Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

LINEÁRIS ALGEBRAI MÓDSZEREK A KOMBINATORIKÁBAN

Szakdolgozat

Seres Ákos
Matematikai elemző szakirány

Témavezető:
Dr. Ágoston István
Egyetemi docens

Algebra és Számelmélet Tanszék

Budapest, 2019

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Először is, szeretném megköszönni témavezetőmnek, Ágoston Istvánnak a kitartó munkáját. Nélküle ez a szakdolgozat ilyen formában nem jöhetett volna létre. Végül, de nem utolsósorban, szeretnék köszönetet mondani családomnak és barátaimnak, hogy ennyi év után is hittek bennem.

Bevezetés

A matematika határterületei mindig is sok izgalmat rejtettek magukban. Az elkövetkezendő fejezetekben a matematika több területéről származó kombinatorikus problémákat fogunk megoldani lineáris algebrai módszerekkel. Tesszük mindezt azért, mert egyszerűen csak könnyebb egy-egy állítást vagy tételt a lineáris algebra segítségével bebizonyítani, vagy azért, mert egy szebb, ötletesebb bizonyítást kapunk.

Az első fejezetben a gráfok Shannon-kapacitásával foglalkozunk, melyekre különböző korlátokat próbálunk majd állítani. A bizonyítások során nagy hangsúly lesz az úgynevezett ortonormált reprezentáción, amely a gráf csúcsainak egyféle vektorokként való reprezentációját jelenti.

A következő fejezetben a geometria területére térünk át. A legnagyobb hangsúly a Helly-tételen és alkalmazásai lesz. Ennek során mélyebben megismerkedünk a lineáris és affin függetlenséggel továbbá a konvex halmazokkal is. A fejezet végén még röviden szó lesz kevés távolsággal rendelkező ponthalmazokról is.

Utolsó fejezetünkben a lineáris algebra már-már klasszikusnak mondható alkalmazási területe kerül középpontba, a halmazrendszerek. Először a Sperner-tételt bizonyítjuk, melyre adunk egy igen ismert kombinatorikus bizonyítást is, de az ezután ismertetett lineáris algebrai bizonyítás sokkal izgalmasabb lesz. Egy olyan egyszerű állításból, - és még pár másikból - hogy a sorrang megegyezik az oszlopranggal, sikerül majd belátunk a Sperner-tételt. Végül az utolsó fejezetrészünkben az Erdős-Ko-Rado-tételt bizonyítjuk, ahol bár a kombinatorikus bizonyítás sokkal szellemesebb, a Kneser-gráf sajátértékeit felhasználva is kapunk is igen ötleteset.

1. Shannon-kapacitás

1956-ban Claude Shannon amerikai matematikus felvetett egy problémát, amelyen matematikus generációk gondolkoztak és gondolkoznak a mai napig. Ez egy kicsit átfogalmazva a következő:
Adott egy ábécé, melyben bizonyos betűk összetéveszthetők. Rögzített k hosszúság mellett, hány darab k hosszú, különböző, egymással nem összetéveszthető szót tudunk kiválasztani?

1.1. Az ötszög kapacitása

Ebben a fejezetben egy igen ötletes bizonyítás során az ötelemű ábécéhez tartozó úgynevezett $\Theta(C_5)$ értékét határozzuk meg, mely 1979-ig megoldhatatlan problémának számított, amikor is Lovász László publikált egy KÖNYV-be való tökéletes bizonyítást. [4]

1.1.A. Mindennek kezdete

1.1.1. Definíció. S legyen egy véges halmaz, amit *ábécének* nevezünk, a halmaz elemeit pedig *betűknek*. Ilyenkor w egy k hosszúságú *szó*, ha $w = a_1a_2 \dots a_k$, ahol $a_1, a_2, \dots, a_k \in S$ az ábécé betűi. Jelölje W az összes szó halmazát.

A továbbiakban szükségünk lesz egy összetéveszthetőségi relációra, amelyet egy $G = (V, E)$ gráffal reprezentálunk, ahol a csúcsok az S halmaz elemei, és két csúcs akkor és csak akkor van összekötve, ha két betű egymással összetéveszthető nevezzük ezt a G gráfot *zavargráfnak*. Ennek segítségével könnyen meggondolható, hogy az 1 hosszú összetéveszthetetlen maximális szavak száma nem más, mint ezen gráf maximális független csúcshalmaza, amit $\alpha(G)$-vel jelölünk.

Felvetődik az ötlet, hogy nem csak betűknél lenne érdemes ezt a összetéveszthetőségi relációt definiálni, hanem kettő vagy akár k hosszú szavaknál is.

1.1.2. Definíció. Legyen S egy ábécé, amelynek bizonyos elemei összetéveszthetők. Azt mondjuk, hogy két különböző szó $a_1a_2 \dots a_k$ és $b_1b_2 \dots b_k$ összetéveszthető, ha a_i összetéveszthető vagy megegyezik b_i-vel $\forall\, i = 1 \dots k$

1.1.3. Definíció. A $G = (V_1, E_1)$ és $H = (V_2, E_2)$ gráf szorzata $G \times H$, az a gráf melynek csúcshalmaza $V_1 \times V_2$=$\{(v_1, v_2) \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2)\}$ és $(v_1, v_2) \neq (w_1, w_2)$ akkor és csak akkor van összekötve, ha $v_i = w_i$ vagy $v_iw_i \in E_i$ $(i = 1, 2)$.
Hasonló módon definiálható G^k= $G \times G \times \cdots \times G$, ami k darab gráf szorzata.

A definícióból világos, hogy G^k egy olyan gráf, amelyben a k- hosszú összetéveszthető szavak vannak éllel összekötve. Így értelmes a következő kérdés:
Mit tudunk mondani a G^k gráfban maximális független csúcshalmazról, amelyet a továbbiakban $\alpha(G_k)$-val jelölünk? A következő tétel lesz igaz:

1.1.4. Tétel. $\alpha(G^k) \geq \alpha(G)^k$

Bizonyítás. Legyen U $\subseteq$ V egy maximális független csúcshalmaz, $|U| = \alpha$. G^k-ban van $\alpha(G)^k$ darab $(u_1, \dots, u_k)$ alakú független csúcs. Hiszen, ha $(u_1, \dots, u_k)$ és $(u'_1, \dots, u'_k)$ különböző és $(u_1, \dots, u_k)$, $(u'_1, \dots, u'_k) \in U \times \cdots \times U$, akkor $\exists\, i\colon u_i \neq u'_i$, ahol $u_i, u'_i \in U$ Mivel u_i nincs összekötve u'_i-vel, ezért $(u_1, \dots, u_k)$ sincs összekötve $(u'_1, \dots, u'_k)$-vel. Innen már következik az állítás. $\square$

Megjegyzés. Ez azt jelenti, hogy az információarány sose csökken, ha különálló jelek helyett szavakat használunk.

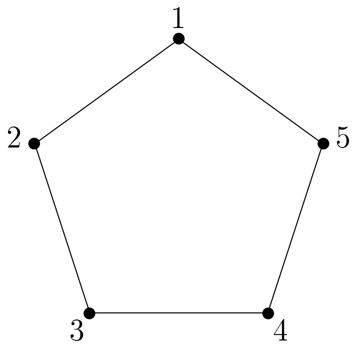
Ezek után vezessük be Shannon eredeti definícióját.

1.1.5. Definíció. *Shannon gráf nullahiba-kapacitásának* nevezzük a következőt:

$$\Theta(G) = \sup_{k \geq 1} \sqrt[k]{\alpha(G^k)}$$

Vizsgáljuk meg kicsit jobban a $\Theta(C_5)$-öt!

Tegyük fel, hogy egy ötelemű ábécé zavargráfja a C_5 öt hosszúságú kör. Ekkor független csúcsok maximális száma 2.



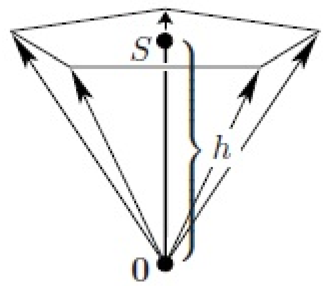
1. ábra. C_5 zavargráfja

Így annyit tudunk eddig, hogy $2 \leq \Theta(C_5)$. A $C_5 \times C_5$-ben nyilván függetlenek az $(1,1), (2,3), (3,5), (4,2), (5,4)$ csúcsok, így $\alpha(G) \geq 5$ és ez nyilván maximális is, hiszen ha $C_5 \times C_5$ csúcsait egy 5×5-ös táblázatba rendezzük, akkor látszik, hogy két egymást követő sorából maximum 2 független csúcs választható ki. Tehát a nullahiba-kapacitás definíciójából azt kaptuk, hogy a kettő hosszú szavak a $\Theta(C_5) \leq$ korlátot adják.
Több speciálisan 5-nél kisebb C_k-nak viszonylag könnyen ki tudták számolni a kapacitását, de a C_5 kapacitásra pontos értéke nem, csak becslések voltak. Ha nem is a legjobb becslés, de annyira nem bonyolultan bizonyítható a $\sqrt{5} \leq \Theta(C_5) \leq \frac{5}{2}$ korlát.

1.1.B. Lovász László esernyője

Valószínűleg a 70-es évek végén senki sem gondolta, hogy $\Theta(C_5)$-re nem csak megszületik a konkrét érték, de a bizonyítás szemléletes és ötletes is lesz.

Lovász László ötlete egy remek példája annak, amiről ez a szakdolgozat legfőképpen szólni szeretne. A gráf csúcsait, valós 1-hosszú vektorokkal ábrázolta úgy, hogy két a gráfban egymással nem szomszédos csúcs vektora ortogonális legyen. (Ez egy remek ötvözete a lineáris algebrának és kombinatorikának is egyben.) Hívjuk az ilyen vektorhalmazt ortonormált reprezentációnak. Ilyen vektorok nyilván léteznek, hiszen ha veszünk egy tetszőleges V vektorteret amely legyen n-dimenziós, akkor a $(1,0,\ldots,0)^{\mathsf{T}}, \ldots, (0,0,\ldots,1)^{\mathsf{T}}$ egységvektorok pont megfelelőek lesznek. A C_5 or-

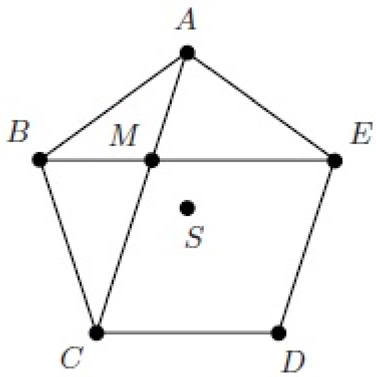


2. ábra. Lovász esernyője

tonormált reprezentációját kapjuk, ha $\mathbb{R}^3$-ban egy ortonormált esernyőt veszünk, melynek ágai $v_1, \ldots, v_5$ egységvektorok. Ezek után ki tudjuk nyitni úgy ezt az esernyőt, hogy minden második vektor 90° zár be. Lovász azt bizonyította be (csak ennél egy kicsit általánosabban), hogy

$$\Theta(C_5) \leq \frac{1}{h^2}$$

Először azt látjuk be, hogy $h^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Ehhez szükségünk lesz a τ-val jelölünk és $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180$ aranymetszési állandóra. Ezek után nézzük meg a bizonyítást, amelyet már Euklidész ismert.



