

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

---

**KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLETEK  
KÉTPONTOS PEREMÉRTÉK-FELADATAI A  
NUMERIKUS MODELLEZÉSBEN**

BSc Szakdolgozat

Készítette:

**Horváth Eszter**

Matematika BSc, Matematikai elemző szakirány

Témavezető: Faragó István

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék



Budapest, 2018



# Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Faragó Istvánnak a rengeteg segítségért, amit az elmúlt időszakban kaptam tőle. Hálás vagyok a támogatásáért és köszönöm, hogy szakértelmével hozzájárult szakdolgozatom elkészítéséhez.

Továbbá szeretném megköszönni a családomnak és a barátaimnak a sok segítséget és bátorítást, amit tanulmányaim során kaptam tőlük.

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>4</b>
<b>2. A kétpontos peremérték-feladat megoldhatósága</b>	<b>6</b>
2.1. A lineáris kétpontos peremérték-feladat megoldhatósága . . . . .	8
<b>3. A kétpontos peremérték-feladat numerikus megoldása belövéses módszerrel</b>	<b>11</b>
3.1. Belövéses módszer alkalmazása intervallum-felező módszerrel . . . . .	12
3.2. Belövéses módszer alkalmazása szelőmódszerrel . . . . .	13
3.3. Belövéses módszer alkalmazása Newton-módszerrel . . . . .	14
3.4. A lineáris peremérték-feladat numerikus megoldása belövéses módszerrel .	16
3.5. Belövéses módszer alkalmazása MATLAB használatával . . . . .	17
<b>4. A kétpontos peremérték-feladat numerikus megoldása véges differenciás módszerrel</b>	<b>20</b>
4.1. A peremérték-feladat mátrixos alakja . . . . .	23
4.2. Thomas algoritmus . . . . .	24
4.3. Hibabecslés . . . . .	26
4.4. Neumann és vegyes peremfeltételek . . . . .	28
4.5. Periodikus peremfeltétel - Sherman-Morrison algoritmus . . . . .	31
4.6. Véges differenciás módszer alkalmazása MATLAB használatával . . . . .	35
<b>5. Összefoglalás</b>	<b>37</b>
<b>6. Függelék</b>	<b>38</b>

# 1. Bevezetés

A differenciálegyenletek olyan egyenletek, melyekben az ismeretlen egy függvény, és a differenciálegyenlet e függvény és deriváltjai között teremt kapcsolatot. Attól függően, hogy az ismeretlen függvény egy- vagy kétváltozós, két típusát különböztetjük meg a differenciálegyenleteknek. Ha az ismeretlen függvény egyváltozós, akkor közönséges differenciálegyenletről beszélünk, ha pedig többváltozós, akkor parciális differenciálegyenletről. Ahhoz, hogy a vizsgált feladat korrekt kitűzésű legyen (azaz, létezzen egyértelmű megoldása és az stabil legyen), kiegészítő feltételek megadása szükséges. Ezeket nevezzük kezdeti- vagy peremfeltételnek. Szakdolgozatomban közönséges differenciálegyenletek két-pontos peremérték-feladataival fogok foglalkozni. A differenciálegyenleteket többek között természettudományos, közgazdasági és műszaki folyamatok leírására használjuk. Segítségükkel modellezni tudjuk a különböző jelenségeket, és a differenciálegyenletek elméleti hátterének segítségével elemezni tudjuk ezeket a modelleket, így meghatározhatóak azok a feltételek, amelyek mellett a feladat korrekt kitűzésű. A valóságban előforduló problémák csak olyan bonyolult differenciálegyenletekkel modellezhetők megfelelően, amelyeket már nem lehet megoldani analitikusan, ezért numerikus módszerekkel próbáljuk közelíteni a megoldást. A célunk, hogy ezek a numerikus módszerek megbízhatóak legyenek, és a lehető legjobban megközelítsék a pontos megoldást. Emellett becslést is tudjunk adni arra, hogy mekkora lehet az eltérés a közelítő- és a pontos megoldás között.

Az első részben definiáljuk a két-pontos peremérték-feladat fogalmát, és megnézzük, hogy ennek a feladatnak létezik-e egyértelmű megoldása, és ha igen, milyen feltételek mellett találhatjuk meg ezt a megoldást.

A második részben már egy konkrét módszert mutatok be a peremérték-feladat megoldására, ez lesz a belövéses módszer. Ennek a lényege, hogy először visszavezetjük a peremérték-feladatot egy kezdetiérték-feladatra, és ezt oldjuk meg valamilyen tanult numerikus módszerrel (például Explicit-, Implicit Euler módszer, Runge-Kutta módszer). A kezdetiérték-feladatra való visszavezetés esetében nem egyértelmű, hogy hogyan határozzuk meg a kezdeti feltételt. Ezért ehhez egy nemlineáris egyenlet megoldására lesz szükség. Ennek megoldására három módszert mutatok be, az intervallum-felező-, a szelő-, és a Newton módszert. A fejezet végén pedig azt az esetet nézzük meg, amikor egy lineáris

peremérték-feladatot szeretnénk belövéses módszerrel megoldani.

A harmadik részben a peremérték-feladatok véges differenciás módszerrel való megoldását vizsgálom. Ekkor diszkrétizáljuk a megoldási tartományt, vagyis készítünk egy rácshálót, és a rácsháló pontjaiban határozzuk meg a numerikus megoldást. Ez tulajdonképpen egy algebrai egyenletrendszer megoldását jelenti majd, így először felírjuk a peremérték-feladatot mátrixos alakban. Ennek megoldására a Thomas algoritmust fogjuk alkalmazni. Megvizsgálom azt is, hogy mekkora eltérés lehet a numerikus és a pontos megoldás között. Ennek meghatározásához becsléseket fogunk adni a hibára. Ezután az az esettel foglalkozom, amikor a peremérték feladat nem Dirichlet peremfeltétellel van megadva, hanem Neumann- vagy vegyes peremfeltétellel. Ebben az esetben is bemutatok két módszert a feladat numerikus megoldására. Végül pedig azt az esetet vizsgálom, amikor a feladathoz periodikus peremfeltétel tartozik, és ennek az esetnek a megoldásához a Sherman-Morrison algoritmust fogjuk alkalmazni.

## 2. A kétpontos peremérték-feladat megoldhatósága

Motivációként tekintsünk egy példát, amely bemutatja, hogy milyen probléma oldható meg peremérték-feladat alkalmazásával.

**2.1. Példa.** *Van egy ágyúnk, amellyel szeretnénk eltalálni egy előre rögzített (adott,  $L$  távolságnyra elhelyezkedő) pontot. Ehhez azt kell meghatározni, hogy milyen szögben kell állnia az ágyúnak, hogy a golyó éppen oda érkezen ahova szeretnénk. Jelölje  $x(t)$  a  $t$  időpontban a kezdeti ponttól való vízszintes távolságot,  $y(t)$  pedig a magasságot. A következő általánosítás nem jelent megszorítást a feladatra nézve, így feltehető, hogy*

$$x(0) = 0,$$

$$y(0) = 0,$$

vagyis kezdetben mindkét érték nulla. Tegyük fel, hogy a vízszintes sebesség  $x'(t)$  állandó (azaz a golyó sebessége ebben az irányban állandó), a függőleges irányú gyorsulás pedig csak a gravitációtól függ, azaz  $y''(t)$  a gravitáció. Ekkor tehát:

$$x'(t) = u,$$

$$y''(t) = -g.$$

Jelölje  $Y(x): \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  azt a függvényt, amelyre  $Y(x(t)) = y(t)$ . A láncszabály alapján

$$y'(t) = \frac{dY}{dx}(x(t)) \cdot x'(t) = \frac{dY}{dx}(x(t)) \cdot u,$$

$$y''(t) = \frac{d^2Y}{dx^2}(x(t)) \cdot u \cdot u = u^2 \frac{d^2Y}{dx^2}(x(t)) = -g.$$

Vagyis az ismeretlen függvényünkre az alábbi egyenletet nyerjük:

$$Y'' = \frac{d^2Y}{dx^2}(x(t)) = \frac{-g}{u^2}.$$

Így a következő feladatot kaptuk:

$$\begin{aligned} Y''(x) &= \frac{-g}{u^2} \quad , \text{ ahol } x \in [0; L], \\ Y(0) &= 0, \\ Y(L) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Ezt a feladatot meg tudjuk oldani analitikusan (közvetlen integrálással):

$$Y'(x) = \frac{-g}{u^2}x + c_1,$$
$$Y(x) = \frac{-g}{2u^2}x^2 + c_1x + c_2.$$

Mivel  $Y(0) = c_2 = 0$ , ezért

$$Y(x) = \frac{-g}{2u^2}x^2 + c_1x,$$
$$Y(L) = \frac{-g}{2u^2}L^2 + c_1L = 0,$$
$$c_1 = \frac{gL}{2u^2}.$$

Vagyis a megoldás:

$$Y(x) = \frac{-g}{2u^2}x^2 + \frac{gL}{2u^2}x.$$

Ez a parabola írja le az ágyúgolyó röppályáját. Az ágyút pedig a következő szögbe kell állítani:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = Y'(0) = \frac{gL}{2u^2},$$
$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{gL}{2u^2}\right).$$

Tehát ha ilyen szögbe állítjuk az ágyút, akkor el fogjuk találni azt a rögzített pontot, ahova lőni szeretnénk.

Definiáljuk, hogy mit értünk kétpontos peremérték-feladat alatt!

**2.2. Definíció** (Kétpontos peremérték-feladat). Az  $u(x) \in C^2[a; b]$  ismeretlen függvényre kitűzött

$$u''(x) = f(x, u(x), u'(x)),$$
$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta$$
(2)

feladatot kétpontos peremérték-feladatnak nevezzük, ahol  $f: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$  adott folytonos függvény, és  $x \in [a; b]$ .

Fogalmazzuk meg a peremfeltételt általános alakban! Legyen  $g: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$  adott függvény. Ekkor a (2) peremérték-feladat felírható a következő alakban:

$$u''(x) = f(x, u(x), u'(x)),$$
$$g(u(a), u(b)) = \mathbf{0}.$$
(3)



A (3) feladatot általános alakú kétpontos peremérték-feladatnak nevezzük.

A peremfeltételek bizonyos esetekben kihatnak a megoldás létezésére és egyértelműségére. A következő tétel elégséges feltételt ad a megoldás egyértelmű létezéséhez.

**2.3. Tétel.** ([2]) *Tegyük fel, hogy a  $T := \{(x, t_1, t_2) : x \in (a; b); t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$  jelöléssel a (2) feladat  $f: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$  függvényére teljesülnek a következő feltételek:*

1.  $f \in C(T)$ .
2.  $\partial_2 f, \partial_3 f \in C(T)$ .
3.  $\partial_2 f > 0$  a  $T$  halmazon.
4. Van olyan  $M \geq 0$ , amelyre  $|\partial_3 f| \leq M$  a  $T$  halmazon.

*Ekkor a peremérték-feladatnak létezik egyértelmű megoldása.*

Szakközlőzetem során főként a lineáris kétpontos peremérték-feladatokkal fogok foglalkozni, így most nézzük meg, hogy ez a feladat milyen esetben oldható meg.

