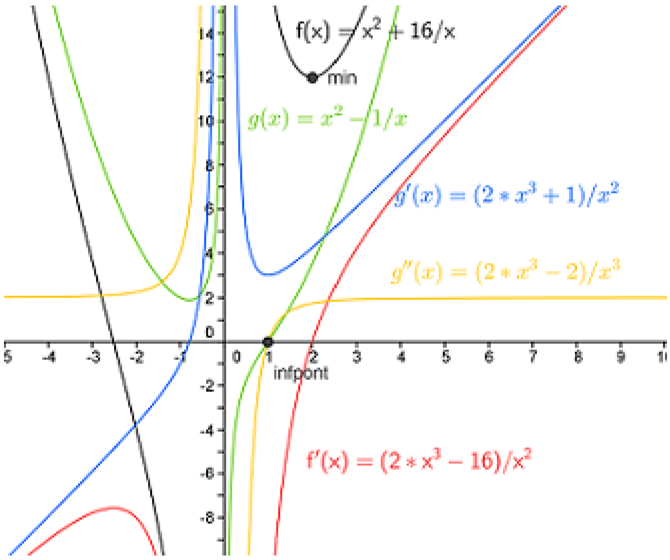
$$f'(1) = -14, \qquad f'(3) = \frac{38}{9} = 4\frac{2}{9}$$

Mivel az $x = 2$ pontban $f'(x)$ negatívról pozitívra vált, ezért $f(x)$-nek $a = 16$ esetén lokális minimuma van $x = 2$-ben.

(b) Az inflexiós pont a második derivált segítségével határozható meg. $f''(x) = 2 + \frac{2 \cdot a}{x^3} = \frac{2 \cdot x^3 + 2 \cdot a}{x^3}$. Az $f(x)$ függvénynek az $x = 1$ pontban inflexiós pontja van, vagyis $f''(1) = \frac{2 + 2 \cdot a}{1} = 0$ Az egyenlet megoldása az $a = -1$.

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = -6, \qquad f''(2) = \frac{7}{4}$$

$f''(x)$ előjelet vált az $x = 1$ pontban, tehát $f(x)$-nek $a = -1$ esetén inflexiós pontja van $x = 1$-ben.

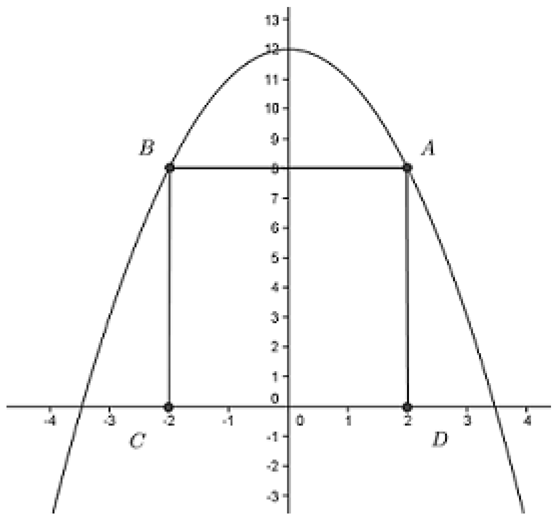


7. ábra. Lokális minimumhely és inflexiós pont

4.6. Egy téglalap egyik oldala az x tengelyen fekszik, két felső csúcsa pedig az $y = 12 - x^2$ parabolán. Mikor maximális a területe egy ilyen téglalapnak?