3. ábra

Tekintsünk az a oldalú szabályos ötszöget, melynek az átlói legyenek d-hosszúak. Azt akarjuk belátni, hogy $\frac{d}{a} = \tau$. Könnyen látszik, hogy az ötszög minden csúcsánál a szög nagysága $\frac{3\pi}{5}$, ebből következően $\measuredangle ABE = \frac{\pi}{5}$, mivel ABE egyenlő szárú háromszög. Ebből viszont következik, hogy $\measuredangle AMB = \frac{3\pi}{5}$. Látható tehát, hogy az ABC és AMB háromszögek hasonlóak, és $CMED$ szemközti szögei egyenlőek, így a szemközti oldalai párhuzamosak, tehát $CMED$ rombusz. Így $|MC| = a$ és $|AM| = d - a$. Felhasználva a hasonlóságokat kapjuk, hogy

$$\frac{d}{a} = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|AM|} = \frac{a}{d-a} = \frac{d}{\frac{d}{a} - 1}.$$

Amiből következik, hogy

$$\left(\frac{d}{a}\right)^2 - \left(\frac{d}{a}\right) - 1 = 0.$$

Így

$$\frac{d}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Megmutatható, hogy az S súlypontól a csúcsok s távolságára teljesül, hogy $s^2 = \frac{d^2}{\tau+2}$. Ha most megvizsgáljuk a fentebb már említett Lovász-esernyőt, mivel minden második egységhosszú vektor derékszöget zár be, ezért egy egyszerű Pitagorasz-tételből látszik, hogy $d = \sqrt{2}$. Így s^2-re, ha a d-t és τ-t behelyettesítjük, kapjuk hogy $s^2 = \frac{4}{\sqrt{5}+5}$. Hasonlóan Pitagorasz-tétellel kapjuk, hogy $h^2 = 1 - s^2$, így

$$h^2 = 1 - s^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+5} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Most hogy ezzel végeztünk, egy kicsit általánosabb tételre van szükségünk amely egy tetszőleges G gráf Shannon-kapacitására ad nekünk egy felső becslést. Ehhez először legyen $T = \left\{v^{(1)}, \ldots, v^{(m)}\right\}$ ortonormált reprezentációja $\mathbb{R}^S$-ben, amelyben $v^{(i)}$ a v_i csúcsnak felel meg. Feltesszük továbbá, hogy minden $v^{(i)}$ vektor ugyanakkora szöget zár be az $u = \frac{1}{m}(v^{(1)} + \cdots + v^{(m)})$ vektorral azaz

$$\left\langle u, v^{(i)} \right\rangle = \sigma_T,$$

ahol σ_T-t a T reprezentációs konstansának nevezzük. Ekkor bebizonyítjuk a következő tételt:

1.1.6. Tétel.

$$\Theta(G) \leq {\sigma_T}^{-1}$$

Megjegyzés. Lovász esernyőjére, ha u-nak az OS vektort választjuk, akkor a fentebb említett $\left\langle u, v^{(i)} \right\rangle = \sigma_T$ feltétel biztosan teljesül.

Bizonyítás. A bizonyítás három részből fog állni.

1. Rész: Tekintsünk egy $x = (x_1, \ldots, x_m)$ valószínűségi eloszlást V csúcshalmazán, amely nem jelent mást, mint azt, hogy $x_i \geq 0$ minden $i = 1, \ldots, m$ esetén, és $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$. Továbbá legyen

$$\mu(x) = \left| x_1 v^{(1)} + \cdots + x_m v^{(m)} \right|^2,$$

valamint

$$u_T(G) = \inf_x \mu(x).$$

Legyen U egy maximális független halmaz G-ben, $|U| = \alpha$ és definiáljuk az $x_U = (x_1, \ldots, x_m)$ valószínűségi eloszlást úgy, hogy $x_i = \frac{1}{\alpha}$, ha $v_i \in U$, különben $x_i = 0$. Mivel minden $v^{(i)}$ egységvektor és minden nem szomszédos csúcspárra $\left\langle v^{(i)}, v^{(j)} \right\rangle = 0$, ezért

$$\mu_T(G) \leq \mu(x_U) = \left| \sum_{i=1}^{m} x_i v^{(i)} \right|^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 = \alpha \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}.$$

Tehát ebből következik, hogy

$$\mu_T(G) \leq \alpha^{-1}.$$

2. Rész: Most $\mu_T(G)$ értékét fogjuk kiszámolni. Ehhez szükségünk lesz a Cauchy-Schwarz- egyenlőtlenségre, amely nem más, mint

$$\langle a, b\rangle^2 \leq |a|^2 |b|^2,$$

$a, b \in \mathbb{R}^S$ vektorokra. Ha az $a = x_1 v^{(1)} + \cdots + x_m v^{(m)}$ és $b = u$ vektorokra alkalmazzuk az egyenlőtlenséget, akkor

$$\left\langle x_1 v^{(1)} + \cdots + x_m v^{(m)}, u\right\rangle^2 \leq \mu(x) |u|^2.$$

A feltevésünk szerint $\forall$ i-re teljesül, hogy $\left\langle u, v^{(i)}\right\rangle = \sigma_T$. Innen

$$\left\langle x_1 v^{(1)} + \cdots + x_m v^{(m)}, u\right\rangle = (x_1 + \cdots + x_m)\sigma_T = \sigma_T$$

bármely x eloszlásra, tehát az $(\frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m})$ egyenletes eloszlásra is, amelyből viszont az következik, hogy $|u|^2 = \sigma_T$. Tehát mindezekből következik, hogy

$${\sigma_T}^2 \leq \mu(x)\sigma_T.$$

és így, nyilvánvalóan

$$\sigma_T \leq \mu_T(G).$$

Végül, ha az $x = (\frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m})$ egyenletes eloszlást nézzük, akkor

$$\mu_T(G) \leq \mu(x) = \left|\frac{1}{m}(v^{(1)} + \cdots + v^{(m)})\right|^2 = |u|^2 = \sigma_T.$$

Innen pedig következik, hogy $\mu_T(G) = \sigma_T$ ebből pedig, hogy

$$\alpha(G) \leq \frac{1}{\sigma_T}.$$

3. Rész: Végül az egyenlőtlenséget kell kiterjesztenünk $\Theta(G)$-re. Ehhez tekintsük két gráf $G \times H$ szorzatát és legyen R és S a G és H gráf ortonormált reprezentációja rendre $\mathbb{R}^S$-ben illetve $\mathbb{R}^R$-ben megfelelő σ_R és σ_S konstansokkal. Továbbá legyen $v = (v_1, \ldots, v_R)$ egy vektor R-ben és $w = (w_1, \ldots, w_S)$ S-ben. A (v, w) párnak megfelelő $G \times H$ csúcshoz rendeljük hozzá a

$$vw^{\mathsf{T}} = (v_1 w_1, \ldots, v_1 w_S, v_2 w_1, \ldots, v_2 w_S, \ldots, v_R w_1, \ldots, v_R w_S) \in \mathbb{R}^{RS}$$

vektort. Így $R \times S = \left\{vw^{\mathsf{T}} : v \in R, w \in S\right\}$ a $G \times H$ egy ortonomális reprezentációja $\sigma_R\sigma_S$ konstanssal. Így alkalmazhatjuk rá az eddig bizonyított tételeket. Tehát

$$\mu_{R\times S}(G \times H) = \mu_R(G)\mu_S(H).$$

Ami egy $G^n = G \times \cdots \times G$-re σ_T konstanssal azt jelenti, hogy

$$\mu_{T^n}(G^n) = \mu_T(G)^n = {\sigma_T}^n.$$

És ebből

$$\alpha(G^n) \leq \sigma_T^{-n}$$

Amiből pedig következik, hogy

$$\sqrt[n]{\alpha(G^n)} \leq \sigma_T^{-1}$$

□

A Lovász-esernyő esetén $u = (0, 0, h)^{\mathsf{T}}$ és így $\sigma = \left\langle v^{(i)}, u\right\rangle = h^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. A fenti egyenlőtlenségből pedig

$$\Theta(C_5) \leq \sqrt{5}$$

és így beláttuk, amit szerettünk volna, azaz $\Theta(C_5) = \sqrt{5}$.

1.2. További korlát $\Theta(G)$-re

1.2.A. Még több ortonormált reprezentáció

Az előző fejezetben bebizonyított 1.1.6 tételt egy kicsit tovább gondolva további felső korlátot kaphatunk $\Theta(G)$ értékére.
A $\Theta(G) \leq \sigma_T^{-1}$ egyenlőtlenségből látszódik, hogy minél nagyobb a σ_T érték, annál jobb becslést kapunk $\Theta(G)$-re, nyilván ehhez szükségünk van ortonormált reprezentációra. Most mutatunk egy módszert, amely minden G gráfhoz tudunk egy ilyet!

1.2.1. Definíció. Legyen egy $G = (V, E)$ gráfnak az $A = (a_{ij})$ *szomszédsági mátrixa* a következő:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & ha\ (v_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Megjegyzés. Könnyen látszódik, hogy egyszerű irányítatlan gráfnál az A mátrix szimmetrikus és a főátlóban csupa 0 van.

Szükségünk lesz két tételre a lineáris algebrai tanulmányainkból.

1.2.2. Tétel. *Ha M egy szimmetrikus mátrix, akkor M-nek m darab valós sajátértéke van:*

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_m,$$

és a főátlóbeli elemek összeg megegyezik a sajátértékek összegével.

Nyilván mivel az A szomszédsági mátrixnál a főátlóbeli elemek 0-k, ezért a legkisebb sajátértéknek negatívnak kell lennie, ha van a gráfban él. Legyen $p = |\lambda_m|$. Nézzük akkor a

$$P = I + \frac{1}{p}A$$

mátrixot, ahol I az egységmátrix. Akkor a sajátértékek nyilván $1 + \frac{\lambda_1}{p} \geq 1 + \frac{\lambda_2}{p} \geq \cdots \geq 1 + \frac{\lambda_m}{p} = 0$.
A másik tétel pedig amire szükségünk lesz, következik a főtengely-tételből

1.2.3. Tétel. *Ha $M = (m_{ij})$ egy valós szimmetrikus mátrix, amelynek minden sajátértéke nem negatív és $r(M) = s$, akkor vannak olyan $v^{(1)}, \dots, v^{(m)} \in \mathbb{R}^S$ vektorok, amelyekre*

$$m_{ij} = \left\langle v^{(i)}, v^{(j)} \right\rangle \quad 1 \leq i, j \leq m.$$

Ekkor az előzőleg definiált $P = I + \frac{1}{p}A$ mátrixra alkalmazható a Főtengely-tétel:

$$\left\langle v^{(i)}, v^{(i)} \right\rangle = m_{ii} = 1 \quad \forall\, i - re$$

és minden $i \neq j$-re

$$\left\langle v^{(i)}, v^{(j)} \right\rangle = m_{ij} = \frac{1}{p} a_{ij}.$$

Mivel $a_{ij} = 0$ minden $(v_i v_j) \notin E$-re, ezért a $v^{(i)}, \dots, v^{(m)}$ vektorok tényleg ortogonális reprezentációját adják G-nek.
Végül alkalmazzuk ezt a konstrukciót C_m-re, azaz az m élű körökre, abban az esetben amikor $m \geq 5$ és páratlan. Akkor a következő állítás igazolható:

1.2.4. Állítás.
$$p = |\lambda_{min}| = 2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)$$

Bizonyítás. Tekintsük a C_m kör A szomszédsági mátrixát. A sajátértékekhez és sajátvektorokhoz az egységgyököket fogjuk felhasználni. Az m-edik egységgyökök az $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{m-1}$ lesznek. Nyilvánvaló, hogy a ε^k felírható, mint

$$\varepsilon^k = \cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right) = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{k}\pi\mathrm{i}}{\mathrm{m}}}$$