## 2.1. A lineáris kétpontos peremérték-feladat megoldhatósága

Tekintsük azt az esetet, amikor  $f$  lineáris. Ekkor a peremérték-feladat alakja a következő:

$$\begin{aligned} u''(x) &= p(x)u'(x) + q(x)u(x) + r(x), \\ u(a) &= \alpha, \quad u(b) = \beta, \end{aligned} \tag{4}$$

ahol  $x \in [a, b]$ , és  $p(x), q(x), r(x)$  adott folytonos függvények. A 2.3 tétel fontos következménye a következő:

**2.4. Tétel.** ([2]) *Ha a (4) lineáris peremérték-feladatban  $q(x) > 0$ , akkor a feladatnak létezik egyértelmű megoldása.*

A differenciálegyenetek elméletéből tudjuk, hogy magasabb rendű rendszereket át lehet írni elsőrendű rendszerekké az átviteli elv segítségével. Ez másodrendű egyenlet esetén a következőt jelenti. Vezessük be az  $u_1(x) := u(x)$ ,  $u_2(x) := u'(x)$  jelöléseket. Ekkor a (2)

elsőrendű alakja a következő:

$$\begin{aligned} u_1'(x) &= u_2(x), \\ u_2'(x) &= f(x, u_1(x), u_2(x)), \text{ ahol } x \in (a, b), \\ u_1(a) &= \alpha, \quad u_1(b) = \beta. \end{aligned} \tag{5}$$

Vegyük észre, hogy ez speciális esete az

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'(x) &= f(x, \mathbf{u}(x)), \\ u_1(a) &= \alpha, \quad u_1(b) = \beta \end{aligned}$$

egyenletnek, ahol

$$\mathbf{u}(x) = (u_1(x), u_2(x)).$$

Ugyanis

$$f(x, \mathbf{u}(x)) = f(x, u_1(x), u_2(x)) = \begin{bmatrix} u_2(x) \\ f(x, u_1(x), u_2(x)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1'(x) \\ u_2'(x) \end{bmatrix} = \mathbf{u}'(x).$$

A lineáris peremérték-feladat elsőrendű alakját a következők alapján kapjuk:

$$\begin{aligned} u_1'(x) &= u_2(x), \\ u_2'(x) &= p(x)u_2(x) + q(x)u_1(x) + r(x), \\ u_1(a) &= \alpha, \\ u_2(b) &= \beta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'(x) &= \begin{bmatrix} u_1'(x) \\ u_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2(x) \\ p(x)u_2(x) + q(x)u_1(x) + r(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ q(x) & p(x) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ r(x) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tehát a (4) feladat elsőrendű alakja

$$\mathbf{u}'(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{u}(x) + \mathbf{R}(x), \tag{6}$$

ahol

$$\mathbf{A}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ q(x) & p(x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ r(x) \end{bmatrix}.$$

A peremfeltételek mátrix alakban történő felírásához bevezetjük a következő jelöléseket:

$$\mathbf{B}_a := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_b := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{s} := \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}.$$

Ekkor a (4) feladat peremfeltétele felírható a következő alakban:

$$\mathbf{B}_a \mathbf{u}(a) + \mathbf{B}_b \mathbf{u}(b) = \mathbf{s}. \quad (7)$$

Az  $m \geq 2$  rendű egyenleteket hasonló módon fel tudjuk írni elsőrendű rendszer alakjában, és ekkor  $\mathbf{A}(x), \mathbf{B}_a, \mathbf{B}_b \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . A következőkben előállítjuk a (6)-(7) elsőrendű rendszer megoldását. Legyen  $\mathbf{Y}(x) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  a (6) egyenlet alapg megoldása. Ez azt jelenti, hogy  $\mathbf{Y}(x)$  olyan mátrix-függvény, amely az

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}'(x) &= \mathbf{A}(x)\mathbf{Y}(x), \text{ ahol } x \in (a, b), \\ \mathbf{Y}(a) &= \mathbf{I} \end{aligned} \quad (8)$$

Cauchy-feladat megoldása, ahol  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  az egységmátrix. Ekkor a (6) egyenlet általános megoldása

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{Y}(x) \left( \vec{c} + \int_a^x \mathbf{Y}^{-1}(t)\mathbf{R}(t)dt \right), \quad (9)$$

ahol  $\vec{c} \in \mathbb{R}^m$  tetszőleges vektor. A célunk az, hogy találjunk egy olyan  $\vec{c}$  vektort, amellyel a fenti módon definiált  $\mathbf{u}(x)$  függvény kielégíti a (7) peremfeltételt. Ekkor

$$\mathbf{s} = \mathbf{B}_a \mathbf{u}(a) + \mathbf{B}_b \mathbf{u}(b) = \mathbf{B}_a \mathbf{Y}(a)\vec{c} + \mathbf{B}_b \mathbf{Y}(b) \left( \vec{c} + \int_a^b \mathbf{Y}^{-1}(x)\mathbf{R}(x)dx \right).$$

Mivel  $\mathbf{Y}(a) = \mathbf{I}$ , ezért a fenti egyenletet a  $\vec{c}$  vektorra rendezve a következő egyenletet kapjuk:

$$(\mathbf{B}_a + \mathbf{B}_b \mathbf{Y}(b))\vec{c} = \mathbf{s} - \mathbf{B}_b \mathbf{Y}(b) \int_a^b \mathbf{Y}^{-1}(x)\mathbf{R}(x)dx.$$

Jelölje  $\mathbf{S} = \mathbf{B}_a + \mathbf{B}_b \mathbf{Y}(b)$ . Ekkor

$$\mathbf{S}\vec{c} = \mathbf{s} - \mathbf{B}_b \mathbf{Y}(b) \int_a^b \mathbf{Y}^{-1}(x)\mathbf{R}(x)dx.$$

**2.5. Tétel.** ([2]) *A (6)-(7) lineáris peremérték-feladatnak pontosan akkor létezik egyértelmű megoldása, amikor az  $\mathbf{S} = \mathbf{B}_a + \mathbf{B}_b \mathbf{Y}(b)$  mátrix reguláris. Ekkor a megoldás (9) alakú, ahol*

$$\vec{c} = \mathbf{S}^{-1} \left( \mathbf{s} - \mathbf{B}_b \mathbf{Y}(b) \int_a^b \mathbf{Y}^{-1}(x)\mathbf{R}(x)dx \right). \quad (10)$$

### 3. A kétpontos peremérték-feladat numerikus megoldása belövéses módszerrel

Szeretnénk megoldani a következő peremérték-feladatot:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}'(x) &= f(x, \mathbf{u}(x)) \\ u_1(a) &= \alpha, \quad u_1(b) = \beta,\end{aligned}\tag{11}$$

ahol  $x \in [a, b]$ ,  $f: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$  és  $\mathbf{u}(x) = (u_1(x), u_2(x))$ . A belövéses módszer lényege, hogy (11)-et visszavezetjük egy kezdetiérték-feladatra (az előző fejezetben megmutattuk, hogy hogyan lehet visszavezetni egy peremérték-feladatot kezdetiérték-feladatra), és azt oldjuk meg (11) helyett a tanult numerikus módszerek egyikével. A kezdetiérték-feladat általános alakja:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}'(x) &= f(x, \mathbf{u}(x)), \\ \mathbf{u}(a) &= \mathbf{k},\end{aligned}\tag{12}$$

ahol  $x \in [a, b]$  és  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$  vektor. Mivel  $\mathbf{u}(x) = (u_1(x), u_2(x))$ , ezért (11)-ből tudjuk, hogy (12)-ben a  $\mathbf{k}$  vektor első koordinátája  $\alpha$ , viszont a második koordinátát nem ismerjük. (Megjegyezzük, hogy ez a  $\mathbf{k}$  vektor nem azonos az előző fejezetben szereplő  $\vec{c}$  vektorral, amely mellett az  $u(x)$  megoldás eleget tett a peremfeltételnek!) Legyen ez az ismeretlen érték  $z$ . Tehát a  $\mathbf{k}$  vektor alakja

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \alpha \\ z \end{bmatrix}.$$

Ezt a  $z$  koordinátát szeretnénk most meghatározni úgy, hogy az  $x = b$  pontban ez az érték  $\beta$  legyen. Jelölje  $u_z(x)$  a (11)-nek a  $z$  paramétertől függő megoldását. Így a megoldandó egyenlet:

$$u_{z,1}(b) = \beta,$$

vagyis

$$u_{z,1}(b) - \beta = 0.$$

Vezessük be a  $\varphi(z) = u_{z,1}(b) - \beta$  függvényt. Ekkor tehát olyan értékét keressük a  $z$  paraméternek, amely helyen a  $\varphi$  függvény nulla, azaz a megoldandó feladat:

$$\varphi(z) = 0\tag{13}$$

alakú. Ez egy nemlineáris egyenlet, amit többféle módszerrel is megoldhatunk, például alkalmazhatjuk az intervallum-felező módszert, a szelőmódszert vagy a Newton-módszert. A továbbiakban megnézzük, hogy milyen algoritmus alapján működnek ezek a módszerek.

### 3.1. Belövéses módszer alkalmazása intervallum-felező módszerrel

A Bolzano-tétel alapján tudjuk, hogy ha egy  $l : [a_1, b_1] \mapsto \mathbb{R}$  folytonos függvényre igaz, hogy  $l(a_1)l(b_1) < 0$ , akkor az  $[a_1, b_1]$  intervallumon van zérushelye az  $l$  függvénynek. Az intervallum-felező módszer lényege, hogy intervallumfelezéssel két részintervallumra osztja az eredeti intervallumot, és ezeknek a végpontjaiban megvizsgálja a függvény értékeit. Amelyik részintervallum végpontjaiban ellentétes előjelűek lesznek a függvényértékek, abban a részintervallumban lesz a zérushely. Ezután ezt a részintervallumot újra megfelezi, és itt is megvizsgálja a végpontokban a függvényértékeket, majd kiválasztja, hogy melyik intervallumban van a zérushely, és így tovább. Tehát ezt a módszert alkalmazva a (13) egyenletre, először keresnünk kell két olyan értéket (legyenek ezek  $z_1$  és  $z_2$ ), amelyekre  $\varphi(z_1)\varphi(z_2) < 0$  teljesül. Ekkor a belövéses módszer intervallum-felező módszerrel való megoldásának algoritmusai:

1. Rögzítünk valamilyen  $z$  értéket.
2. Megoldjuk a (12) kezdetiérték-feladatot valamelyik ismert numerikus módszerrel (explicit-, implicit Euler módszer, Runge-Kutta típusú módszer).
3. Visszalépünk az 1. lépésre, és keresünk két olyan  $z$  értéket (legyenek ezek  $z_1$  és  $z_2$ ), melyekkel a 2. lépésben kiszámolt közelítő értékek az  $x = b$  pontban ellentétes előjelűek lesznek.
4. A  $z = 0.5(z_1 + z_2)$  értékkel újra megoldjuk a (12) kezdetiérték-feladatot.
5. Megnézzük, hogy az így kapott megoldás milyen előjelű az  $x = b$  pontban, és ennek függvényében újraválasztjuk a  $z_1$  és  $z_2$  értékeket (ezeket továbbra is úgy választjuk, hogy ellentétes előjelűek legyenek), majd újra megoldjuk az új  $z = 0.5(z_1 + z_2)$  értékkel a (12) kezdetiérték-feladatot.

Az algoritmus akkor ér véget, ha az intervallum két végpontjának távolsága kisebb egy előre megadott  $\epsilon > 0$  értéknél. Ekkor ugyanis a hiba is kisebb lesz  $\epsilon$ -nál.

