Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Lekics László

Igazságos Osztozkodási Algoritmusok

Szakdolgozat

Matematika BSc
Matematikai elemző szakirány

Témavezető:

Bérczi-Kovács Erika

Operációkutatási Tanszék

Budapest, 2020

NYILATKOZAT

Név: Lekics László

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

NEPTUN azonosító: FNA4T8

Szakdolgozat címe:
Igazságos Osztozkodási Algoritmusok

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2020.05.27.

a hallgató aláírása

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani mindenkinek, aki hozzájárult szakdolgozatom létrejöttéhez. Elsősorban köszönöm témavezetőmnek, Bérczi-Kovács Erikának aki nemcsak segített témát választani, de rengeteg ötletet adott, segített, ha elakadtam valamiben és nem utolsó sorban kritikáival is hozzájárult a dolgozat befejezéséhez. Időt és energiát nem spórolva, végtelen alapossággal tekintette át mindig a munkámat. Továbbá köszönöm családomnak, szeretteimnek és barátaimnak azt, hogy végig mellettem álltak és hatalmas segítséget nyújtottak lelkileg még a dolgozat leadása előtti utolsó hetekben is.

1. fejezet

Bevezetés

Az életben sokszor találkozunk az osztozkodás feladatával. Nap mint nap szembejönnek velünk szétosztási problémák, és ugyanilyen gyakorisággal oldjuk meg őket anélkül, hogy belegondolnánk. Amikor a reggeli kávét kell több bögrébe szétosztani úgy, hogy az mindenkinek megfelelő legyen, amikor egy ajándék csokoládéból akar enni az egész család, amikor zsebpénzről van szó vagy amikor egy csoportmunka során kell megosztani a feladatokat, mindig igyekszünk elérni, hogy mindenki elégedett legyen a saját részével. Nem túl bonyolult igazságosan szétosztani kávét, pizzát, tortát, pénzt és még sorolhatnánk. Ezek mind feldarabolható tárgyak. A kávét akár cseppenként is önthetjük, míg a tortát úgy vágjuk szeletekre, ahogy csak akarjuk. Azonban komolyabb problémába ütközünk akkor, ha feldarabolhatatlan tárgyakat kell szétosztanunk. Legyen szó például festményekről, ékszerekről vagy bármi olyan tárgyról, amit sajátos mivoltából adódóan nem szelhetünk egyszerűen szét. A feladat, amelynek a problémáját körbe járjuk ebben a dolgozatban az, hogy miként tudunk igazságosan szétosztani feldarabolhatatlan tárgyakat emberek között.

Az igazságos osztozkodás problémájával mindig is rengetegen foglalkoztak, részekre bontható vagy vágható tárgyak esetén. A matematikusok az ezredforduló után kezdtek el igazán azzal az esettel foglalkozni, amikor a tárgyak feldarabolhatatlanok és igazságosan kell szétosztani őket. Tovább nehezedik a problémakör azzal, ha a tárgyaknak szubjektív értéke van. Egy régi autó talán egy egyszerű embernek nem ér sokat, míg egy műgyűjtőnek lehet, hogy felbecsülhetetlen értéket jelent.

Dolgozatomban igyekszem bemutatni több különböző modellt, illetve algoritmust a már megnevezett feladatra. Először áttekintjük, milyen megközelítéssel próbálhatjuk megfogni egy osztozkodás igazságosságát, milyen alapvető igazságossági koncepciókat ismerünk. Ezt követően láthatunk olyan installációt, miszerint olyan tárgyakkal van dolgunk, melyeknek csupa pozitív értéke van mindenki számára és aztán olyat is, mikor a tárgyakról rendre el tudjuk dönteni hogy pozitív vagy negatív értékkel bírnak. Megnézzük különböző esetekre, hogy milyen fontos eredmények születtek a témában, sőt, a mai napig nyitott kérdéssel is találkozunk.

Végül röviden áttekintünk egy nagyon speciális esetet a valós idejű osztozkodás témakörében, mikor a tárgyakat azoknak egyesével történő megvitatása közben folyamatosan, azonnal tovább kell küldenünk valaki számára.

2. fejezet

Matematikai háttér

Ahogy elkezdünk foglalkozni a témával, rögtön belebotlunk abba a ténybe, hogy igazságosan szétosztani tárgyakat nem is annyira bonyolult, ha a tárgyak kedvünkre feldarabolhatók/szétvághatók. Azonban amikor ezeket a tárgyakat nem darabolhatjuk fel, egyből megváltozik a helyzet. Több kérdés is felmerül. Egyik kérdés, hogy létezik-e mindig igazságos szétosztása a tárgyaknak? Egyáltalán mit értünk igazságos szétosztás alatt? Mikor igazságos egy szétosztás?