Mivel a téglalap egyik oldala az x tengelyen fekszik, ezért az x tengellyel párhuzamos egyenes és a parabola metszéspontjai lesznek a felső csúcsok. A parabola az x^2 előjele miatt konkáv, az y tengelyre szimmetrikus és 12-nél metszi az y tengelyt. Így a téglalap csúcsai az alábbiak lesznek:

$$A = (x, 12 - x^2), \qquad B = (-x, 12 - x^2), \qquad C = (-x, 0), \qquad D = (x, 0)$$



8. ábra. Az x tengely és az $y = 12 - x^2$ parabola által határolt téglalap

Ekkor a téglalap területe $T(x) = 2 \cdot x \cdot y = 2 \cdot x \cdot (12 - x^2) = 24 \cdot x - 2 \cdot x^3$. Ahhoz, hogy megkapjuk a szélsőértékét a területnek, meg kell vizsgálni a deriváltját. $T'(x) = -6 \cdot x^2 + 24$, melynek akkor lehet szélsőértéke, ha egyenlő 0-val. Ez $x = \pm 2$ esetén lehetséges, viszont $x = -2$-t kizárhatjuk, ugyanis egy téglalap oldala mindenképp pozitív. $T''(x) = -12 \cdot x$, amely $x = 2$ esetén $T''(2) = -24$. Az első derivált megegyezik 0-val, a második derivált pedig negatív, vagyis tényleg maximális lesz a terület.

Tehát akkor maximális a területe a megadott feltételek szerinti téglalapnak, ha $x = 2$, és $y = 12 - x^2 = 8$, ekkor $T(x) = 16$.

5. Szélsőértékek többváltozós függvények esetén

Tételek és definíciók

Sok függvény függ több mint egy független változótól. A valós értékű többváltozós függvények hasonlóan vannak megadva, mint az egyváltozósok. Az értelmezési tartományaik rendezett szám n-eseknek halmazai, értékkészleteik pedig a valós számoknak részhalmazai.

5.1. Definíció. Az f függvény akkor p-változós valós függvény, ha $D(f) \subset \mathbb{R}^p$ és $R(f) \subset \mathbb{R}$, ahol $D(f)$ jelöli f értelmezési tartományát, $R(f)$ pedig f értékkészletét.

5.1. Tétel (Weierstrass tétele)**.** *Legyen $A \subset \mathbb{R}^p$ nemüres, korlátos és zárt, és legyen $f : A \to \mathbb{R}$ folytonos. Ekkor f korlátos az A halmazon, és az A-n felvett értékei között van legnagyobb és legkisebb érték.*

5.2. Definíció. Legyen $f(x, y)$ egy olyan tartományban definiálva, amely az (a, b) pontot tartalmazza. Akkor
(i) $f(a, b)$ egy lokális maximum, ha van olyan (a, b) középpontú nyílt körlap, hogy $f(a, b) \geq f(x, y)$ minden olyan pontra teljesül, ami a körlapon és az f értelmezési tartományában van.
(ii) $f(a, b)$ egy lokális minimum, ha van olyan (a, b) középpontú nyílt körlap, hogy $f(a, b) \leq f(x, y)$ minden olyan pontra teljesül, ami a körlapon és az f értelmezési tartományában van.

Parciális deriváltak

Ha egy híján minden változót rögzítünk, és az így kapott egyváltozós függvényt deriváljuk, akkor „parciális" deriváltat kapunk.

5.3. Definíció. Legyen az f függvény továbbra is értelmezve az $a = (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ pont egy környezetében. Rögzítsük az $a = (a_1, \dots, a_p)$ pont koordinátáit az i-edik kivételével, és tekintsük a megfelelő

$$t \to f_i(t) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_p)$$

szekciófüggvényt. Az így kapott egyváltozós f_i függvény a_i pontban vett deriváltját (amennyiben létezik) az f függvény a pontban vett i-edik parciális deriváltjának nevezzük, és a $D_i f(a)$ szimbólummal jelölhetjük. Más szóval,

$$D_i f(a) = \lim_{t \to a_i} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_p) - f(a)}{t - a_i}$$

feltéve, hogy a limesz létezik.

Legyen az f függvény értelmezve $\mathbb{R}^p$ egy részhalmazán. Az f függvény i-edik parciálisderivált-függvényén azt a $D_i f$ függvényt értjük, amely azon a pontokban van értelmezve, ahol f i-edik parciális deriváltja létezik és véges, és ott az értéke $D_i f(a)$.