Legyen $\lambda = \varepsilon^k$ valamelyik gyök, ekkor belátjuk, hogy A-nak $(1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{m-1})^{\mathsf{T}}$ sajátvektora, melyhez az $\lambda + \lambda^{-1}$ sajátérték tartozik.
Nyilván mivel C_m páratlan hosszú kör, a szomszédsági mátrixnak soraiban pontosan két darab 1-es áll, azaz tetszőleges csúcsnak pontosan két szomszédja van. Ebből következően:

$$A\begin{pmatrix}1\\ \lambda\\ \lambda^2\\ \vdots\\ \lambda^{m-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda+\lambda^{m-1}\\ \lambda^2+1\\ \lambda^3+\lambda\\ \vdots\\ 1+\lambda^{m-2}\end{pmatrix} = (\lambda+\lambda^{-1})\cdot\begin{pmatrix}1\\ \lambda\\ \lambda^2\\ \vdots\\ \lambda^{m-1}\end{pmatrix}$$

Ne feledjük, hogy $\lambda = \varepsilon^k$ alakú. Mivel az $(1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{m-1})$ vektorok függetlenek páratlan m-re, (Vandermonde-determináns $\neq 0$) ebből következik, hogy

$$\lambda^1 + \lambda^{-1} = \varepsilon^k + \varepsilon^{-k} = \left[\cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right)\right] + \left[\cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right) - i\sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right)\right] = 2\cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right)$$

A összes sajátértéke minden $0 \leq k \leq \frac{m-1}{2}$-ra.
Mivel a koszinusz itt csökkenő függvény a legkisebb sajátérték a

$$2\cos\left(\frac{(m-1)\pi}{m}\right) = -2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right).$$

□

Egy m élű körnél a szomszédsági mátrix minden sorában két 1-es van, ezért az előzőleg már definiált $P = I + \frac{1}{p}A$ mátrix minden sorának összeg $1 + \frac{2}{p}$. A $\left\{v^{(1)}, \ldots, v^{(m)}\right\}$ reprezentációra nézve ez azt jelenti, hogy

$$\left\langle v^{(i)}, v^{(1)} + \cdots + v^{(m)}\right\rangle = 1 + \frac{2}{p} = 1 + \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)}$$

így, ha u ismét $u = \frac{1}{m}(v^{(1)} + \cdots + v^{(m)})$, akkor

$$\left\langle v^{(1)}, u\right\rangle = \frac{1}{m}\left(1 + \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)}\right) = \sigma.$$

Ez látható, hogy állandó. Így alkalmazható az 1.1.6 tétel és

$$\Theta(C_m) \leq \frac{m}{1 + \left(\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)\right)^{-1}} \quad (m \geq 5 \text{ páratlan hosszú körre}).$$

Vegyük észre, hogy $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\tau}{2}$, ahol $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a fejezet elején ismertetett aranymetszés arányszáma. Így $m = 5$-re azt kapjuk a felső korlát becslésünkből, hogy

$$\Theta(C_5) \leq \frac{5}{1+\frac{4}{\sqrt{5}+1}} = \frac{5(\sqrt{5}+1)}{5+\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

Ez éppen azt a becslést adja, melyet már előzőleg beláttunk.

Mi a helyzet a többi C_m páratlan és - ne feledkezzünk meg róla - páros körrel? Kis m-re még ismertek $\Theta(C_m)$ értékek, például $\Theta(C_3) = 1$ vagy $\Theta(C_6) = 3$. Páros m-re, hasonlóan ahogy $\Theta(C_5)$ értékét először megmutattuk, kapható a $\Theta(C_m) = \frac{m}{2}$ egyenlőség. Viszont már C_7-re sincs meg a pontos Θ érték, nem is beszélve a bonyolultabb ${C_m}^2$ vagy akár ${C_m}^3$ gráfokról. $\Theta(C_7)$-re például az egyik legjobb becslés

$$\sqrt[3]{343} \leq \Theta(C_7) \leq \frac{7}{1+\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)^{-1}}.$$

Aggodalomra semmi ok, hiszen ne feledjük, majd 40 éve a C_5-tel is hasonló helyzetben voltunk...

2. Az örökifjú Geometria

A geometria a matematika egyik legrégebbi területének mondható. Már az ókori görögök is művelték és sikerrel alkalmazták a geometriát a mindennapjaikban. Ebben a fejezetben kettő, a geometriához igen szorosan kapcsolódó témakört mutatunk be. Először a Helly-tételt vizsgáljuk meg, amely mindamellett, hogy maga is egy igen ismert tétel, rengeteg alkalmazással bír [8]. Ezek közül is bemutatunk párat. Ezen fejezet során nagyban támaszkodunk a [6]-ra.
A másik és egyben utolsó témánk ponthalmazokon belüli távolságokkal foglalkozik. Szó lesz olyan ponthalmazokról, amelynél csak egy távolság van, de előkerül majd az egy fokkal bonyolultabb eset is, amikor már két távolságot is megengedünk. A távolságok kapcsán igyekszünk egy-két viszonylag újabb eredményt is bemutatni. A fejezet során mélyebben elmerülünk az affin és lineáris függetlenségek világában, de természetese a lineáris algebra területén klasszikus eszköznek mondahó mátrixranggal való számolás sem marad el.

2.1. Helly-tétel és alkalmazásai

2.1.A. Régen volt már Geometria

Mielőtt rátérnék a Helly-tételre, egy rövid emlékeztetőt adunk a szükséges konvex geometriai definíciókról és tételekről.

Először is, a továbbiakban W-re mint n-dimenziós lineáris vektortérre gondolunk $\mathbb{R}$ felett, azaz legyen $W = \mathbb{R}^n$ Tetszőleges $v, w \in W$-re $v \cdot w = v^\mathsf{T} w$ szorzás alatt a megszokott skalárszorzást értjük. Egy vektor hossza pedig ebből következően nem más mint, $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$, azaz az ismert Euklideszi norma.
Az egyik talán legfontosabb definíció a következő lesz:

2.1.1. Definíció. $v_1, v_2, \ldots, v_m \in W$ vektorok *konvex kombinációja* alatt egy olyan $\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i$ lineáris kombinációt értünk, ahol $\lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0$ minden i-re, továbbá $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$.

Megjegyzés. Ha nem tesszük fel, hogy $\lambda_i \geq 0$, akkor affin kombinációról beszélünk.

2.1.2. Definíció. $S \subseteq W$ egy *konvex halmaz*, ha minden $p, q \in S$-re tartalmazza az összes

$$p + \lambda(q - p) = (1 - \lambda)p\lambda + q \text{ alakú pontot, ahol } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a fenti pontok a p és q vektorok konvex kombinációi, és tulajdonképpen a p és q közötti szakasz pontjairól van szó.

2.1.3. Tétel. *Konvex halmazok metszete is konvex.*

Bizonyítás. Ha p és q benne van a metszetben, akkor az őket összekötő szakasz is benne van, mivel mindegyik halmaz külön-külön is konvex. □

2.1.4. Definíció. H halmaz *konvex burka* az összes H-t tartalmazó konvex halmaz metszete. H konvex burkát ezután $conv(H)$-val jelöljük.

2.1.5. Tétel. *A H halmaz akkor és csak akkor konvex, ha a H-beli pontok tetszőleges konvex kombinációja is H-beli.*

Bizonyítás. Ha tetszőleges H-beli pontok minden konvex kombinációja H-beli, akkor két pont H-beli konvex kombinációi is H-beliek, ezért definíció szerint H konvex halmaz.
Megfordítva, legyen H konvex. A pontok száma szerinti indukcióval bizonyítunk. Ha $k = 1$, akkor triviálisan igaz, $k = 2$ pedig a konvex halmaz definíciójából következik. Tegyük fel, hogy az állítás igaz k-ra, és azt szeretnénk belátni, hogy $k+1$-re is igaz. Annyit kell belátnunk, hogy a H-beli pontok egy tetszőleges konvex kombinációja H-beli. Legyen $x_1, \ldots, x_{k+1}$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1} \in \mathbb{R}$ olyan $x_1 \geq 0$ olyan együtthatók, amelyre $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$. Ha $\lambda_{k+1} \neq 0$, akkor

$$x = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i + \lambda_{k+1} x_{k+1} = (1 - \lambda_{k+1}) \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i x_i}{(1 - \lambda_{k+1})} + \lambda_{k+1} x_{k+1}.$$

Az indukciós feltevés szerint

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i x_i}{(1 - \lambda_{k+1})} \in H, \quad \text{mivel} \quad \sum_{i=1}^{k+1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} = 1.$$

Így a definíció szerint $x \in H$. □

2.1.6. Definíció. $v_1, \ldots v_k$ pontok *affin függetlenek*, ha $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = 0$ és $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 0$ esetén következik, hogy $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$.

2.1.7. Állítás. *A $v_1 \ldots v_k$ vektorok akkor és csak akkor affin függetlenek, ha a $k-1$ darab $v_2 - v_1, \ldots, v_k - v_1$ vektorok lineárisan függetlenek.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $v_1, \ldots, v_k$ affin függetlenek és vegyük ekkor a $v_2 - v_1, \ldots, v_k - v_1$ egy olyan lineáris kombinációját, amely a 0-vektort adja:

$$\lambda_2(v_2 - v_1) + \cdots + \lambda_k(v_k - v_1) = 0.$$

Ekkor a zárójelet felbontva nyilván $\lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k - (\lambda_2 + \cdots + \lambda_k) v_1 = 0$, és így ha $\lambda_1 = -(\lambda_2 + \cdots + \lambda_k)$, akkor

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = 0, \quad \text{amelyre} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 0.$$

Az affin függetlenség miatt $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k$.
Megfordítva legyenek $v_2 - v_1, \ldots, v_k - v_1$ lineáris függetlenek és tegyük fel, hogy $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = 0$ olyan együtthatókkal, amelyekre $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 0$. Ekkor,

$$-(\lambda_2 + \cdots + \lambda_k) v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k = 0,$$

és a tagokat átcsoportosítva

$$\lambda_2(v_2 - v_1) + \cdots + \lambda_k(v_k - v_1) = 0.$$

A feltevés szerint ekkor $\forall\, 2 \leq i \leq k$-ra $\lambda_i = 0$, és így $\lambda_1 = 0$ is teljesül. Ezzel bizonyítottuk a $v_1, \ldots, v_k$ vektorok affin függetlenségét. □

2.1.B. Feltűnik a Helly-tétel

A I. Világborúban megsérült, az orosz fogságot is megjárt Eduard Helly már a fogságban is matematikával foglalkozott, ha sokáig publikálni nem is tudott. 1923-ban jelent meg a cikk, amely ezt a tételt is tartalmazta:

2.1.8. Tétel. ***(Helly-tétel)*** *Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_k \subset W$ konvex halmazok. Ha közülük tetszőleges $n+1$ halmaz metszete nem üres, és $k > n$, akkor*

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k \neq \emptyset.$$

Ám ennek a tételnek a bizonyításához szükségünk van egy lemma kimondására is.