### 3.2. Belövéses módszer alkalmazása szelőmódszerrel

Az intervallum-felező módszer hátránya, hogy keresnünk kell két ellentétes előjelű  $z_1$  és  $z_2$  értéket. A szelőmódszer egyik előnye ezzel szemben pont az, hogy itt nincs szükség ilyen lépésre. Egyszerűen két egymás utáni sorozatelemhez tartozó függvényértékeken keresztül meghúzzuk a szelőt, és a szelő és az x-tengely metszéspontja fogja megadni a következő sorozatelemet. Egy  $\xi_k$  pontban az első deriváltat a

$$q_k = \frac{l(x^{(k)}) - l(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}}$$

módon közelítjük. Ha az  $[a_1, b_1]$  intervallumban van zérushely, akkor az  $a_1$ -t választjuk  $x^{(0)}$ -nak, a  $b_1$ -t pedig  $x^{(1)}$ -nek. Az ezekben a pontokban felvett függvényértékeken keresztül meghúzzuk a szelőt, így a szelő és x-tengely metszéspontja lesz az  $x^{(2)}$ . Ezután az  $x^{(1)}$  és  $x^{(2)}$  pontokban felvett értékek között húzzuk meg a szelőt, és így megkapjuk az x-tengellyel való metszéspontból az  $x^{(3)}$  pontot, és így tovább. Tehát a (13) megoldásához a következő algoritmust alkalmazzuk:

1. Legyen  $z^{(0)}$  és  $z^{(1)}$  a két tetszőleges kezdőpontunk.
2. A (3)-ban  $z$  helyére először  $z^{(0)}$ -t majd  $z^{(1)}$ -et helyettesítünk, és így oldjuk meg a (12) kezdetiérték-feladatot valamelyik tanult numerikus módszerrel.
3. Így már tudjuk, hogy  $\varphi(z^{(0)}) = u_1(b, z^{(0)}) - \beta$  és  $\varphi(z^{(1)}) = u_1(b, z^{(1)}) - \beta$ .
4. Ekkor ismerjük a  $(z^{(0)}; \varphi(z^{(0)}))$  és  $(z^{(1)}; \varphi(z^{(1)}))$  pontokat, ezért ezekre alkalmazunk egy lineáris közelítést (a két pontra egy egyenest fektetünk), amely megadja az x-tengely és az egyenes metszéspontja által a  $z^{(2)}$  pontot.

$$z^{(2)} = z^{(1)} - \left( \frac{z^{(1)} - z^{(0)}}{\varphi(z^{(1)}) - \varphi(z^{(0)})} \right) \varphi(z^{(1)}) \quad (14)$$

5. A (14)-el meghatározott  $z^{(2)}$  értéket behelyettesítjük a (3)-ba, és ezzel újra megoldjuk a (12) kezdetiérték-feladatot. Így megkapjuk a  $\varphi(z^{(2)})$  értéket.

6. Az eddigiek alapján  $k = 2, 3, \dots$  értékekre a már meghatározott  $(z^{(k-2)}; \varphi(z^{(k-2)}))$  és  $(z^{(k-1)}; \varphi(z^{(k-1)}))$  pontok segítségével meghatározzuk a

$$z^{(k)} = z^{(k-1)} - \left( \frac{z^{(k-1)} - z^{(k-2)}}{\varphi(z^{(k-1)}) - \varphi(z^{(k-2)})} \right) \varphi(z^{(k-1)}) \quad (15)$$

közelítést, és ez alapján a  $\varphi(z^{(k)})$  értéket.

7. Az algoritmus akkor ér véget, ha a  $|\varphi(z^{(k)})|$  érték kisebb lesz egy előre megadott  $\epsilon > 0$  értéknél.

A szelómódszer hátránya, hogy általános esetben nem garantáltan konvergens, azaz nem mindig fogja megtalálni a zérushelyet, ugyanis nem biztos, hogy a szelő és az x-tengely metszéspontja mindig a vizsgált intervallumba fog esni.

**3.1. Megjegyzés.** *Az algoritmus instabil lesz, ha a  $\varphi(z^{(k-1)})$  és  $\varphi(z^{(k)})$  értékek különbsége túl közel van a nullához, mivel akkor (15)-ben gépi számokkal nézve majdnem 0-val kéne osztani (így az  $\epsilon$  értékét sem célszerű túl kicsinek választani). Emiatt a 7. lépés után még szoktak egy javító lépést végrehajtani, a következő módon. Eddig a  $z^{(k)}$  értékhez rendeltünk egy  $\varphi(z^{(k)})$  értéket minden  $k = 0, 1, \dots, n$  esetén. Most a  $\varphi(z^{(k)})$  értékhez fogjuk hozzárendelni a  $z^{(k)}$  értéket, azaz előállítjuk a  $\varphi$  függvény inverzét ( $\varphi^{-1}$ ). Ezekre az adatokra fektetünk egy interpolációs polinomot (ez az ún. inverz interpoláció, hiszen lényegében az inverz függvény interpolációját hajtjuk végre), amely segítségével meghatározzuk a függvény zérushelyét, azaz megnézzük, hogy  $\varphi^{-1}(0)$  milyen értéket vesz fel.*

### 3.3. Belövéses módszer alkalmazása Newton-módszerrel

A Newton módszer lényege, hogy az  $\xi_k$ -beli értéket az  $x^{(k)}$  pontbeli érintő meredekségével közelítjük. Az  $x^{(0)}$  pontból indítjuk az iterációt, ebben a pontban meghúzzuk a függvény érintőjét, és ahol ez metszi az x-tengelyt, az lesz az  $x^{(1)}$ , majd ebben a pontban is meghúzzuk az érintőt, így megkapjuk az  $x^{(2)}$ -t, és így tovább. Az iterációt a következő módon építjük fel:

$$z^{(k+1)} = z^{(k)} - \frac{\varphi(z^{(k)})}{\varphi'(z^{(k)})}. \quad (16)$$

Itt  $\varphi'(z^{(k)})$  meghatározása okoz nehézséget, mivel a  $\varphi$  függvény explicit módon nem ismert, így azt nem tudjuk közvetlenül deriválni. Ezért visszatérünk az alapfeladatunkhoz.

Amikor tárgyalni kezdtük a belövéses módszert, akkor a következő feladatot szeretttük volna megoldani:

$$\begin{aligned}u''(x) &= f(x, u(x), u'(x)), \\u(a) &= \alpha, \\u'(a) &= z,\end{aligned}$$

ahol  $u_z(x)$  jelölte ennek a feladatnak a  $z$  paramétertől függő megoldását. Azaz

$$\begin{aligned}u_z''(x) &= f(x, u_z(x), u_z'(x)), \\u_z(a) &= \alpha, \\u_z'(a) &= z.\end{aligned}\tag{17}$$

Deriváljuk a (17) egyenletet a  $z$  paraméter szerint.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_z''}{\partial z}(x) &= \partial_2 f(x, u_z(x), u_z'(x)) \frac{\partial u_z}{\partial z}(x) + \partial_3 f(x, u_z(x), u_z'(x)) \frac{\partial u_z'}{\partial z}(x), \\ \frac{\partial u_z}{\partial z}(a) &= 0, \\ \frac{\partial u_z'}{\partial z}(a) &= 1.\end{aligned}$$

Ezt a feladatot így még mindig nem tudjuk megoldani, mert a  $\partial_2 f$  és  $\partial_3 f$  függvények értékét nem tudjuk meghatározni az ismeretlen helyeken. Viszont ha ehhez a feladathoz hozzávesszük a (17)-beli egyenleteket, akkor egy négyismeretlenes elsőrendű közönséges differenciálegyenletrendszer kezdetiérték-feladatát kapjuk. Ugyanis ha bevezetjük a  $v_1(x) = u_z(x)$ ,  $v_2(x) = u_z'(x)$ ,  $v_3(x) = \frac{\partial u_z}{\partial z}(x)$ ,  $v_4(x) = \frac{\partial u_z'}{\partial z}(x)$  új függvényeket, akkor az egyenletrendszerünk a hozzá tartozó kezdeti feltételekkel együtt a következő:

$$\begin{aligned}v_1'(x) &= v_2(x), \\v_2'(x) &= f(x, v_1(x), v_2(x)), \\v_3'(x) &= v_4(x), \\v_4'(x) &= \partial_2 f(x, u_z(x), u_z'(x))v_3(x) + \partial_3 f(x, u_z(x), u_z'(x))v_4(x), \\v_1(a) &= \alpha \quad v_2(a) = z \quad v_3(a) = 0 \quad v_4(a) = 1.\end{aligned}\tag{18}$$

Látható, hogy a  $v_3(b) = \frac{\partial u_z}{\partial z}(b) = \varphi'(z)$ , vagyis így már ki tudjuk számítani a Newton iterációban a nevező értékét. Tehát a belövéses módszer Newton iterációval való megoldásának algoritmusai:



1. Meghatározzuk, hogy honnan indítjuk az iterációt. Ez lesz a  $z^{(0)}$  pont.
2. A  $z = z^{(0)}$  megválasztással megoldjuk a (18) kezdetiérték-feladatot valamelyik ismert numerikus módszerrel.
3. Ekkor már meg tudjuk határozni a  $\varphi(z^{(0)})$  és  $\varphi'(z^{(0)})$  értékeket, ugyanis  $\varphi(z^{(0)}) = v_1(b)$  és  $\varphi'(z^{(0)}) = v_3(b)$ .
4. Kiszámoljuk a (16) közelítéssel a  $z^{(1)}$  értéket.
5. Most már  $z = z^{(1)}$  megválasztással oldjuk meg a (18) kezdetiérték-feladatot, és így megkapjuk a  $z^{(2)}$  értékét, és így tovább.

Az iteráció akkor áll le, ha a  $|\varphi(z^{(k)})|$  értéke kisebb lesz, mint egy előre meghatározott  $\epsilon > 0$  érték.

### 3.4. A lineáris peremérték-feladat numerikus megoldása belövéses módszerrel

A következő lineáris peremérték-feladatot szeretnénk megoldani:

$$\begin{aligned}
 u''(x) &= p(x)u'(x) + q(x)u(x) + r(x), \\
 u(a) &= \alpha, \\
 u(b) &= \beta.
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

Ezt a belövéses módszerrel való megoldáshoz visszavezetjük egy elsőrendű feladatra, és megoldjuk valamilyen  $\mathbf{z} = (\alpha, z_1)$  és  $\mathbf{z} = (\alpha, z_2)$  vektorral. A kapott megoldások legyenek  $u(x, z_1)$  (a  $z_1$  paramétertől függő megoldás), és  $u(x, z_2)$  (a  $z_2$  paramétertől függő megoldás), azaz

$$\begin{aligned}
 u_1''(x) &= p(x)u_1'(x) + q(x)u_1(x) + r(x), \\
 u_1(a) &= \alpha, \\
 u_1'(a) &= z_1,
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

és

$$\begin{aligned}
 u_2''(x) &= p(x)u_2'(x) + q(x)u_2(x) + r(x), \\
 u_2(a) &= \alpha, \\
 u_2'(a) &= z_2.
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Bevezetünk egy új függvényt:

$$w(x) = \lambda u_1(x) + (1 - \lambda)u_2(x). \quad (22)$$

Itt  $\lambda \in \mathbb{R}$  egy egyelőre ismeretlen paraméter. Mivel a megoldandó peremérték-feladat lineáris, ezért a felírt  $u_1(x)$  és  $u_2(x)$  megoldásoknak a lineáris kombinációja is megoldás lesz, tehát

$$w''(x) = p(x)w'(x) + q(x)w(x) + r(x),$$

$$w(a) = \alpha,$$

$$w(b) = \lambda u_1(b) + (1 - \lambda)u_2(b).$$

Itt már csak a  $\lambda$  paramétert kell megfelelően megválasztani. Ahhoz, hogy az  $u(b) = \beta$  feltétel teljesüljön, az kell, hogy a  $w(b) = \lambda u_1(b) + (1 - \lambda)u_2(b) = \beta$  egyenlőség is teljesüljön. Ebből könnyen kiszámolható, hogy az ismeretlen  $\lambda$  paramétert a

$$\lambda = \frac{\beta - u_2(x)}{u_1(x) - u_2(x)} \quad (23)$$

képlet alapján határozhatjuk meg. Ha az így kiszámolt  $\lambda$  értékét behelyettesítjük a (22) egyenletbe, akkor az eredeti (19) lineáris peremérték-feladat megoldását fogjuk megkapni. Kérdés, hogy ezzel a módszerrel minden esetben meg tudjuk-e határozni a megoldást, mindig ki lehet-e számítani ezzel a képlettel a  $\lambda$  értékét. Erre a kérdésre ad választ a következő tétel.

