Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Kővári Imre

Kooperatív játékelméleti problémák és megoldásaik

BSc Szakdolgozat

Témavezető

Király Tamás

Operációkutatási Tanszék

Budapest, 2017

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani a családomnak, legfőképpen édesanyámnak, aki mindenben támogatott, mind anyagilag, mind lelkileg. Szeretném megköszönni a sok segítséget a konzulensemnek, aki támogatott mindenben és mérhetetlenül sokat segített.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A szakdolgozat célja, hogy ismertesse miként lehet egy társas vállalkozásban (kooperációban) a résztvevőknek megegyezni a koalíció egészének a díjaiban és annak elosztásában. Gyakori, hogy nincs tökéletes piaci mechanizmus, ami megoldaná a díjak elosztását (allokációját) a felek (játékosok) között. Sok problémánál azonban kézenfekvő egy gráf csomópontjainak tekinteni a játékosokat, és így meghatározni helyzetüket. Néhány gyakorlati terület, ahol érdemes használni a most bemutatott módszereket:

1. Ha egy irányított hálózat kapcsolja össze a forrást a fogadópontokkal, akkor a gráfban az élrendszeren (útvonalon) érkezik egy küldemény egy csúcspontba. Az ebből induló további útvonalaknak megfelelő számú másolatot készít a küldeményből az útválasztó (router). Egy ilyen több-küldéses átadásnál a sávszélesség (kommunikációs csatorna információtovábbító képessége) nem tulajdonítható minden egyes fogadóponthoz ugyanúgy, ezért kell egy ármegosztási mechanizmus a különböző pontoknak az allokáció során.

2. Több település is része egy öntözőrendszernek, ahol a gátból való víznyerés díjszabását kell egyenlően elosztani. A probléma itt nem más, mint hogy a legkisebb árú és legeffektívebb hálózatot számoljuk ki a falvaknak, melyek közül közvetlenül vagy akár közvetetten is lehetnek a forráshoz kötve, jelen esetben a gáthoz a falvak közötti hálózatnak a díjelosztásával.

Ezeknek a problémáknak a kombinatorikai szerkezete sok más kérdést vet fel (például számítási díj) és az ellenőrzésük is nehézkes, ha hiányzik egy hálózatrendszer. Sok kutatás foglalkozott a minimális költségű feszítőfák költség-elosztásával. Ilyen rendszerben minden játékosnak van egy csomópontja a gráfban és van egy kezdőpont is, amihez közvetlenül vagy közvetetten kell a pontoknak kötődnie. A legkisebb költségű és az összes csomópontot összekötő feszítőfa az, amit a játékosok megakarnak építeni. A költség-elosztási probléma ebben az esetben a különböző résztvevő felek közti összköltség kiszámítása és elosztása a minimális költségű feszítőfa alapján. A problémákat két területre lehet osztani aszerint, hogy az élköltségek szimmetrikusak-e (mindkét irányba ugyanannyi a költség) vagy sem. Ha a mátrix szimmetrikus, azt feltételezi, hogy a gráf irányítatlan. Sok esetben az i-ből j-be menő él költsége nem egyezik meg a j-ből i-be menő él költségével, ekkor a költségmátrix asszimetrikus, vagyis a gráf irányított. Az irányítatlan esettel a 3. fejezet foglalkozik Bhaskar Dutta és Debasis Mishra 2011-es tanulmánya alapján, az irányított esetet a 4. fejezet taglalja Christian Trudeau 2011-es tanulmánya alapján.

2. Kezdeti fogalmak

2.1. Definíció. *Legyen $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ a játékosok halmaza.*

2.2. Definíció. *Koalíció alatt egy $S \subseteq N$ halmazt értünk.*

2.3. Megjegyzés. *A továbbiakban legyen S és T két koalíció.*

2.4. Definíció. *Az $S = N$ esetet Nagykoalíciónak, míg az $S = \emptyset$ esetet Üres Koalíciónak hívjuk.*

2.5. Definíció. *Karakterisztikus függvény alatt olyan függvényt értünk, mely egy valós számot rendel a koalícióhoz, amire teljesül:*

1. $v(\emptyset) = 0$

2. *Szuperadditív:* $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$, *ha* S, $T \subseteq N$ *és* $S \cap T = \emptyset$.

2.6. Tétel. *A karakterisztikus függvények halmazán létezik egy egyértelműen meghatározott $\phi_i(v)$ függvény, amelyre teljesülnek az alábbi axiómák:*

1. *A játékosok ereje független az elnevezésüktől.*

2. $\sum_{i \in N} \phi_i(v) = v(N)$ *a megszerezhető haszon teljes felosztása.*

3. $\phi_i(v) = 0$ *az olyan i játékosoknak, akiknek nincs a játék menetére befolyásuk.*

4. *Additiivitás: Ha v és w játékok az I halmazán és $u = v + w$, akkor $\phi_i(u) = \phi_i(v) + \phi_i(w)$.*

Ez a $\phi_i(v) = \sum_{i \epsilon S \subseteq I} \gamma(|S|)(v(S) - v(S \setminus \{i\}))$ karakterisztikus függvény a Shapley-érték, ahol

$$\gamma(k) = \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}$$

2.7. Megjegyzés. *A Shapley-érték célja, hogy egy olyan valós számot határozzon meg, hogy egy játékos számára mekkora az értéke annak, hogy részt vesz a játékban.*

2.8. Definíció. *Az $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ legyen egy kifizetés.*

2.9. Definíció. *Egyéni racionalitás alatt azt értjuk, hogy $x_i \geq v(i)$ $\forall$ $i \in N$-re.*

Vagyis egy játékos sem fogadna el olyan kifizetést, aminél jobbat egyedül is elérhetne.

2.10. Definíció. *Pareto optimalitáson azt értjük, hogy $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$.*

Vagyis nem osztható ki több, mint amennyi rendelkezésre áll, valamint a megszerezhető maximális értéket szét kell osztani.

2.11. Definíció. *Ha az x kifizetésre teljesül az Egyéni racionalitás és a Pareto optimalitás, akkor a kifizetést imputációnak hívjuk és $A(v)$ az összes imputáció halmaza.*

2.12. Definíció. *Legyen x és y két kifizetés. Ekkor a nemüres koalíció ($\emptyset \neq S \subseteq N$) hatékonyan preferálja x-et y-nal szemben, ha teljesül az alábbi két feltétel:*

1. *Preferálás:* $x_i > y(i)\ \forall\ i \in S$ *esetén.*

2. *Elérhetőség:* $\sum_{i \in N} x_i \leq v(S)$.

Jelölés: $x \succ (S)\ y$.

2.13. Definíció. *Legyen* $D(v)$ *azon* x *imputációk halmaza, amelyekkel szemben egyetlen* y *imputációt sem preferál hatékonyan bármely* S *koalíció. Ha* $A(v)$ *csak egyelemű, akkor azt értjük a Játék Magján.*

2.1. Minimális költségű feszítőfa kereső algoritmusok irányítatlan gráfban

A feszítőfa egy olyan fa, ami tartalmazza a gráf összes csúcsát és élei az eredeti gráf élei közül valók. A minimális költségű feszítőfa olyan összefüggő, irányítatlan gráfban található feszítőfa, ami a legkisebb élsúlyú.

A következő két algoritmus összefüggő gráfokban keresi a minimális költségű feszítőfát. Ezek az algoritmusok csak vázlatosan kerülnek megemlítésre. Az adott algoritmusok elvárják a lépések között, hogy az élek költségei ne változzanak.

2.14. Algoritmus. *Prím algoritums:*

1. lépés: Válasszunk egy tetszőleges kezdő csúcsot a gráf összes csúcsa közül. Nézzük meg milyen élek indulnak ki a csúcsból és válasszunk ezek közül egy minimálisat, amit hozzáadhatunk a feszítőfához.

2. lépés: Nézzük meg milyen élek vannak még a gráfban, amik kapcsolódnak a fához. Válasszuk ki ezek közül a legkisebb súllyal rendelkezőt és adjuk hozzá a feszítőfához.

3. lépés: Ismételjük a 2. lépést, amíg van szabad pont a gráfban.

2.15. Algoritmus. *Kruskal algoritmus:*

1. lépés: Válasszunk ki a gráfból a legkisebb súlyú élek közül egyet.

2. lépés: Ha az él hozzáadása a feszítőfához egy kört alkotna, akkor dobjuk el az élt.

3. lépés: Az 1. lépést ismételjük meg a nem vizsgált élekkel addig, amíg még van nem vizsgált él.

3. MKFF problémák irányítatlan gráfokon

3.1. Bevezetés

Ennek a fejezetnek a célja, hogy ismertesse az alapvető problémát, a főbb tulajdonságokat irányítatlan gráfok esetén, amelyek segítségével bevezetjük a fejezet két fő megoldási módszerét, a Folk megoldást és a Kar megoldást.

A Minimális Költségű Feszítőfa (továbbiakban MKFF) játéknál úgy tekintjük, hogy a játékosok különböző csúcsokon helyezkednek el és összekapcsolást igényelnek egy forrással, hogy áruhoz vagy információhoz jussanak. A játékosoknak mindegy, hogy közvetlenül vagy közvetetten vannak összekapcsolva.

Az MKFF játékot meg lehet közelíteni a játékosok tulajdonjogai alapján, eszerint lehet közös tulajdonú vagy magántulajdonú. A magántulajdonú megközelítésben a játékosok felelősek a saját éleik költségéért, viszont a közös tulajdonú megközelítés ezt nem így csinálja.

A Shapley-érték a MKFF magántulajdonú megközelítését segíti. Ezt Kar tanulmányozta és teljesen a magántulajdonú megközelítést engedi meg a negatív költség-elosztásnál, hogy a jobb helyzetben levő játékosokat jutalmazza. Ezt a módszert Kar megoldásnak szokás hívni. A módszer nem garantálja a mag allokációt és ezért a stabilitást sem. Ezzel szemben a Folk megoldás mindig mag allokációs és Populációs Monotonitás tulajdonságú. Azonban a Nemcsökkenthető költségmátrix természeténél fogva sok információt elhagy a Kar megoldással szemben.

3.2. Problémák irányítatlan gráfokon

Legyen $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ a résztvevők lehetséges halmaza és $N \subseteq \mathbb{N}$ a játékosok halmaza, akiknek kapcsolódniuk kell a forráshoz, a megkülönböztetett 0 ponthoz.

3.1. Jelölés. *Legyen* $N_0 = N \cup \{0\}$.

3.2. Definíció. *Bármely* Z *halmazra definiáljunk egy* Z^s *halmazt, ami a nem sorba rendezett* (i, j) *párok halmazát jelenti, vagyis minden* i *és* j *közti élt.*

3.3. Definíció. *Legyen* $c = (c_e)_{e \in N_0^s}$ *egy vektor* $\mathbb{R}_0^{N_0^s}$*-n, ahol a* c_e *jelenti az* e *él költségeit.*

3.4. Definíció. *Legyen* $\Gamma(N)$ *az összes költségvektor az* N *játékosok halmazán.*

3.5. Következmény. *Mivel* c *minden csúcspárhoz költséget rendel, ezért* c*-t nevezhetjük egy költségmátrixnak.*

3.6. Definíció. *A* $(0, N, c)$ *hármast a minimális költsegű feszítőfa problémának (MKFF) nevezzük, ahol a* 0 *mindig a forrást jelöli.*

3.7. Megjegyzés. *Mivel a* 0 *mindig a forrást jelöli, ezért a továbbiakban azt elhagyjuk és az MKFF problémát egyszerűen* (N, c) *problémának nevezzük, amire* $N \subseteq \mathbb{N}$ *és* $c \in \Gamma(N)$.