2.1.9. Tétel. ***(Radon lemma)*** *Legyen $D \subset W$ olyan $k \leq n+2$ elemű halmaz, ahol*
$D = \{v_1, \dots, v_k\}$ Ekkor léteznek olyan D_1 és D_2 részhalmazok, amelyekre

$$D = D_1 \cup D_2 \text{ és } D_1 \cap D_2 = \emptyset$$

és

$$conv(D_1) \cap conv(D_2) \neq \emptyset.$$

Bizonyítás. Nyilván elegendő az állítást $k = n+2$-re bizonyítanunk.
Mivel a D elemei $v_2 - v_1, \dots, v_{n+2} - v_1$ nem lehetnek lineárisan függetlenek ezért a 2.1.7 állítás miatt nem affin függetlenek, így választhatunk D elemeihez olyan valós együtthatókat, amelyeknek nem mindegyike egyenlő 0-val és

$$\sum_{i=1}^{n+2} \alpha_i v_i = 0 \text{ és } \sum_{i=1}^{n+2} \alpha_i = 0.$$

Legyen $V_1 = \{i \mid \alpha_i > 0\}$ és $V_2 = \{i \mid \alpha_i \leq 0\}$ Ezek nyilván nem üres halmazok. Továbbá legyen $D_1 = \{v_i \colon i \in V_1\}$ és $D_2 = \{v_i \colon i \in V_2\}$. Ekkor $D = D_1 \cup D_2$ és természetesen $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Legyen $S_1 = \sum_{i \in V_1} \alpha_i$ és vegyük észre hogy $S_2 = \sum_{i \in V_2} \alpha_i$ esetén $S_1 = -S_2$, hiszen $S_1 + S_2 = 0$.
Végezetül az $x = \sum_{i \in V_1} \frac{\alpha_i}{S_1} v_i \in conv(A_1)$, hiszen $\frac{\alpha_i}{S_1} > 0$ és $\sum_i \frac{\alpha_i}{S_1} = 1$. Másrészt, mivel $\sum_{i \in V_1} \alpha_i v_i + \sum_{i \in V_2} \alpha_i v_i = 0$, így $x = \sum_{i \in V_2} \frac{-\alpha_i}{S_1} v_i \in conv(A_2)$. Ebből következik, hogy $x \in conv(A_1) \cap conv(A_2)$, és pont ezt akartuk belátni. □

Ezek után már befejezhetjük a Helly tétel bizonyítását!

Bizonyítás. Indukcióval bizonyítunk! Ha $k = n+1$, akkor már a feltétel alapján igaz az állítás, így ez az eset triviális. Most azt szeretnénk belátni, hogy $k > n+1$-re is teljesül. Tegyük fel, hogy $k-1 \geq n+1$ konvex halmazra már igaz. Az indukciós feltevésből minden $i \in \{1, 2, \dots, k\}$-ra igaz, hogy létezik egy

$$x_i \in A_1 \cap A_2 \dots \cap \hat{A}_i \cap \dots \cap A_k,$$

ahol $\hat{A}_i$ azt jelenti, hogy az A_i halmazt töröltük a metszetkifejezésben szereplő halmazok közül. Véve ezen $x_1, x_2 \dots x_k$ pontokat, mivel $k \geq n+2$, tehát ezen pontokra alkalmazható Radon lemma, így (a pontokat esetleg átrendezve):

$$\exists\, z \in conv\{x_1, \dots, x_j\} \cap conv\{x_{j+1}, \dots, x_k\},$$

valamely $j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$. Mivel

$$x_1, \dots, x_j \in A_{j+1}, \dots, A_k,$$

ebből következik, hogy

$$z \in conv\,\{x_1, \dots, x_j\} \subset A_{j+1} \cap \dots \cap A_k.$$

Hasonlóan

$$z \in conv\,\{x_{j+1}, \dots, x_k\} \subset A_1 \cap \dots \cap A_j.$$

De ekkor

$$z \in A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k,$$

így kész a bizonyítás. □

Létezik Helly-tételnek egy megszámlálható és egy általános verziója is.

2.1.10. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $H \subset \mathbb{R}^n$ halmaz *kompakt*, ha korlátos és zárt.

2.1.11. Tétel. ***(A megszámlálható Helly-tétel)*** *Legyen*

$$B_1, \dots B_k, \dots \subset W.$$

konvex, kompakt halmazok egy megszámlálhatóan végtelen sorozata. Ha minden $n+1$ halmaz metszete nem üres, akkor az összes halmaz metszete sem az.

Bizonyítás. Az eredeti Helly tételből következik, hogy létezik olyan (p_n) sorozat, amelyre

$$p_1 \in B_1 \cap \dots \cap B_{n+1}, \quad \dots \quad , p_m \in B_1 \cap \dots B_{n+m}.$$

Tekintve, hogy B_1 kompakt, és $(p_n) \subseteq B_1$ ezért választhatjuk (p_n)-nek egy konvergens (p_{k_n}) részsorozatát, amelynek p^* határértéke. Ez minden B_i halmaznak közös pontja, hiszen minden k-hoz létezik egy olyan N_0 küszöbindex amelyre $(p_{k_n}) \subset B_k \ \forall\, n \geq N_0$, és így B_k kompaktsága miatt $p^* \in B_k$. □

Természetesen nem muszáj feltenni, hogy a B halmazok megszámlálhatóan végtelen sokan legyenek.

2.1.12. Tétel. ***(Az általános Helly-tétel)*** *Legyen $B \subset W$ konvex, kompakt halmazokat tartalmazó halmazrendszer. Tegyük fel, hogy B legalább $n+1$ elemet tartalmaz. Ha minden $n+1$ halmaz metszete nem üres, akkor B összes elemének metszete sem üres.*

Ennek a tételnek a bizonyítása sem nehéz, de az analízis olyan eszközeit használja inkább, amelynek bevezetése és mélyebb alkalmazása nem célja jelen szakdolgozatnak.

2.1.C. A Helly-tétel alkalmazásai

Ezek után következhet néhány alkalmazása a Helly-tételnek!

2.1.13. Tétel. ***(Carathéodory-tétel)*** *Ha $A \subset W$, és $x \in conv(A)$, akkor x előáll, mint $n+1$ vagy kevesebb affin független A-beli pont konvex kombinációja.*

Bizonyítás. Könnyű belátni, hogy $conv(A)$ megegyezik azon pontok halmazával, amelyek előállnak mint véges sok A-beli pont konvex kombinációja. Így ha $x \in conv(A)$, akkor:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, \text{ ahol } x_i \in A \text{ és minden } \lambda_i > 0, \text{ ezenfelül } \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$$

alakban. Tegyük fel, hogy ez egy minimális felírása x-nek, azaz k minimális, amelyre létezik ilyen összeg.
Indirekt tegyük fel hogy $x_1, x_2, \dots, x_k$ pontok affin összefüggők, azaz a következő egyenlőség nem triviálisan teljesül:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0 \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0.$$

Válasszunk egy m-et úgy, hogy $\frac{\lambda_m}{\alpha_m} > 0$ a lehető legkisebb legyen. Ez nyilván megkövetelhető, hiszen minden $\lambda_i > 0$ és biztosan létezik legalább egy pozitív α_i. Így

$$x = \sum_{i=1}^{k} \left(\lambda_i - \frac{\lambda_m}{\alpha_m} \alpha_i \right) x_i$$

egy másik konvex kombináció. Az, hogy az együtthatók összege 1, ránézésre látszik. Az összes együttható pedig nem-negatív, mert vagy α_i negatív, vagy $\frac{\lambda_m}{\alpha_m}\alpha_i \leq \lambda_i$. Ám ekkor az m-edik együttható 0 és így sérül k minimalitása, tehát $x_1, x_2, \dots, x_k$ pontok affin függetlenek. Ebből pedig következik, hogy $k \leq n+1$, hiszen egy n-dimenziós térben az affin független vektorok száma 2.1.7 állítás alapján legfeljebb $n+1$. □

2.1.14. Tétel. ***(Klee-tétel)*** *Legyen K egy kompakt, konvex halmaz, és legyen $\mathcal{S}$ kompakt halmazok egy családja W-ben. Tegyük fel, hogy bármely $n+1$ darab $\mathcal{S}$-beli halmazhoz van egy olyan $v \in W$ vektor, hogy $K+v$ fedi azt az $n+1$ halmazt. Ekkor létezik egy olyan v_0 vektor, hogy $K+v_0$ fedi az összes $\mathcal{S}$-beli halmazt.*

Bizonyítás. Tetszőleges $S \subset W$ halmazokra tekintsünk az alábbi halmazt:

$$T(S) = \{v \in W \colon \text{v olyan vektor, melyre } S \subset K+v\}$$

Ekkor K kompaktsága miatt $T(S)$ is nyilván kompakt, hiszen könnyű belátni, hogy $T(S)$ korlátos és zárt. Most lássuk be azt is, hogy $T(S)$ konvex! Azt kell megmutatunk, hogy $S \subset K+v_1$ és $S \subset K+v_2$-ből következik, hogy $S \subset K+\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2$ minden $0 \leq \lambda \leq 1$-re. A feltevés szerint tetszőleges $s \in S$-hez $\exists\, k_1, k_2 \in K$, hogy

$$s = k_1 + v_1 = k_2 + v_2.$$

Ekkor:

$$s = \lambda s + (1-\lambda)s = \lambda(k_1+v_1) + (1-\lambda)(k_2+v_2) =$$
$$(\lambda k_1 + (1-\lambda)k_2) + \lambda v_1 + (1-\lambda)v_2 = k + \lambda v_1 + (1-\lambda)v_2,$$

ahol $k = \lambda k_1 + (1-\lambda)k_2$, hiszen K konvex. Ezzel beláttuk, hogy $S \subset K + \lambda v_1 + (1-\lambda)v_2$, és így $\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2 \in T(S)$, igazolva $T(S)$ konvexitását.
Alkalmazva a Helly-tételt az

$$\hat{S} = \{T(S) \colon S \in \mathcal{S}\}$$

halmazrendszerre. Ekkor a feltevés szerint $\hat{S}$-re teljesülnek a Helly-tétel feltételi, hiszen bármely $n+1$ különböző $S_1, \ldots, S_{n+1} \in \mathcal{S}$ esetén $\exists\, v \in W$, melyre $S_i \subset K+v$, azaz $\exists\, v \in T(S_1) \cap \cdots \cap T(S_{n+1})$. Ekkor a Helly-tétel miatt létezik egy olyan $v_0 \in W$, hogy $v_0 \in \bigcap_{S \in \mathcal{S}} T(S)$, azaz $K + v_0$ fedi $\mathcal{S}$ összes elemét. □

Hasonló további tétel megfogalmazható, amelynek a bizonyítása is ugyanerre az elvre épül.

2.1.15. Tétel. *Legyen K egy konvex kompakt halmaz és $\mathcal{S}$ ugyanolyan halmazok egy családja W-ben. Tegyük fel, hogy bármely $n+1$ darab $\mathcal{S}$-beli halmazhoz van egy olyan $v \in W$ vektor, hogy $K + v$ metszi azt az $n+1$ halmazt. Ekkor létezik egy olyan v_0 vektor, hogy $K + v_0$ metszi $\mathcal{S}$ összes halmazát.*

Párhuzamos síkbeli szakaszokra is kimondható egy hasonló tétel:

2.1.16. Tétel. ***(Rey, Pastór, Santaló)*** *Legyen $\mathcal{G}$ párhuzamos szakaszok rendszere a síkon. Ha bármely három $\mathcal{G}$-beli szakasznak van egy közös transzverzális egyenese, akkor az összes $\mathcal{G}$-ben lévő szakasznak is van.*

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az összes szakasz párhuzamos az y tengellyel. Akkor ezen szakaszok pontját egy-egy $\sigma = \{(x_0, y) \colon y_0 \le y \le y_1\}$ halmaz tartalmazza. A feltétel szerint feltehető, hogy különböző szakaszokhoz különböző x_0 értékek tartoznak. Egy transzverzális $y = ax + b$ egyenletű egyenes belemetsz σ-ba, ha

$$y_0 \le ax_0 + b \le y_1.$$

Így a σ-t metsző egyenesek serege az (a, b) síkon a $b = -x_0a + y_0$ és $b = -x_0a + y_1$ sávval van korlátolva. Különböző szakaszokhoz különböző x_0 meredekségű sáv tartozik, ezért két sáv metszete kompakt, így teljesül rá a Helly-tétel. Ebből következik, hogy az összes sávnak van közös pontja, (a_0, b_0) amely egy közös $y = a_0x + b_0$ egyenletű transzverzálishoz tartozik. □

Végezetül lássunk további két alkalmazást, amelyeket itt bizonyítás nélkül közlünk.