**3.2. Tétel.** ([2]) *Tegyük fel, hogy a (19) feladatnak létezik egyértelmű megoldása. Ekkor a következő két eset közül az egyik teljesülni fog.*

- *A (20) alakú megoldás lesz az eredeti feladat megoldása.*
- *$u_1(x) - u_2(x) \neq 0$  és ekkor a (23) képlettel ki tudjuk számolni a  $\lambda$  értékét.*

Ezt azt jelenti, hogy minden olyan esetben amikor korrekt kitűzésű a feladatunk, a numerikus megoldást is elő fogjuk tudni állítani.

### 3.5. Belövéses módszer alkalmazása MATLAB használatával

Ebben a részben egy rövid példát szeretnék mutatni, melyben a peremérték-feladat numerikus megoldásához a Matlab programot fogom használni. Tekintsük a következő

peremérték-feladatot:

$$\begin{aligned}u''(x) - 2u'(x) + u(x) &= 0, \\ u(0) &= 1, \quad u(1) = 1.\end{aligned}\tag{24}$$

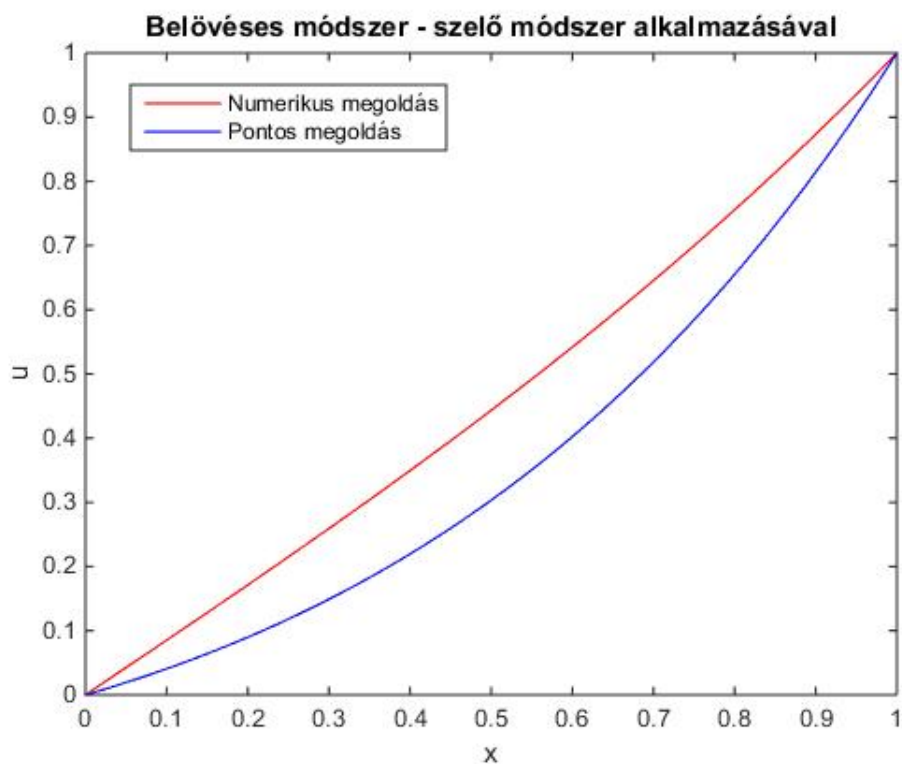
Ennek a feladatnak analitikusan is ki tudjuk számítani a pontos megoldását, amely a következő:

$$u(x) = xe^{(x-1)}.\tag{25}$$

Ahhoz, hogy ezt a feladatot meg tudjuk oldani belövéses módszerrel, előbb vissza kell vezetnünk kezdetiérték-feladatra:

$$\begin{aligned}u_1' &= u_2, \\ u_2' &= 2u_2 - u_1, \\ u_1(0) &= 1, \quad u_1(1) = 1.\end{aligned}\tag{26}$$

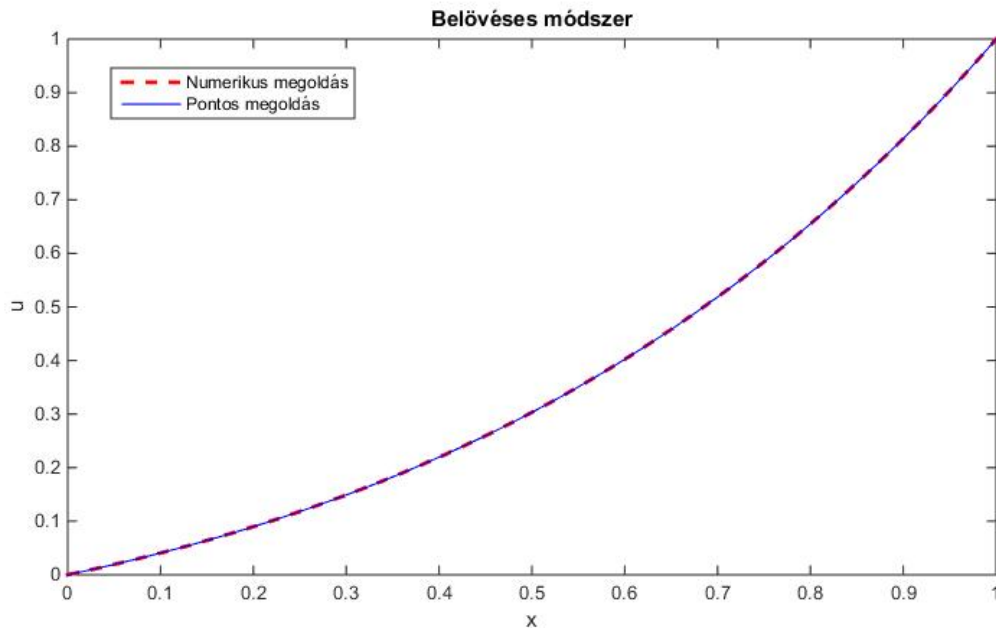
Nézzük meg, hogy milyen megoldást kapunk erre a MATLAB-ban, ha a szelő módszert alkalmazva szeretnénk megoldani a feladatot (az iterációt  $\frac{1}{2}$  és  $\frac{1}{5}$  értékekkel indítottam):



1. ábra. Belövéses módszer - szelő módszer alkalmazásával

Látható, hogy így egy közel lineáris egyenessel közelíti a megoldást.

Ennél jobb közelítést szeretnénk, ezért nézzük meg, hogy milyen eredményt kapunk, ha a MATLAB beépített függvényeit (ode45, fzero (olyan pontot keres, ahol az adott függvény nulla.)) használjuk a belövéses módszerrel való közelítéshez (azaz itt nem mondjuk meg a programnak azt, hogy milyen módon oldja meg a nemlineáris egyenletet):



2. ábra. Belövéses módszer

Itt már egy nagyon pontos numerikus megoldást kaptunk, szemmel lathatóan úgy tűnik, mintha visszakaptuk volna a pontos megoldást, azonban ez nem így van. A program kiszámolja nekünk az egyes helyeken az eltérést a numerikus és a pontos megoldás között. Nézzük meg az első néhány helyett vett eltérést:

0.0005	0.0004	0.0010	0.0021	0.1177	0.1643	0.0659	0.0004	0.1288	0.1791
--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

1. táblázat. Egyes helyeken vett eltérés a numerikus és a pontos megoldás között

## 4. A kétpontos peremérték-feladat numerikus megoldása véges differenciás módszerrel

Ebben a fejezetben nem a kezdetiérték-feladatra való visszavezetés módszerével fogjuk megoldani a peremérték-feladatot, hanem diszkrétizáljuk a megoldási tartományt, majd ezeken a diszkrét értékeken adunk egy közelítő megoldást. Ehhez meg kell határoznunk egy rácshálót, melynek pontjaiban közelíteni fogjuk a feladatban szereplő deriváltak- és függvények értékét véges differenciák módszerével. Látni fogjuk, hogy itt tulajdonképpen egy algebrai egyenletrendszerrel helyettesítjük a peremérték-feladatot, és így határozzuk meg a közelítő megoldását. Főként lineáris peremérték-feladatokkal fogunk foglalkozni, így az algebrai egyenletrendszerek is lineárisak lesznek.

A numerikus deriválás elméletéből tudjuk, hogy ha egy  $x_i$  pontban szeretnénk közelíteni a függvény deriváltját, akkor azt megtehetjük véges differenciás módszerekkel: jobb oldali-, bal oldali-, középponti- és másodrendű középponti véges differencia. Most az  $u$  függvény deriváltjának értékét szeretnénk közelíteni az  $x_i = a + ih$  pontokban ( $i = 0, 1, \dots, N+1$ ), ahol  $h = \frac{b-a}{N+1}$  a lépésközt jelöli. Tudjuk, hogy  $u'(x_i) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h}$ , ezért megfelelően kicsi  $h$  esetén  $\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h}$  elég közel van  $u'(x_i)$ -hez, tehát ez egy jó közelítése lesz a deriválnak, és ezt a közelítést nevezzük jobb oldali véges differenciának. Hasonló módon gondolkozva levezethető a többi véges differenciás approximáció is. Összefoglalva felírhatjuk az alábbi közelítéseket:

1. jobb oldali véges differencia:

$$u'(x_i) \sim \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h}$$

2. bal oldali véges differencia:

$$u'(x_i) \sim \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h}$$

3. középponti véges differencia:

$$u'(x_i) \sim \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2h}$$

4. másodrendű középponti véges differencia (ezzel az  $u$  függvény második deriváltját tudjuk közelíteni):

$$u''(x_i) \sim \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2}$$

Emlékeztetőül, a következő Dirichlet peremfeltétellel adott feladatot szeretnénk megoldani:

$$\begin{aligned} u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) &= r(x), \\ u(a) &= \alpha, \quad u(b) = \beta. \end{aligned} \tag{27}$$

Tegyük fel, hogy  $p(x), q(x), r(x)$  folytonos függvények, és  $q(x) \leq 0$  az  $(a, b)$  intervallumon (ekkor (ld. 2.1 tétel) a peremérték-feladatnak létezik egyértelmű  $u(x)$  megoldása). Mivel analitikusan nem tudjuk megoldani ezt a differenciálegyenletet, ezért valamilyen numerikus módszerrel megpróbáljuk közelíteni a pontos megoldást egy - az  $[a; b]$  intervallumon általunk konstruált - rácsháló pontjaiban. Az egyszerűség kedvéért ekvidisztáns rácshálót fogunk dolgozni. Jelölje ezt a rácshálót  $\bar{\omega}_h$ , a rácsháló belső pontjait  $\omega_h$ , a rácsháló határpontjait pedig  $\gamma_h$ , azaz

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_h &= \left\{ x_i = a + ih : \quad i = 0, 1, \dots, N + 1, \quad h = \frac{b - a}{N + 1} \right\}, \\ \omega_h &= \left\{ x_i = a + ih : \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad h = \frac{b - a}{N + 1} \right\}, \\ \gamma &= \{x_0 = a, \quad x_{N+1} = b\}. \end{aligned}$$

Olyan függvényt keresünk, ami jól közelíti az  $u(x)$  pontos megoldást. Legyen  $\bar{y}_h$  az a függvény, ami reményeink szerint jól közelíti a pontos megoldást, és aminek értelmezési tartománya a rácsháló pontjainak halmaza, azaz  $\bar{\omega}_h$ .