3.8. Definíció. *A* p_u *kör alatt egy olyan* $K \geq 3$ (i_k, i_{k+1}) *élpárokból álló halmazt értünk, amire* $k \in [0, K-1]$ *esetén teljesül, hogy* $i_0 = i_K = l$, $i_1, \dots, i_{K-1}$ *különböző és más mint* l.

3.9. Definíció. *A p_{lm} egy út l és m között a (i_k, i_{k+1}) K élhalmazon, ahol $k \in [0, K-1]$, nem tartalmaz kört, $i_0 = l$, $i_K = m$, $i_1 \ldots, i_{K-1}$ különbözik és más mint l vagy m.*

3.10. Megjegyzés. *A feszítőfa alatt ezentúl egy nem sorbarendezett kör nélküli gráfot értünk az N_0 elemiből.*

3.11. Definíció. *Legyen t a gráf e éleiből álló feszítőfa, amire a költség: $\sum_{e \in t} c_e$.*

3.12. Definíció. *Legyen $C(N, c)$ az asszociált költség, vagyis az MFKK költsége.*

3.13. Megjegyzés. *Nem biztos, hogy csak egy MKFF-nek létezik az adott problémánál $C(N, c)$-je.*

3.14. Definíció. *Legyen $t^*(C)$ az összes MKFF és $T^*(C)$ az összes költségmátrix az adott MKFF játéknál.*

3.15. Definíció. *Legyen c^S a megkötés a c költségmátrixnak az $S_0 \subseteq N_0$ koalícióhoz, ahol $S_0 = S \cup \{0\}$.*

3.16. Definíció. *Legyen $C(S, c)$ a költsége az (S, c^S) MKFF problémának.*

3.17. Megjegyzés. *C a c-hez rendelt költségfüggvény.*

3.18. Definíció. *Legyen $C^{CP}(S, c)$ az a költség, ami az összes játékost S-ben a forrás kapcsoláshoz használ, felhasználva az összes lehetőséget N_0-ban.*

3.19. Megjegyzés. *C^{CP} egy egyedülálló költségjáték az (N, c) MKFF problémából, amikor a megfelelő közös tulajdonjogi megközelítést alkalmazzuk.*

3.20. Következmény. *$C^{CP}(S, c) = min_{S \subseteq T} C(T, c)$ és $C^{CP}(S, c) \leq C(S, c)$.*

3.3. Költségmegosztás

A teljes értéke egy c költségmátrixnak megfelelő MKFF-fel általában kevesebb annál, mintha az összes játékost a forráshoz csatolnánk. Tehát a csapat a kooperációból hasznot nyer. Ez veti fel azt a problémát, hogy a költség megtakarítást hogyan osszuk el a játékosok között, vagyis hogyan allokáljuk a teljes költséget a különböző játékosoknak. Az (N, c) MKFF problémáknál a költség allokáció ($y \in \mathbb{R}^N$) osztja el a költség részesedést a játékosoknak külön-külön. Az egyensúlyi feltétel:

$$\sum_{i \in N} y_i = C(N, c).$$

Egy költség megosztó megoldás kioszt egy költség allokációt ($y(N, c)$-t) bármely (N, c) MKFF problémára.

Bármelyik C költségmátrixból véletlenszerűen válasszunk egy $t^*(c) \in T^*(c)$ MKFF-et és legyen $p_{ij}^{t^*}$ az út i és j között a $t^*(c)$ MKFF-en keresztül.

3.21. Definíció. *A c^* Nemcsökkenthető költségmátrix definiálása: $c^*_{ij} = \max_{e \in p_{ij}^{t^*}} c_e$.*

3.22. Megjegyzés. *A továbbiakban a Nemcsökkenthető költségmátrixot NCSKM-nek fogjuk nevezni.*

A Folk megoldás az a Shapley-érték, ami a c^*-hoz tartozik és $C^*(S,c) = C(S,c^*)$ $\forall$ $S \subseteq N$-re. Bogomolnaia és Moulin (2010) egy zárt formulát ad a Folk megoldásra. Vegyük i-t és rendezzük újra c^*_{ij}-t az $n-1$ darab i játékosra illeszkedő éleket növekvő sorrendben véve. Az új c_i^{*k} értékre $c_i^{*1} \leq c_i^{*2} \leq \ldots \leq c_i^{*(n-1)}$.

Az $y^f(N,c)$ Folk megoldás felírható $y_i^f(N,c) = \frac{1}{n}c^*_{0i} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} \min[c_i^{*k}, c^*_{0i}]$ alakban. A Folk megoldásban használt c^* költség megfelel annak az "optimista" játék értelmezésnek, hogy a játék osztja ki bármely S koalíciónak a költségét a tagok összekapcsolására a forrással, azzal a feltétellel, hogy $N \setminus S$ játékosai már eleve csatlakozva vannak és helyeik közös tulajdonjogúak és így tudjuk meghatározni a Folk megoldást a Shapley-érték segítségével.

A Kar megoldásban a Shapley-érték az az értéke a játéknak, ahol a koalíció feltételezi, hogy mások nem csatlakoznak és helyeik magántulajdonok. Ezt szokás pesszimisztikus játéknak nevezni.

3.4. Tulajdonságok

Megvizsgáljuk a különböző költségmegosztási megoldásokat leíró tulajdonságokat, mint amikkel néhány információt is elhagyhatunk a költségmátrixból. Ezeket a tulajdonságokat kombináljuk később.

A két első tulajdonság teszi nekünk elérhetővé a probléma kisebb részekre osztását, ami egyszerűbb is és köze van a klasszikus additivitás tulajdonsághoz, ami a klasszikus költségmegosztási modellek része.

3.23. Tulajdonság. *Mag Választás (MV): Bármely (N,c) MKFF problémánál, ha $S \subseteq N$ esetén $\sum_{i \in S} y_i(N,c) \leq C(S,c)$.*

Sok esetben aggodalomra ad okot, hogy a játékosok nem fognak megállapodni az együttműködésben. A klasszikus MV tulajdonság gondoskodik róla, hogy egyetlen játékos-csoportra jutó költség se legyen több, mint a vállalkozás megvalósításának költsége.

3.24. Tulajdonság. *Populációs Monotonitás (PM): Bármely (N,c) MKFF problémánál $\forall$ $i \in S \subseteq N$, $y_i(N,c) \leq y_i(S,c^S)$.*

A PM tulajdonság szerint egyetlen játékos sem ellenzi az új játékosok felvételét a koalícióba.

3.25. Tulajdonság. *Szakaszonkénti Linearitás (SZL): Bármely (N,c) és (N,c') MKFF problémánál, ha van az éleknek van egy $\sigma : N_0^s \to \{1,\ldots,\frac{n(n+1)}{2}\}$ rendezése, amire teljesül, hogyha $\forall$ e, $e' \in N_0^s$, $\sigma(e) \leq \sigma(e')$ és $c_e \leq c_{e'}$, $c'_e \leq c'_{e'}$, akkor $y(N,c+c') = y(N,c) + y(N,c')$.*

Ha két költségmátrixnak (c-nek és c'-nek) van egy közös rangsorolása az éleik között a legolcsóbbtól a legdrágábbig, akkor költség részesedésük $c+c'$-on az az összeg, ami a költség részesedésük c-n és c'-n az SZL miatt.

3.26. Tulajdonság. *Szabályzott Additivitás (SZA): Bármely (N,c) és (N,c') MKFF problémánál létezik olyan $t \in T^*(c) \cap T^*(c')$ és $\pi : t \to \{1,\ldots,|N|\}$ az élrendszere. Ekkor $\forall$ $e, e' \in t$-re ha $\phi(e) \leq \phi(e')$, akkor $c_e \leq c'_e$ és $c_{e'} \leq c'_{e'}$ és $y(N,c+c') = y(N,c) + y(N,c')$.*

3.27. Következmény. *SZA-ból következik SZL.*

3.28. Tulajdonság. *Irrelevancia (IRR): Az (i,j) él irreleváns, ha* $c_{ij} > \max[c_{0i}, c_{0j}]$.

Az alábbi tulajdonság kimondja, hogyha egy él nincs benne egy koalícióban sem, akkor költségének növelése nem lesz kihatással a költség részesedésekre. Az ilyen él sosincs használva, mert mindig előnyösebb i és j játékosok általi forrás kapcsolódás.

3.29. Tulajdonság. *Irreleváns Élek Függetlensége (IEF): Bármely* (N, c) *és* (N, c') *MKFF problémánál, ha* $\max[c_{0i}, c_{0j}] \leq c_{ij} < c'_{ij}$ *és* $c_e = c'_e$ *különben, akkor* $y(N, c) = y(N, c')$.

Az IEF szab ki költséget az irreleváns éleknek, amiket nem használ egy koalíció sem.

3.30. Tulajdonság. *Redukcionizmus (RED): Bármely* (N, c) *MKFF problémára:* $y(N, c) = y(N, c^*)$.

A RED kimondja, hogy a költség részesedések csak az NCSKM-től függnek, és csak azokon az éleken, amelyek az MKFF részét képezik. Így a mátrix sok információja nem kell, mivel az NCSKM-ben legfeljebb $|N|$ különböző érték lehet az élek költségeire. Ez a problémát könnyíti és a számítást is egyszerűsíti.

A következő két tulajdonság olyan eseteket taglal, ahol S és $N \setminus S$ egymástól függetlenül kapcsolódnak a forráshoz. Így megengedett, hogy külön-külön számítsuk ki a részesedéseket a problémára, ami S-re és $N \setminus S$-re vannak korlátozva.

3.31. Tulajdonság. *Csapat Függetlenség (CSF): Bármely (N,c) MKFF problémánál, ha* $S \subset N$ *olyan, hogy* $\forall\ i \in S,\ j \in N \setminus S$ *és* $c_{ij} \geq \max[c_{0i}, c_{0j}]$, *akkor*

$$y_i(N, c) = \begin{cases} y_i(S, c^S) & ha \quad i \in S \\ y_i(N \setminus S, c^{N \setminus S}) & ha \quad i \in N \setminus S \end{cases}$$

A Csapat Függetlenség nem sokszor jön elő, mert S és $N \setminus S$ teljes függetlenségét kívánja, ahol az S-ben lévő játékosoknak egyik $N \setminus S$-ben lévő játékosossal sem éri meg együttműködni.

3.32. Tulajdonság. *Szeparabilitás (SZEP): Bármely* (N, c) *MKFF problémánál, ha* $C(S, c) + C(N \setminus S, c) = C(N, c)$, *akkor*

$$y_i(N, c) = \begin{cases} y_i(S, c^S) & ha \quad i \in S \\ y_i(N \setminus S, c^{N \setminus S}) & ha \quad i \in N \setminus S \end{cases}$$

A SZEP megengedi a részesedések külön-külön számítását, ha az egyedi költségek forráshoz való kapcsolása S-nél és $N \setminus S$-nél megnövelik a vállalkozás teljes költségét. Ilyenkor nincs értelme együttműködni.