Példa. Határozzuk meg az $f(x, y) = 3 \cdot x^2 \cdot y^4 + 2 \cdot x - 4$ függvény parciális deriváltját!

Megoldás.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = D_1 f(x, y) = 6 \cdot x \cdot y^4 + 2$$

és

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = D_2 f(x, y) = 12 \cdot x^2 \cdot y^3$$

minden (x, y) pontban.

5.2. Tétel. *Legyen $A \subset \mathbb{R}^p$ korlátos és zárt, legyen $f : A \to \mathbb{R}$ folytonos, és tegyük fel, hogy f-nek léteznek a parciális deriváltjai A belsejének minden pontjában. Ekkor f a legnagyobb (legkisebb) értékét vagy A határán veszi fel, vagy pedig egy olyan a belső pontban, ahol $D_i f(a) = 0$ minden $i = 1, \ldots, p$-re.*

5.3. Tétel. *Legyen f értelmezve az $a \in \mathbb{R}^p$ pont egy környezetében. Ha f parciális deriváltjai léteznek az a pont egy környezetében és folytonosak az a pontban, akkor az f függvény differenciálható a-ban.*

5.4. Definíció. Legyen f értelmezve az $a \in \mathbb{R}^p$ pont egy környezetében. Ha a $D_j f$ parciális derivált létezik az a pont egy környezetében és a $D_j f$ parciálisderivált-függvénynek létezik az i-edik parciális deriváltja az a pontban, akkor ezt az f függvény a-beli ij-edik másodrendű parciális deriváltjának nevezzük, és a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a), \qquad f''_{x_j x_i}(a), \qquad f_{xx}, \qquad D_{ij}f(a)$$

szimbólumok bármelyikével jelölhetjük. (Az f függvénynek legfeljebb p^2 másodrendű parciális deriváltja lehet az a pontban.

Példa. Számold ki az alábbi függvény másodrendű parciális deriváltjait!

$$f(x,y) = x^2 - x \cdot y + y^2 + 3 \cdot x - 2 \cdot y + 1$$

Megoldás. Először ki kell számolni a parciális deriváltakat.

$$\begin{aligned} f_x &= 2 \cdot x - y + 3 \\ f_y &= -x + 2 \cdot y - 2 \end{aligned}$$

Ezután a másodrendű parciális deriváltak meghatározása következik.

$$\begin{aligned} D_{11}f(x,y) &= f_{xx} = 2 \qquad (\text{az } f_x\text{-et deriváljuk } x \text{ szerint}) \\ D_{21}f(x,y) &= f_{xy} = -1 \qquad (\text{az } f_x\text{-et deriváljuk } y \text{ szerint}) \\ D_{12}f(x,y) &= f_{yx} = -1 \qquad (\text{az } f_y\text{-t deriváljuk } x \text{ szerint}) \\ D_{22}f(x,y) &= f_{yy} = 2 \qquad (\text{az } f_y\text{-t deriváljuk } y \text{ szerint}) \end{aligned}$$

5.4. Tétel (Young tétele)**.** *Ha a kétváltozós $f(x,y)$ függvény $D_1f(x,y)$ és $D_2f(x,y)$ parciális deriváltjai léteznek az $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pont egy környezetében és differenciálhatóak az (a,b) pontban, akkor $D_{12}f(a,b) = D_{21}f(a,b)$.*

Definitség

A q polinom akkor kvadratikus alak, ha felírható $q(x) = \sum_{i,j=1}^{p} c_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$ alakban. Például ha f kétszer differenciálható az a pontban, akkor a $d^2f(a)$ egy kvadratikus alak, hiszen $d^2f(a)(x) = \sum_{i,j=1}^{p} D_{ij}f(a) \cdot x_i \cdot x_j$.

