EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Antal Andrea

Görög örökség a mai matematikában

Szakdolgozat
Matematika BSC, matematikai elemző szakirány

Témavezető
Kutrovátz Gábor

Geometria Tanszék

Budapest, 2019

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek Kutrovátz Gábornak, aki mindenben segített, és mindig számíthattam a segítségére.
Szeretném még megköszönni családomnak és vőlegényemnek, hogy mindvégig mellettem álltak, és mind anyagilag, mind lelkileg is átsegítettek a nehéz időkön.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

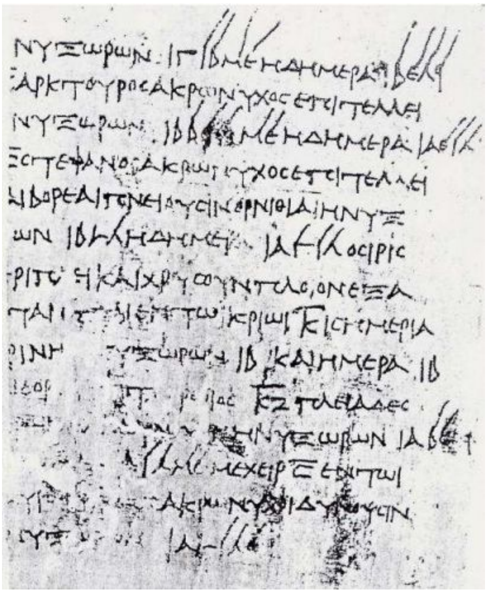
Már általános iskolában is hallhatunk olyan tételeket (pl. Pitagorasz), amelyet már a görögök is ismertek. Úgy gondolom, hogy fontos megismerni, hogyan alakultak ki ezek a fogalmak. Több szempontból is érdekes ez a téma, mivel a történelem egy szelete a régi matematika, másrészt mint matematikus lenyűgözz, hogy milyen régre visszanyúlik a ma általam is használt tételek, definíciók. A görög matematika abból a szempontból is érdekes, mivel geometriával fejeztek ki olyan problémákat is, amelyet algebrai úton könnyebb. Az algebrai tudásukat a mezopotámiaiaktól vették át.

A szakdolgozatomban olyan görög matematikusokat mutatok be, akik már az ókorban is állítottak, illetve bizonyították azokat, ha nem is teljesen a mai használt formájában.

2. fejezet

A tudás fennmaradása

A görögök papirusztekercsekre jegyezték fel a tudásukat, azonban ez egy idő után elrohadt. Akkor mégis hogyan maradt fent? Nagy Sándor vitte be a görög matematikát Egyiptomba, ahol szárazabb a klíma, így ott fennmaradtak a tekercsek. A feltehetőleg legrégebbi eredetiben fennmaradt görög tudományos szöveget K.e. 300 körülire teszik, amit egy múmia mellett találtak. Eredeti formában maradt fenn, a szöveg a naptászámítással kapcsolatos szöveget tartalmaz.



1. ábra

Miután Kr.u. 79-ben kitört a Vezúv, amely során egy városi könyvtárat is eltemetett a láva, így viszont konzerválta a dokumentumokat, amelyben utalásokat találtak az Euklidész Elemek című könyvére. Mivel az ókorban egy könyvet többször lemásolhatták, így valószínűleg ez azért maradt fenn. A másolni nem lehet hibátlanul, ezért a történészek feladata, hogy tudják, mit miről másolhattak.

3. fejezet

Thálész (Kr.e. 624)

Thálész foglalkozott először matematikával, csillagászattal. Magáról az életéről nagyon kevés információ maradt fenn az utókornak. Platón és Arisztotelész utaltak rá, Proklosz az Elemekhez írt kommentárokat, amelyben hivatkozik Thálészra, illetve még Eudémosz is, aki Arisztotelész egykori mestere volt.

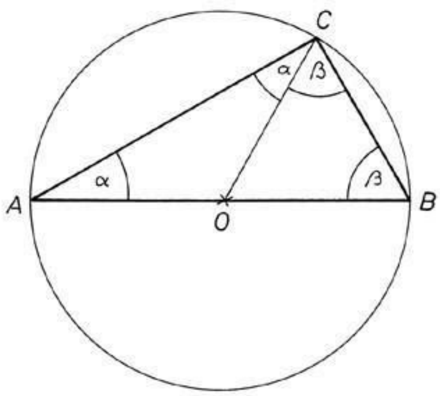
3.1 Thálész-tétel és megfordítása

Tétel: Ha egy kör átmérőjének két végpontját összekötjük a kör bármely más pontjával, akkor a kapott háromszög derékszögű. (A kör átmérője a derékszögű háromszög átfogója.)

Bizonyítás: Bizonyításához az O középpontú kör átmérőjére rajzolt megfelelő ABC háromszög A-nál lévő szögét α-val, a B-nél levő szögét β-val jelöljük.

Miután behúzzuk az OC sugarat, akkor az AOC és COB háromszögek egyenlő szárúak. Így a C-nél lévő szög $\alpha+\beta$. Ebből következik, hogy $\alpha+\beta+(\alpha+\beta)=180°$, ami $2\alpha+2\beta=180°$, ebből következik, hogy $\alpha+\beta=90°$

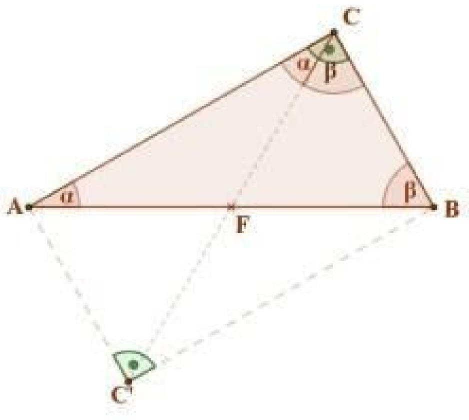
Tehát az *ABC* háromszög valóban derékszögű.