**4.1. Definíció.** Azt mondjuk, hogy a numerikus módszer  $p$ -edrendben konvergens, ha  $|u(t^*) - \bar{y}_h(t^*)| = \mathcal{O}(h^p)$ , ahol  $t^*$  rögzített pont, és minden  $h$  értékre a rácshálónk eleme.

**4.2. Definíció.** Az  $e_h(x_i) = u(x_i) - \bar{y}_h(x_i)$   $\bar{\omega}_h$ -n értelmezett függvényt hibafüggvénynek nevezzük.

Az egyszerűség kedvéért vezessük be a következő jelölést:  $e_h(x_i) := e_i$ . Azt szeretnénk, hogy ez az  $e_i$  hiba minél kisebb legyen, mert ez azt jelentené, hogy a közelítő megoldás közel van a pontos megoldáshoz. Vagyis elvárjuk, hogy ha a rácshálóban csökkentjük a lépésközt ( $h \rightarrow 0$ ), akkor minden  $t^* \in \bar{\omega}_h$  rögzített pontra teljesüljön, hogy  $\lim_{h \rightarrow 0} |u(t^*) - \bar{y}_h(t^*)| = 0$ , azaz a numerikus módszer valamilyen rendben konvergens legyen. Ez tulajdonképpen azt jelenti, hogy minél finomabb a rácsháló (minél több pontban közelítjük a deriváltakat az ekvidisztáns rácshálón), annál jobban megközelítjük a pontos

megoldást is. Tegyük fel, hogy ez az elvárásunk teljesül, vagyis  $\bar{y}_h(x_i)$  megfelelően közel van az  $u(x_i)$  pontos megoldáshoz. Vizsgáljuk a megoldandó feladatot a rácsháló belső pontjaiban:

$$\begin{aligned} u''(x_i) + p(x_i)u'(x_i) + q(x_i)u(x_i) &= r(x_i) \\ u(x_0) = \alpha, \quad u(x_{N+1}) &= \beta, \end{aligned} \tag{28}$$

ahol  $i = 1, 2, \dots, N$ . Ebben a feladatban az  $u''(x_i)$ -et közelíteni tudjuk a másodrendű középponti véges differenciával, az  $u'(x_i)$ -t pedig középponti véges differenciával. Tehát

$$\begin{aligned} \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} + p(x_i) \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2h} + q(x_i)u(x_i) + \mathcal{O}(h^2) &= r(x_i), \\ u(x_0) = \alpha, \quad u(x_{N+1}) &= \beta, \end{aligned} \tag{29}$$

ahol  $i = 1, 2, \dots, N$ . Mivel feltettük, hogy olyan  $\bar{y}_h$  rácsfüggvényt keresünk, amely közel van az  $u(x)$  pontos megoldáshoz, ezért az  $u(x_i)$  értékeket közelíthetjük az  $\bar{y}_h(x_i)$  függvénnyel.

A (29) közelítése tehát

$$\begin{aligned} \frac{\bar{y}_h(x_{i+1}) - 2\bar{y}_h(x_i) + \bar{y}_h(x_{i-1}))}{h^2} = p(x_i) \frac{\bar{y}_h(x_{i+1}) - \bar{y}_h(x_{i-1}))}{2h} + q(x_i)\bar{y}_h(x_i) + r(x_i), \\ \bar{y}_h(x_0) = \alpha, \quad \bar{y}_h(x_{N+1}) = \beta. \end{aligned} \tag{30}$$

Az egyszerűség kedvéért bevezetjük a következő jelöléseket:  $\bar{y}_h(x_i) =: y_i$ ,  $u(x_i) =: u_i$ ,  $p(x_i) =: p_i$ ,  $q(x_i) =: q_i$ ,  $r(x_i) =: r_i$ . A hibafüggvény definíciójából tudjuk, hogy  $y_i = e_i + u_i$ . Ha ezt behelyettesítjük a (30) egyenletbe, akkor rövid számolás és átrendezés után a következőt kapjuk:

$$\frac{e_{i+1} - 2e_i + e_{i-1}}{h^2} - p_i \frac{e_{i+1} - e_{i-1}}{2h} + q_i e_i = - \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - p_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + q_i u_i + r_i.$$

Az egyenlet jobb oldalán lévő kifejezést jelölje  $\psi_i^h$ . Tehát

$$\psi_i^h = - \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - p_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + q_i u_i + r_i. \tag{31}$$

A  $\psi_i^h$  azt mutatja meg, hogy a pontos megoldás mennyire elégíti ki a numerikus megoldást meghatározó egyenletet, vagyis ez az ún. reziduális hiba, a numerikus módszer lokális approximációs hibája a pontos megoldáson.

**4.3. Definíció.** Azt mondjuk, hogy a numerikus módszer konzisztens, ha  $\lim_{h \rightarrow 0} \psi_i^h = 0$  amikor  $p \geq 1$ .

**4.4. Definíció.** Azt mondjuk, hogy a numerikus módszer  $p$ -edrendben konzisztens, ha  $\psi_i^h = \mathcal{O}(h^p)$ .

## 4.1. A peremérték-feladat mátrixos alakja

A (30) egyenletrendszert átrendezve a következő lineáris algebrai egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} y_0 &= \alpha, \\ \left(1 + \frac{h}{2}p_i\right)y_{i+1} - (2 - h^2q_i)y_i + \left(1 - \frac{h}{2}p_i\right)y_{i-1} &= h^2r_i \quad , \text{ ahol } 1 \leq i \leq N, \\ y_{N+1} &= \beta. \end{aligned} \quad (32)$$

Ennek az egyenletrendszernek a mátrixos alakja (a feni egyenletből látható, hogy az első és az utolsó változó ( $y_0$  és  $y_{N+1}$ ) értéke ismert, emiatt ezeket a változókat eliminálhatjuk, és így kapjuk a következő egyenletrendszert):

$$A\vec{y} = \vec{r}, \quad (33)$$

ahol

$$A = \begin{bmatrix} -(2 - h^2q_1) & (1 + \frac{h}{2}p_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ (1 - \frac{h}{2}p_2) & -(2 - h^2q_2) & (1 + \frac{h}{2}p_2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (1 - \frac{h}{2}p_3) & -(2 - h^2q_3) & (1 + \frac{h}{2}p_3) & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & (1 - \frac{h}{2}p_{N-1}) & -(2 - h^2q_{N-1}) & (1 + \frac{h}{2}p_{N-1}) \\ 0 & \dots & 0 & 0 & (1 - \frac{h}{2}p_N) & -(2 - h^2q_N) \end{bmatrix},$$

$$\vec{y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T,$$

$$\vec{r} = [h^2r_1 - (1 - \frac{h}{2}p_1)\alpha, h^2r_2, h^2r_3, \dots, h^2r_{N-1}, h^2r_N - (1 + \frac{h}{2}p_N)\beta]^T.$$

A lineáris algebra elméletéből tudjuk, hogy a (33) rendszernek akkor, és csak akkor létezik egyértelmű megoldása, ha az  $A$  mátrix reguláris (Azaz egy olyan mátrix, aminek van inverze. Az ilyen mátrixokat szokás nonsinguláris mátrixoknak is nevezni.). Ahhoz, hogy meg tudjuk mutatni, hogy ez az  $A$  mátrix mikor reguláris, ahhoz előbb be kell vezetnünk néhány fogalmat.



**4.5. Definíció.** Egy  $M \times M$ -es  $D$  mátrixot szigorúan diagonálisan domináns mátrixnak nevezzük, ha legalább az egyik teljesül a következő két feltétel közül:

$$|d_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^M |d_{ij}|$$

$$|d_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^M |d_{ji}|$$

minden  $i = 1, 2, \dots, M$  esetén.

**4.6. Tétel.** ([3]) Ha egy  $D$  mátrix szigorúan diagonálisan domináns mátrix, akkor a  $D$  mátrix reguláris.

**4.7. Következmény.** ([3]) Tekintsük a (27) lineáris peremérték-feladatot. Ha  $q(x) \leq 0$  és  $p(x)$  korlátos az  $(a, b)$  intervallumon (azaz van olyan  $\mathcal{P}$  amelyre  $|p(x)| \leq \mathcal{P}$ ), akkor az eredeti lineáris peremérték-feladat (32) diszkrét verziójának létezik egyértelmű megoldása, feltéve hogy a lépésköz kielégíti a  $h\mathcal{P} \leq 2$  feltételt.

**4.8. Megjegyzés.** Fontos kiemelni, hogy az előző tételben szerepel egy feltétel, ami korlátozza a lépésköz nagyságának megválasztását:

$$h \cdot \max_{x \in [a, b]} |p(x)| \leq 2$$

Ez a feltétel elégséges feltételt ad arra, hogy a (32) megoldható legyen a  $q(x) \leq 0$  feltétel mellett.

## 4.2. Thomas algoritmus

Az előző részben megnéztük, hogy milyen esetben létezik megoldása a peremérték-feladatot approximáló (32) diszkrétizációnak. Ebben a részben konkrét módszert fogunk mutatni a feladat megoldására. Egy  $N \times N$ -es mátrix megoldásához (Gauss eliminációt vagy bármilyen más direkt (nem iterációs) módszert alkalmazva)  $\mathcal{O}(N^3)$  lépés szükséges. Viszont ha kihasználjuk azt a tényt, hogy  $A$  egy tridiagonális mátrix, akkor az alábbi algoritmussal  $\mathcal{O}(N)$  lépésből megoldhatjuk a feladatot. Ahhoz, hogy numerikusan meg tudjuk oldani az

$$A\mathbf{y} = \mathbf{r} \tag{34}$$

lineáris rendszert,  $LU$  felbontást fogunk alkalmazni. Azaz meghatározunk két olyan mátrixot ( $L$  és  $U$  mátrix), amelyekre igaz, hogy

$$A = LU. \quad (35)$$

Így két lépésben megoldhatjuk a (34) rendszert:

1.  $L\mathbf{Z} = \mathbf{r}$

2.  $U\mathbf{y} = \mathbf{Z}$

Mivel az  $A$  mátrix tridiagonális, ezért az egész módszer  $\mathcal{O}(N)$  lépésből megoldható úgy, hogy ebbe beleszámít az is, hogy megtaláljuk az  $L$  és az  $U$  mátrixot, és az is, hogy meg is oldjuk az így kapott egyenletrendszereket. Nézzük magát az algoritmust. Az egyszerűség kedvéért legyen az  $A$  mátrix alakja ebben részben a következő:

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{N-1} & b_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & a_N & b_N \end{bmatrix}.$$

Ezután meghatározzuk az  $L$  és az  $U$  mátrixot a következő alakban:

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_N & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \beta_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \beta_N \end{bmatrix}.$$

Elvégezve a szorzást, és a kapott mátrixot a (35) egyenletbe helyettesítve a következő egyenleteket kapjuk:

1. sor:  $\beta_1 = b_1$ ,
2. sor:  $\alpha_2\beta_1 = a_2, \quad \alpha_2c_1 + \beta_2 = b_2$ ,
- j. sor:  $\alpha_j\beta_{j-1} = a_j, \quad \alpha_jc_{j-1} + \beta_j = b_j$ .

Ezeket az egyenletket már könnyen meg tudjuk oldani az ismeretlen  $\alpha_j$  és  $\beta_j$  értékekre:

$$\beta_1 = b_1,$$

$$\alpha_j = \frac{a_j}{\beta_{j-1}}, \quad \beta_j = b_j - \alpha_jc_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Legyen  $\mathbf{Z} = [z_1, z_2, \dots, z_N]^T$ . A következő algoritmussal oldjuk meg az egyenletrendszert:

1. Megoldjuk a  $L\mathbf{Z} = \mathbf{r}$  egyenletet, amelyből megkapjuk a  $z_j$  értékeket.

$$z_1 = r_1,$$

$$z_j = r_j - \alpha_jz_{j-1}, \quad \text{ahol } j = 2, 3, \dots, N.$$

2. Megoldjuk a  $U\mathbf{y} = \mathbf{Z}$  egyenletet, amelyből megkapjuk a  $y_j$  értékeket.

$$y_N = \frac{z_N}{\beta_N},$$

$$y_j = \frac{z_j - c_jy_{j+1}}{\beta_j}, \quad \text{ahol } j = N-1, N-2, \dots, 1.$$

Ez az algoritmus gyorsan kiszámolja a megoldást, és csak 8 darab  $\mathcal{O}(N)$  nagyságú tömb tárolására van szükség ( $\{a_j\}, \{b_j\}, \{c_j\}, \{\alpha_j\}, \{\beta_j\}, \{r_j\}, \{z_j\}, \{y_j\}$ ).