2.1.17. Definíció. A $K \subset W$ kompakt halmaz *átmérője* alatt két pont közötti maximális távolságát értjük, azaz

$$diam(K) = \sup_{x,y \in K} |x - y|$$

Egy érdekes összefüggés vehető észre a ponthalmaz átmérője és a ponthalmazt magában foglaló legkisebb gömb sugara között.

2.1.18. Tétel. ***(Jung-tétel)*** *Egy W-beli 1 átmérőjű halmaz belefoglalható egy $r_n = \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$ sugarú gömbbe.*

2.1.19. Definíció. A és $B \subset W$ *erősen szétválasztható*, ha létezik egy olyan $H = \{x \in W \colon ux = \alpha\}$ hipersík (ahol $0 \ne u \in W$ és $\alpha \in \mathbb{R}$) úgy, hogy A és B a H-nak különböző oldalán van és $dist(A, H)$ és $dist(B, H)$ is pozitív.

Megjegyzés. Ha A és B kompakt, konvex halmazok úgy, hogy $A \cap B = \emptyset$, akkor A és B erősen szétválasztható.

2.1.20. Tétel. ***(Kirschberger tétel)*** *Legyen $A, B \subset W$. Ha bármely legfeljebb $n+2$ elemű $M \subset A \cup B$ részhalmazra $M \cap A$ és $M \cap B$ erősen elkülöníthető, akkor A és B is erősen szétválasztható.*

2.2. Ponthalmazok kevés távolsággal

Végül nézzük meg két fontos tételt a kevés távolságokkal kapcsolatban.

2.2.A. Az egy és két távolságok

2.2.1. Tétel. ***(Ponthalmaz egyetlen távolsággal)*** *Tegyük fel, hogy* $x_1, x_2 \dots x_k \in \mathbb{R}^n$ *és* $d(x_i, x_j) = \|x_i - x_j\| = s$ *teljesül* $\forall\, i \neq j$*-re. Ekkor* $k \leq n+1$ *és ez a becslés éles.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy az egyenlőség teljesülhet, tehát előfordulhat,hogy $k = n+1$.
Legyenek $e_1, e_2 \dots e_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$ a standard egységvektorok. Ekkor minden $i \neq j$-re teljesül, hogy $d(e_i, e_j) = \sqrt{2}$. Ez nyilvánvalóan igaz, hiszen $e_i - e_j$ vektor összes koordinátája 0, kivéve két helyen, ahol 1 és -1, azaz csak egy távolság fordulhat elő közöttük. Továbbá $e_i \in H = \left\{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1\right\}$, ami a $K = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0\right\}$ az n-dimenziós hipersík eltoltja. Így $\mathbb{R}^n$-ben is kapunk egy megfelelő ponthalmazt.
Ezek után igazolhatjuk a felső korlátot! Legyen $x_1, x_2 \dots x_k \in \mathbb{R}^n$ egy olyan pontrendszer, amelyben egyetlen nem nulla távolság fordul elő. A feltételek megszigorítása nélkül feltehető, hogy $x_1 = 0$. Ekkor

$$\|x_2\| = \dots = \|x_k\| = \|x_i - x_j\| = s \quad \forall\, i \neq j - re.$$

Nyilván feltehetjük, hogy $s = 1$. Ilyenkor minden $2 \leq i, j \leq k$-ra teljesül, hogy

$$x_i^{\mathsf{T}} \cdot x_j = \begin{cases} 1, & \text{ha } \ i = j \\ 1/2 & \text{ha } \ i \neq j \end{cases}$$

Ugyanis x_i, x_j és $x_i - x_j$ egy egyenlő oldalú háromszöget alkot, így $\gamma(x_i, x_j) = 60°$.
Legyen $A = (x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^{n \times (k-1)}$ A fentiekből következik, hogy

$$A^{\mathsf{T}} \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1/2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/2 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(k-1)\times(k-1)}$$

Itt $det(A^{\mathsf{T}} \cdot A) \neq 0$, hiszen $A^{\mathsf{T}} \cdot A$ egy pozitív definit mátrix. Ugyanis

$$A^{\mathsf{T}} A = \begin{bmatrix} 1/2 & \dots & 1/2 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 1/2 & \dots & 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1/2 \end{bmatrix},$$

és az első mátrix pozitív definit. Sajátértékei a 0 ($(k-2)$-szeres) és a $(k-1)/2$, míg a második mátrix nyilván pozitív definit. Ebből következik, hogy $r(A^{\mathsf{T}} \cdot A) = k - 1 = r(A)$, de mivel $A \in \mathbb{R}^{n \times (k-1)}$, ezért $k - 1 \leq n$ ahonnan következik, hogy $k \leq n+1$. □

Ezek után felmerülhet a kérdés, hogy adható-e valamilyen hasonló becslés abban az esetben is, ha nem csak egy, hanem két távolságot is megengedünk a ponthalmazban? A választ a következő tétel adja meg:

2.2.2. Tétel.
$$\frac{n(n+1)}{2} \leq m(n) \leq \frac{(n+1)(n+4)}{2},$$
ahol $m(n)$ a két távolságot tartalmazó ponthalmazok maximális elemszáma.

Bizonyítás. Először az alsó korlátot bizonyítjuk be,így azt kell belátnunk, hogy
$$\frac{n(n+1)}{2} \leq m(n).$$

Ehhez konstruálunk egy ponthalmazt amire ez teljesül.
Legyen $|M| = n+1$ és vegyük a kételemű halmazok karakterisztikus vektorait $\mathbb{R}^{n+1}$-ben: $k_1, \ldots, k_l$. Itt $l = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ Nyilván:
$$\|k_i - k_j\| = \begin{cases} 2, & \text{ha a halmazok diszjunktak} \\ \sqrt{2}, & \text{ha a halmazoknak egy közös eleme van} \\ 0, & \text{ha } \ i = j \end{cases}$$

Ha a $k_i \in H = \left\{x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 2\right\}$ halmaz helyett annak a $K = \left\{x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0\right\}$ eltoltját vesszük, akkor ez már izomorf $\mathbb{R}^n$-nel, és készen is vagyunk az alsó becsléssel.
Ezek után nézzük meg a felső becslést!
$$m(n) \leq \frac{(n+1)(n+4)}{2}.$$

Legyenek $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$ olyan pontok, melyek között legfeljebb két távolság fordul elő, s_1 és s_2. Definiáljuk az alábbi függvényeket:
$$f_i(x) = (\|x - a_i\|^2 - s_1^2)(\|x - a_i\|^2 - s_2)^2 \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

Ekkor $f_i(x)$ polinomja az $x_1, \ldots, x_n$ komponenseknek
$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\sum_{j=1}^{n}(x_j - a_{ij})^2 - s_1^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}(x_j - a_{ij})^2 - s_2^2\right)$$

Továbbá
$$f_i(a_j) = \begin{cases} s_1^2 s_2^2 \neq 0, & \text{ha } \ i = j \\ 0, & \text{ha } \ i \neq j \end{cases}$$

A tétel bizonyításának befejezéshez következzen két állítás!

1. Állítás. *$f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ lineárisan független polinomok.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x) = 0$ Ha behelyettesítjük a_j-t, akkor
$$\underbrace{\lambda_j f_j(a_j) = 0}_{\lambda_j s_1^2 s_2^2} \quad \forall j - re, \text{ így } \lambda_j = 0$$

Ezzel be is bizonyítottuk, amit szerettünk volna. □

2. Állítás. *$1 \leq t \leq k$-ra:*

$$f_t(x) \in \left\langle \underbrace{(\sum_i x_i^2)^2}_{1\ db}, \underbrace{(\sum_i x_i^2)x_j}_{n\ darab}, \underbrace{x_i x_j}_{\frac{n(n+2)}{2}\ db}, \underbrace{x_j}_{n\ darab}, \underbrace{1}_{1\ darab} \right\rangle = \mathcal{U} \leq \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$$

Ebből következik, hogy

$$\dim \mathcal{U} \leq 2(n+1) + \frac{n(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+4)}{2}$$

Ebből könnyen látszik, hogy

$$m(n) \leq \frac{(n+1)(n+4)}{2}$$

□

2.2.B. Kitekintés

Természetesen rengeteg újabb eredmény elérhető a kevés távolságokkal kapcsolatban, mi itt [7]-ban és [5]-ban szereplő eredményeiből ismertetünk párat!

Lángi Zsolt és Bezdek Károly cikkéhez a következő definíció játszik szerepet:

2.2.3. Definíció. Legyen S^{d-1} a $(d-1)$-dimenziós egységgömb. Ekkor egy $\mathcal{P}$ halmaz pontjai S^{d-1}-ben *részben α-ekvidisztánsak*, ha bármelyik három $\mathcal{P}$-beli pont közül legalább kettő α távolságra van egymástól. Itt a távolságok alatt gömbi távolságokat értünk.

2.2.4. Tétel. *Bármely részben α-ekvidisztáns S^{d-1}-beli pontok halmazának számossága legfeljebb $2d+2$, ha $\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \pi$ és $2 \leq d$.*

2.2.5. Tétel. *Bármely $d \geq 2$-re létezik egy olyan pozitív egész szám $e(d)$, hogy az S^{d-1}-beli részben α-ekvidisztáns pontok száma megegyezik $2d$-vel, amennyiben $\left|\alpha - \frac{\pi}{2}\right| \leq e(d)$*

2.2.6. Tétel. *Tetszőleges $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ az S^{d-1}-beli részben α-ekvidisztáns pontok maximális halmazának számossága legfeljebb $d^2 + d - 2$, ahol $d \geq 2$.*

Mindegyik tétel bizonyítása lineáris algebrát használ, de erre terjedelemi okok miatt nem térünk ki.

A híres kombinatorikus geométer Hugo Hadwiger a következő kérdést tette fel: Mi az a legkisebb $c(n)$ amelyre teljesül, hogy $\mathbb{R}^n$ előáll $c(n)$ darab részhalmaz uniójaként $\mathbb{R}^n = S_1 \cup S_2 \cup \ldots S_{c(n)}$ úgy, hogy egyetlen S_i-ben sincs két olyan pont, melyek egymástól egységtávolságra lennének.

2.2.7. Definíció. Egy *δ-távolsággráfnak* nevezzük azt az $\mathbb{R}^n$-beli gráfot,amelynek csúcshalmaza egy $\mathbb{R}^n$-ből vett (véges) ponthalmaz és két csúcs a gráfban akkor és csak akkor van összekötve, ha az (euklideszi) távolságuk δ. *Egység távolsággráfról* beszélünk, ha $\delta = 1$.

Ha jobban meggondoljuk Hadwiger kérdése nem más, mint az egységtávolsággráf kromatikus számának meghatározása! Ez viszont nem könnyű feladat. Rengeteg nyitott probléma van még ezzel kapcsolatban.