2. ábra

A tétel megfordítása: A derékszögű háromszög köré írt kör középpontja az átfogó felezőpontja.

Bizonyítás: Tekintsük az ABC derékszögű háromszöget, melynek átmérője az AB oldal, tehát ACB∠ =90°. Tükrözzük ezt a háromszöget az AB átfogó F felezési pontjára.C pont tükörképét jelöljük C’. Az így kapott alakzat a középpontos tükrözés tulajdonságai miatt téglalap, tehát átlói felezik egymást. A téglalap F középpontja egyenlő távol van az ABC háromszög mindhárom csúcsától, ezért ez az F pont éppen az ABC háromszög köré írt körének a középpontja, AF=FB=FC a köré írt kör sugara.

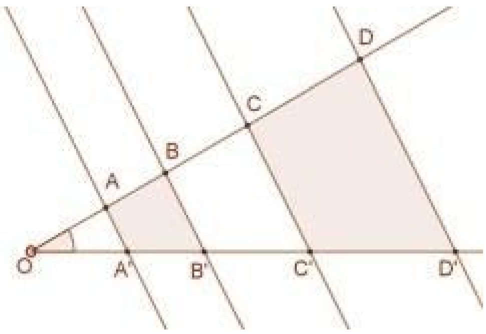


3. ábra

3.2 Párhuzamos szelők tétele és megfordítása

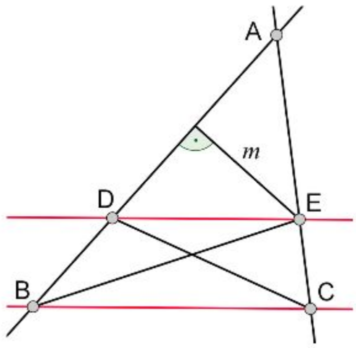
Tétel: Ha egy adott szög szárait párhuzamos egyenesekkel metsszük, akkor az egyik száron keletkezett szakaszok hosszának aránya egyenlő a másik száron keletkezett megfelelő szakaszok hosszának arányával.

A mellékelt ábra szerint: AB:CD=A’B’:C’D’



4. ábra

Bizonyítás: "AD:DB=$T_{ADE\Delta}$:$T_{BDE\Delta}$, ugyanis a háromszögek magassága (m-mel jelölve az ábrán) megegyezik. Hasonlóan AE:EC=$T_{ADE\Delta}$:$T_{ECD\Delta}$. Viszont $T_{BDE\Delta}$=$T_{ECD\Delta}$, mert alapjuk (|DE|) és magasságuk is megegyezik, tehát $T_{ADE\Delta}$:$T_{BDE\Delta}$=$T_{ADE\Delta}$:$T_{ECD\Delta}$ ebből következően AD:DB=AE:EC, amit bizonyítani kellett."



5. ábra

A tétel megfordítása: Ha két egyenes egy szög száraiból olyan szakaszokat metsz ki, amelyeknek aránya mindkét száron egyenlő, akkor az eredeti két egyenes párhuzamos.

Bizonyítás: "A bizonyítás indirekt:

Tegyük fel, hogy |AD|:|DB|=|AE|:|EC|, de DE nem párhuzamos BC-vel. Húzzuk tehát be azt a h egyenest a B ponton keresztül, ami párhuzamos DE-vel! Legyen h és f metszéspontja *C*! A párhuzamosság miatt írjuk fel a párhuzamos szelők tételét: |AD|:|DB|=|AE|:|EC'| A feltétel összevetve |AE|:|EC|=|AE|:|EC'|, tehát |EC|=|EC'|, vagyis C≡C', így viszont a DEkBC, tehát a tétel megfordítása is igaz."

Tétel: Az egyenlő szárú háromszög alapján fekvő szögek egyenlőek.

Tétel: A csúcsszögek egyenlőek.

Tétel: Ha adott két háromszög, amelyeknek egy oldal és a rajta fekvő két szöge egyenlő, akkor a két háromszög is egyenlő.

4. fejezet

Pitagorasz (Kr.e. 570)

Püthagorasz vallási szektát alapított, ahol a matematikai tanítás volt központban. Két csoportra lehetett szétválasztani, az egyik csoport csak hallgatták a tanítást, viszont a másik fele együtt éltek, és szigorú szabályokat követtek, ilyen volt például az, hogy a tagoknak nem szabadott húst enniük.

Hipparosz a csoport egyik vezetője írt egy könyvet, melyben a szekta összes tudását lejegyezte, így megszűnt ez a társaság.