**4.9. Megjegyzés.** Az  $A$  mátrix egy tridiagonális mátrix, aminek a diagonálisában szerepelnek a  $\beta_j$ -k, ezért minden  $j$  esetén a  $\beta_j \neq 0$  egyenlőség teljesül. Vagyis az algoritmus minden esetben működik.

### 4.3. Hibabecslés

Ebben a részben azzal foglalkozunk, hogy a numerikus- és a pontos megoldás között mekkora lehet az eltérés. Korábban már definiáltuk, hogy milyen függvényt nevezünk a numerikus közelítés hibájának, ezt jelöltük így:  $e_h(x_i) := e_i$ . Mivel csak a közelítő megoldás értékeit ismerjük az adott pontokban (a pontos megoldás értékeit ezekben a pontokban nyilván nem ismerjük), így ezt a hibát nem tudjuk pontosan meghatározni.

Viszont szükségünk van arra, hogy a hiba nagysága meghatározható (becsülhető) legyen, mert csak ebből tudjuk eldönteni, hogy megfelelő lépésközt választottunk-e ahhoz, hogy a numerikus módszerünk a kívánt pontosságú megoldást adja, azaz, hogy megfelelően közelítse a pontos megoldást. Ezért a továbbiakban becslést adunk a hibára.

**4.10. Tétel.** ([3]) Legyen  $\{y_i\}_{i=1}^N$  a (32) diszkrétizált feladat megoldása. Jelölje  $u(x)$  a (27) peremérték-feladat pontos megoldását. Legyen  $\mathcal{P} = \max_{x \in [a,b]} |p(x)|$ , és  $q(x) \leq \mathcal{Q} < 0$ . Ekkor a közelítés hibájára teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$\max |e_i| = \frac{1}{h^2 \left( |\mathcal{Q}| + \frac{8}{(b-a)^2} \right)} \left( \frac{1}{12} h^2 (M_4 + \mathcal{P} M_3) + 2p \right),$$

ahol  $M_3 = \max_{x \in [a,b]} |u^{(3)}(x)|$ ,  $M_4 = \max_{x \in [a,b]} |u^{(4)}(x)|$  és  $p$  az abszolút hiba (a közelítő és a pontos érték különbségének abszolút értéke).

A numerikus módszerek esetében nagyon fontos, hogy stabil legyen a módszerünk, tehát ne forduljon elő, hogy ha egy picit módosítjuk a bemenő paramétereket, akkor a megoldás nagyon nagy mértékben változzon. Ahhoz, hogy ezt ellenőrizni tudjuk ki kell számítanunk az úgynevezett kondíciószámot. A kondíciószám azt méri, hogy a bemenő adatok kis változtatásával mennyire változik meg a feladat megoldása.

**4.11. Definíció.** Legyen  $A$  egy reguláris mátrix. Ekkor a  $\text{cond}(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$  számot az  $A$  mátrix kondíciószámának nevezzük, ahol  $\|A\|$  az  $A$  mátrix valamely vektornorma szerint indukált mátrixnormája.

Nyilván  $\text{cond}(A) \geq 1$  és ha a kondíciószám kicsi, akkor beszélhetünk jól kondicionált feladról. A numerikus közelítés hibáját jelentősen csökkenthetjük, ha a középponti differencia helyett a (27) feladatot a Numerov formulával közelítjük. Ekkor a diszkrétizált feladat

$$\begin{aligned} y_0 &= \alpha, \\ y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} &= \frac{h^2}{12} \left( f_{i+1} + 10f_i + f_{i-1} \right), \quad \text{ahol } 1 \leq i \leq N, \\ y_{N+1} &= \beta \end{aligned} \tag{36}$$

alakú. Ez a rendszer lineáris, ha a (12) egyenletben  $f(x, u) = -q(x)u + r(x)$ .

**4.12. Tétel.** ([3]) Legyen  $\{y_i\}_{i=1}^N$  a (32) diszkretizált feladat megoldása, amelyben az egyenletrendszer lineáris, azaz  $f(x, u) = -q(x)u + r(x)$ . Ekkor az  $e_i$  hibára teljesül a következő becslés:

$$\max |e_i| = \frac{1}{h^2 \left( |\mathcal{Q}| + \frac{8}{(b-a)^2} \right)} \left( \frac{1}{240} h^6 M_6 + 2p \right),$$

ahol  $M_6 = \max_{x \in [a,b]} |u^{(6)}(x)|$  és  $p$  az abszolút hiba.

#### 4.4. Neumann és vegyes peremfeltételek

Tegyük fel, hogy az  $x = a$  pontban a peremfeltétel

$$A_1 u(a) + A_2 u'(a) = \alpha, \quad (37)$$

ahol  $A_1$  és  $A_2$  adott konstansok. Ha  $A_1 = 0$ , akkor ez az ún. Neumann peremfeltétel, ha pedig  $A_1 \cdot A_2 \neq 0$ , akkor ez egy vegyes típusú (ún. harmadik vagy Robin-féle) peremfeltétel. Most két módszert fogunk megnézni, amelyekkel általánosítani tudjuk a (32) és (36) rendszereket arra az esetre, amikor ezek az egyenletek nem Dirichlet peremfeltétellel vannak megadva, hanem Neumann vagy vegyes peremfeltételekkel.

**1. módszer:** Ez a módszer kizárólag a másodrendben pontos approximáció általánosítása esetén működik, így először az  $u'(a)$  megfelelő másodrendű közelítését kell megtalálnunk. Legyen  $x_{-1} = a - h$ , ekkor ebben a fiktív pontban a közelítő megoldás értéke  $y_{-1}$ . Így meg tudjuk határozni  $u'(a)$  másodrendű közelítését a középponti differencia segítségével:

$$u'(a) = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} + \mathcal{O}(h^2).$$

Ebből ha elhagyjuk a hibatagot, akkor az  $u'(a) \sim \frac{y_1 - y_{-1}}{2h}$  közelítést kapjuk, melyet a (37) peremfeltételbe helyettesíthetünk:

$$A_1 y_0 + A_2 \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = \alpha. \quad (38)$$

Az  $x = a$  pontban a (32) diszkrét feladat

$$\left( 1 + \frac{h}{2} P_0 \right) y_1 - (2 - h^2 \mathcal{Q}_0) y_0 + \left( 1 - \frac{h}{2} P_0 \right) y_{-1} = h^2 R_0 \quad (39)$$

alakú. (Itt feltételezzük, hogy az egyenletet ki tudjuk terjeszteni a határpontra is.) A (38) és a (39) egyenletek helyettesítik az eredeti (32) diszkrét feladatban az  $y_0 = \alpha$  peremfeltételt, ezért a megoldandó rendszerünk  $N \times N$  helyett már  $(N+2) \times (N+2)$  méretűre változott. Ez valójában azt jelenti, hogy két új ismeretlenünk van:  $y_{-1}$  és  $y_0$ . Ugyanakkor felesleges ezzel a két egyenlettel dolgoznunk ((38) és a (39)-vel), mivel egyszerűbb ha a (38) egyenletből kifejezzük  $y_{-1}$ -et, és a kapott eredmény behelyettesítjük a (39) egyenletbe. Így a következő egyenletet kapjuk:

$$2y_1 - \left[ 2 - h^2 Q_0 - 2h \frac{A_1}{A_2} \left( 1 - \frac{h}{2} P_0 \right) \right] y_0 = h^2 R_0 + 2h \frac{\alpha}{A_2} \left( 1 - \frac{h}{2} P_0 \right). \quad (40)$$

Tehát ezzel fogjuk helyettesíteni a  $y_0 = \alpha$  peremfeltételt. Így tulajdonképpen végül  $N+1$  egyenletből fog állni a rendszerünk, amiben  $N+1$  darab ismeretlen szerepel. (A (40) egyenletből látszik, hogy miért szükséges az a feltétel, hogy  $A_2 \neq 0$ , ugyanis ekkor ez az egyenlet egy Dirichlet peremfeltételnek felelne meg.) Korábban volt szó arról, hogy ha a lépésköz teljesíti azt a feltételt, hogy  $h \cdot \max_{x \in [a; b]} |p(x)| \leq 2$ , akkor a Dirichlet peremfeltétellel megadott feladatnak létezik egyértelmű megoldása, mivel ekkor az együtthatómátrix szigorúan diagonálisan domináns, és emiatt reguláris. Ha a (40) egyenlettel helyettesítjük a peremfeltételt, akkor az együtthatómátrix továbbra is szigorúan diagonálisan domináns marad, feltéve, hogy  $A_1 A_2 \leq 0$  (Ez egy elégséges feltétel, nem pedig szükséges. Van olyan eset, hogy akkor is létezik egyértelmű megoldás, amikor ez a feltétel nem teljesül.), illetve  $q(x) < 0$  és  $h \cdot \max_{x \in [a; b]} |p(x)| \leq 2$ . Ha a peremfeltételt a (38) és a (39) egyenletekkel helyettesítenénk, akkor már nem lenne szigorúan diagonálisan domináns az együtthatómátrix, tehát ez is indokolja, hogy ezek helyett a (40) egyenlettel helyettesítsük a peremfeltételt. A másik ok, amiért érdemes a (40) egyenlettel helyettesíteni, hogy ebben az esetben az együtthatómátrix tridiagonális marad (míg a (38) és (39) esetében ez nem igaz), ezáltal gyorsan megoldható a rendszer, például a korábban bemutatott Thomas algoritmussal.

**2. módszer:** Ennél a módszernél nincs szükség egy fiktív pontra a közelítés meghatározásához, mivel itt a jobb oldali differencia segítségével fogjuk közelíteni a deriváltat. (Tehát ez alkalmazható abban az esetben is, amikor az egyenletünket a fizikai megfontolások alapján nem lehet kiterjeszteni az eredeti megoldási tartomány határpontjaira.) A

numerikus deriválás elméletéből ismerjük a jobb oldali differenciát, amely a következő:

$$u'(x_i) \sim \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h}.$$

Jelen esetben ez a közelítés

$$u'_n = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + \frac{h}{2}u''_i + \mathcal{O}(h^2)$$

alakú, ahol  $u''_i$  értékét (27) alapján ki tudjuk fejezni az  $r - pu'_i - qu_i$  kifejezéssel, azaz

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + \frac{h}{2}(r_i - p_i u'_i - q_i u_i) + \mathcal{O}(h^2).$$

Az egyenlet jobb oldalán szereplő  $u'_i$ -at ugyancsak tudjuk közelíteni egy alacsonyabb rendű közelítéssel:

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + \frac{h}{2} \left( r_i - p_i \left[ \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + \mathcal{O}(h) \right] - q_i u_i \right) + \mathcal{O}(h^2).$$

Így a (37) peremfeltételt helyettesíteni tudjuk az

$$A_1 u_0 + A_2 \left[ \frac{u_1 - u_0}{h} - \frac{h}{2} \left( r_0 - p_0 \frac{u_1 - u_0}{h} - q_0 u_0 \right) \right] = \alpha$$

kifejezéssel. Ez másodrendben pontos közelítése a peremfeltételnek. Ha negyedrendben pontos közelítést szeretnénk, akkor az  $u'(x)$  közelítésére a Numerov formulát alkalmazzuk.