3.33. Következmény. *A SZEP-ből következik a CSF.*

3.34. Definíció. *Legyen* $\hat{c}$ *a c-hez tartozó forrás kapcsolódási probléma:* $\forall\ i \in N$*-re,* $\hat{c_{0i}} = c_{0i}$, *amíg* $\hat{c_{ij}} = 0\ \forall\ i, j \in N$*-re.*

Így ami maradt, az a játékosok forráshoz kapcsolásának költsége. Az MKFF úgy néz ki, hogy egy játékos van a forráshoz kapcsolva, mégpedig az az i, amire $\hat{c}_{0i} \leq \hat{c}_{0j}\ \forall\ j \in N$ és minden más hozzákapcsolódik költség nélkül, hiszen $\hat{c}_{ij} = 0\ \forall\ i, j \in N$-re.

3.35. Definíció. *Legyen* $\tilde{c}$ *a c-hez tartozó játékos kapcsolódási probléma:* $\forall\ i,\ j \in N$, $\hat{c}_{ij} = c_{ij}$ *míg* $\hat{c}_{0i} = \max_{e \in N_0^s} c_e\ \forall\ i \in N$*-re.*

Így minden játékos ugyanakkora magas költséggel rendelkezik a forráshoz csatoláshoz. Ezért az MKFF olyan, hogy csak egy véltlenszerűen választott játékos van közvetlenül a forráshoz kapcsolva, a többi játékos pedig rajta keresztül.

3.36. Definíció. *Legyen* $\dot{c}$ *definiálva:* $\dot{c}_{0i} = \max_{e \in N_0^s}\ \forall\ i \in N$*-re és* $\dot{c}_e = 0$ *különben.*

A következő két tulajdonság arra a megfigyelésre épül, hogyha egy költségmátrixnak nincs irreleváns éle, akkor mindig van egy MKFF, ahol csak egy játékos csatlakozik közvetlen a forráshoz. Egy MKFF találásának problémáját két részre lehet osztani: megkeresni azt, akit a forráshoz kapcsolhatunk és mindenki más kapcsolása.

3.37. Tulajdonság. *Probléma Szeparáció (PSZ): Bármely* (N, c) *MKFF problémánál, ahol c nem tartalmaz irreleváns élt, ott* $y_i(N, c) = y_i(N, \hat{c}) + y_i(N, \tilde{c}) - y_i(N, \dot{c})\ \forall\ i \in N$*-re.*

A PSZ kimondja, hogy ugyanígy kettéválaszthatjuk a költség részesedési problémát: először megosztjuk a költségét a forráshoz kapcsolódási problémának, majd a játékos kapcsolódási problémát is.

3.38. Tulajdonság. *Gyenge Probléma Szeparáció (GYPSZ): Bármely* (N, c) *MKFF problémánál, ahol c nem tartalmaz irreleváns élt, ha* $c_e \leq min_{i \in N}\ c_{0i}\ \forall\ e \in t^*(c)\ \forall\ t^* \in T^*(c)$*, akkor* $y_i(N, c) = y_i(N, \hat{c}) + y_i(N, \tilde{c}) - y_i(N, \dot{c})\ \forall\ i \in N$*-re.*

A GYPSZ-nél a tulajdonság akkor fordul elő, ha a legköltségesebb MKFF-beli él az, ami egy új játékost csatol a forráshoz.

3.39. Következmény. *A PSZ és a GYPSZ mellett teljesül, hogy* $S \subseteq N$ *esetén* $C(S, c) = C(S, \hat{c}) + C(S, \tilde{c}) - C(S, \dot{c})$*. Mivel hozzáadtuk a* $\max_{e \in N_0^s} c_e$ *extra költséget a játékos csatolási problémához, most eltávolítjuk azzal, hogy levonjuk* $C(S, \dot{c})$*-t.*

Ezek a tulajdonságok között csak IEF és CSF tűnik univerzálisan alkalmazhatónak, míg a többi csak egyszerűsíti a problémát, viszont nem mindig lehetséges használni őket.

3.40. Tulajdonság. *Szimmetria (SZIM): Bármely* (N, c) *MKFF problémánál ha i és j olyanok, hogy* $c_{ik} = c_{jk}\ \forall\ k \in N_0 \setminus \{i, j\}$*-re, akkor* $y_i(N, c) = y_j(N, c)$*.*

3.41. Tulajdonság. *Anonimitás (A): Bármely (N,c) MKFF problémánál és az N* π *permutációjánál:* $\pi * y(N, c) = y(N, \pi * c)$*.*

Vagyis, ha két játékos ugyanolyan karakterisztikával rendelkezik, ami esetünkben az élek költségének viszonyulása más játékosokhoz, akkor egyenlően kell kezelni őket.

3.42. Tulajdonság. *Rangsorolás (R): Bármely* (N, c) *MKFF problémánál, ha* $c_{ik} \leq c_{jk}\ \forall\ k \in N_0 \setminus \{i, j\}$*-re, akkor* $y_i(N, c) \leq y_j(N, c)$*.*

Az R szerint, ha i játékos helye nem rosszabb, mint j helye, akkor i nem kell, hogy többet fizessen, mint j.

3.43. Tulajdonság. *Szigorú Rangsorolás (SZR): Bármely* (N, c) *MKFF problémánál, ha* $c_{ik} \leq c_{jk}$ $\forall$ $k \in N_0 \setminus \{i, j\}$, $c_{il} > c_{jl}$ $l \in N_0 \setminus \{i, j\}$*-re és* $c_{il} < \max_{i \in N}[c_{0i}, c_{0l}]$*, akkor* $y_i(N, c) < y_j(N, c)$.

Az SZR az előző tulajdonságnál erősebb, vagyis ha a hely szigorúan jobb, akkor i allokációjának szigorúan kevesebbnek kell lennie, mint j-nek.

A következő tulajdonságok a költségrészesedések változásával foglalkoznak, amikor egy vagy több él költségét megváltoztatjuk a költségmátrixban.

3.44. Tulajdonság. *Költség Monotonitás (KM): Bármely* (N, c) *és* (N, c') *MKFF problémánál, ha* $c'_{ij} < c_{ij}$ $\forall$ $i, j \in N_0$*-ra és* $c'_e = c_e$ *különben, akkor* $y_k(N, c') \leq y_k(N, c)$ $\forall$ $k \in \{i, j\} \setminus \{0\}$*-ra.*

A KM egy minimális tulajdonság, ami kimondja, hogy ha i és j közötti él költsége csökken, akkor i és j nem szabad, hogy szenvedjen emiatt.

3.45. Tulajdonság. *Szigorú Költség Monotonitás (SZKM): Bármely* (N, c) *és* (N, c') *MKFF problémáknál, ha* $c_{ij} \leq \max_{k \in \{i,j\} \setminus \{0\}} c_{0k}$*, akkor* $c'_{ij} < c_{ij}$ *és* $c'_e = c_e$ *különben, akkor* $y_k(N, c') < y_k(N, c)$ $\forall$ $k \in \{i, j\} \setminus \{0\}$*-ra.*

Az SZKM szerint csak egy pár játékos felelős az őket összekötő élek költségéért. Így a KM-hez képest az SZKM szerint ha az él egy koalícióban is benne van, akkor i és j allokációja csökken.

3.46. Tulajdonság. *Egyenlő Bánásmód (EB): Bármely* (N, c) *és* (N, c') *MKFF problémánál, ha* $i, j \in N$ *olyan, hogy* $c_{ij} > c'_{ij}$ *és* $c_e = c'_e$ *különben, akkor* $y_i(N, c) - y_i(N, c') = y_j(N, c) - y_j(N, c')$.

Az EB-nél megköveteljük az egyenlő felelősséget is. Ha az él költsége csökken, akkor mindkét játékosnak a költség részesedésének is változnia kell ugyanennyivel.

3.47. Tulajdonság. *Gyenge Egyenlő Bánásmód (GYEB): Bármely* (N, c) *és* (N, c') *MKFF problémánál, ha* $i, j \in N$ *és* $c_{ij} > c'_{ij}$ *és* $c_e = c'_e$ *különben és* $C(N, c) = C(N, c')$*, akkor* $y_i(N, c) - y_i(N, c') = y_j(N, c) - y_j(N, c')$.

A GYEB az EB-hez képest csak azokra a változásokra igaz, ami nem befolyásolja az összköltségét a vállalkozásnak (olyan élköltség változások, amik nem részei egy MKFF-nek sem).

A következő tulajdonságok teljesen más irányt vesznek, de jobban illenek a közös tulajdonú megközelítéshez.

3.48. Tulajdonság. *Szolidaritás (SZOL): Bármely* (N, c) *és* (N, c') *MKFF problémánál, ha* $c_{ij} < c'_{ij}$ *és* $c_e = c'_e$ *különben, akkor* $y_k(N, c) \leq y_k(N, c')$ $\forall$ $k \in N$*-re.*

A SZOL kimondja, hogyha egy él költsége csökken, akkor senkinek a költsége sem nőhet. Ez hasonlít a KM-hez, de nem csak azokra a játékosokra vonatkozik, akik az érintett él körül vannak.

3.49. Tulajdonság. *Gyenge Szolidaritás (GYSZOL): Bármely* (N, c) *és* (N, c') *MKFF problémánál, ha* $c_{ij} < c'_{ij}$ *és* $c_e = c'_e$ *különben és* $C(N, c) < C(N, c')$*, akkor* $y_k(N, c) \leq y_k(N, c')$ $\forall$ $k \in N$*-re.*

A GYSZOL csak arra az esetre korlátozódik, ahol az érintett él része az MKFF-nek és így van hatása az összköltségre.

Tegyük fel, hogy a játékosok forráshoz csatolásának költsége egyenlő vagy drágább, mint az a költség, amivel a játékosok maguk között kapcsolódnak.

3.50. Tulajdonság. *Extra Költség Egyenlő Elosztása (EKEE): Bármely (N, c) és (N, c') MKFF problémánál, ha $c_{0i} = c_0$, $c'_{0i} = c'_0$ $\forall$ $i \in N$-re, $c'_0 > c_0 \geq 0$ és $c_{jk} = c'_{jk} \leq c_0$ $\forall$ $j, k \in N$-re, akkor $y_i(N, c') = y_i(N, c) + \frac{c'_0 - c_0}{|N|}$.*

Az EKEE kimondja, hogy ha az egyenlő költség, ami a forrással való kötéshez kell növekszik, akkor az extra költséget a játékosoknak maguk között kell elosztani.

3.5. Tulajdonságok közti kapcsolatok

A tulajdonságok közül az SZR-t érdemes használni, ha nem akarjuk, hogy néhány aszimmetrikus játékost szimmetrikusként kezeljünk. Az EB és a SZOL függ a probléma értelmezésétől és a tulajdonjogoktól. A tulajdonságok nem teljesen függetlenek, mert az erős és a gyenge változatok közötti nyilvánvaló kapcsolatokon kívül még vannak egyéb következtetések is.