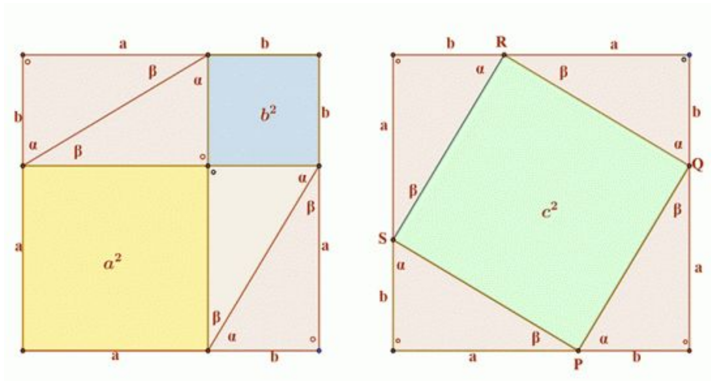
4.1 Pitagorasz tétel

A Pitagorasz tétel talán a legismertebb tétel, hiszen már általános iskolában is szó esik róla. Magát a tételt már régebben is ismerték, éldául az egyiptomi Rhind-papiruszon szerepel egy 3; 4; 5 oldalú háromszög. A babilóniai agyagtábla pitagoraszi számhármasokat tartalmaz. Jelenlegi ismereteink szerint Pitagorasz bizonyította be először ezt a tételt.

Tétel: A derékszögű háromszög befogók négyzetének az összege egyenlő az átló négyzetével. Tehát $a^2+b^2=c^2$**.**

A tétel bizonyítása:

Vegyünk két négyzetet, amiknek oldalai $a+b$. a és b a derékszögű háromszög befogói. Az így kapott négyzetek egyenlőek. Az első négyzetbe írunk egy a és egy b oldalú négyzetet, és így kaptunk 4 darab, az eredeti háromszöggel egybevágó derékszögű háromszöget. A másik négyzetben megtalálható ez a 4 darab, az eredeti háromszöggel egybevágó derékszögű háromszög, amelynek átfogója c. Így tehát a középső PQRS síkidom minden oldala c.



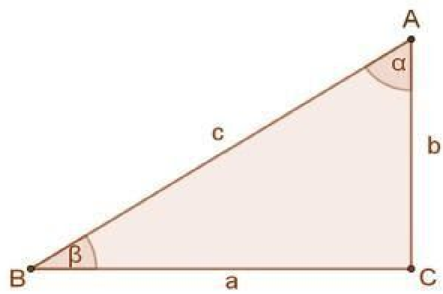
6. ábra

Be kell még látni, hogy a csúcsainál derékszög van. Mivel azonban az eredeti háromszögben $\alpha+\beta=90°$, ezért ennek a síkidomnak minden szögére $180°-(\alpha+\beta)=90°$. Tehát a PQRS síkidom négyzet területe c^2. Ha mindkét négyzetből elvesszük a 4 darab derékszögű háromszöget, a maradékok területe egyenlő, azaz $a^2+b^2=c^2$.

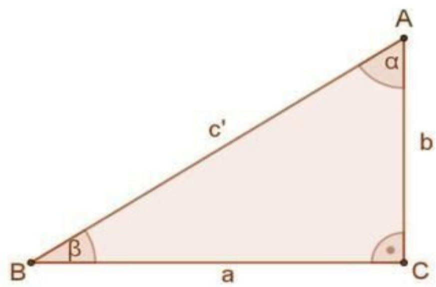
Megjegyzés: Nem csak természetes számokra igaz a Pitagorasz tétel. Például $1,1,\sqrt{2}$.

A tétel megfordítása: Ha egy háromszög két oldalára emelt négyzetek területének összege egyenlő a harmadik oldalra emelt négyzet területével, akkor a háromszög derékszögű.

Bizonyítás: Legyen adott egy ABC háromszög, amelynek oldalaira teljesül, hogy $a^2+b^2=c^2$. Be kell bizonyítani, hogy az ABC háromszög derékszögű.



7. ábra



8. ábra

Vegyünk most fel egy a és b befogójú derékszögű háromszöget. Ennek átfogóját jelöljük c-vel. Erre a háromszögre teljesül a Pitagorasz-tétel, tehát $a^2+b^2=c'^2$.

A két összefüggés csak akkor lehet egyszerre igaz, ha $c^2=c'^2$. Ez viszont azt jelenti, hogy a két háromszög egybevágó, tehát az eredeti ABC háromszög is derékszögű.

Tétel alkalmazása:

1. Ha egy derékszögű háromszögnek ismerjük két oldalát, akkor a Pitagorász tételt felírva, megkapjuk a harmadik oldal hosszát.
2. Ha adott egy háromszög, és annak három oldalai a,b,c, ahol c oldal a legnagyobb, akkor a Pitagorasz tételt felírva a következő tulajdonságokat tudjuk meg:

    i. Ha $a^2+b^2>c^2$, akkor a háromszög hegyesszögű
    ii. Ha $a^2+b^2=c^2$, akkor a háromszög derékszögű
    iii. Ha $a^2+b^2<c^2$, akkor a háromszög tompaszögű

Az ókorban a tétel kimondása nélkül is hoztak létre derékszögeket. Ez alapvetően fontos volt, hiszen az építkezéseken, bútorok készítésében és még sok más esetben is használták ezt a tudást. Az egyiptomiak 13 darab egyforma távolságban kötöttek csomókat, és így kaptak egy 3,4 és 5 részre osztott kötelet, amit a derékszög előállítására használtak.

Feladat: Hány méter hosszú az a létra, amit a falhoz támasztva onnan 3 m-re van, és 4 m magasra szeretnénk felfüggeszteni a falon?