Vagyis

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \frac{h}{24}(7f_i + 6f_{i+1} - f_{i+2}) + \mathcal{O}(h^4). \quad (41)$$

Ez az  $x = a$  helyen (vagyis amikor  $i=0$ ):

$$u'_0 = \frac{u_1 - u_0}{h} - \frac{h}{24}(7f_0 + 6f_1 - f_2) + \mathcal{O}(h^4). \quad (42)$$

A 2. módszer alkalmazása során egyik esetben másodrendben pontos differenciával közelítettük a deriváltakat, a másik esetben pedig negyed rendű volt a közelítés. Amikor a másodrendű közelítést alkalmaztuk, akkor egyrészt az egyenletrendszer együtthatómátrixa tridiagonális volt, így könnyen meg tudtuk oldani Thomas algoritmussal, másrészt pedig szigorúan diagonálisan domináns mátrix volt, így létezett egyértelmű megoldása a rendszernek. Viszont abban az esetben, ha negyedrendben pontos közelítést alkalmazunk, akkor az együtthatómátrix már nem tridiagonális. Ezt a problémát kétféleképpen tudjuk

kiküszöbölni. Az egyik lehetőség, hogy a (42) helyett egy alacsonyabb rendű közelítést alkalmazunk, ami a következő:

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \frac{h}{6}(2f_i + f_i) + \mathcal{O}(h^3). \quad (43)$$

Ekkor veszítünk ugyan a módszerünk pontosságából, viszont ugyanúgy tridiagonális marad az együtthatómátrix mint a másodrendben pontos közelítések alkalmazása esetén, így könnyen megoldható lenne a rendszer. A másik lehetőség a probléma megoldására egy újabb módszer alkalmazása, amelyet Sherman-Morrison algoritmusnak nevezünk. Erről lesz szó a következő részben.

## 4.5. Periodikus peremfeltétel - Sherman-Morrison algoritmus

Az előző részben felmerült az a probléma, hogy a peremfeltétel helyettesítése során negyedrendű közelítést alkalmazva a rendszerünk együtthatómátrixa már nem tridiagonális. Viszont amikor a peremérték-feladat periodikus peremfeltétellel adott, akkor az együttható mátrix nagyon hasonló egy tridiagonális mátrixhoz (attól csak minimálisan különbözik). Ebben a részben a Sherman-Morrison algoritmust fogjuk alkalmazni, melytől azt várjuk, hogy  $\mathcal{O}(N)$  lépésből ki tudja számolni az  $A$  mátrix inverzét, vagyis  $A^{-1}$ -et. Ebben a részben a peremérték-feladathoz periodikus peremfeltételeket fogunk megadni:

$$\begin{aligned} u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) &= r(x), \quad \text{ahol } x \in (a; b), \\ u(a) &= u(b). \end{aligned} \quad (44)$$

Ha a korábban tárgyalt módon felírjuk a közelítéseket, akkor a következő rendszert kapjuk (a (32) helyett):

$$\begin{aligned} y_0 &= y_{N+1}, \\ \left(1 + \frac{h}{2}p_i\right)y_{i+1} - (2 - h^2q_i)y_i + \left(1 - \frac{h}{2}p_i\right)y_{i-1} &= h^2r_i \quad , \text{ ahol } i = 0, 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (45)$$

Eddig a numerikus megoldást az  $i = 0, 1, \dots, N + 1$  indexekre kerestük. Mivel a feladat periodikus peremfeltétellel rendelkezik, ezért megtehetjük, hogy periodikus módon kiterjesztjük ezt az indexelést az  $i = -1, -2, \dots$  illetve az  $i = N + 2, N + 3, \dots$  indexekre is,



azaz legyen

$$y_{-i} = y_{N+1-i} \quad \text{és} \quad y_{N+i} = y_{i-1}.$$

(Tehát  $y_{-1} = y_N$  és  $y_{N+1} = y_0$ .)

Nézzük meg, hogyan néz ki a (45) rendszer az  $i = \{0; N\}$  esetekben.

$i = 0$ :

$$\left(1 + \frac{h}{2}p_0\right)y_1 - (2 - h^2q_0)y_0 + \left(1 - \frac{h}{2}p_0\right)\underbrace{y_{-1}}_{y_N} = h^2r_0$$

$i = N$ :

$$\left(1 + \frac{h}{2}p_N\right)\underbrace{y_{N+1}}_{y_0} - (2 - h^2q_N)y_N + \left(1 - \frac{h}{2}p_N\right)y_{N-1} = h^2r_N$$

Ezek alapján a (44) mátrixos alakja

$$A_p \mathbf{y}_p = \mathbf{r}_p, \tag{46}$$

ahol

$$A_p = \begin{bmatrix} -(2 - h^2q_0) & (1 + \frac{h}{2}p_0) & 0 & 0 & \dots & (1 - \frac{h}{2}p_0) \\ (1 - \frac{h}{2}p_1) & -(2 - h^2q_1) & (1 + \frac{h}{2}p_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (1 - \frac{h}{2}p_2) & -(2 - h^2q_2) & (1 + \frac{h}{2}p_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & (1 - \frac{h}{2}p_{N-1}) & -(2 - h^2q_{N-1}) & (1 + \frac{h}{2}p_{N-1}) \\ (1 + \frac{h}{2}p_N) & \dots & 0 & 0 & (1 - \frac{h}{2}p_N) & -(2 - h^2q_N) \end{bmatrix},$$

$$\vec{y}_p = [y_0, y_1, y_2, \dots, y_N]^T,$$

$$\vec{r}_p = [h^2r_0, h^2r_1, h^2r_2, \dots, h^2r_{N-1}, h^2r_N]^T.$$

Vegyük észre, hogy ez a rendszer annyiban különbözik a (33) rendszertől, hogy ez eggyel nagyobb méretű, azaz  $(N + 1) \times (N + 1)$ -es, és ebben az  $A_p$  mátrix már nem tridiagonális, mivel a bal alsó- és a jobb felső sarokban is megjelent egy-egy nem nulla elem. Ugyanakkor ez így "nagyon hasonló" egy tridiagonális mátrixhoz. Ennek a rendszernek a megoldására fogjuk alkalmazni Sherman-Morrison algoritmust.

Legyen  $\vec{w} \in \mathbb{R}^{N+1}$  egy olyan vektor, aminek az egyetlen nem nulla eleme az  $i$ -edik eleme, és  $\vec{z} \in \mathbb{R}^{N+1}$  olyan vektor, aminek az egyetlen nem nulla eleme a  $j$ -edik eleme. Ekkor a diadikus szorzatuk, azaz  $C = \vec{w}\vec{z}^T$  egy olyan  $(N + 1) \times (N + 1)$ -es mátrix, melynek az

egyetlen nem nulla eleme a  $C_{ij} = \vec{w}_i \vec{z}_j$ . Hasonlóan, tegyük fel, hogy ezekben a vektorokban két elem nem nulla, vagyis a mi esetünkben

$$\vec{w} = [w_0, 0, \dots, 0, w_N]$$

és

$$\vec{z} = [z_0, 0, \dots, 0, z_N]^T.$$

Ennek a két vektornak a szorzataként kapjuk a  $C$  mátrixot:

$$C = \begin{bmatrix} w_0 z_0 & 0 & \dots & 0 & w_0 z_N \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ w_N z_0 & 0 & \dots & 0 & w_N z_N \end{bmatrix}.$$

Így a (46) rendszerben szereplő  $A_p$  mátrixot megadhatjuk valamilyen tridiagonális mátrix (legyen ez a mátrix  $A_{tridiag} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$ ) és az előbb felírt  $C = \vec{w} \vec{z}^T$  mátrix összegeként, vagyis

$$A_p = A_{tridiag} + \vec{w} \vec{z}^T. \quad (47)$$

Ennek a  $A_p$  mátrixnak az inverzét  $\mathcal{O}(N)$  lépésből ki fogjuk tudni számolni a Sherman-Morrison algoritmus segítségével, mivel az  $A_{tridiag}$  mátrix invertálása könnyen elvégezhető.

**4.13. Tétel.** ([3]) Legyen  $B \in \mathbb{R}^{M \times M}$  mátrix,  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^M$  vektorok, és tegyük fel, hogy  $\det(B) \neq 0$  és  $\det(B + \vec{u} \vec{v}^T) \neq 0$ . Ekkor teljesül, hogy

$$(B + \vec{u} \vec{v}^T)^{-1} = B^{-1} - \frac{B^{-1} \vec{u} \vec{v}^T B^{-1}}{1 + \vec{v}^T B^{-1} \vec{u}}. \quad (48)$$

Vegyük észre, hogy a jobb oldalon szereplő törtnél a nevezőben skalár szerepel, ugyanis a  $B^{-1} \vec{u}$  egy oszlopvektor, amit balról egy sorvektorral ( $\vec{v}^T$ ) megszorozva skalárt kapunk. Ahhoz, hogy ez a formula jól működjön szükség van arra, hogy a  $B$  mátrix inverze könnyen kiszámítható legyen. Tehát valamilyen speciális mátrixnak kell kennie, például tridiagonális mátrixnak.

**4.14. Következmény.** Legyen  $B \in \mathbb{R}^{M \times M}$  mátrix,  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{c} \in \mathbb{R}^M$  vektorok, és tegyük fel, hogy  $\det(B) \neq 0$  és  $\det(B + \vec{u} \vec{v}^T) \neq 0$ . Legyen a  $B \vec{x} = \vec{c}$  egyenletrendszer megoldása

$\vec{x}_m \in \mathbb{R}^M$ , és a  $B\vec{y} = \vec{u}$  egyenletrendszer megoldása  $\vec{y}_m \in \mathbb{R}^M$ . Ekkor a  $(B + \vec{u}\vec{v}^T)\vec{x} = \vec{c}$  egyenletrendszer megoldása megkapható a következő formulával:

$$\vec{x} = \vec{x}_m - \frac{\vec{v}^T \vec{x}_m}{1 + \vec{v}^T \vec{y}_m} \vec{y}_m.$$

Tehát két,  $B$  mátrixú lineáris algebrai egyenletrendszert kell csak megoldanunk!

A Sherman-Morrison formula valójában speciális esete a Sherman-Morrison-Woodbury formulának. A Sherman-Morrison-Woodbury formula alapján egy adott egyenletrendszer együtthatómátrixát fel tudjuk írni a következő alakban:

$$B = B_0 + \vec{u}_1 \vec{v}_1^T + \vec{u}_2 \vec{v}_2^T + \cdots + \vec{u}_M \vec{v}_M^T.$$

Viszont, ahogy a (47) egyenlet alakján is látszik, nekünk most csak egy mátrixsal való perturbálásra van szükségünk, így nem fogjuk általános esetben tárgyalni a módszert, csak a speciális esetre vonatkozóan írjuk fel az algoritmust. Korábban már levezettük, hogy az  $A_p$  mátrix felírható

$$A_p = A_{tridiag} + \vec{w} \vec{z}^T$$

alakban, ahol az  $A_{tridiag} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$  mátrix inverze könnyen kiszámítható és  $\vec{w}, \vec{z}$  megfelelően választott vektorok. Jelölje  $\vec{y}_p = \vec{y}_{p_0} \in \mathbb{R}^{N+1}$  az  $A_{tridiag} \vec{y}_p = \vec{r}_p$  egyenletrendszer megoldását, és jelölje  $\vec{d} = \vec{d}_0 \in \mathbb{R}^{N+1}$  az  $A_{tridiag} \vec{d} = \vec{w}$  egyenletrendszer megoldását. A (4.14) következményt felhasználva kapjuk a következőket:

$$\vec{y}_{p_1} = \vec{y}_{p_0} - \frac{\vec{z}^T \vec{y}_{p_0}}{1 + \vec{z}^T \vec{d}_0} \vec{d}_0. \quad (49)$$

Ez az  $\vec{y}_p = \vec{y}_{p_1} \in \mathbb{R}^{N+1}$  lesz a megoldása az  $(A_{tridiag} + \vec{w} \vec{z}^T) \vec{y}_p = \vec{r}_p$  egyenletrendszernek.

$$\vec{d}_1 = \vec{d}_0 - \frac{\vec{z}^T \vec{d}_0}{1 + \vec{z}^T \vec{d}_0} \vec{d}_0 \quad (50)$$

Ez az  $\vec{d} = \vec{d}_1 \in \mathbb{R}^{N+1}$  lesz a megoldása az  $(A_{tridiag} + \vec{w} \vec{z}^T) \vec{d} = \vec{w}$  egyenletrendszernek.