3.51. Lemma. *Az alábbi összefüggések teljesülnek:*

1. *A PM-ből következik MV és SZEP*
2. *A SZOL-ból következik RED és KM*
3. *A RED-ből következik GYEB*

Már említettük, hogy SZA-ból az SZL, míg SZEP-ből a CSF következik. A következő segédtétel ezt használja fel.

3.52. Lemma. *Ha N 3 vagy több játékost tartalmaz, akkor az y megoldás teljesíti SZA-t és SZEP-et akkor és csakis akkor, ha teljesíti SZL-t, CSF-et és RED-et.*

Bizonyítás:

1. irány: Megmutatjuk, hogy SZA-ból és SZEP-ből következik SZL, RED és CSF. Látható, hogy SZA maga után vonja SZL-t és SZEP pedig CSF-et. Megmutatjuk, hogy SZA és SZEP is maga után vonja RED-et. Vegyünk egy tetszőleges c költségmátrixot és c' legyen $c'_e = c_e - c^*_e$ $\forall$ e élre. Így c-nek és c^*-nak megegyező t MKFF-je van (ugyanazon játékosok és költségek) és $c'_e = 0$, ahol $e \in t$. Vagyis alkalmazhatjuk SZA-t úgy, hogy $y(N, c) = y(N, c^*) + y(N, c')$.

SZA miatt felírhatjuk, hogy $y(N, c') = \sum_{\{k,l\} \in N_0^p} c'_{kl} y(N, c^{kl})$, ahol $c^{kl}_e = 1$, ha $e = \{k, l\}$ és különben 0. Ha $0 \notin \{k, l\}$, akkor $\sum_{i \in N} C(\{i\}, c^{kl}) = C(N, c^{kl}) = 0$. A SZEP miatt $y_i(N, c^{kl^{\{i\}}}) = y_i(\{i\}, (c^{kl})) = 0$ $\forall$ $i \in N$-re. Ha $\{k, l\} = \{0, j\}$ akkor $\forall$ $i \in N \setminus \{j\}$ és $C(N \setminus \{i\}, c^{kl}) = C(\{i\}, c^{kl}) = 0$ (mivel 3 vagy több játékosunk van). A SZEP miatt $y_i(N, c^{kl}) = y_i(\{i\}, (c^{kl})^{\{i\})=0}$ $\forall$ $i \in N \setminus \{j\}$-re. A költség egyensúlyi feltétel miatt $y_i(N, c^{kl}) = 0$, így $y(N, c) = y(N, c^*)$.

2. irány: SZL-ből, RED-ből és CSF-ből következik SZA és SZEP. Először SZA-val kezdjük. Legyen c és c' közös MKFF-je t, ahol az élek ugyanúgy vannak rangsorolva a legolcsóbbtól a legdrágábbig. Legyen p^t_{ij} az út i és j között t MKFF-ben, ahol $i, j \in N_0$, így $c^*_{ij} = \min_{e \in p^t_{ij}} c_e$ és $c'^*_{ij} = \min_{e \in p^t_{ij}} c'_e$. Legyen $d = c + c'$ és $d^*_{ij} = c^*_{ij} + c'^*_{ij}$. A RED miatt $y(N, d) = y(N, d^*)$, az SZL miatt $y(N, d^*) = (N, c^*) + (N, c'^*)$. A RED miatt $y(N, c^*) + y(N, c'^*) = y(N, c) + y(N, c')$. Az SZA így teljesült.

Megmutatjuk, hogy a RED alatt a SZEP egyenlő a CSF-fel. Vegyük újra a c^* NCSKM-et és ekkor $C(S, c^*) + C(N \setminus S, c^*) = C(N, c^*)$, hogy tudjuk alkalmazni SZEP-et S és $N \setminus S$ vonatkozásában. CSF-et akkor alkalmazhatjuk, ha $C(R, c^*) + C(T, c^*) = C(R \cup T, c^*)$ $\forall$ $R \subseteq S$ és $T \subseteq N \setminus S$-re. Mivel $C(S, c^*) + C(N \setminus S, c^*) = C(N, c^*)$. A c^* t^S MKFF-je játékosokat kapcsol S-ben a forráshoz csak az S-beli játékosok helyét felhasználva. Egy hasonló $t^{N \setminus S}$ MKFF-je az $N \setminus S$-nek.

Legyen $t = t^S \cup t^{N \setminus S}$. Az NCSKM tulajdonságai miatt, ahol $i \in S$ és $j \in N \setminus S$ ott

$$c^*_{ij} = \max_{e \in p^t_{ij}} c^*_e = \max(\max_{e \in p^{t^S}_{ij}} c^*_e, \max_{e \in p_{ij} t^{N \setminus S}} c^*_e).$$
$$\text{Így } c^*_{ij} \max_{e \in p^{t^S}_{ij}} c^*_e = c^*_{0i} \text{ és } c^*_{ij} \geq \max_{e \in p^{t^{N \setminus S}}_{ij}} \bar{c}_e = \bar{c}_{0j}.$$

Tehát semmi előnye nem származik egyik S-beli játékosnak abból, ha egy $N \setminus S$-beli játékossal kooperál. Egy NCSKM-re, ahol teljesül SZEP, ott CSF is teljesül. Így SZL-ből, RED-ből és CSF-ből következik SZA és SZEP.

3.53. Lemma. *Az y megoldás teljesíti SZOL-t akkor és csakis akkor, ha teljesíti a GYSZOL-t és a RED-t is.*

Mivel RED következménye a SZOL, így ha egy olyan élre alkalmazzuk ami nem része egy MKFF-nek sem, akkor teljesül.

Most kimondunk pár lehetetlen helyzetet hozó eredményt.

3.54. Lemma. *Az alábbi összefüggések teljesülnek:*

1. *Semmilyen megoldás sem teljesíti SZR-t és MV-t egyszerre*
2. *Semmilyen megoldás sem teljesíti SZKM-et és MV-t egyszerre*
3. *Semmilyen megoldás sem teljesíti SZR-t és RED-et egyszerre*
4. *Semmilyen megoldás sem teljesíti SZKM-et és RED-et egyszerre*

Az SZR és az SZKM, amik a magántulajdonú megközelítések alapjai, inkompatibilisek MV-vel. A 3.51-es Lemma miatt PM-mel sem kompatibilisek. A 3. és 4. pont mutatja, hogy bármely megoldás, ami teljesíti RED-et, az sokkal közelebb van a közös tulajdonú megközelítéshez, mint a magántulajdonú megközelítéshez.

Ezek után készen állunk a Folk megoldás, a Kötelezettség megoldás és a Kar megoldás feltételeinek megvizsgálására.

3.6. Folk megoldás

Ez kapta a legtöbb figyelmet, és ennek is van a legtöbb tulajdonsága. Az előző alfejezetek eredményeire építve egy kompakt formában mutatható be a Folk megoldás.

3.55. Tétel. *Legyen N-nek 3 vagy több játékosa. Az y megoldás Folk megoldás akkor ás csakis akkor, ha teljesíti az alábbi feltételeket:*

1. *EKEE, RED és CSF (Lorenzo és Lorenzo-Freire (2009))*

2. SZL, SZIM, RED és MV (Bergantino (2011))

3. SZL, SZIM, RED és CSF (Bergantino és Kar(2010))

Mindegyik feltétel magában hordozza RED-et. Ez egy vitatható tulajdonság és a Folk megoldáshoz áll közel, mivel az NCSKM-re támaszkodik. Az SZL és a SZIM maga után vonja EKEE-t, így az 1. egy szorosabb feltétel, mint a 3., ezért az 1. tűnik a legerősebb feltételnek.

3.7. Kötelezettségi megoldás

A megoldás érdekes költség-elosztás szempontjából és a Folk megoldást is tartalmazza, először Tijs mutatta be 2006-ban. Kruskal algoritmusához hasonlít, mert minden lépésnél az élek költségét, ami az MKFF-hez van adva, a belőle hasznot húzó játékosok fizetik meg. A költségrészesedések kiszabják az egyének kötelességét a csoport felé. Bergantiños és Kar (2010) egy másik megközelítést alkalmaz, ahol kötelezettségi megoldások marginális értékei a nem csökkenő költségjátékoknak. Megvizsgáljuk a megoldás különböző feltételeit.

3.56. Tétel. *Az y megoldás egy kötelezettségi megoldás akkor és csakis akkor, ha teljesülnek az alábbi feltételek:*

1. SZA és PM (Lorenzo és Lorenzo-Freire (2009))

2. SZA, RED, GYSZOL és MV (Bergantinos (2011))

3. SZA, RED, GYSZOL és SZEP (Bergantinos (2011))

4. SZL, RED, GYSZOL és PM (Bergantinos és Kar (2010))

Bergantinos és Kar 2010-ben, Bergantinos 2011-ben megmutatta, hogy SZIM hozzáadásával a feltételekhez megkapjuk a Folk megoldást. Bergantinos, Lorenzo és Lorenzo-Freire 2010-2011-ben bevezeti az általánosított kötelezettségi megoldások családját, ahol egy játékos kötelezettsége függ a játékosok egészétől és nem csak a közvetlenül hozzá kapcsolódóktól.

3.57. Tétel. *Az y megoldás egy generalizált kötelezettségi megoldás akkor és csakis akkor, ha teljesíti SZA-t, RED-et és GYSZOL-t is (Bergantinos (2010)).*

3.8. Kar megoldás

A Folk megoldással ellentétben a Kar megoldás kevesebb figyelmet kapott, és megvannak az előnyei, de a hátrányai is. A magántulajdon megközelítéshez jobb, és nem hagy ki olyan információt, mint a Folk megoldás.

3.58. Tétel. *Az y megoldás Kar megoldás akkor és csakis akkor, ha teljesíti EB-t és CSF-et.*

3.59. Megjegyzés. *Az EB egy nagyon erős tulajdonság, ami nem csak azt hordozza magában, hogy az i és j játékosok az ő környező éleikért felelnek, hanem azt is, hogy a játékosok kölcsönösen felelősek az összekötő élükért. Összehasonlítva a Folk megoldás 1. feltételével azt látjuk, hogy EB helyettesíti EKEE-t és RED-et. Mivel EKEE is biztosított a Kar megoldás által, egy feltétel, ami a CSF-vel együtt használja, összehasonlíthatná a Folk megoldással.*

3.9. A Folk megoldás és a Kar megoldás összehasonlítása

Trudeau 2010-ben létrehozott egy olyan megoldás családot, ami a Folk megoldás és a Kar megoldás rokonságát hordozza magában. Hat kisebb tulajdonság jellemzi ezt a családot.

3.60. Tétel. *Az y megoldás teljesíti SZL-t, A-t, IIE-t, GYEB-et, GYPSZ-t és CSF-et akkor és csakis akkor, ha* $y = ay^k + (1-a)y^f$ *és* $a \in \mathbb{R}$.

A megoldások feltételei előnyösek olyan téren, hogy olyan tulajdonságokat is használnak, amik nem kapcsolódnak a másik megoldáshoz.

A Folk megoldás akkor jó, ha stabilitásról van szó, viszont kevésbé előnyös, ha a változásokra vagy a környező élekre kell reagálni, ezért a Kar ellentéte. Ezt egy táblázatban nézzük meg, ahol a "+" a teljesülést jelzi, míg a "-" pedig a nem teljesülést.