Megoldás: A fal és a föld 90°-os szöget zárnak be, így a fal, föld és létra által alkotott háromszög derékszögű, és a feladatban a létrát megfeleltethetjük a háromszög átfogójával, így 5 m hosszú a létra.

4.2 Összemérhetetlenség

Az összemérhetetlenség fogalmát az ókorban használták, a mai neve irracionális számok.

Definíció: Adott két szakasz, egységnek választott szakaszra nézve összemérhetetlen, ha nem mérhető fel rájuk egész számszor ugyanaz az egységnyi hosszúságú szakasz. Két szakasz pedig akkor összemérhetetlen, ha bármekkora szakaszt is egységnek választva, minden ilyen szakaszra nézve összemérhetetlenek.

4.2.1 Összemérhetetlenség a geometriában

Az euklideszi geometria szakaszaira általában nem igaz, hogy tetszőleges szakaszpár hosszaránya kifejezhető racionális szám formájában.

Bizonyítás:

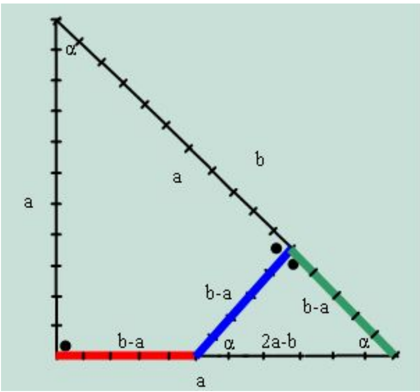
1. Indirekt módon

Tegyük fel, hogy az arány racionális.

Válasszuk az átfogó hosszát egységnyire. Ha az oldalhossz egységnyi, akkor a Pitagorasz-tétel szerint az átfogó éppen a kettes szám négyzetgyöke. Valóban, éppen ezt mondja a Pitagorasz-tétel: az átfogók hosszának négyzetösszegét véve, ami jelen esetben kettő megkapjuk az átfogó négyzetét; ebből négyzetgyököt vonva az átfogó hossza adódik. Márpedig a kettő négyzetgyöke nem racionális szám, nem fejezhető ki két egész szám hányadosaként. Ellentmondáshoz jutottunk.

2. Geometriai eszközökkel

A mellékelt ábra egy egyenlő szárú derékszögű háromszöget mutat, melynek átfogójára és befogójára a bizonyítandó állítással ellentétben mégiscsak sikerült egy közös egységet *a*-szor ill. *b*-szer pontosan felmérni. Legyen ez *a* felmért egység a lehető leghosszabb ilyen felmérhető egység. Most az átfogóra mérjünk fel a egységet. A maradék hossza *b-a* egység. Az átfogóra felmért *a* egység hosszú szakasz végpontjába állítsunk egy merőlegest, amely valahol metszi a vízszintes befogót. Észrevehetjük, hogy a piros, a kék és a zöld szakaszok egyenlő, *b-a* egység hosszúságúak. A kapott kisebb háromszög és az eredeti háromszög hasonlóak. A kisebb háromszög átfogója *2a-b* egység hosszúságú, vagyis oldalaihoz is megfelelőnek látszik a használt egység. A kisebb háromszög méretét most arányosan az eredeti háromszög méretére növelve azt kapjuk, hogy a lehető legnagyobbnak vélt közös egységből most kevesebb is elfér az oldalakon. Ez ellentmondás.



9. ábra

5. fejezet

Zénón (Kr.e. 460)

Zénón olyan paradoxonokat hozott létre, melyek a mozgás csak illúzió állítást támasztják alá. Nyolc maradt fenn, viszont ezek közül többet is már az ókorban is megcáfolhattak. A három leghíresebb paradoxonja a következők:

1. Akhilleusz és a teknős paradoxonja
2. A fának hajított kő paradoxonja
3. A nyílvvesző paradoxonja.

1. Akhilleusz versenyt akar fut egy teknőssel, mivel úgy gondolja, hogy sokkal gyorsabb nála, így 100 láb előnyt adott ellenfelének. Elindul a verseny, Akhilleusz pár lépéssel ott terem, ahol a teknős kezdett, de ez idő alatt a teknős is haladt egy keveset. Majd Akhilleusz lép még egyet, és ott terem, ahol a teknős az előbb volt, de a teknős addig megint megtett egy kicsit. Tehát akármilyen gyorsan halad Akhilleusz a teknős mindig előtte lesz. Zénón érvelése azt mutatja be, hogy Akhilleusz bármilyen gyorsan halad, sohasem fogja legyőzni, utolérni a teknőst. Ma már viszont tudjuk, hogy végtelen sok szám összege is adhat véges eredményt. Ennél a paradoxonnál, ha összeadjuk a végtelen sok időszeletet, amit az egyes lépések vesznek igénybe, akkor pont azt az időt kapjuk meg, amelyre Akhilleusznak van arra szüksége, hogy utolérje a teknőst. Ha ennél több időt adunk, akkor meg is előzi. Azonban ezt a megoldást néhányan megkérdőjelezik, hiszen, ha végtelen sok időszelet van, akkor az összeadásuk is végtelen sokáig tart.

2. Ez a paradoxon az előző változata. 8 lábnyira állunk egy fától, kezünkben egy kövel. A követ a fa felé hajítjuk. Ahhoz, hogy a kő elérje a fát meg kell tenni a köztünk, és a fa között lévő távolság felét, tehát 4 lábnyit, ehhez valamennyi időre van szüksége. Ezután a maradék négyláb felét kell megtennie, vagyis további 2 lábnyit. Ehhez ismét adott idő kel. Ezután további egy, majd fél, majd negyed lábnyit kell megtennie, és így tovább a végtelenségig. Zénón emiatt úgy gondolta, hogy a kő soha nem ér el a fához.