2.2.8. Tétel. ***(Frankl-Wilson, 1981.)*** *Nagy n-re az $\mathbb{R}^n$-ben lévő egység távolsággráf kromatikus száma nagyobb, mint* $1,2^n$

3. Barangolás a halmazrendszerek világában

Utolsó fejezetünkben a lineáris algebra alkalmazását egy tipikus témakörön, a halmazrendszereken ismertetjük. A fejezet nagy részében a Sperner-rendszerekről lesz szó, azon belül a Sperner-tételről mutatunk egy ismert kombinatorikus bizonyítás utána pedig kevésbé ismert lineáris algebrai bizonyítást. A fejezet végén az Erdős-Ko-Rado-tétel és annak bizonyításaié lesz a főszerep. A fejezetben a [2] és [3] lesz segítségünkre.

3.1. Sperner-rendszerek

3.1.A. Amit tudni érdemes

A továbbiakban jelentős szerepe lesz a részbenrendezésnek és az ehhez kapcsolódó fogalmaknak. Erről most egy rövid összefoglalót adunk.

3.1.1. Definíció. Egy P véges halmaz *részbenrendezett*, ha értelmezve van rajta egy bináris reláció, $(\leq)$ amelyre teljesülnek a következő axiómák:

(i) $x \leq x$ minden $x \in P$-re (reflexivitás)

(ii) Ha $x \leq y$ és $y \leq x$, akkor $x = y$ (antiszimmetria)

(iii) Ha $x \leq y$ és $y \leq z$, akkor $x \leq z$ (tranzitivitás)

3.1.2. Definíció. Legyen P egy részbenrendezett halmaz. L-et *láncnak* nevezzük, ha minden $x, y \in L$ esetén $x \geq y$ vagy $y \geq x$ teljesül P-ben. A lánc hossza n, ha $n + 1$ elemet tartalmaz, mely a következő alakban írunk fel: $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$.

Ilyen részbenrendezett halmazokat könnyen le tudunk gyártani. Legyen P egy tetszőleges halmazrendszer, ekkor a P részhalmazain vett bináris reláció legyen az ismert $x \subseteq y$ tartalmazás. Könnyen meggondolható, hogy a részbenrendezés mindhárom tulajdonsága teljesül ilyenkor.

3.1.3. Definíció. P részbenrendezett halmaznak az A halmaz egy *antilánca*, ha A-ban semelyik két elem nem összehasonlítható, azaz nem léteznek olyan $x \neq y \in A$, hogy $x \leq y$ vagy $y \leq x$.

Az antiláncokhoz kapcsolódik a következő definíció:

3.1.4. Definíció. Legyen $S \subset \mathcal{P}(V)$, azaz S részhalmaza V hatványhalmazának. Ekkor, S *Sperner-rendszer* V felett, ha bármely $A, B \in S$-re $A \not\subset B$.

Ha jobban meggondoljuk, a Sperner-rendszerek nem mások, mint antiláncok! Így az antiláncra és Sperner-rendszerre is jó példák lehetnek a következők:

3.1.5. Példa. Legyen $V = \{1, 2, 3, 4\}$. Ekkor például S Sperner-rendszerek V felett az 1-elemű részhalmazok:
$S_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$ de ugyanúgy jó, ha csak egymást nem metsző halmazokat veszünk, mint az $S_2 = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$.

3.1.B. Egy kis kombinatorika

Miután megismerkedtünk a Sperner-rendszerekkel, felvetődik a kérdés, hogy tudunk-e becslést adni a méretükre? Nyilván, ha vesszük az alaphalmaz összes részhalmazát, az felülről becsüli a Sperner-rendszer méretét is, de szerencsére ennél jobb felső korlát is ismert.

3.1.6. Tétel. ***(Sperner-tétel)*** *Ha $\mathcal{F}$ egy Sperner-rendszer V felett ($|V| = n$), akkor*

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Megjegyzés. A továbbiakban ha azt külön nem említjük, a halmazrendszer alaphalmaza alatt mindig egy n-elemű halmazt értünk, amelynek az elemei $\{1, 2, \ldots, n\}$.

A Sperner-tétel bizonyításához először is a következő tételt kell bebizonyítanunk:

3.1.7. Tétel. ***(LYM-egyenlőtlenség)*** *Legyen $\mathcal{F}$ egy Sperner-rendszer V felett. Ekkor*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{\binom{n}{k}} \leq 1,$$

ahol az f_k az $\mathcal{F}$-ben lévő k-elemű részhalmazok száma.

Megjegyzés. A mozaik három matematikust takar: Lubell-Yamamoto-Meshalkin. További érdekesség, hogy ennek egy általánosabb alakját Bollobás Béla is bebizonyította 1965-ben.

Bizonyítás. Nyilván ha $\mathcal{F}$ egy Sperner-rendszer, akkor $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(V)$, ahol $\mathcal{P}(V)$ a V hatványhalmaza. Vegyünk ebből a hatványhalmazból egy tetszőleges maximális láncot $L_1 \subset L_2 \cdots \subset L_n = V$ ahol $|L_i| = i$. Minden ilyen lánc megfeleltethető az alaphalmaz egy permutációjának, ahol az i-edik elem a rendezésnél éppen $L_i \setminus L_{i-1}$ egyetlen eleme. Ebből következően tehát $n!$ különböző maximális lánc van. Egy maximális láncnak nyilvánvalóan csak egy eleme szerepelhet $\mathcal{F}$-ben, hiszen másképp sérülne a Sperner-tulajdonság. Most vizsgáljuk meg azt, hogy egy tetszőleges $A \in \mathcal{F}$ halmaz hány láncban szerepelhet. Ha $|A| = k$, akkor nyilvánvalóan $k!(n-k)!$ maximális lánc tartalmazza. Ezek után, ha minden A halmazhoz hozzárendeljük az őt tartalmazó maximális láncokat, egyet sem számolunk kétszer, hiszen egy maximális láncnak legfeljebb egy eleme lehet a $\mathcal{F}$ halmazban. Nyilván ezek száma legfeljebb annyi lehet mint az összes maximális láncok száma és mivel tudjuk, hogy a k elemű $\mathcal{F}$-beli halmazok száma f_k, a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\sum_{k=0}^{n} f_k k!(n-k)! \leq n!$$

Innen $n!$-sal leosztva

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f_k k!(n-k)!}{n!} \leq 1$$

és a binomiális együtthatók definícióját alkalmazva

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{\binom{n}{k}} \leq 1,$$

azaz megkapjuk a keresett egyenlőtlenséget. □

Most már befejezhetjük a Sperner-tétel bizonyítását.

Bizonyítás. A binomiális együtthatók tulajdonságából könnyen látszódik a következő egyenlőtlenség:

$$\binom{n}{k} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Ha az LYM-egyenlőtlenségbe az $\binom{n}{k}$ helyett $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ írunk, akkor

$$1 \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{\binom{n}{k}} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} = \frac{|\mathcal{F}|}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}$$

Beszorozva a nevezővel

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

□

Megjegyzés. Ha $\mathcal{F}$-nek vesszük a $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$-elemű részhalmazok rendszerét, akkor $\mathcal{F}$ Sperner-rendszer, és $|\mathcal{F}| = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Ez mutatja, hogy a tétel becslése éles.

3.1.C. A várva várt lineáris algebra

Nézzük a lineáris algebrai bizonyítást! Ehhez több új fogalmat is be kell vezetnünk.

3.1.8. Definíció. Ha P egy tetszőleges halmazrendszer és egy n-elemű S halmaz összes részhalmazát tartalmazza, akkor P-t egy *n rangú Boole-algebrának* nevezzük és B_S-sel jelöljük. Ha $S = \{1, 2, \ldots, n\}$, akkor az egyszerűség kedvért csak B_n-et írunk.

3.1.9. Definíció. Az *y fedi* x-et, ha $x < y$ és nem létezik olyan z, melyre $x < z < y$. Az $x_0 < x_1 < \cdots < x_j$ lánc *telített*, ha minden x_{i+1} fedi x_i-t. A lánc maximális, ha nem része egyetlen másik láncnak sem. Nyilván minden maximális lánc telített.

P egy *jól osztályozott* részbenrendezés, ha létezik egy egyértelmű $\rho\colon P \to \{1, 2, \ldots, n\}$ leképezés amelyre az igaz, hogy:

(i) $\rho(x) = 0$, ha x egy tetszőleges P-beli maximális lánc kezdőeleme.

(ii) $\rho(y) = \rho(x) + 1$, ha y fedi x-et.

3.1.10. Definíció. Legyen P véges részbenrendezés, P *n-magasságú*, ha jól osztályozott és a P-ben lévő összes maximális lánc hossza n-nel egyezik meg.

Ezek után nem nehéz belátni, hogy B_n magassága n.

Megjegyzés. Legyen $P_j = \{x \in P\colon \rho(x) = j\}$. Ez alapján P-t könnyen felírhatjuk diszjunkt antiláncok uniójaként, azaz $P = P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n$, ahol minden P-ben lévő maximális lánc $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ alakú és $\rho(x_j) = j$. A továbbiakban sokat használjuk a $p_j = |P_j|$ jelölést.

Ha $P = B_n$, akkor a megjegyzés alapján $p_j = |\{x \subseteq \{1,2,\dots,n\}\colon |x| = j\}| = \binom{n}{j}$

3.1.11. Definíció. Egy n-magasságú P részbenrendezés *rangszimmetrikus*, ha $p_i = p_{n-i}$ minden $0 \le i \le n$-re. Továbbá azt mondjuk, hogy P egy *rombuszos* részbenrendezés, ha $p_0 \le p_1 \le \cdots \le p_j \ge p_{j+1} \ge \cdots \ge p_n$ minden $0 \le j \le n$-re.

Megjegyzés. Ha P rangszimmetrikus és rombuszus részbenrendezés, akkor

$$p_0 \le p_1 \le \cdots \le p_m \ge p_{m+1} \ge \cdots \ge p_n \;\; ha,\; n = 2m$$
$$p_0 \le p_1 \le \cdots \le p_m = p_{m+1} \ge \cdots \ge p_n \;\; ha,\; n = 2m+1.$$

Tekintve, hogy B_n esetén a p_i számok nem mások mint a binomiális együtthatók, ebből nagyon könnyen következik, hogy B_n rangszimmetrikus és rombuszos.

Most, hogy bevezettük a szükséges definíciókat, lassan eljutunk a Sperner-rendszerekhez is!

3.1.12. Definíció. Legyen P egy n-magasságú részbenrendezett halmaz. Azt mondjuk, hogy Sperner-tulajdonságú, ha

$$\max\{|A| : \text{A egy antilánc P-ben}\} = \max\{|P_j| : 0 \le j \le n\}.$$

Megjegyzés. Attól, hogy Sperner tulajdonságú egy halmaz, még lehetnek benne P_i-től különböző hosszúságú antiláncok, csak ezen antiláncok leghosszabbika is legfeljebb akkora lehet, mint $\max|P_i|$.

Az eddigiekből következik, hogy ha belátjuk, hogy B_n Sperner tulajdonságú, akkor azzal a kombinatorikus Sperner-tételt is bebizonyítottuk.

Ehhez legyen μ a P_i-ből P_{i+1}-be menő *fedő leképezés*, azaz $\mu\colon P_i \to P_{i+1}$ injektív és $\forall\, x \in P_i$-ra teljesüljön, hogy $x < \mu(x)$. Nyilvánvalóan, ha ilyen fedő leképzés létezik, akkor $p_i \le p_{i+1}$. A fordítottja persze nem feltétlenül igaz, azaz ha $p_i \le p_{i+1}$, nem biztos hogy találunk egy megfelelő leképezést. Hasonlóképpen egy $\nu\colon P_i \to P_{i-1}$ leképezést fedő leképzésnek nevezünk, ha $\nu(x) < x \;\; \forall\, x \in P_i$-re.