5.5. Definíció. A q kvadratikus alak pozitív (negatív) definit, ha $q(x) > 0$ ($q(x) < 0$) minden $x \neq 0$-ra.
A q kvadratikus alak pozitív (negatív) szemidefinit, ha $q(x) \geq 0$ ($q(x) \leq 0$) minden $x \in \mathbb{R}^p$-re.
A q kvadratikus alak indefinit, ha pozitív és negatív értéket is felvesz.

5.5. Tétel. *Legyen az f függvény kétszer differenciálható az $a \in \mathbb{R}^p$ pontban, és tegyük fel, hogy $D_i f(a) = 0$ minden $i = 1, \ldots, p$-re.*
(i) Ha f-nek az a pontban lokális minimuma (maximuma) van, akkor a $d^2 f(a)$ kvadratikus alak pozitív (negatív) szemidefinit.
(ii) Ha a $d^2 f(a)$ kvadratikus alak pozitív (negatív) definit, akkor f-nek az a pontban szigorú lokális minimuma (maximuma) van.

5.6. Definíció. Legyen az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható az $a \in \operatorname{int} D(f)$ pontban. Az

$$f''(a) := \begin{pmatrix} D_{11}f(a) & D_{21}f(a) & \ldots & D_{p1}f(a) \\ D_{12}f(a) & D_{22}f(a) & \ldots & D_{p2}f(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{1p}f(a) & D_{2p}f(a) & \ldots & D_{pp}f(a) \end{pmatrix}$$

$p \times p$ mátrix neve Hesse-mátrix.

A definitséget számolhatjuk a Hesse-mátrix „főminorainak” segítségével is, miután kiszámoltuk a Hesse-mátrixot a lehetséges szélsőérték helyeken. Egy mátrix főminorjai a bal felső négyzetes részmátrixok determinánsai. Ha minden főminor pozitív, akkor a mátrix pozitív definit és lokális minimuma van. Ha a főminorok váltakozó előjelűek, és negatívval kezdődnek, akkor a mátrix negatív definit, lokális maximuma van. Ha nem pozitív és nem negatív definit, akkor ott nyeregpont van.

5.7. Definíció (Nyeregpont)**.** Egy differenciálható $f(x, y)$ függvénynek nyeregpontja van az (a, b) kritikus pontban, ha minden (a, b) középpontú körlapon van olyan (x, y) pontja az értelmezési tartománynak, hogy $f(x, y) < f(a, b)$ és van olyan is, hogy $f(x, y) > f(a, b)$.

Feladatok

5.1. Határozzuk meg a megadott függvény összes lokális minimumát, maximumát, ezek helyét és a nyeregpontokat is!

$$f(x,y) = 6 \cdot x^2 - 2 \cdot x^3 + 3 \cdot y^2 + 6 \cdot x \cdot y$$

A függvény létezik és differenciálható minden x és y értékre, nincsenek határpontok. Így szélsőérték csak ott lehet, ahol f_x és f_y egyidejűleg nulla.

$$f_x = 12 \cdot x - 6 \cdot x^2 + 6 \cdot y = 0, \qquad f_y = 6 \cdot y + 6 \cdot x = 0$$

Az $y = -x$-et beírjuk f_x-be, így $f_x = -6 \cdot x^2 + 6 \cdot x = 0$, melynek két megolása: $x_1 = 0, x_2 = 1$. Ekkor $y_1 = 0, y_2 = -1$. Tehát a két kritikus pont a $(0,0)$ és az $(1,-1)$, ezekben a pontokban lehet a függvénynek szélsőértéke.

$$f_{xx} = 12 - 12 \cdot x, \qquad f_{xy} = 6, \qquad f_{yy} = 6$$

Így a Hesse-mátrix a kritikus pontokban:

$$\mathbf{H_1(0,0)} = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{H_2(1,-1)} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

H_1 főminorai 12 és 36, vagyis $+,+$, pozitív definit. Így a $(0,0)$ pontban lokális minimuma van a függvénynek, a minimum értéke $f(0,0) = 0$.
H_2 főminorai 0 és -36, vagyis $0,-$, se nem pozitív, se nem negatív definit. Így a $(1,-1)$ pontban nyeregpontja van a függvénynek.