Tehát az algoritmus:

1. Megoldjuk az  $A_{tridiag} \vec{y}_p = \vec{r}_p$  egyenletet, így megkapjuk ennek megoldásaként az  $\vec{y}_p = \vec{y}_{p_0}$  értéket.

2. Megoldjuk az  $A_{\text{tridiag}}\vec{d} = \vec{w}$  egyenletet, így megkapjuk ennek megoldásaként az  $\vec{d} = \vec{d}_0$  értéket.

3. Kiszámítjuk a következő  $x_1$  értéket, amely már a (46) egyenlet megoldását fogja jelenteni:

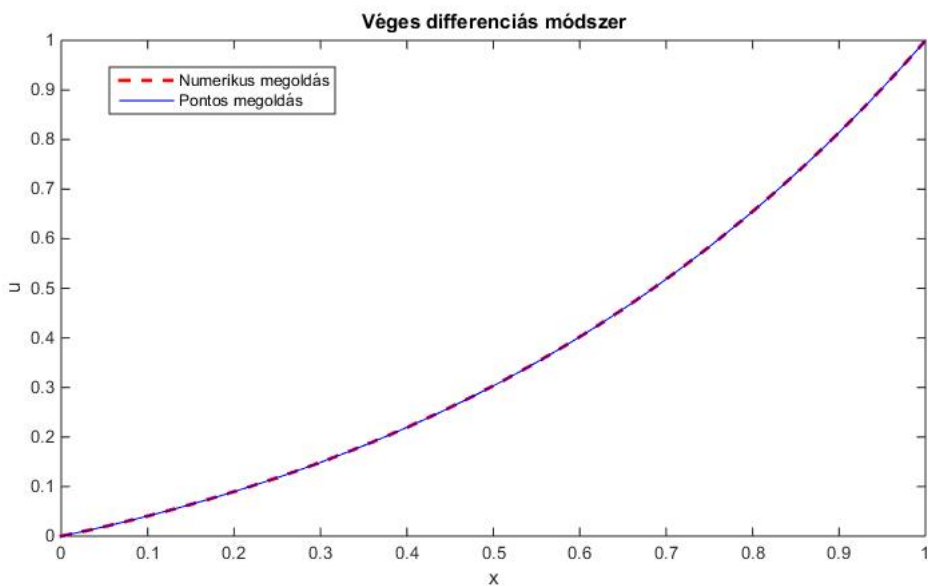
$$y_{p_1} = y_{p_0} - \frac{\vec{z}^T y_{p_0}}{1 + \vec{z}^T \vec{d}_0} \vec{d}_0.$$

## 4.6. Véges differenciás módszer alkalmazása MATLAB használatával

Nézzük meg, hogy véges differenciás módszerrel hogyan oldja meg a MATLAB ugyanazt a feladatot, amit korábban a belövéses módszernél oldottunk meg MATLAB segítségével. Tehát tekintsük a következő peremérték-feladatot:

$$\begin{aligned} u''(x) - 2u'(x) + u(x) &= 0, \\ u(0) &= 1, \quad u(1) = 1. \end{aligned} \tag{51}$$

Ennek a feladatnak analitikusan is ki tudjuk számítani a pontos megoldását, amely a következő:  $u(x) = xe^{(x-1)}$ . Nézzük meg, hogy milyen megoldást kapunk erre a MATLAB-ban, ha a beépített *bvp4c* rutint alkalmazzuk.



3. ábra. Véges differenciás módszer

A fenti képen látható, hogy a belövéses módszerhez hasonlóan, ezzel a módszerrel is szinte visszkapjuk a pontos megoldást. Nézzük meg, hogy milyen eltérés van a numerikus és a pontos megoldás között abban az esetben, amikor a  $(0; 1)$  intervallumot 10 részre osztjuk (azaz  $h = 10$ ):

0.0594	0.0996	0.1281	0.1506	0.1714	0.1930	0.2164	0.2409	0.2642	0.2821
--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

2. táblázat. Egyes helyeken vett eltérés a numerikus és a pontos megoldás között, amikor  $h = 10$ .

Nézzük meg ugyanezt az eltérést úgy, hogy finomítjuk a rácshálót, és 10-es lépésköz helyett 100 alappontban közelítjük a megoldást:

0.0030	0.0098	0.0169	0.0238	0.0306	0.0373	0.0438	0.0501	0.0623	0.0681
--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

3. táblázat. Egyes helyeken vett eltérés a numerikus és a pontos megoldás között, amikor  $h = 100$ .

Tehát látszik, hogy finomodó rácsháló esetén egyre kisebb lesz az eltérés a numerikus- és a pontos megoldás között.

## 5. Összefoglalás

Nagyon sok olyan módszer létezik, amelyek segítségével peremérték-feladatokat tudunk numerikusan megoldani. Ez a témakör hatalmas ismeretanyagot foglal magába. Szakdolgozatom elkészítése során igyekeztem minél átfogóbb képet adni ezekről a megoldási módszerekről. Azok után, hogy megnéztük, milyen feltételek mellett oldható meg a peremérték-feladat, a belövéses- és a véges differenciás módszerrel való megoldásukat vizsgáltam.

A belövéses módszer alkalmazása is több módon történhet. Ezen módok közül háromfelét ismertettem. Megnéztük az intervallum-felező módszert, melynek hátránya az volt, hogy két ellentétes előjelű pontból kellett indítani az iterációt. Ezzel szemben a szelőmódszernél erre nem volt szükség, egy pontból indítottuk az iterációt, viszont ennek az volt a hátránya, hogy a módszer konvergenciája nem minden esetben volt biztosított. Végül a Newton-módszert néztük meg, melynek előnye a korábbiakkal szemben, hogy másodrendű konvergenciát biztosított.

A véges differenciás módszerrel való megoldásnál azt az alapötletet alkalmaztuk, hogy egy ekvidisztáns rácsháló pontjaiban közelítettük a megoldás értékét. Láttuk, hogy a peremérték-feladat felírható algebrai egyenletrendszerként, amit fel tudtunk írni mátrixos alakban. Ennek a megoldására a Thomas algoritmust alkalmaztuk. Ezek után a numerikus módszer hibájára vonatkozóan adtunk becslést. Szó volt a kondíciószámról, mely azt méri, hogy a bemenő adatok változtatásával mennyire változik meg a feladat megoldása. Láthattuk azt is, hogy ha a Numerov formulával közelítjük a deriváltakat, akkor jelentősen csökkenthetjük a módszer hibáját. Ezután két módszert néztünk a Neuman-vagy vegyes peremfeltétellel adott peremérték-feladat megoldására. Az egyik módszer csak másodrendben pontos approximáció esetén működött és itt kiterjesztettük a megoldási tartományt az egyik végpontra. A másik módszernél nem volt szükség erre a kiterjesztésre, és itt a Numerov formula segítségével negyedrendben pontos approximációt is tudtunk adni. Végül megnéztük az az esetet, amikor periodikus peremfeltétellel adott a peremérték-feladat. Ekkor a differenciálegyenlet mátrixa nagyon hasonló egy tridiagonális mátrixhoz, és ezt kihasználva alkalmaztuk a Sherman-Morrison algoritmust a megoldás kiszámításához.

## 6. Függelék

A numerikus módszerek szemléltetésére szolgáló ábrák elkészítéséhez használt kódok, amelyek megírásához a MATLAB programcsomagot használtam.

A 1. ábrához tartozó kód:

```
1 function [x,u]=bvpsec(z1,z2)
2     syms u(x);
3     V = odeToVectorField('D2u == 2*diff(u) - u', 'x');
4     dudx = matlabFunction(V, 'vars', {'x', 'Y'});
5     [x1,u1] = ode45(dudx, [0,1], [0,z1]);
6     [x2,u2] = ode45(dudx, [0,1], [0,z2]);
7     i = 1;
8     phi1 = u1(end, 1) - 1;
9     phi2 = u2(end, 1) - 1;
10    while (abs(z2 - z1) > 0.000001)
11        tmp = z2
12        z2=z1-(z1-z2)/(phi1-phi2)*phi1
13        z1 = tmp;
14        [x1,u1] = ode45(dudx, [0,1], [0,z1]);
15        [x2,u2] = ode45(dudx, [0,1], [0,z2]);
16        phi1 = u1(end, 1) - 1;
17        phi2 = u2(end, 1) - 1;
18        i = i + 1;
19    end
20    x = x2;
21    u = u2;
22    plot(x, u(:,1), 'r', x, x.*exp(x-1), 'b')
23    xlabel('x')
24    ylabel('u')
25    title('Belövéses módszer – szelő módszer alkalmazásával')
26    legend('Numerikus megoldás','Pontos megoldás')
```

27 **end**

A 2. ábrához tartozó kód:

```
1 function shooting_method
2     clc
3     clear all
4     x = 0.05;
5     x1 = fzero(@solver, x);
6 end
7
8 function F = solver(x)
9     options = odeset('RelTol', 1e-8, 'AbsTol', [1e-8, 1e-8]);
10    [t, u] = ode45(@equation, [0,1], [0,x], options);
11    s = length(t);
12    F = u(s,1) - 1;
13    up = t.*exp(t-1);
14    hiba = u(:,1) - up
15    figure(1)
16    plot(t, u(:,1), 'r', t, t.*exp(t-1), 'b')
17    xlabel('x')
18    ylabel('u')
19    title('Belövéses módszer')
20    legend('Numerikus megoldás', 'Pontos megoldás')
21 end
22
23 function du = equation(t,y)
24    du = zeros(2,1);
25    du(1) = y(2);
26    du(2) = 2 * y(2) - y(1);
27 end
```

A 3. ábrához tartozó kód:



```

1 function [x,u] = finite_difference
2     solinit = bvpinit(linspace(0,1,100),[1 0]);
3     sol = bvp4c(@twoode,@twobc,solinit);
4     x = linspace(0,1);
5     u = deval(sol,x);
6     up = x.*exp(x-1);
7     hiba = u(1,:) - up
8     plot(x, u(1,:), 'r', x, x.*exp(x-1), 'b')
9     xlabel('x')
10    ylabel('u')
11    title('Véges differenciás módszer')
12    legend('Numerikus megoldás','Pontos megoldás')
13 end

```

## Hivatkozások

- [1] Horváth Róbert, Faragó István - Numerikus módszerek
- [2] Faragó István - Numerikus modellezés és közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldási módszerei
- [3] Taras I. Lakoba - Finite-difference methods for BVPs  
([http://www.cems.uvm.edu/~tlakoba/math337/notes\\_8.pdf](http://www.cems.uvm.edu/~tlakoba/math337/notes_8.pdf))
- [4] N. Egidi, P. Maponi - A Sherman-Morrison approach to the solution of linear systems  
(<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042705001032>)
- [5] Stoyan Gisbert - MATLAB
- [6] <http://www.mathworks.com/help>