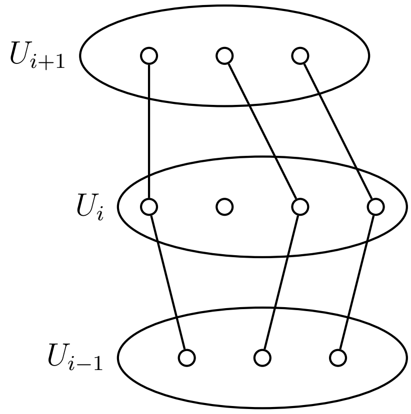
3.1.13. Lemma. *Legyen P egy n-magasságú részbenrendezés. Tegyük fel, hogy léteznek valamilyen*

$$P_0 \to P_1 \cdots \to P_j \leftarrow P_{j+1} \leftarrow \cdots \leftarrow P_n.$$

fedő leképzések. Ekkor P rombuszos és Sperner.

Bizonyítás. Mivel a fedő leképezés injektív, ezért nyilván $p_0 \le p_1 \le \cdots \le p_j \ge p_{j+1} \ge \cdots \ge p_n$. Definiáljunk egy G gráfot a következőképpen:
G csúcsai a P halmaz elemi és két csúcs x és y akkor és csak akkor van összekötve, ha $\mu(x) = y$, ahol μ a fedő leképezés.

Ha elkezdjük felrajzolni a gráfot észrevesszük, hogy a gráf diszjunkt utak uniójából és olyan P-beli csúcsokból áll, amelyek nem szerepelnek a fedő leképezésben. Ezen utak csúcsai P-beli láncok elemei. Így P-t sikeresen felbontottuk diszjunkt láncok uniójára. Tekintve, hogy P rombuszos, így létezik egy maximális P_j szint,



4. ábra. Egy részlet a G gráfból

amelyen minden diszjunkt lánc átmegy. Ezekből könnyen látható, hogy a láncok száma nem más mint p_j. Mivel egy antilánc egy láncnak maximum egy elemét tartalmazhatja, ezért egy tetszőleges A antilánc számosságára igaz, hogy $|A| \leq p_j$. Nyilvánvaló, hogy egy maximális A antilánc minden láncba belemetsz így $|A| = p_j$, ami pont azt jelenti, hogy P Sperner tulajdonságú. □

Ezek után következzen a várt lineáris algebra a bizonyításban! Először is vezessünk be egy jelölést, amit a bizonyításokban is sokat fogunk használni.
Ha X egy tetszőleges halmaz, akkor jelölje $\mathbb{R}X$ az olyan vektorteret, amelynek X elemei egy bázisát alkotják. Nyilván az $\mathbb{R}X \cong \mathbb{R}^{|X|}$ ekvivalencia igaz.

3.1.14. Tétel. *Legyenek $U\colon \mathbb{R}P_i \to \mathbb{R}P_{i+1}$ lineáris leképzelések, továbbá legyenek igazak a következők az U leképzésekre:*

(i) U injektív

(ii) Minden $x \in P_i$, $U(x)$ egy lineáris kombinációja az olyan $y \in P_{i+1}$-beli elemeknek, amelyekre $x < y$. (Az ilyen U leképezés ezentúl fedő operátornak hívjuk.)

Ekkor létezik egy $\mu\colon P_i \to P_{i+1}$ fedő leképezés.

Hasonló módon azt is feltehetjük, hogy létezik egy $U\colon \mathbb{R}P_i \to \mathbb{R}P_{i+1}$ ható lineáris leképzelés, amelyre igaz, hogy

(i) U szürjektív

(ii) U egy fedő operátor

Ebből is következik, hogy létezik egy fedő μ leképezés, ahol $\mu\colon P_{i+1} \to P_i$.

Bizonyítás. Legyen $U\colon \mathbb{R}P_i \to \mathbb{R}P_{i+1}$ lineáris leképezés és $\left[U\right]$ a leképezés mátrixa, továbbá legyen P_i a standard bázis $\mathbb{R}P_i$-ben és ugyanúgy P_{i+1} a standard bázis $\mathbb{R}P_{i+1}$-ben. Ha felírjuk az $\left[U\right]$ mátrixot, akkor az $\left[U\right]$ mátrix oszlopai a P_i halmaz $\{x_1, \ldots, x_{p_i}\}$ elemeinek, sorai a P_{i+1} halmaz $\left\{y_1, \ldots, y_{p_{i+1}}\right\}$ elemeinek felelnek meg. Ha az U leképezés injektív, az $\left[U\right]$ mátrix rangja megegyezik az oszlopok számával, p_i-vel. Közismert, hogy az oszloprang megegyezik a sorranggal, ezért a sorok között is van p_i darab független. Tegyük fel, hogy úgy számoztuk a sorokat, hogy ez pont az első p_i darab.

Most vegyük azt a $p_i \times p_i$-es A mátrixot, ami az $\big[U\big]$ mátrix első p_i sorából és oszlopából áll. Tekintve, hogy ez a négyzetes mátrix teljes rangú, a determinánsa nem nulla, azaz

$$det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \pm a_{\pi(1),1} \dots a_{\pi(p),p_i} \neq 0,$$

és ezért $\exists\, \sigma \in S_n$, hogy a $\pm a_{\pi(1),1} \dots a_{\pi(p),p_i}$ szorzatból egyik tag sem 0. Mivel az $\big[U\big]$ leképzés mátrixa csak azokon a helyeken lehet nem 0, ahol $x_i < y_j$ ezért, ha a $\mu\colon P_i \to P_{i+1}$ leképezést a $\mu(x_k) = y_{\pi(k)}$ képlettel definiáljuk, akkor egy fedő leképezést kapunk.
Hasonló gondolatmenettel levezethető az az eset is, amikor U szürjektív. $\square$
Ezek után már a B_n Boole-algebrában szeretnénk találni fedő leképzésnek egy rendszerét, hiszen ekkor beláttuk B_n Sperner-tulajdonságát.

Minden $0 \leq i < n$ legyen $U_i\colon \mathbb{R}(B_n)_i \to \mathbb{R}(B_n)_{i+1}$ az alábbi fedő operátor:

$$x \in (B_n)_i \text{ esetén } \quad U_i(x) = \sum_{\substack{y \in (B_n)_{i+1} \\ y > x}} y$$

Így tehát U_i egy jól definiált fedő operátor, amelyről azt szeretnénk belátni, hogy injektív, ha $i < \frac{n}{2}$, és szürjektív, ha $\frac{n}{2} \geq i$. Ehhez bevezetünk egy "duális" operátort: $D_i\colon \mathbb{R}(B_n)_i \to \mathbb{R}(B_n)_{i-1}$, ahol

$$y \in (B_n)_i \text{ esetén } \quad D_i(y) = \sum_{\substack{x \in (B_n)_{i-1} \\ x < y}} x.$$

Hasonló módon mint U_i-nél legyen $\big[D_i\big]$ a leképzés mátrixa és $(B_n)_i$ és $(B_n)_{i-1}$ a megfelelő standard bázisok.
Ezek után vizsgáljuk meg egy kicsit jobban a leképezések mátrixait és vegyük észre, hogy

$$\big[D_{i+1}\big] = \big[U_i\big]^{\intercal}$$

Gondoljunk bele, az $[U_i]$ mátrix j. sorának k. oszlopában csak akkor van 1-es, ha $x_j < y_k$. Ez a $\big[D_{i+1}\big]$-ra is igaz, csak itt az oszlopok és sorok pont felcserélődnek! Továbbá jelölje az $I_i\colon \mathbb{R}(B_n)_i \to \mathbb{R}(B_n)_i$ az identikus leképezést, ahol $I_i(u) = u$ minden $u \in \mathbb{R}(B_n)_i$-re. Már csak egy utolsó lemmára van szükségünk az utolsó tétel bizonyításához, hogy utána végleg belássuk B_n Sperner-tulajdonságát.

3.1.15. Lemma. *Legyen $0 \leq i \leq n$, ekkor*

$$D_{i+1}U_i - U_{i-1}D_i = (n-2i)I_i$$

ahol $D_0 = 0$ és $U_n = 0$.
Bizonyítás. Legyen $x \in (B_n)_i$, ekkor azt kell megmutatni, hogy

$$(D_{i+1}U_i - U_{i-1}D_i)(x) = (n-2i)x$$

Tudjuk, hogy

$$D_{i+1}U_i(x) = D_{i+1}\left(\sum_{\substack{|y|=i+1 \\ x \subset y}} y\right) = \sum_{\substack{|y|=i+1 \\ x \subset y}} \sum_{\substack{|z|=i \\ z \subset y}} z$$

Most megnézzük, hogy milyen z-k szerepelnek itt, és milyen együtthatókkal!
Nyilván ha $z \notin (B_n)_i$, akkor z együtthatója 0. Továbbá, ha $z \in (B_n)_i$ és $|x \cap z| < i-1$ akkor z szintén nem fog szerepelni a fenti összegben, mert ilyenkor nincs olyan $y \in (B_n)_{i+1}$, amelyre teljesül, hogy $x \subset y$ és $z \subset y$. Ha most $z \in (B_n)_i$ olyan, hogy $|x \cap z| = i-1$, akkor pontosan egy olyan $y \in (B_n)_{i+1}$ létezik, hogy $x, z \subset y$, így ilyenkor a z együtthatója 1.
Végezetül, ha $x = z$, akkor bármely x-et tartalmazó $y \in (B_n)_i$ elemére $z \subset y$ is teljesül, tehát mivel $n-i$ darab ilyen y létezik, ezért $z = x$ együtthatója $D_{i+1}U_i(x)$-ben éppen $(n-i)$.
Ebből követezik, hogy

$$D_{i+1}U_i(x) = (n-i)x + \sum_{\substack{|z|=i \\ |x \cap z|=i-1}} z$$

Hasonló analógiával kapjuk, hogy

$$U_{i-1}D_i(x) = ix + \sum_{\substack{|z|=i \\ |x \cap z|=i-1}} z$$

A felső egyenletből kivonva az alsót kapjuk a keresett egyenlőséget. □
Már csak egy tétel van hátra az eredeti bizonyítás befejezésig.

3.1.16. Tétel. *A fentebb definiált U_i operátor injektív, ha $i < n/2$ és szürjektív különben.*

Bizonyítás. Lineáris algebrai tanulmányainkból tudjuk, hogy valós négyzetes mátrix és transzponáltjának szorzata pozitív szemidefinit és ebből következően csak nemnegatív valós sajátértéke van. Az előző lemmából tudjuk, hogy

$$D_{i+1}U_i = U_{i-1}D_i + (n-2i)I_i$$

Itt tehát $D_{i+1}U_i$ és $U_{i-1}D_i$ pozitív szemidefinit mátrixok és mivel I_i-nek minden vektor sajátvektora, az $U_{i-1}D_i + (n-2i)I_i$ mátrixnak a sajátvektorai pont az $U_{i-1}D_i$ sajátvektorai, sajátértékeit pedig úgy kapjuk meg, hogy az $U_{i-1}D_i$ sajátértékeihez hozzáadunk $(n-2i) > 0$-t. Ez azt jelenti, hogy $D_{i+1}U_i$ minden sajátértéke pozitív és ekkor viszont $D_{i+1}U_i$ invertálható, és így U_i injektív.