	Tulajdonság	Folk megoldás	Kar megoldás
Stabilitás	MV	+	−
	NM	+	−
	SZL	+	+
	SZA	+	−
	IEF	+	+
Egyszerűsítés	RED	+	−
	CSF	+	+
	SZEP	+	−
	PSZ	−	+
	GYPSZ	+	+

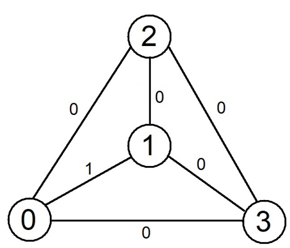
1. ábra. Táblázat 1

	Tulajdonság	Folk megoldás	Kar megoldás
Összehasonlítás	SZIM	+	+
	A	+	+
	R	+	+
	SZR	−	+
	KM	+	+
	SZKM	−	+
	SZOL	+	−
	GYSZOL	+	−
	EB	−	+
	GYEB	+	+
	EKEE	+	+

2. ábra. Táblázat 2

A stabilitás azt jelenti, hogy a játékosokra kiszabott értékek elfogadhatóak-e mindenki számára, nehogy túlfizetettség legyen. A stabilitásnál látjuk igazán a különbségeket. Az összehasonlítási tulajdonságok közül azok nem teljesülnek, amik egy kifejezett megoldásra épülnek. Az egyszerűsítési tulajdonságoknál látjuk, hogy a Folk megoldás egyszerűsíthető az NCSKM használatával, amíg a Kar megoldás mindig kettéosztható a forrás és a játékos kapcsolási problémára. Ahogy láthattuk 4.28-ban, RED közel van SZA és SZEP-hez. Most megmutatjuk egy példán keresztül a tanult Folk megoldás és Kar megoldás közti különbséget:

3.61. Példa. *Legyen* $N = \{1, 2, 3\}$ *és az ábrán jelölt súlyok az élek súlyai.*



Ekkor a c költségmátrix és a c^* NCSKM:

$$c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ és } c^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A Folk megoldás meg fog egyezni a c^* NCSKM Shapley-értékével, vagyis $Sh(Cc-^*) = (0,0,0)$. A Kar megoldás esetén a költség Shapley-értéke lesz a megoldás: $Sh(c) = (\frac{1}{3}; -\frac{1}{6}; -\frac{1}{6})$.

4. MKFF problémák irányított gráfokon

4.1. Bevezetés

A fejezet célja olyan irányított gráfos játék bemutatása, ahol a mag nem üres és így a játékosok nem preferálják a kilépést. Bird ezt mutatta ki a szimmetrikus költségmátrixoknál.

Látjuk majd, hogy minden költség allokáció, ami mag választás és megfelel egy invariancia feltételnek kiszab minden félnek egy olyan költséget, ami a Bird megoldásban kiszámított minimum költséget meghaladja. A költség allokáció rendelkezni fog azzal a tulajdonsággal is, hogy ha két költségmátrix között az a különbség, hogyha egy i-be menő él költsége megnő, akkor a költség-elosztás is i-nél legalább annyival megy fel, mint bármelyik másik játékosnak.

A Bird megoldás hasznos, de az a hátránya, hogy túlságosan is támaszkodik az MKFF szerkezetére, és kis változás a struktúrájában drasztikus változásokat okozhat a költség-elosztásban.

Mivel a Folk megoldás nem használ fel minden információt, ami a költségmátrixban van, vagyis az élek költségeit, amik nincsenek benne a minimális költségű feszítőfában, azok az élek irreveláns ak.

A mi megoldásunk, hogy irányított esetben az NCSKM-et több információba kerül meghatározni, mint csak az MKFF elemeit. A rangsorolási szabályunk is más: ha az i-be érkező élek költsége nagyobb, mint a j-be érkezők, és az i-ből és j-ből induló élek megfelelnek egymásnak, akkor i-nek határozottan többet kell fizetnie, mint j-nek. Az irányított MKFF játékot minimális költségű irányított feszítőfenyő játéknak fogjuk hívni és MKIFF-fel fogjuk jelölni.

4.2. Változások az irányítatlan esethez képest

4.1. Definíció. *Az irányított g gráf (továbbiakban digráf) élei $\{ij : i \in N_0,\ j \in N$ és $j \neq i\}$, ahol ij egy irányított él i és j között.*

4.2. Megjegyzés. *Ezentúl a gráf alatt digráfot, az él alatt irányított élt értünk.*

4.3. Megjegyzés. *Az ij költségének nem muszáj megegyezni ji-vel az irányítás miatt. Ez az egyik fontos különbség az MKFF problémákhoz képest. Az MKIFF megegyezik az MKFF-fel irányítatlan gráfban, vagyis az MKIFF egy általánosítása az MKFF-nek, ha a költségmátrix asszimmetrkus.*

4.4. Megjegyzés. *Bármely $S \subsetneq N$-nél S_0 jelöli $S \cup \{0\}$-t. S_0-n egy digráf irányított éleinek halmaza: $\{ij : i \in S_0, j \in S, i \neq j\}$.*

4.5. Definíció. *A g_S jelöli azt a gráfot S_0-on amiknek élei $\{ij : i \in S_0, j \in S\}$.*

4.6. Megjegyzés. *Amikor egyértelmű az S halmaz, akkor g_S, g'_S helyett g, g' jelölést alkalmazunk.*

4.7. Megjegyzés. *Minden ij-re vonatkozik, hogy $c_{ij} \geq 0$, azaz minden költségmátrix nemnegatív.*

4.8. Jelölés. *Minden c költségmátrixnál egy g gráf költségének jelölése $c(g)$. Vagyis*

$$c(g) = \textstyle\sum_{ij \in g} c_{ij}.$$

4.9. Megjegyzés. *Ha c' a költségmátrix, akkor $c'(g)$ lesz a g gráf költsége.*

4.10. Definíció. *Egy út g-ben a* $(i^1, \dots, i^K)$ *csúcsok sorozata* i^1*-ből* i^K*-ba és* $i^j i^{j+1}$ *egy él g-ben ha* $1 \leq j \leq K-1$.

4.11. Megjegyzés. *Az út az* $i^1 i^2, i^2 i^3, \dots, i^{K-1} i^K$ *éleket használja.*

4.12. Definíció. *A g-ben egy kör a* $(i^1, \dots, i^K, i^{K+1})$ *csúcsok sorozata, ahol* $(i^1, \dots, i^K)$ *egy út g-ben,* $i^K i^{K+1}$ *egy él g-ben és* $i^1 = i^{K+1}$.

4.13. Definíció. *Az i csúcs kapcsolódik j csúcsba, ha a kettőből van út egymásba.*

4.14. Definíció. *A g gráf egy fenyő 0-ból kiindulva N-be akkor és csakis akkor, ha g nem tartalmaz kört és* $\forall\ i \in N$ *csúcsnak csak egy bejövő éle van.*

4.15. Jelölés. *Legyen* A_N *minden fenyője N-nek.*

4.16. Definíció. *Egy g fenyő MKIFF a c költségmátrixra nézve, ha* $c(g) \leq c(g')\ \forall\ g' \in A_N$.

4.17. Megjegyzés. *A későbbiekben egy rekurzív algoritmus segítségével mutatjuk meg milyen MKFF fog megfeleni adott költségmátrixnak.*

4.18. Jelölés. $M(c)$ *jelöli az MKIFF-ek halmazát, amik a c költségmátrixnak megfelelőek N halmazán és* $T(C)$ *az összes költséget, ami* $M(c)$ *bármely eleméhez fűződik.*

4.19. Definíció. *A c és a* c' *költségmátrix fenyő ekvivalens, ha*

1. *csúcsaik száma megegyezik*
2. *ha ij él szerepel MKIFF-ben, akkor* $c(ij) = c'(ij)$.
3. $M(c) = M(c')$

4.20. Jelölés. *Minden N-ben levő S halmazra* A_S *jelöli az* S_0 *csúcshalmazú fenyők halmazát és* $M(c, S)$ *lesz az MKIFF részhalmazának a jele.*

4.21. Jelölés. *Ha az S saját MKIFF kiépítését tervezné és ilyenkor csak* S_0 *csúcsait használhatja, akkor S egy* $c(g_S)$ *költséget vesz fel, ahol* $g_S \in M(C, S)$

4.3. Költség allokációs probléma

4.22. Definíció. *A költség allokációs szabály olyan* $\mu : \Gamma(N) \to \mathbb{R}^N$ *függvény, amire teljesül, hogy:* $\sum_{i \in N} \mu_i(C) = T(C)\ \forall\ c \in \Gamma(N)$*-re.*

4.23. Jelölés. *Jelölje* $C_0(N, c)$ *a c-nek megfelelő* (N, c) *költségjáték magját az MKIFF játékoknál, azaz az olyan költség-elosztások halmazát, amikre minden* $S \subseteq N$*-re* $\sum_{i \in S} x_i \leq c(S)$ *és* $\sum_{i \in N} x_i = c(N)$.

4.4. Tulajdonságok

4.24. Megjegyzés. *Legyen c és c' két költségmátrix az S halmazhoz, ha $M(c) = M(c')$.*

4.25. Tulajdonság. *A μ költség allokációs szabály megfelel a Magválasztásnak (MAV), ha minden c költségmátrixra: $\mu(C) \in C_0(N, c)$.*

A MAV a stabilitást segíti elő, mert semmilyen játékosnak sem éri meg, ha visszautasítja az előírt költség allokációt.

A következő axiómák a számítási összetettséget egyszerűsítik az allokációban.

4.26. Tulajdonság. *A μ költség allokációs szabály megfelel az Irreleváns Költségek Függetlenségének (IKF) ha $\mu(C) = \mu(C')$ minden c és c' költség-mátrixra, amik fenyő-ekvivalensek.*

Az IFK azt mondja ki, hogy az MKIFF-ben résztvevő élek költségeitől függjön a költség allokáció. Vagyis ha két költségmátrixnak ugyanolyan az MKIFF-je és az éleik költségei nem változnak, akkor az előírt allokáció költsége is ugyanolyan.

4.27. Tulajdonság. *A μ költség allokációs szabály megfelel a Más Költségek Függetlenségének (MKF), ha $\forall\ i \in N$-re és minden c és c' költségmátrixra $c_{ji} = c'_{ji}\ \forall\ j \in N_0 \setminus \{i\}$-re, akkor $\mu_i(C) = \mu_i(C')$.*

Az MKF egy erősebb függetlenségi axióma, ahol szükséges, hogy a költség allokációja egy csúcsnak csak attól függjön, hogy mennyi bejövő él költsége van a csúcsnak.

4.28. Tulajdonság. *A μ költség allokációs szabály megfelel az Invarianciának (INV), ha minden c és c' költségmátrixra $\forall\ j \in N$-re, $i \in N_0 \setminus \{j\}$-re $c'_{ij} = c_{ij} + \epsilon$ és $c'_{pq} = c_{pq}\ \forall\ q \in N \setminus \{j\}$-re, akkor $\mu_j(C') = \mu_j(C) + \epsilon$, $\mu_q(C') = \mu_q(C)\quad \forall\ q \in N \setminus \{j\}$-re.*

Az INV tulajdonság alapján minden játékos részesedése az összköltségből monotonikusan legyen kiszámítva a vektorainak költségéből a saját bejövő éleit illetően. Például ha az ij él költsége felmegy, de másoké marad, akkor j részesedése a totális költségből nem csökkenhet.