5.2. Számoljuk ki a függvény lokális szélsőértékeit!

$$f(x,y,z) = 2 \cdot x^2 \cdot y + 2 \cdot x \cdot y - 3 \cdot y^2 - 10 \cdot z^2$$

A lehetséges szélsőértékeket úgy kaphatjuk meg, ha a parciális deriváltak egyszerre nullák.

$$f_x = 4 \cdot x \cdot y + 2 \cdot y = 2 \cdot y \cdot (2 \cdot x + 1) = 0$$
$$f_y = 2 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 6 \cdot y = 2 \cdot x \cdot (x + 1) - 6 \cdot y = 0$$
$$f_z = -20 \cdot z = 0$$

$z = 0$ mindenképp teljesül. Az első egyenletet megoldva vagy $y = 0$, vagy $2 \cdot x + 1 = 0$, vagyis $x = -\frac{1}{2}$. Ha $y_1 = 0$, akkor ezt behelyettesítve az $f_y = 0$ egyenletbe, $2 \cdot x \cdot (x + 1) = 0$-t kapunk, amelynek két megoldása van: $x_1 = 0$ és $x_2 = -1$. Ha viszont $x_3 = -\frac{1}{2}$, akkor $y_3 = -\frac{1}{12}$-et kapunk.
Így három kritikus pontunk lesz:

$$P_1 = (0, 0, 0), \qquad P_2 = (-1, 0, 0), \qquad P_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{12}, 0\right)$$

. A másodrendű deriváltakból elkészítjük a Hesse-mátrixot.

$$\mathbf{H(x, y, z)} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{yx} & f_{zx} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{zy} \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot y & 4 \cdot x + 2 & 0 \\ 4 \cdot x + 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{pmatrix}$$

Ezután a kapott Hesse-mátrixot megnézzük a kritikus pontokban, és megállapítjuk a definitséget.

$$\mathbf{H(0, 0, 0)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{pmatrix}$$

A definitség megállapításához a főminorokat kell megvizsgálni.

$$D_1 = 0$$
$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -4$$
$$D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{vmatrix} = -4 \cdot -20 = 80$$

Ez a mátrix nem pozitív definit és nem negatív definit, indefinit a mátrix, és itt nyeregpont van.

$$\mathbf{H}(\mathbf{-1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = 0$$
$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = -4$$
$$D_3 = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{vmatrix} = -4 \cdot -20 = 80$$

Ez a mátrix is indefinit, nyeregpont lesz ebben a potban is.

$$\mathbf{H}\left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}, \mathbf{0}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = -\frac{1}{3}$$
$$D_2 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 2$$
$$D_3 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{vmatrix} = 2 \cdot -20 = -40$$

Mivel a főminorok $(-,+,-)$ sorrendben vannak, így ez a mátrix negatív definit, tehát a $P_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{12}, 0\right)$ pontban lokális maximum van. A maximum értéke pedig $f(x,y,z) = \frac{1}{48}$.