3. Képzeljünk el egy repülő nyílvesszőt. Bármely időpillanatban a nyíl a levegő ismert pontján tartózkodik. Ha ennek a pillanatnak nincs időbeli kiterjedése, akkor a nyílnak nincs ideje, hogy elmozduljon, tehát egy helyben van. Hasonló logikával beláthatjuk azt is, hogy a következő időpillanatban is nyugalomban van, viszont mivel így az összes időpillanatra igazolható, így a nyílvessző egyáltalán nem mozog, így a mozgás csak illuzió. Pusztán azért, mert egy kimerevített időpillanatban a nyílvessző nem mozog, az még nem jelenti azt, hogy

nem mozog. A különböző időpontokban a nyílvessző mindig máshol áll, így nem mondhatjuk rá azt, hogy nem mozog.

6. fejezet

Euklidesz (Kr.e. 300)

Euklidesz Kr.e. 300 körül írta az Elemek című művét. Több írása is fennmaradt, viszont azok nem teljesek vagy esetleg nem matematikával foglalkozott.

Idős korában Alexandriába költözött, ahol matematikát is tanított.

6.1 Definíciói

“1. Pont az, aminek nincs része.

2. A vonal szélesség nélküli hosszúság.

3. A vonal végei pontok.

4. Egyenes vonal az, amelyik a rajta levő pontokhoz viszonyítva egyenlően fekszik.

5. Felület az, aminek csak hosszúsága és szélessége van.

6. A felület végei vonalak.

7. Síkfelület az, amelyik a rajta levő egyenesekhez viszonyítva egyenlően fekszik.

8. A síkszög két olyan egysíkbeli vonal egymáshoz való hajlása, amelyek metszik egymást, és nem fekszenek egy egyenesen.

9. Ha a szöget közrefogó vonalak egyenesek, egyenes vonalúnak nevezzük a szöget.

10. Ha egy egyenesre egyenest állítunk úgy, hogy egyenlő mellékszögek keletkeznek, akkor a két egyenlő szög derékszög, és az álló egyenest merőlegesnek mondjuk arra, amelyen áll.

11. Tompaszög az, amelyik nagyobb a derékszögnél.

12. Hegyesszög, amelyik kisebb a derékszögnél.

13. Határ az, ami vége valaminek.

14. Alakzat az, amit egy vagy több határ vesz körül.

15. A kör síkbeli alakzat, amelyet egy vonal vesz körül úgy, hogy az e vonal és egy, az alakzat belsejében fekvı pont közé eső szakaszok egyenlők egymással.

16. Ezt a pontot a kör középpontjának nevezzük.

17. A körnek átmérője bármely, a középponton áthaladó egyenes vonal, amely mindkét oldalt a kör kerületén végződik. Az ilyen egyenes félbevágja a kört.

18. A félkör olyan alakzat, amelyet egy átmérő és az általa kimetszett körív vesz körül.

19. Egyenes vonalú alakzatok (azaz sokszögek) azok, amelyeket egyenes vonalak vesznek körül, háromoldalúak, amelyeket három, négyoldalúak, amelyeket négy, sokoldalúak pedig, amelyeket négynél több egyenes vesz körül.

20. A háromoldalú alakzatok közül egyenlı oldalú háromszög az, amelynek három egyenlı oldala van, egyenlı szárú, amelynek csak két egyenlı oldala van, ferde pedig, amelynek három nem egyenlı oldala van.

21. Továbbá a háromoldalú alakzatok közül derékszögű háromszög az, amelynek van derékszöge, tompaszögő, amelynek van tompaszöge, hegyesszögű pedig, amelynek három hegyesszöge van.

22. A négyoldalú alakzatok közül négyzet az, amelyik egyenlı oldalú és derékszögű, téglalap, amelyik derékszögű, de nem egyenlı oldalú, rombusz, amelyik egyenlı oldalú, de nem derékszögű, romboid, amelynek a szemközti oldalai és szögei egyenlık egymással, de sem nem egyenlı oldalú, sem nem derékszögű. A többi négyoldalú neve legyen trapéz.

23. Párhuzamosak azok az egyenesek, amelyek ugyanabban a síkban vannak és mindkét oldalt végtelenül meghosszabbítva egyiken sem találkoznak.”

Tétel: A háromszög szögfelezői egy pontban metszik egymást.

Definíció: Két síkbeli egyenes párhuzamos, ha nem metszik egymást.

Megjegyzés: Hány sokszög szerkeszthető meg euklideszi módon? Például a szabályos háromszög, négyszög, ötszög, hatszög, de a szabályos hétszöget nem (Gauss).

Megjegyzés: Minden szöget elharmadolhatunk? Nem, például a 90°-ot igen, de a 60°-ot nem (Gauss).

Tétel: Végtelen sok prímszám van.

Bizonyítás: Indirekt módon

Tegyük fel, hogy véges sok prím van. p_1, p_2,...,p_n. n a prímszámok szorzata +1. Így n nem osztható a véges sok prímek egyikével sem, tehát vagy új prím szám, vagy van egy újabb prímosztó. Tehát ellentmondásra jutottunk, a tétel igaz.