4.29. Megjegyzés. *MKF-ből következik az INV.*

4.30. Tulajdonság. *A μ költség allokáció szabály megfelel a Közvetlen Költség Monotonicitásnak (KKM), ha bármely c és c' költségmátrixra és $\forall\ i \in N_0$-ra, $j \in N$-re, ha $c_{ij} < c'_{ij}$, és minden más $kl \neq ij$ élre $c_{kl} = c'_{kl}$, akkor $\mu_j(C') \geq \mu_j(C)$.*

A KKM szerint ha néhány ij él költség felmegy, míg másoké marad, akkor az allokációs szabály az önálló j csúcsnak ró fel adott mennyiségű ϵ-t.

4.31. Tulajdonság. *A μ költség allokációs szabály megfelel a Közvetlen Erős Költség Monotonicitásnak (KEKM), ha bármely c és c' költségmátrixra, amire $\forall\ i \in N_0$-ra, $j \in N$-re $c_{ij} < c'_{ij}$ és bármely más $kl \neq ij$ élre $c_{kl} = c'_{kl}$ teljesül, hogy $\mu_j(C') - \mu_j(C) \geq \mu_k(C') - \mu_k(C)\ \forall\ k$-ra.*

A KEKM az előző tulajdonsághoz képest annyiban jelent többet, hogy nem minden csúcs maga felel a bejövő költségek vektoráért.

4.32. Megjegyzés. *MKF-ből következik KEKM, amiből pedig KKM. MKF egy nagyon fontos követelmény, és nem tudunk egy elfogadható költség allokációs szabályt, ami teljesíti ezt a feltételt az összes lehetséges költségmátrixra.*

4.33. Tulajdonság. *A μ költség allokációs szabály megfelel a Szimmetriának (SZ), ha $\forall\ i, j \in N$-re és bármely c költségmátrixra, ha $c_{ki} = c_{kj}\ \forall\ k \in N_0 \setminus \{i, j\}$-re és $c_{ik} = c_{jk}\ \forall\ k \in N \setminus \{i, j\}$-re, és $c_{ij} = c_{ji}$, akkor $\mu_i(C) = \mu_j(C)$.*

Az SZ szerint, ha két csúcs i és j megegyező bejövő és kimenő élköltségű vektorral rendelkeznek, akkor a költség részesedéseikben sem különböznek.

4.34. Tulajdonság. *A μ költség allokációs szabály megfelel az Erős Szimmetriának (ESZ), ha $\forall\ i, j \in N$-re, c költségmátrixra, ha $c_{ki} = c_{kj}\ \forall\ k \in N_0 \setminus \{i, j\}$-re és $c_{ij} = c_{ji}$, akkor $\mu_i(C) = \mu_j(C)$.*

Az ESZ kiköti, hogy két játékos ugyanazt a költséget fizeti, ha ugyanaz a bejövő élköltségének összege, még ha a kimenőiké nem is.

4.35. Tulajdonság. *A μ költség allokációs szabály megfelel a Rangsorolásnak (R), ha $\forall\ i, j \in N$-re és c költségmátrixra, ha*

1. $c_{ik} = c_{jk}\ \forall\ k \in N \setminus \{i, j\}$,
2. $c_{ki} > c_{kj}\ \forall\ k \in N_0 \setminus \{i, j\}$,
3. $c_{ji} > c_{ij}$,

akkor $\mu_i(C) > \mu_j(C)$.

Az R összehasonlítja a költség-elosztást az egyedülálló csúcsokon és azt állítja, hogyha a költsége minden bejövő i élnek egységesen nagyobb, mint j, míg a kimenő élek költsége megegyezik, akkor i szigorúan többet fizet, mint j. Hasonlít a Monotonitáshoz, mivel minden csúcsnak azt mondja, hogy saját felelősségeik a bejövő költségek.

4.36. Tulajdonság. *A μ költség allokációs szabály megfelel a Nem-Negativitásnak (NN), ha $\mu_i(C) \geq 0$ $\forall\ i \in N$-re és $\forall\ c \in \Gamma(N)$.*

4.37. Tulajdonság. *A μ költség allokációs szabály megfelel a Folytonosságnak (F), ha $\forall\ \epsilon > 0$-ra létezik $\delta > 0$ úgy, hogy bármely c és c' költségmátrixra, ahol $|c_{ij} - c'_{ij}| \leq \delta\ \forall\ ij \in \{pq | p \in N_0, q \in N, p \neq q\}$-ra, akkor $|\mu_i(C) - \mu_i(C')| \leq \epsilon\ \forall\ i \in N$-re.*

4.5. Bird megoldás

Bird 1976-os cikkében bemutatott egy olyan költség allokációs megoldást, ahol a költség allokáció a költségjáték magjához kötődik, ezzel alátámasztva, hogy a mag sosem üres. Ebben a részben mutatjuk be, hogy még az irányított gráfnál is a Bird allokációk a hozzátartozó játék magjához tartoznak. Ha a költség allokációs szabály teljesíti MAV-ot és IKF-et, akkor a költség allokációja az egyes játékosoknak legalább a minimum költségnek felel meg, amit a különböző Bird allokációkban a játékos fizet meg. Ez azt jelenti, hogy ilyen költség allokációs szabály egybe kell essen a Bird szabállyal abban az esetben, ha egyetlen MKIFF van.

4.38. Definíció. *Legyen $u(i)$ bármely $g \in A_N$ fenyőre és bármely $i \in N$-re egy olyan csúcs, ami a 0 forrásból az i-be vezető irányított út utolsó csúcsa. Vagyis $u(i)$ az, ami i és a 0 forrás között van, megelőzve i-t.*

4.39. Definíció. *Bird megoldásról beszélünk, ha c egy költségmátrix és teljesülnek az alábbi feltételek:*

1. *Bármely $g \in M(c)$ esetén a g-hez tartozó Bird allokáció $b_i(g,c) = c_{u(i)i}$ $\forall$ $i \in N$-re.*
2. *Egy Bird szabályt ad a $B_i(c) = \sum_{g\in M(c)} w_g(c) b_i(g,c)$ $\forall$ $i \in N$, ahol*

$$\textstyle\sum_{g\in M(c)} w_g(c) = 1 \text{ és } w_g(c) \geq 0 \ \forall \ g \in M(c)\text{-re.}$$

4.40. Megjegyzés. *A Bird megoldás egy szabálycsalád, mivel lehetőség van változatos konvex kombinációra Bird allokációval. A súlyok mértékét következetesen kell kiválasztani, ha a Bird megoldás teljesíteni akarja IKF-et. Tegyük fel, hogy $M(c) = M(c')$ két költségmátrixra (c-re és c'-re). A $w_g(c) = w_g(c')$ súlymegkötés minden $g \in M(c)$-re biztosítja, hogy a Bird szabály teljesül.*

Bebizonyítjuk, hogy a Bird allokációk a költségjáték magjához tartoznak.

4.41. Tétel. *Minden c költségmátrixra és $g \in M(c)$ MKIFF-re $b(g,c) \in C_0(N,c)$.*

Bizonyítás: Vegyük bármelyik $g \in M(c)$-t. Indirekt tegyük fel, hogy $b(g,c)$ nem a magban van és $S \subseteq N$ blokkolja az együttműködést. Ez azt eredményezi, hogy $\sum_{i\in S} b_i(g,c) > c(S)$. E^N legyen a g által használt MKIFF élek halmaza $\forall$ $i \in N$-re, e_i jelölve a g-ben lévő i csúcsot és legyen $E_S^N = \{e_i : i \in S\}$. Vegyünk egy MKIFF-t, ahol S koalíció felel a c költségmátrixért és jelölje E^S ezen MKIFF által használt élek halmazát.

Vegyük azt a digráfot hogy $g' = (E^N \setminus E_S^N) \cup E^S$. Ez a digráf lesz egy fenyő a nagy koalícióhoz. $\forall$ $i \in N$ egy bejövő éllel rendelkezik g'-ben - minden i játékosra, ha nem nézzük a különleges bejövő élt g-nél, akkor helyettesítettük egy különleges éllel E^S-ből. A g'-nek nincs köre, mivel E^S a halmaza az éleknek az S MKIFF-nél és ez azt mutatja, hogy minden N csúcs kötődik a 0 forráshoz. A g' gráf költsége $c(N) - \sum_{i\in S} b_i(g,c) + c(S) < c(N)$, ahol az egyenlőtlenség a kezdeti $\sum_{i\in S} b_i(g,c) > c(S)$ egyenlőtlenség miatt van. Ez ellentmond annak, hogy $g \in M(c)$.

4.42. Megjegyzés. *Természetes, hogy a Bird szabály teljesíti IKF-t abban a megkötésben, ami a 4.40-es Megjegyzésben található.*

Bizonyítsuk, hogy bármely költség allokációs szabály, ami teljesíti MAV-ot és IKF-et, meg kell, hogy szabja a költség-elosztást, amit a Bird allokáció minimumja határoz meg. Vagyis $\forall$ c és $i \in N$ legyen $b_i^m(c) = \min_{g\in M(c)} b_i(g,c)$.

4.43. Tétel. *Bármely c költségmátrixra és minden μ költség allokációs szabályra, ami megfelel MAV-nak és IKF-nek teljesül, hogy $\mu_i(c) \geq b_i^m(c)$ $\forall$ $i \in N$-re csak egy $M(c)$ létezik és μ egybeesik a Bird szabállyal.*

Bizonyítás: Fixáljunk egy c költségmátrixot és vegyünk figyelembe minden μ költség allokációs szabályt, ami megfelel MAV-nak és IKF-nek. Az ellentmondáshoz tegyük fel, hogy $i \in N$ és $\mu_i(C) =$

$b_i^m(c) - \epsilon$, ahol $\epsilon > 0$. Legyen g egy MKIFF úgy, hogy $b_i(g,c) = b_i^m(c)$. A p csúcs egy utódja q-nak g-ben, ha az él $qp \in g$. Legyen S a halmaza az i összes utódjának és $T = N \setminus \{i\}$. Legyen a ki olyan él, amire $ki \in g$. Ekkor $\sum_{j\in T} \mu_j(C) = c(N) - c_{ki} + \epsilon$.

Ha $S = \emptyset$, akkor $c(T) = c(N) - c_{ki} < \sum_{j\in T} \mu_j(C)$. Így T egy blokkoló koalíció, ami ellentmond annak, hogy μ megfelel a MAV-nak. Vagyis $S \neq \emptyset$.

Definiáljuk a $E(c) \equiv \bigcup_{g''\in M(c)} \{pq : pq \in g''\}$-t. $E(c)$ a halmaza minden irányított élnek, ami valamelyik MKIFF része, ami megfelel a c költségmátrixnak.