5.3. Határozzuk meg a

$$T(x,y) = x^2 + x \cdot y + y^2 - 6 \cdot x$$

függvény abszolút maximumát és minimumát a $0 \leq x \leq 5, -3 \leq y \leq 3$ **téglalapon.**

A függvény korlátos és zárt, mert egy téglalapon keressük a szélsőértékeit. Folytonos, mert polinom; és nem üres. Így Weierstrass-tétele miatt van abszolút maximuma és minimuma. Ezeket a szélsőértékeket vagy egy belső ponton veszi fel, vagy a határon. Belső pont akkor lehet, ha az első parciális deriváltak egyidejűleg nullák.

$$T_x = 2 \cdot x + y - 6 = 0$$
$$T_y = x + 2 \cdot y = 0$$

Megoldva az egyenletrendszert, $y = -2, x = 4$-et kapjuk. Ezt a pontot elfogadjuk kritikus pontnak, mert benne van az intervallumban. Mivel az egyenletrendszernek csak ez az egy megoldása van, belül csak ez a pont lehet szélsőérték. Ezen kívül a téglalap négy sarkában, vagyis a határpontokon, vagy a határszakaszokon. Ezeket a pontokat elnevezhetjük „gyanús pontoknak”.

Most vizsgáljuk meg a határszakaszokat. $x = 0$ függőleges oldal korlátos, zárt, nem üres, így Weierstrass-tétele miatt van szélsőérték rajta. $T(x, y) = y^2, T_y = 2 \cdot y = 0$, vagyis $y = 0$.
$x = 5$ oldalon szintén van gyanús pont. $T(x, y) = 25 + 5 \cdot y + y^2 + 30, T_y = 5 + 2 \cdot y = 0$, vagyis $y = -\frac{5}{2}$.
$y = 3 \Rightarrow T(x, y) = x^2 + 3 \cdot x + 9 - 6 \cdot x \Rightarrow T_x = 2 \cdot x - 3 = 0$, vagyis $x = \frac{3}{2}$.
$y = -3 \Rightarrow T(x, y) = x^2 - 3 \cdot x + 9 - 6 \cdot x \Rightarrow T_x = 2 \cdot x - 9 = 0$, vagyis $x = \frac{9}{2}$.

Miután megtaláltuk az összes gyanús pontot, behelyettesítjük őket a függvényünkbe, így megkaphatjuk az abszolút szélsőértékeinket.

$$T(0,0) = 0$$
$$T(0,-3) = 9$$
$$T(0,3) = 9$$
$$T\left(\frac{3}{2}, 3\right) = \frac{9}{4} + \frac{9}{2} + 9 - 9 = \frac{27}{4} = 6\frac{3}{4}$$
$$T(5,3) = 25 + 15 + 9 - 30 = 19$$
$$T(4,-2) = 16 - 8 + 4 - 24 = -12$$
$$T\left(5, -\frac{5}{2}\right) = 25 - \frac{25}{2} + \frac{25}{4} - 30 = -\frac{45}{4} = -11\frac{1}{4}$$
$$T(5,-3) = 25 - 15 + 9 - 30 = -11$$
$$T\left(\frac{9}{2}, -3\right) = \frac{81}{4} - \frac{27}{2} + 9 - 27 = -\frac{45}{4} = -11\frac{1}{4}$$

Tehát a megadott függvénynek a $(4, -2)$ pontban abszolút minimuma van, melynek értéke -12. Az $(5, 3)$ pontban pedig abszolút maximuma van, melynek értéke 19.

6. Feltételes szélsőérték

Gyakran keressük többváltozós függvények szélsőértékét bizonyos korlátozó feltételek mellett, azaz az értelmezési tartomány valamely részhalmazán. Ilyen esetekben a Lagrange-féle multiplikátoros módszert alkalmazzuk.

6.1. Definíció. Legyen $a \in \mathbf{H} \subset \mathbb{R}^p, F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, és legyen $F(a) = 0$. Tegyük fel, hogy a p-változós és valós értékű f függvény értelmezve van az a pont egy környezetében, és létezik egy $\delta > 0$ szám úgy, hogy $f(x) \leq f(a)$ minden olyan $x \in B(a, \delta)$ pontra, amelyre $F(x) = 0$. Ekkor azt mondjuk, hogy az f függvénynek feltételes lokális maximuma van az a pontban az $F = 0$ feltétel mellett. Hasonlóan definiáljuk a feltételes lokális minimumot. Ha f-bek feltételes lokális maximuma vagy minimuma van az a pontban az $F = 0$ feltétel mellett, akkor azt mondjuk, hogy f-nek feltételes lokális szélsőértéke van az a pontban az $F = 0$ feltétel mellett.