6.2 Euklideszi algoritmus

Az algoritmus egy számelméleti algoritmus, amellyel két szám legnagyobb közös osztója határozható meg. Eukleidész az elemekben írta le. Ez az egyik legrégebbi algoritmus.

Alapötlete az, hogy a legnagyobb közös osztó nem változik, ha a nagyobb számot a két szám különbségével helyettesítjük. Például 60 és 15 legnagyobb közös osztója 15, amely legnagyobb közös osztója 15-nek és a 45-nek. Ez a helyettesítés csökkenti a nagyobb számot, így a cserék ismétlésével egyre kisebb számokat kapunk, míg a két szám egyenlő nem lesz. Az eredeti számpár legnagyobb közös osztója. Ha az algoritmust visszafelé kezdjük el, akkor találunk két egész tényezőt, amelyeket felhasználva a legnagyobb közös osztó kifejezhető a két eredeti szám lineáris kombinációjaként.

Az algoritmusnak van egy gyorsabb változata is, amely a kivonások helyett maradékos osztást használ. Hiszen az algoritmus egyik hibája, hogy ha az egyik szám sokkal nagyobb, mint a másik, akkor több lépést kell megtenni. Viszont a maradékos osztást egy lépésben elvégezhetjük. Az algoritmus abban az esetben ér véget, amikor a maradék nulla. Így a legnagyobb közös osztó éppen a kisebb szám. A 20. században további optimalizálták.

6.2.1 Az algoritmus leírása

Az euklideszi algoritmus egymást követő lépései az előző lépés eredményéből indulnak ki. A lépéseket a k index számolja nullától kezdődően. A kezdőlépés a $k = 0$, a következő lépés a $k = 1$ indexet használja, és így tovább.

Minden lépés az r_{k-1} és r_{k-2} maradékokat használja. A maradékok folyamatosan csökkennek, azért r_{k-1} kisebb, mint r_{k-2}. A cél az, hogy találjunk egy q_k hányadost és egy r_k maradékot, amellyel az

$r_{k-2}=q_k r_{k-1}+r_k$

egyenlőség teljesül.

A kezdő lépésben az r_{n-2} és r_{n-1} számok a kiindulási számok. A következő lépésben a kisebb kezdőszám és a nulladik lépésben kapott r_0 maradékot használja, és így tovább. Így az algoritmus felírható mint az

$a=q_0b+r_0$

$b=q_1r_0+r_1$

$r_0=q_2r_1+r_2$

$r_1=q_3r_2+r_3$

...

egyenlőségek sorozata.

Tétel: Ha a kisebb szám az a, akkor az első lépésben az algoritmus felcseréli a számokat. Az r_k maradék mindig kisebb lesz, mint az előző $\boldsymbol{r_{k-1}}$ maradék minden $k \geq 0$. Mivel a maradékok minden lépésben csökkennek, és nem negatívok, így egy idő után lesz egy maradék, ami $r_n = 0$. Az utolsó nem nulla maradék lesz a legnagyobb közös osztó. Az n nem lehet végtelen, mert csak véges sok egész van a nulla és az első $\boldsymbol{r_0}$ maradék között.

Bizonyítás: "Az algoritmus érvényessége két lépésben bizonyítható.

Első lépésként lássuk be, hogy az algoritmus véges sok lépés után véget ér. Ennek főleg gyakorlati szempontok miatt van szerepe. Mivel az euklideszi osztás során a maradék kisebb, mint az osztó abszolút értéke, a maradékok szigorúan monoton csökkenő sorozatot alkotnak a természetes számok halmazában, így a sorozat utolsó tagja biztosan nulla, mivel két különböző természetes szám különbsége nem lehet kisebb 1-nél (természetesen az abszolút értékét tekintve):

$|b| > r_0 > r_1 > r_2 > \ldots > r_n >= 0$

A következő lépés, hogy bebizonyítjuk: az utolsó maradék közös osztó. Ehhez alulról felfelé haladunk az eljárásban:

$r_{n-1}=q_n r_n$

$r_{n-2}=q_{n-1}\ r_{n-1}+r_n=(q_{n-1}q_{n+1})r_n$

$r_{n-3}=q_{n-2}r_{n-2}+r_{n-1}$

…

Mivel r_n osztója r_{n-2}-nek és r_{n-1}-nek is, ezért lineáris kombinációjuknak is. Az eljárást végigkövetve kapjuk, hogy $r_n|a$ és $r_n|b$.

Végül bizonyítjuk a maximalitást. Ennek során kihasználjuk azt a tényt, hogy a közös osztók egy szigorúan monoton növekvő természetes számsort alkotnak, amelynek felső határa min(a,b), valamint, hogy a lánc minden tagja osztója az utána következőnek. Tegyük fel, hogy a legnagyobb közös osztó x. Ekkor, mivel rn is közös osztó rn|x. Viszont, mivel a közös osztók osztói a két szám lineáris kombinációinak is, így a lánc elemeire felírva kapjuk:

$x|r_0=a-q_1b$

$x|r_1=b-q_2r_0$

$x|r_2=r_0-q_3r_1$

…

$x|r_n=rn-2-q_nr_{n-1}$

Mivel a feltételünk az volt, hogy rn osztója x-nek, ezért az oszthatóság definíciója $x=r_n$."