Legyen $S_1 = \{j \in S : kj \in E(c)\}$, és $S_2 = S \setminus S_1$ és legyen $j \in S_1$. Legyen g' egy MKIFF, amiben $kj \in g'$. Mivel $(g' \setminus \{kj\}) \cup \{ij\}$ is egy fenyő $c_{kj} \leq c_{ij}$ van. Hasonlóan, $c_{ij} \leq c_{kj}$, mivel g egy MKIFF. Így $\forall\ j \in S_1, c_{ij} = c_{kj}$.

Ha $S_2 = \emptyset$, akkor az előző egyenlet alapján $c(T) = c(N) - c_{ki} < \sum_{j\in T} \mu_j(C)$, és T egy blokkoló koalíció lenne. Így S_0 és S_2 nem üres.

Vegyük a $\bar{g} = g \setminus (\{ki\} \cup \{ij : j \in S\}) \cup \{kj : j \in S\})$ digráfot. Vagyis $\bar{g}$ a digráf, amiben $\forall$ i-hez kötődő él ki van törölve g-ből és $\forall$ i utód g-ben k utódjává válik $\bar{g}$-ben. Így $\bar{g}$ egy fenyője T-nek. Vegyük a c' költségmátrixot a következőképpen:

$$\begin{gathered} c'_{kj} = c_{ij} + \tfrac{\epsilon}{2|S_2|}, \text{ ha } j \in S_2 \\ c'_{pq} = c_{pq}\ \forall\ pq \in E(c)\text{-re} \\ c'_{pq} = c(N) + 1\ \forall\ pq \notin E(c)\text{-re} \end{gathered}$$

c és c' fenyő ekvivalensek. Az $(E(c) \cup \{kj : j \in S_2\})$-ben levő élek azonban nem lehetnek részei annak az MKIFF-nek, amik c'-nek megfelelnek. Tegyük fel, hogy kj^* benne van $\bar{g} \in M(c')$-ben, ahol $j^* \in S_2$. A k^*i legyen egy él $\bar{g}$-ben. Mivel $c_{ki} = b_i^m(c)$, és mivel $c'_{ki} = c_{ki}$, ezért $c'_{ki} \leq c'_{k^*i}$.

Vegyük a következő digráfot: $\hat{g} \equiv (\bar{g} \setminus \{k^*i, kj^*\}) \cup \{ki, ij^*\}$, ahol k^*i és kj^* élt a $\bar{g}$-ből helyettesítjük ki és ij^*-gal. $\forall\ j \in N$ van egyetlen bejövő él $\hat{g}$-ben. $\hat{g}$-ben nem is lehet kör, mert akkor $\bar{g}$-ben is lenne kör, Így $\hat{g}$ egy fenyő.

Mivel $c'_{ij}{}^* < c'_{kj^*}$ és $c'_{ki} \leq c'_{k^*i}$, így a $\hat{g}$ gráf összköltsége alacsonyabb, mint $\tilde{g}$-ben, ami pedig ellentmondás, mert $M(c')$-ben van $\bar{g}$.

Ezek szerint c és c' fenyő ekvivalensek. Így IKF mutatja, hogy $\mu(C) = \mu(C')$. A $\bar{g}$ gráf költsége a c' költségmátrixban:

$$\begin{gathered} \textstyle\sum_{pq\in\bar{g}} c'_{pq} = c(N) - c_{ki} - \sum_{j\in S} c_{ij} - \sum_{j\in S} c'_{kj} \\ = c(N) - c_{ki} - \textstyle\sum_{j\in S_2} c_{ij} + \sum_{j\in S_2} [c_{ij} + \frac{\epsilon}{2|S_2|}] \\ = c(N) - c_{ki} + \tfrac{\epsilon}{2} = \textstyle\sum_{j\in T} \mu_j(c') - \frac{\epsilon}{2}, \end{gathered}$$

ahol $\mu(C) = \mu(C')$-ből és a $\sum_{j\in T} \mu_j(C) = c(N) - c_{ki} + \epsilon$-ból értjük meg az egyenlőtlenséget. Vagyis $c'(T) < \sum_{j\in T} \mu_j(C')$, ami ellentmond annak, hogy μ teljesíti MAV-ot. Így,

$$\mu_j(C) \geq b_j^m(c)\ \forall\ j \in N\text{-re}$$

Ha c-hez egyetlen MKIFF tartozik, akkor $\mu_i(C) = b_i^m(c)\ \forall\ i \in N$-re, mivel $\sum_{i\in N} \mu_i(C) = \sum_{i\in N} b_i^m(c) = c(N)$.

4.44. Példa. *Mutatunk egy példát arra, hogy nem mindig létzik egyértelmű eredmény az MKIFF problémára.*

Legyen $N = \{1, 2\}$ és az MKIFF probléma: $c_{01} = 2$, $c_{02} = 3$ és $c_{12} = 1$.

A Folk megoldás az MKFF problémákra kiszabja, hogy minden játékos 1.5-öt fizet, míg a Bird megoldásnál az 1. játékos 1,2-őt és a 2. játékos 1-et fizet. Mivel a Folk RED tulajdonságú (tehát megfelel IKF-nek) és megfelel a MAV-nak, mutatja, hogy a 4.43 Tétel szerint megfelel az MKIFF problémának.

Most vegyük azt az MKIFF problémát, ahol $c_{01} = 2$, $c_{02} = 3$, $c_{12} = 1$ és $c_{21} = a > 0$.

Legyen g olyan MKIFF, hogy $g = \{01, 12\}$. Ha a megoldás megfelel IKF-nek, akkor nem függhet az 'a' értéktől, mert a c_{21} él egy irreleváns él. Ez egy újabb megkötés az MKIFF problémában, de nem fordul elő az MKFF problémánál, mert a szimmetria szerint $a = 1$.

4.45. Tétel. *Vegyünk egy μ költség allokációs szabályt, ami megfelel MAV-nak és IKF-nek. Így nem felelhet meg F-nek vagy KKM-nek.*

Bizonyítás: $N = \{1, 2\}$. Vegyük a következő költségmátrixot: $c_{01} = 6$, $c_{02} = 4$, $c_{12} = 1, c_{21} = 3$, ahol $b_1^m(c) = 3, b_2^m(c) = 1$. A μ teljesíti IKF-et és MAV-ot. A 4.43 Tétel miatt $\mu_1(C) \geq 3$ és $\mu_2(C) \geq 1$. Vegyük c'-t úgy, hogy $c'_{01} = 6 + \epsilon$, ahol $\epsilon > 0$ és minden más él annyit ér, mint c-ben. Egyetlen MKIFF van és mivel μ teljesíti MAV-ot és IKF-et, a 4.43-as Tétel miatt $\mu(C') = (3, 4)$. A μ teljesíti KKM-et, ezért $3 = \mu_1(C') \geq \mu_1(C) \geq 3$. Így $\mu(C) = (3, 4)$. Vegyük c''-t, ahol $c''_{02} = 4 + \gamma$ és $\gamma > 0$, míg minden más él annyit ér, mint C-ban. Ha a μ teljesíti MAV-t, IKF-et és KKM-et, akkor $\mu(C) = (6, 1)$.

Az ellentmondás szerint μ nem teljesíti MAV-t, IKF-et és KKM-et. Ha viszont teljesíti MAV-ot, IKF-et és F-et, akkor kell egy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ folytonos függvény, ahol $(3, 4) = \mu(C) + f(\epsilon, 0)$ és $(6, 1) = \mu(C) + f(0, \gamma)$. Olyan függvény viszont nem létezik, ahol $\epsilon, \gamma > 0$ és $f(0, 0) = (0, 0)$.

4.46. Következmény. *A 4.42 és a 4.43 mutatja, hogy különbség van az asszimetrikus és a szimmetrikus költségmátrixok allokációs szabályainál.*

4.47. Megjegyzés. *Az asszimmetrikus esetben sokkal kevesebb lehetőség van, de meg lehet feleltetni a MAV-nak, a KKM-nek és az F-nek az IKF kivételével.*

4.6. Rekurzív algoritmus

Az algoritmus a Folk megoldásból emel át részeket és teljesíti a három alaptulajdonság megfelelő változatát az MKIFF problémáknál. Az algoritmus bebizonyítja, hogy a μ az R-nek megfelelhet, ha az IKF-nek nem is. Az algoritmust Edmonds (1967), Chu és Liu (1965) tanulmányai alapján MKIFF építésére használják. Ez az MKFF-k építésétől különbözik, de polinomiális időben fut.

Az MKFF építésére használt mohó algoritmusok nem megfelelőek az MKIFF problémára. A mohó algoritmus hibája, hogy egy MKFF mindig a minimum költségű nem irányított élt választja. Azonban az MKIFF-ban lehetnek olyan minimum költségű élek, amik nem tartoznak bele a megoldásba.

4.48. Algoritmus. *A rekurzív algoritmus lépései:*

1. lépés: Minden egyes csúcsnál ki kell választani a belépő élek közül a legkisebb súlyút, és ennek súlyát az adott csúcsba belépő összes él súlyából le kell vonni. Az így kapott súlyozásnál kell szupercsúccsá összehúzni a 0 súlyú irányított köröket.

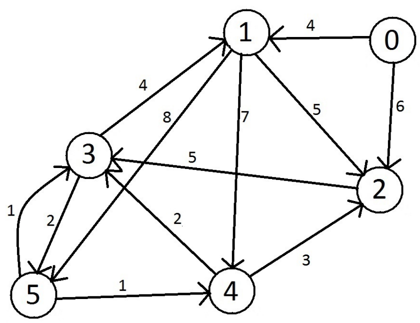
2. lépés: Kiszámoljuk az új élsúlyokkal keletkező költségmátrixot, ez az 1. ilyen lépés során c^1.

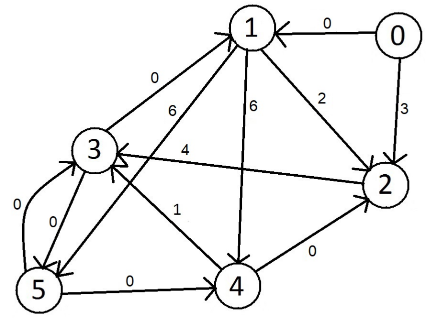
3. lépés: Minden csúcsnál keresünk egy 0 költségű élt. Ha ezeknek az éleknek a halmaza egy MKIFF gráfot alkot, akkor készen vagyunk.

4. Egy új $\tilde{c}^1$ súlyozott gráfot készítünk a 0 forrással, a szupercsúcsokkal és a nem szupercsúcsokkal.

5. lépés: Megismételjük az 1. lépést.