Lagrange-féle multiplikátor módszer

6.2. Definíció (Gradiensvektor)**.** Az $f(x, y)$ függvény gradiensvektora, más szóval gradiense a $P_0(x_0, y_0)$ pontban a

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j$$

vektor, ahol f parciális deriváltjai a P_0 pontban vannak számolva.

Lagrange-féle multiplikátoros módszer három változó esetén

Tegyük fel, hogy $f(x, y, z)$ és $g(x, y, z)$ differenciálható függvények. Az f függvény a $g(x, y, z) = 0$ feltételeknek eleget tevő pontokban akkor vehet fel lokális maximumot vagy minimumot, ha x, y, z és λ kielégíti a

$$\nabla f = \lambda \cdot \nabla g \text{ és } g(x, y, z) = 0$$

egyenleteket. Kétváltozós függvény esetén a feltétel hasonló, csupán a harmadik koordinátától kell eltekintenünk.

Lagrange-féle multiplikátoros módszer n változó esetén

Ha az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban a $g_k(x) = 0, k = 1, 2, \ldots, p$ feltételek mellett, akkor megadhatók olyan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ valós számok, hogy

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(a) + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} g_k(a) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Feladatok

6.1. Határozzuk meg f minimumát és maximumát a megadott feltétel mellett!

$$f = x + 2 \cdot y, \qquad x^2 + 2 \cdot y^2 = 3$$

$x^2 + 2 \cdot y^2 = 3$ korlátos, zárt és nem üres, így Weierstrass tétele miatt van szélsőértéke.

$$F(x, y) = x^2 + 2 \cdot y^2 - 3 = 0$$
$$\nabla F = (2 \cdot x, 4 \cdot y)$$

Két módszerrel lehet a feladatot megoldani: vagy $\nabla F = 0$, vagy $\nabla f = \lambda \cdot \nabla F$. Az első módszer esetén az $x = y = 0$ lenne a megoldás, de ez nem jó, mert nincs rajta az $x^2 + 2 \cdot y^2 = 3$ felületen. A második módszert alkalmazva:

$$\nabla f = \lambda \cdot \nabla F$$
$$(1, 2) = \lambda \cdot (2 \cdot x, 4 \cdot y)$$

Így az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$x^2 + 2 \cdot y^2 = 3$$
$$\lambda \cdot 2 \cdot x = 1$$
$$\lambda \cdot 4 \cdot y = 2$$

Az $x = y = \frac{1}{2\cdot\lambda}$ megoldást a megadott feltételbe behelyettesítve:

$$\frac{1}{4\cdot\lambda^2} + \frac{2}{4\cdot\lambda^2} = \frac{3}{4\cdot\lambda^2} = 3$$
$$\lambda^2 = \frac{1}{4}$$
$$\lambda = \pm\frac{1}{2}$$

$\lambda_1 = \frac{1}{2}, x_1 = 1, y_1 = 1$
$\lambda_2 = -\frac{1}{2}, x_2 = -1, y_2 = -1$
Tehát az f függvény abszolút minimuma a $(-1,-1)$ pontban van, értéke $f = -3$, az abszolút maximuma pedig az $(1,1)$ pontban van, értéke pedig $f = 3$.

6.2. Határozzuk meg az $f(x,y,z) = x - y + 3\cdot z$ függvény maximumát az $x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} = 1$ feltétel mellett!