6.2.2A lépések száma

Két természetes szám, *a* és *b* legnagyobb közös osztójának kiszámításához szükséges lépések számát *T(a, b)* jelöli. Ha *a* és *b* legnagyobb közös osztója *h*, akkor *a = mh, b = nh*, és az *n* és *m* természetes számok relatív prímek. Ekkor

$T(a, b) = T(m, n)$

ami belátható, ha az algoritmusban mindenütt végigosztunk *h*-val.

Az euklideszi algoritmus rekurzív természete miatt $T(a, b) = 1 + T(b, r_0) = 2 + T(r_0, r_1) = \ldots = n + T(r_{n-2}, r_{n-1}) = n + 1$, ahonnan $T(x, 0) = 0$.

6.2.3 Alkalmazásai

Az algoritmusnak számos alkalmazása van. A törtek egyszerűsítése mellett a moduláris aritmetika osztás műveletének megvalósításában is szerepel. Ehhez az $ax \equiv c \bmod b$ kongruenciát kell megoldani. Alkalmas lánctörtbe fejtéshez és irracionális számok közelítéséhez. Végül, de nem utolsósorban számelméleti tételek bizonyításának is hasznos segédeszköze.

6.3 Irracionális szám

Állítás: A √2 irracionális szám

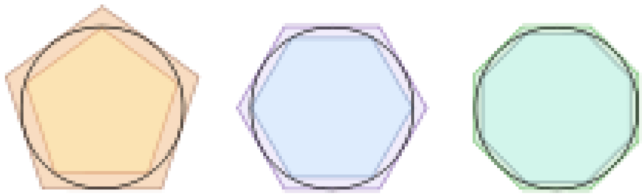
Bizonyítás: Indirekt

Tételezzük fel, hogy √2 racionális, azaz $\sqrt{2}=a:b$, ahol a, b egész számok, és b nem 0. Azt is feltételezzük, hogy $(a,b)=1$, azaz egymáshoz képest relatív prímek, azaz a tört tovább nem egyszerűsíthető. $\sqrt{2}=a:b$ egyenlőség mindkét oldalát négyzetre emelve $2=a^2:b^2$ Az egyenlőséget b^2-tel szorozva $2b^2=a^2$. Tehát a^2 osztható 2-vel, azaz páros szám, így $a=2c$, így $a^2=4c^2$. Ebből: $2b^2=4c^2$, azaz $b^2=c^2$. Azaz b^2 is páros szám lenne, ami nem lehetséges, hiszen feltételeztük, hogy a és b relatív prímek. Ellentmondásra jutottunk. Tehát √2 irracionális szám.

7. fejezet

Arkhimédész (Kr.e. 287)

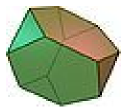
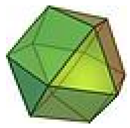
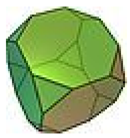
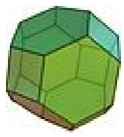
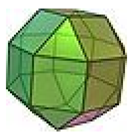
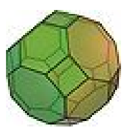
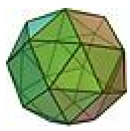
Bebizonyította, hogy a kör kerületének és átmérőjének aránya ugyanannyi, mint területének és sugara négyzetének az aránya. Ezt nem hívta π-nek, de adott rá egy olyan becslést, ami π értékét 3 + 10/71 (kb. 3,1408) és 3 + 1/7 (kb. 3,1429) közé teszi. A felső határként megadott 22/7-et még a középkorban is általánosan használták π közelítő értékeként. Bebizonyította, hogy a gömb felszíne megegyezik a köré írt hengerpalást területével, és a térfogata a köré írt henger térfogatának 2/3 része. Egy másik nevezetes tétele szerint az egyenlő oldalú henger, a beleírható gömb és a hengerbe írható kúp térfogatainak aránya 3 : 2 : 1.

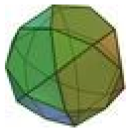
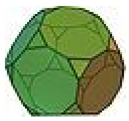
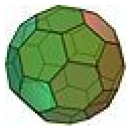
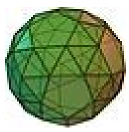
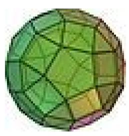
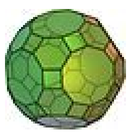


10. ábra

7.1 Arkhimédészi testek

13 arkhimédészi test van. Általában csúcsalakzataikkal adjuk meg őket. Azokkal a szabályos sokszögekkel, amik találkoznak egy csúcsukban.

A test neve	Áttetsző ábrája	Lapok	Élek	Csúcsok	Gömbi szimmetriacsoportok listája
Csonkított tetraéder (3.6.6)		8	18	12	T_d
Kuboktaéder(3.4. 3.4)		14	24	12	O_h
Csonkított kocka vagy csonkított hexaéder (3.8.8)		14	36	24	O_h
Csonkított oktaéder (4.6.6)		14	36	24	O_h
Rombikuboktaéder vagy kis rombikuboktaéder (3.4.4.4)		26	48	24	O_h
Csonkított kuboktaéder (4.6.8)		26	72	48	O_h
Pisze kocka (3.3.3.3.4)		38	60	24	O