4.49. Példa.



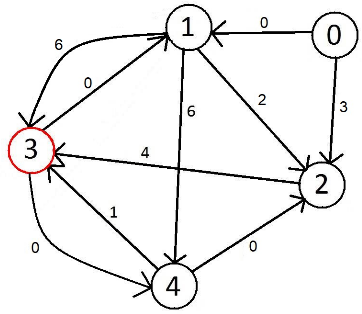


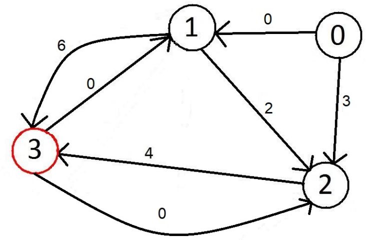
$$\text{és } c = \begin{pmatrix} 4 & - & 4 & - & - \\ 6 & 5 & - & 3 & - \\ - & - & 5 & 2 & 1 \\ - & 7 & - & - & 1 \\ - & 8 & - & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ és } c^1 = \begin{pmatrix} 0 & - & 0 & - & - \\ 3 & 2 & - & 0 & - \\ - & - & 4 & 1 & 0 \\ - & 6 & - & - & 0 \\ - & 6 & - & 0 & - \end{pmatrix}$$

Az algoritmus szerint az 1-es csúcsba lépő éleknek 4-gyel, a 2-esbe lépőknek 3-mal, a 3-asba és 4-esbe lépőknek 1-gyel, az 5-ösbe lépőknek pedig 2-vel kell csökkenteni a súlyát. A 3-as és az 5-ös csúcsokat összehúzhatjuk egy szupercsúccsá.

$$\text{és } \tilde{c}^1 = \begin{pmatrix} 0 & - & 0 & - \\ 3 & 2 & - & 0 \\ - & 6 & 4 & 1 \\ - & 6 & - & 0 \end{pmatrix} \text{ és } c^2 = \begin{pmatrix} 0 & - & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ - & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Jól látható, hogy még nincs MKIFF a gráfban, ezért megismételjük az 1. lépést. Az 1-es csúcsba lépő éleknek 0-val, a 2-esbe lépőknek 0-val, a 3-asba lépőknek 1-gyel és 4-esbe lépőknek 0-val kell csökkenteni a súlyát. A 3-as és az 4-ös csúcsokat összehúzhatjuk egy szupercsúccsá. Az összevonás előtti állapotot a bal oldali ábra mutatja, míg az összevonás utáni állapotot a jobb oldali ábra.





4.7. Nem csökkenthető költségmátrix

Bird 1976-ban vezette be a nem csökkenthető költségmátrixot az irányítatlan esetben (lásd 3.21 Definíció). Bármely c szimmetrikus költségmátrixnál Bird nem csökkenthető költségmátrixának tulajdonsága, hogy egyik élnek sem csökkenthető tovább a költsége anélkül, hogy az MKFF költsége csökkenne.

4.50. Jelölés. *A nem csökkenthető költségmátrixokat c^{BR}-rel jelöljük.*

4.51. Megjegyzés. *A c^{BR} egy szimmetrikus költségmátrix és c-ből lett számítva.*

4.52. Definíció. *Legyen g egy MKIFF-je a c szimmetrikus költségmátrixnak és $p(ij)$ az út i-ből j-be ezen a g fán, aminél $i \in N_0$ és $j \in N$. Így a nem csökkenthető költsége az ij élnek:*

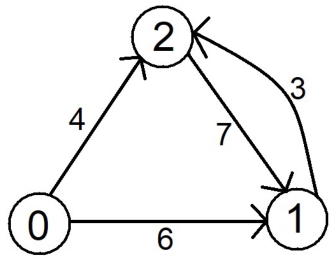
$$c_{ij}^{BR} = \max_{kl \in p(i,j)} c_{kl} \ \forall \ i, j \in N\text{-re.}$$

4.53. Megjegyzés. *Ha valamely ij él része egy minimum költségű feszítőfának, akkor $c_{ij}^{BR} = c_{ij}$. Viszont ha ij nem része, akkor $c_{ij}^{BR} < c_{ij}$.*

Vagyis az eredeti minimális költségű feszítőfák is megmaradnak az NCSKM-ben és új fák is minimalizálják a nem csökkenthető költségét a feszítőfáknak. Bird megmutatta, hogy a c^{BR} költségére vonatkozó játék konkáv, ezért a Shapley-érték a játék magjához tartozik. Mivel minden ij élre igaz, hogy $c_{ij}^{BR} \leq c_{ij}$ és a c^{BR} játék magja része a c játék magjának, így a költség allokációs szabályt a c^{BR} játék Shapley értékének választva teljesíti a MAV-ot, a KKM-et és az F-et is.

Ha kipróbálnánk egy azonos megközelítést az MKIFF problémánál az nem teljesen jó, mivel a költségmátrix asszimmetrikus. Az NCSKM csak az MKFF-ekben szereplő élek költségétől függ. Tehát egy költségjáték Shapley-értéke, ami a nem csökkenő értékű mátrixnak felel meg, ilyen információra hagyatkozik. Ebből következik, hogy a Folk megoldásnak meg kell felelnie IKF-nek. A 4.45 Tételből következik, hogy nem lehet használni ugyanazt a megoldást, mint a szimmetrikus esetben. Ezt mutatja be a következő példa:

4.54. Példa. *Legyen $N = \{1, 2\}$, $c_{01} = 6$, $c_{02} = 4$, $c_{12} = 3$, $c_{21} = 7$ és g MKIFF-je: $g = \{01, 12\}$. Viszont* $\max_{kl \in p(0,2)} c_{kl} \equiv c_{01} = 6 > c_{02}$.



A következőben az NCSKM-nek arra a tulajdonságára koncentrálunk, hogy egy él költsége sem csökkenthető úgy, hogy az eredeti költséghez tartozó MKIFF egy MKIFF maradjon. Ebből következik, hogy az MKIFF összköltsége az NCSKM-eknél ugyanannyi, mint az eredeti mátrixoknál.

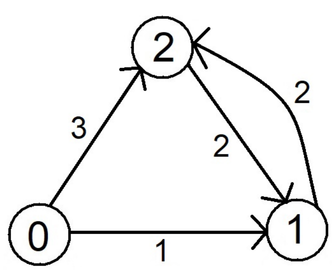
4.55. Definíció. *A c és a c' költségmátrix költség ekvivalens, ha $T(C) = T(C')$, vagyis az összköltségeik az MKIFF-eikben ugyanannyi.*

4.56. Definíció. *A c^R költségmátrix egy NCSKM-je a c költségmátrixnak, ha c és c^R költség ekvivalensek, $c^R_{ij} \leq c_{ij}$ és nem létezik más c' költségmátrix, amely költség ekvivalens c-vel oly módon, hogy valamely ij-re $c'_{ij} < c^R_{ij}$ és $c'_{kl} \leq c^R_{lk}$ az összes $(kl) \neq (ij)$-re.*

4.57. Definíció. *A c^R ekvivalens c-vel, ha c és c^R költség ekvivalensek és $\forall$ ij-re $c^R_{ij} \leq c_{ij}$ és minden él egy c^R-nek megfelelő MKIFF rész.*

Lehetséges egynél több megfelelő NCSKM akkor is, ha a c költségmátrix szimmetrikus. A többszörös NCSKM-ek az MKIFF problémáknál még asszimetrikusak is lehetnek.

4.58. Példa. *Legyen $N = \{1, 2\}$, $c_{01} = 1$, $c_{02} = 3$, $c_{12} = c_{21} = 2$. Az NCSK-k egész osztálya adja: $c^R_{01} = 1$, $c^R_{02} = 2 + \epsilon$, $c^R_{12} = 2$, $c_{21} = 1 - \epsilon$, ahol $\epsilon \in [0, 1]$.*



4.59. Definíció. *Az $R(c)$ jelöli azon NCSKM-ek halmazát, amik a c költségmátrixnak megfelelnek.*

4.60. Következmény. *Ha c egy NCSK, akkor $R(c) = \{c\}$.*

Bármely c költségmátrixnál a rekurzív algoritmust használjuk, hogy felépítsünk egy konkrét $R(c)$-beli mátrixot. Egy kis jelölési áthágással a különleges NCSK-et, amit mi építünk, úgy jelöljük, hogy c^R. De ez nem okoz zűrzavart, mert a következőkben csak ezt vizsgáljuk. A c^R NCSK általunk építve teljesíti a következőt:

1. A kapott c^R nem függ attól, hogy az egyszerüsítéseket milyen sorrendben csináljuk a rekurzív algoritmus során.

2. A c^R-nek megfelelő költségjáték konkáv.

Ezeket figyelembe véve be lehet látni, hogy ha egy μ allokációs szabály, amely a c^R-nek megfelelő költségjáték Shapley-értéke teljesíti a MAV-ot, a KEKM-t és az F-et.

Mivel a rekurzív algoritmus rövidíti a játékot és az NCSKM a rekurzív algoritmust használja, így két különböző játék rövidítő szabály akár más eredményt is hozhatna.

4.61. Definíció. *Az NCSKM-et jól megalapozottnak hívjuk, ha a különböző játékrövidítő szabályok ugyanazt az NCSKM-et adják.*

4.62. Tétel. *A c^R költségmátrix egy jól megalapozott NCSKM.*

4.8. A c^R tulajdonságai

4.63. Tétel. *Vegyük bármelyik c költségmátrixot, az $S \subsetneq N$ részhalmazt és legyen $i \in N \setminus S$. Így c^R-re a következők igazak:*

1. *Van olyan $S \cup \{i\}$ MKIFF, ami megfelel c^R költségmátrixnak úgy, hogy i egy levele ennek az MKIFF-nek.*

2. $c^R(S \cup \{i\}) - c^R(S) = \min_{k \in S_0} c^R_{ki}$.

3. *Az (N, c^R) Költségjáték konkáv.*

4.64. Következmény. *Ha c egy NCSK, akkor az (N, c) költségjáték konkáv.*

Bizonyítás: Ha c NCSK, akkor $R(c) = \{c\}$ és 4.66-ból következik ez a következmény. Változás c-ben változás c^R-ben is, tehát folytonosan változnak együtt.

4.9. Az f^* költség allokációs szabálya

4.65. Definíció. *Az f^* költség allokációs szabály az (N, c^R) költségjáték Shapley-értéke, vagyis $f^*(c) \equiv Sh(N, c^R)$.*

4.66. Tétel. *Az f^* költség allokációs szabály teljesíti F-et, INV-et, KEKM-et, MAV-ot, R-et, SZ-t.*

Hivatkozások

[1] B. Dutta and D. Mishra: *Minimum Cost Arborescences* (2011)

[2] C. G. Bird: *On Cost Allocation of a Spanning Tree: A Game Theoretic Approach, Networks, 6, 335–350* (1976)

[3] C. Trudeau: *Linking the Kar and Folk Solutions Through a Problem Separation Property* (2010)

[4] C. Trudeau: *On Continuous Cost Sharing Solutions for Minimum Cos Spanning Tree Problems* (2011)

[5] G. Bergantinos and A. Kar: *On obligation rules for minimum cost spanning tree problems. Games and Economic Behavior 69, 224-237* (2010)

[6] G. Bergantinos: *An axiomatic approach in minimum cost spanning tree problems with groups. mimeo, University of Vigo* (2011)

[7] G. Bergantinos, L. Lorenzo, S. Lorenzo-Freire: *A generalization of obligation rules for minimum cost spanning tree problems. European Journal of Operational Research 211, 122-129* (2011)

[8] J. Edmonds: *Optimum Branchings, Journal of Reseseach National Bureau Standards, 71B, 233–240* (1967)

[9] L. Lorenzo and S. Lorenzo-Freire: *A characterization of kruskal sharing rules for minimum cost spanning tree problems. International Journal of Game Theory 38* (2009)

[10] Y. J. Chu and T. H. Liu: *On the Shortest Arborescence of a Directed Graph, Science Sinica, 14, 1396–1400* (1965)