Az, hogy $i > n/2$ esetén az U_i leképezés szürjektív, hasonlóképp következik. □

3.1.17. Következmény. B_n Sperner tulajdonságú.

3.2. Erdős-Ko-Rado-tétel

3.2.A. Egy kihagyhatatlan bizonyítás

A Sperner rendszereknél eddig azt vizsgáltuk, ha egy halmazrendszer bármelyik két eleme egymással nincs relációban, mekkora lehet ezen halmazrendszer méretének a maximuma. Az Erdős-Ko-Rado-tételnél kifejezetten szeretnénk, ha a halmazrendszer elemei metszenék egymást. Ekkor is kapunk egy felső becslést a halmazrendszer méretére.

3.2.1. Tétel. *Legyen $X = \{1, \ldots, n\}$ és $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ olyan halmazrendszer, melynél $\forall A \in \mathcal{F}$-re $|A| = k \leq n/2$ és tetszőleges $A, B \in \mathcal{F}$ esetén $A \cap B \neq \emptyset$. Ekkor*

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$$

Először nézzük meg a kombinatorikus bizonyítást, hiszen ezt kár lenne kihagyni!

Bizonyítás. (Katona O.H. Gyula 1972) Egy házigazda és $n-1$ vendége leülnek egy kör alakú asztalhoz. A házigazda egy rögzített helyen, az asztalfőn ül. Az $\mathcal{F}$ elemei olyan k tagú társaságok, akik egymás barátai, ezért az asztalnál k egymás melletti helyre akarnak ülni és ezáltal egy ívet alkotni. Ültessük le valahogy a vendégeket, ilyenkor vannak társaságok, amelyek ívet alkotnak és vannak amelyek nem. A feltétel szerint bármelyik két társaságnak van közös tagja. Belátjuk, hogy legfeljebb k darab ív lehet az asztal körül.
Az asztalon két szomszédos hely között egy pohár van. Ha az egyik pohárnál két ívet alkotó társaság kezdődne, akkor az egyik balra ülne a pohártól, a másik meg jobbra, hiszen máskülönben egybeesnének. (Minden társaság k tagú!) Mivel azonban $k < n/2$, ebben az létezne két olyan társaság, amelynek nincs közös tagja, amely a feltétel szerint nem lehetséges, ezért minden pohárnál legfeljebb egy társaság kezdődik. Az első társaságnak minden más társasággal van közös tagja, így az első társaság tagjai között lévő poharaknál kezdődhetnek vagy végződhetnek más ívet alkotó társaságok. Tekintve, hogy az első társaság tagjai között $k-1$ pohár van, ezért az első társaságon kívül legfeljebb $k-1$ darab társaság alkothat ívet, ami összesen k darab társaság. Így beláttuk, hogy legfeljebb k ív lehet az asztal körül.
Számoljunk most össze, hány eleme van $\mathcal{F}$-nek. Tudjuk, hogy összesen $(n-1)!$ különböző ülésrend lehetséges. Ha minden permutációnál megszámoljuk az ívet alkotó társaságokat, akkor legfeljebb $k(n-1)!$ társaságot számolhatunk, mivel az előbb beláttuk, hogy egy ülésrendnél legfeljebb k darab ív lehet az asztalnál. Ezzel a módszerrel viszont egy társaságot többször is számolunk, egészen pontosan $k!(n-k)!$-szer. Tehát

$$|\mathcal{F}| \leq \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}.$$

□

3.2.B. Kneser-gráf

Ezek után térjünk át egy kicsit másféle bizonyításra, ahol már nagyobb szerepe lesz a Kneser-gráfnak és sajátértékeinek!

3.2.2. Definíció. KG(n,k) egy *Kneser-gráf*, ha a gráf csúcsai az n-elemű halmaz, k-elemű részhalmazai és két csúcs akkor és csak akkor van összekötve, ha a két halmaz diszjunkt.

Ez után a definíció után könnyen látszik, hogy az Erdős-Ko-Rado-tétel egy ekvivalens átfogalmazása az, hogy

$$\alpha(KG(n,k)) \leq \binom{n-1}{k-1}$$

ahol α a független csúcsok maximális száma. Ahhoz, hogy ezt belássuk még be kell bizonyítanunk pár tételt!

3.2.3. Tétel. *Legyen G egy n-súcsú d-reguláris gráf, azaz G minden csúcsának foka d, és legyenek $d = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ a G sajátértékei. Legyen $S, T \subseteq V(G)$, ahol $S \cup T = V(G)$ és $S \cap T = \emptyset$. Ekkor*

$$(d - \lambda_2)\frac{|S|\,|T|}{n} \leq e(S,T) \leq (d - \lambda_n)\frac{|S|\,|T|}{n},$$

ahol $e(S,T) = |\{(u,v) \in E(G)\} \mid u \in S, v \in T|$.

Megjegyzés. Ismeretes, hogy egy d-reguláris gráf szomszédsági mátrixának maximális sajátértéke d és a csupa 1-es vektor a d-hez tartozó sajátvektor.

Ennek bizonyításához szükségünk lesz egy lemmára!

3.2.4. Lemma. *Legyen A egy valós szimmetrikus mátrix $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ sajátértékekkel és a hozzájuk tartozó $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ortonormált sajátvektorokkal. Ekkor*

(i) $\displaystyle\min_{x \neq 0} \frac{x^\intercal Ax}{\|x\|^2} = \lambda_n$

(ii) $\displaystyle\max_{x \perp u_1} \frac{x^\intercal Ax}{\|x\|^2} = \lambda_2$

Bizonyítás. (i) Legyen $x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$. Ekkor

$$x^\intercal Ax = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i \geq \lambda_n \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = \lambda_n \|x\|^2$$

Továbbá ${u_n}^\intercal Au_n = \lambda_n \|u_n\|^2$ Így beláttuk az (i)-t.
(ii) Ismét $x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$. Mivel $x \perp u_1$, ezért $\langle x, u \rangle = 0$. Ekkor

$$x^\intercal Ax = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i \leq \lambda_2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = \lambda_2 \|x\|^2.$$

Másrészt ${u_2}^\intercal Au_2 = \lambda_2 \|u_2\|^2$ □

Most már nézhetjük az eredeti tétel bizonyítását!

Bizonyítás. Jelölje A a G gráf szomszédsági mátrixát, és legyen $|S| = s$ és $|T| = t$. Tekintsük azt az x vektort, amely az S elemein t értéket a T elemein pedig $-s$ értéket veszi fel, és legyen y az a vektor, amelynek minden komponense 1. Könnyen látható, hogy ekkor x merőleges az y vektorra, mivel $\langle x, y \rangle = |S|\,t - |T|\,s = st - ts = 0$.

Vegyük észre továbbá, a d-regularitás miatt feltehető, hogy $u_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} y$ és így x merőleges u_1-re. Most nézzük a következő egyenlőséget:

$$\sum_{(i,j)\in E(G)} (x_i - x_j)^2 = d \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2 \sum_{(i,j)\in E(G)} x_i x_j = d\left\|x\right\|^2 - x^\intercal A x.$$

Az előző lemmából következik, hogy

$$(d-\lambda_2)\left\|x\right\|^2 \leq d\left\|x\right\|^2 - x^\intercal A x \leq (d-\lambda_n)\left\|x\right\|^2.$$

Másrészt

$$\sum_{(i,j)\in E(G)} (x_i - x_j)^2 = e(S,T)(t-(-s))^2 = e(S,T)(t+s)^2 = e(S,T)n.$$

Ezenfelül,

$$normx^2 = ts^2 + st^2 = st(s+t) = stn.$$

Ezt beírva az egyenlőtlenségbe,

$$(d-\lambda_2)stn \leq e(S,T)n \leq (d-\lambda_n)stn.$$

Átrendezve kapjuk, hogy

$$(d-\lambda_2)\frac{st}{n} \leq e(S,T) \leq (d-\lambda_n)\frac{st}{n}.$$

□

3.2.5. Tétel. ***(Hofmann-Delsarte becslés)*** *Legyen G egy n-csúcsú d-reguláris gráf $d = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ sajátértékekkel. Ekkor*

$$\alpha(G) \leq \frac{-\lambda_n n}{d-\lambda_n}$$

Bizonyítás. Legyen S egy legnagyobb független halmaz, és $T = V(G) \setminus S$. Ekkor $|S| = \alpha(G)$ és $e(S,T) = d|S| = d\alpha(G)$. Az előző tétel szerint:

$$e(S,T) \leq (d-\lambda_n)\frac{|S|\,|T|}{n}$$

Behelyettesítve kapjuk, hogy

$$d\alpha(G) \leq (d-\lambda_n)\frac{\alpha(G)(n-\alpha(G))}{n}$$

Osszunk $\alpha(G)$-vel és szorozzunk $n/(d-\lambda_n)$-nel, ekkor

$$\frac{nd}{d-\lambda_n} \leq n - \alpha(G)$$

Átrendezve

$$\alpha(G) \leq \frac{-\lambda_n n}{d-\lambda_n}$$

□

Most már rátérhetünk az Erdős-Ko-Rado-tétel bizonyítására!
A következő tétel bár elengedhetetlen, bizonyítása közel sem triviális, ezért nem bizonyítjuk.

3.2.6. Tétel. *A Kneser-gráf sajátértékei*

$$(-1)^i\binom{n-k-i}{k-i}$$

ahol $i = 0, 1, \ldots, k$. *Az* $\binom{n-k}{k}$ *multiplicitása* 1, *a* $(-1)^i\binom{n-k-i}{k-i}$ *sajátértékek multiplicitása* $\binom{n}{i} - \binom{n}{i-1}$, *ha* $i \geq 1$.

Belátható, hogy a Kneser-gráf $\binom{n-k}{k}$- reguláris, a legkisebb sajátérték pedig $(-1)\binom{n-k-1}{k-1}$. Ekkor a Hofmann-Delsarte becslésből következik, hogy

$$\alpha(KG(n,k)) \leq \frac{\binom{n-k-1}{k-1}\binom{n}{k}}{\binom{n-k}{k} - \binom{n-k-1}{k-1}}$$

Vegyük észre, hogy

$$\binom{n-k}{k} = \frac{n-k}{k}\binom{n-k-1}{k-1}$$

Így a fönti becslés jobb oldalának nevezője:

$$\left(\frac{n-k}{k} + 1\right)\binom{n-k-1}{k-1} = \frac{n}{k}\binom{n-k-1}{k-1}$$

Visszahelyettesítve az egyenlőtlenség jobb oldalába

$$\frac{\binom{n-k-1}{k-1}\binom{n}{k}}{\binom{n-k}{k} - \binom{n-k-1}{k-1}} = \frac{k}{n}\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$$

Ezzel készen is vagyunk az Erdős-Ko-Rado-tétel bizonyításával, amelyet igazából sokkal könnyeben is lehetett volna bizonyítani, de nekünk nem is ez volt az elsődleges célunk.

Irodalomjegyzék

[1] Jiři Matoušek: Thirty-three Miniatures: Mathematical and Algorithmic Applications of Linear Algebra 2018.

[2] Richard P. Stanley: Topics in Algebraic Combinatorics

[3] http://web.cs.elte.hu/~csiki/diszkret_matematika_jegyzet.pdf

[4] Martin Aigner – Günter M. Ziegler: Bizonyítások a könyvből 2009.

[5] L. Babai - P. Frankl: Linear algebra methods in combinatorics 1992.

[6] http://math.unideb.hu/media/vincze-csaba/convexgeometry2014.pdf

[7] http://math.bme.hu/~zlangi/publications/equidistant.pdf

[8] http://www.math.utah.edu/~treiberg/HellySlides.pdf