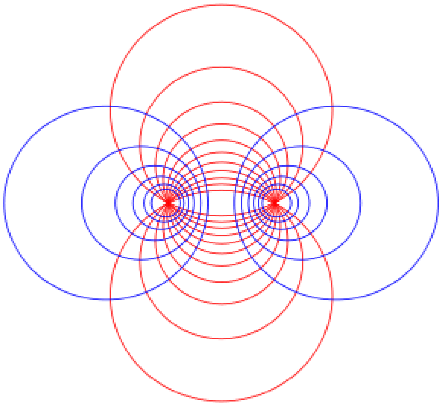
Ikozidodeka éder (3.5.3.5)		32	60	30	I_n
Csonkított dodekaéder (3.10.10)		32	90	60	I_n
Csonkított ikozaéder (5.6.6)		32	90	60	I_n
Rombikozid odekaéder (3.4.5.4)		62	120	60	I_h
Csonkított ikozidodekaé der (4.6.10)		62	180	120	I_h
Pisze dodekaéder (3.3.3.3.5)		92	150	60	I

8. fejezet

Apollóniusz (Kr.e. 262)

8.1 Apollóniusz-kör

Az Apollóniusz-kör azoknak a pontoknak a mértani helye a síkban, amelyeknek két adott ponttól mért távolságainak aránya adott 1-nél nagyobb pozitív szám.



11. ábra

Definíció: Az A és B ponthoz és a λ számhoz tartozó Apollóniusz-kör azon P pontok halmaza, amelyekre PA/PB=λ.

Tétel: A pontok kört alkotnak.

Bizonyítás: "Legyen P egy olyan pont, amely nincs rajta AB egyenesén, és amelyre PA/PB=λ. Feltehetjük, hogy PA>PB (ekkor λ >1). PAB háromszögnek P-ből induló belső szögfelezője az AB oldalt egy C pontban metszi, külső szögfelezője pedig λ>1 miatt AB-nek B-ből induló meghosszabbítását metszi D-ben.

Segédtétel:

Ha egy háromszög egyik oldalának az egyenesét a szemközti csúcsból induló (belső vagy külső) szögfelezővel metsszük, akkor a metszéspontnak az oldal végpontjaitól mért távolságai úgy aránylanak egymáshoz, mint a szemközti csúcsból ehhez a végpontokhoz vezető oldalak.Emiatt C és D a keresett mértani helyhez tartózik.

Be kell látni, hogy a mértani helyek minden P pontja ugyanezen a körön van, ehhez elég megmutatni, hogy az AB egyenesen pontjai közül csak C és D tartozik a mértani helyhez. A szögfelezők merőlegesek egymásra, ezért P a CD távolság Thálész-körén van. $\lambda>1$ miatt elég, hogy sem az AB szakaszon, sem a BD félegyenesen nincs más, a mértani helyhez tartozó pont. Ha C az AB távolságon B felé mozog, akkor az AC:CB arány nő. Ha D a BD félegyenesen B-ből kiindulva mozog, akkor a AD:DB arány csökken, ugyanez a helyzet, ha D távolodik B-től. Más szóval C és D helyzete egyértelműen meghatározott, vagyis a keresett mértani hely minden pontja a CD szakasz Thálész-körén van.

Be kell bizonyítani, hogy ennek a körnek minden pontja a mértani helyhez tartozik. Legyen P a körnek egy további pontja. Elég belátni, hogy PC és PD a PAB háromszög szögfelezői, ekkor $PA:PB=CA:CB=\lambda$. Ehhez indirekt tegyük fel, hogy PAB háromszög szögfelezői PC* és PD*, ami nem azonos a PC és PD egyenesekkel. C és D választása miatt AC:CB=AD:DB és AC*:CB*=AD*:D*B. 1) miatt ez csak úgy lehet, ha vagy CD tartalmazza C*D* távolságot, vagy fordítva. Ekkor viszont CPD szög és C*PD* szög közül az egyik tartalmazza a másikat. Ezzel ellentmondáshoz jutottunk, mivel mindkét szög derékszög. Tehát PC, PD szögfelezők, ekkor CD Thalész-körének minden pontja a mértani helyhez tartozik.”

Hivatkozások

Az ábrákat szintén az alábbi weboldalakról illesztettem be a szakdolgozatomba.

[1]https://matekarcok.hu/pitagorasz-tetele/

[2]https://tudasbazis.sulinet.hu/hu/matematika/matematika/matematika-9-osztaly/a-haromszog-nehany-nevezetes-vonala-es-kore/thalesz-tetele

[3]https://matekarcok.hu/thalesz-tetele/

[4]https://hu.wikipedia.org/wiki/Arkhim%C3%A9d%C3%A9sz#Matematikai_eredm%C3%A9nyei

[5]https://erettsegi.com/tetelek/matematika/mit-ertunk-ket-vagy-tobb-szam-kozos-osztojan-hogyan-hatarozhatjuk-meg/

[6]https://hu.wikipedia.org/wiki/Euklideszi_algoritmus#Form%C3%A1lis_le%C3%ADr%C3%A1sa

[7]https://hu.wikipedia.org/wiki/Inkommenzur%C3%A1bilit%C3%A1s

[8]https://hu.wikipedia.org/wiki/Apoll%C3%B3niusz-k%C3%B6r

[9]https://matekarcok.hu/parhuzamos-szelok-tetele/

[10]https://hu.wikipedia.org/wiki/P%C3%A1rhuzamos_szel%C5%91k_t%C3%A9tele

[11]https://matekarcok.hu/a-gyok2%e2%80%8b%e2%80%8b-irracionalis-szam/

[12]http://hps.elte.hu/~kutrovatz/gorogmat_jegyzet_2009.pdf

[13]https://hu.wikipedia.org/wiki/Z%C3%A9n%C3%B3n_paradoxonjai