$x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} = 1$ korlátos, zárt és nem üres, így Weierstrass tétele miatt van szélsőértéke.

$$G(x,y,z) = x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} - 1 = 0$$
$$\nabla G = (2\cdot x, y, \frac{2}{3}\cdot z)$$

A $\nabla G = 0$ megoldása az $x = y = z = 0$, viszont ez nem tesz eleget a megadott G feltételnek. Vagyis

$$\nabla f = \lambda\cdot\nabla G$$
$$(1,-1,3) = \lambda\cdot(2\cdot x, y, \frac{2}{3}\cdot z)$$

Ebben az esetben az egyenletrendszerünk a következő:

$$
\begin{aligned}
x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} &= 1 \\
\lambda \cdot 2 \cdot x &= 1 \\
\lambda \cdot y &= -1 \\
\lambda \cdot \frac{2}{3} \cdot z &= 3
\end{aligned}
$$

Ekkor a megoldás: $x = \frac{1}{2 \cdot \lambda}$, $y = -\frac{1}{\lambda}$, $z = \frac{9}{2 \cdot \lambda}$

A megoldást behelyettesítve a G feltételbe, $\lambda = \pm\frac{\sqrt{30}}{2}$, így

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{\sqrt{30}}{2}, x_1 = \frac{\sqrt{30}}{30}, y_1 = -\frac{\sqrt{30}}{15}, z_1 = \frac{3 \cdot \sqrt{30}}{10} \\
\lambda_2 &= -\frac{\sqrt{30}}{2}, x_2 = -\frac{\sqrt{30}}{30}, y_2 = \frac{\sqrt{30}}{15}, z_2 = -\frac{3 \cdot \sqrt{30}}{10}
\end{aligned}
$$

Tehát az f függvény abszolút minimuma a $(-\frac{\sqrt{30}}{30}, \frac{\sqrt{30}}{15}, -\frac{3 \cdot \sqrt{30}}{10})$ pontban van, az értéke $f = -\sqrt{30}$, az abszolút maximuma pedig a $(\frac{\sqrt{30}}{30}, -\frac{\sqrt{30}}{15}, \frac{3 \cdot \sqrt{30}}{10})$ pontban van, az értéke pedig $f = \sqrt{30}$.

Irodalomjegyzék

Hivatkozások

[1] Laczkovich Miklós-T. Sós Vera, *Valós analízis I.*, Typotex, 2012

[2] Laczkovich Miklós-T. Sós Vera, *Valós analízis II.*, Typotex, 2012

[3] George B. Thomas, Maurice D. Weir, Joel Hass, Frank R. Giordano, *Thomas-féle kalkulus I.*, Typotex, 2006

[4] George B. Thomas, Maurice D. Weir, Joel Hass, Frank R. Giordano, *Thomas-féle kalkulus III.*, Typotex, 2007

[5] Gémes Margit, Szentmiklóssy Zoltán, *Analízis feladatgyűjtemény I.*, Typotex, 2014

[6] Pázmány Péter Katolikus Egyetem, *Tehetséggondozó anyag*, 2013 http://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/pdfs/17.pdf http://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/pdfs/18.pdf

[7] Sz. Fekete Mária, *Oktató anyag*, 2012 http://szfmary.extra.hu/tanit/Matek/12b_2012/8%20KM4.doc

[8] Bethlen Gábor Gimnázium honlapja, *A középiskolai tananyag fogalmai és tételei*, 2012 http://bethlen.hu/matek/mathist/forras/fuggveny_masodfoku.htm

[9] Majoros Csilla, *Szélsőérték-számítás* http://math.bme.hu/majoros/szelsoertek.pdf

[10] Sikolya Eszter, *Analízis IV. előadásjegyzet*, 2010 http://www.cs.elte.hu/seszter/oktatas

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Kós Gézának, hogy bármikor számíthattam rá, biztatott és készséggel válaszolt összes kérdésemre. Ezen kívül neki köszönhetem, hogy megtaláltam a témát a dolgozatomhoz. Szeretnék köszönetet mondani családomnak is, akik mindig mellettem álltak, hittek bennem, ezzel rengeteg erőt adva célom eléréséhez.