Az alábbi módon alkotjuk meg a modellt: Az alapfeladat az $F = (N, O, U)$. Legyen n az ügynökök száma, m pedig a szétosztandó tárgyak száma. Legyen:

$$N = \{n_1, n_2, \dots, n_n\} \text{ az ügynökök halmaza,} \tag{2.1}$$

$$O = \{o_1, o_2, ..., o_m\} \text{ a tárgyak halmaza és} \tag{2.2}$$

$$U = \{u_1, u_2, ..., u_n\} \text{ hasznossági függvények, ahol } u_i : 2^O \Rightarrow \mathbb{R} \tag{2.3}$$

Először tekintsük azt az esetet, mikor a tárgyak mind javakként szolgálnak, tehát pozitív értékük van minden ügynök számára.

$$u_i\,(o) > 0 \text{ minden } i\text{-re.} \tag{2.4}$$

Továbbá legyen $X \subseteq O$ egy tárgycsomag. Feltesszük, hogy a tárgyak értéke additív, tehát összeadódik.

$$u_i\,(X) = \sum_{o \in X} u_i(o) \tag{2.5}$$

Legyen π szétosztás egy függvény. $\pi : N \to 2^O$ mely minden ügynökhöz hozzárendel egy tárgycsomagot. Egy tárgy csak egy ügynökhöz kerülhet, ezért a csomagok teljesen diszjunktak.

$$\pi_i \cap \pi_j = \emptyset, \quad \forall i, j \in N, \ i \neq j \tag{2.6}$$

Valamint minden tárgyat kiosztunk az ügynökök között, tehát

$$\bigcup_{i \in N} \pi_i = O \tag{2.7}$$

2.1. Az igazságosság különböző megközelítései

2.1.1. Irigységmentesség

Az igazságosság egyik definíciója az irigységmentesség. Irigység: i irigy j-re, ha a szétosztást követően i a saját csomagja helyett j csomagját választaná inkább, ha lehetne. Tehát:

$$u_i(\pi_i) < u_i(\pi_j) \tag{2.8}$$

Egy szétosztás irigységmentes, ha a szétosztás után egyik ügynök sem irigy a másikra.

2.1.2. Arányosság

Egy másfajta hozzáállás az igazságossághoz az arányos elosztás. Tekintsük az összes tárgy értékét az i-edik ügynök szemszögéből: $u_i(O)$. Ha i ügynök ennek legalább az n-ed részét megkapja, igazságosnak érzi azt.

$$u_i(\pi_i) \geq \frac{u_i(O)}{n} \tag{2.9}$$

Amennyiben ez minden ügynökre igaz, úgy a szétosztás arányos.

2.1.3. Maximin igazságosság

Egy harmadik megközelítéséhez az igazságosságnak úgy jutunk, ha hagyjuk, hogy az ügynökök felosszák maguknak a tárgyakat n db részre úgy, hogy ezek közül a számára legkevesebb értékkel bírót kapja meg. Így feltételezhetjük, hogy minden ügynök igyekszik a számára létező legjobb szétosztást létrehozni, hogy a legkisebb érték minél közelebb legyen az $\frac{u_i(O)}{n}$-hez. Így minden ügynökhöz hozzárendeljük az általa legjobb felosztás által létrehozott legkisebb csomag értékét. Ez a minimum érték legyen h_i $\forall i$-re. Igazságosnak tekintjük azt a szétosztást, amikor minden ügynök legalább akkora értékű csomagot kap, mint az általa összeállítot csomagok minimuma.

$$u_i(\pi_i) \geq h_i \ \forall i\text{-re.} \tag{2.10}$$

2.2. Definíciók

Könnyen beláthatjuk, hogy az irigységmentesség nem mindig valósítható meg szétoszthatatlan tárgyak esetében. Példaként legyen $n = 2$ ügynökünk és $m = 1$ tárgyunk. Tudjuk, hogy a tárgy értéke nem 0, így nem tudjuk igazságosan szétosztani kettejük között ezt az 1 tárgyat, hiszen mindegy kinek adjuk, aki megkapja a tárgyat, arra irigy lesz a másik.

Ezért definiáljunk egy ennél gyengébb igazságos szétosztást. Tekintsünk igazságosnak egy szétosztást, ha egy tárgy elvételével irigységmentessé tehető. Tehát ha i irigy j-re, az irigység feloldható úgy, hogy egy adott tárgyat kiveszünk az egyikük csomagjából.

2.2.1. Definició. [3] Egy π szétosztás irigységmentes egy tárgy kivételével (IM1), ha $\forall i, j \in N$ esetén

$$i \text{ nem irigy } j\text{-re, vagy} \tag{2.11}$$

$$\exists o \in \pi_i \cup \pi_j \text{ tárgy, hogy } u_i\left(\pi_i \backslash \{o\}\right) \geq u_i\left(\pi_j \backslash \{o\}\right). \tag{2.12}$$

Megjegyzés: Ez a megközelítés arra az általánosabb esetre is definiálja az IM1 szétosztást, amikor negatív értékű tárgyak is lehetnek.

Az előzőhöz hasonlóan az arányosság definícióból kiindulva létrehozhatunk egy új definíciót. Tekintsünk igazságosnak egy szétosztást, ha egy tárgy elvételével arányossá tehető. Tehát ha i csomagjának értéke kisebb mint $\frac{u_i(O)}{n}$, az arányosság elérhető úgy, hogy egy adott tárgyat kiveszünk i csomagjából, vagy hozzáadjuk i csomagjához.

2.2.2. Definició. [3] Egy π szétosztás arányos egy tárgy kivételével(ARÁNY1), ha $\forall i \in N$ esetén

$$u_i\left(\pi_i\right) \geq \frac{u_i\left(O\right)}{n}, \text{ vagy} \tag{2.13}$$

$$u_i\left(\pi_i\right) + u_i\left(o\right) \geq \frac{u_i\left(O\right)}{n}, \quad o \in O \backslash \pi_i, \text{ vagy} \tag{2.14}$$

$$u_i\left(\pi_i\right) - u_i\left(o\right) \geq \frac{u_i\left(O\right)}{n}, \quad o \in \pi_i. \tag{2.15}$$

Megjegyzés: Ez a megközelítés arra az általánosabb esetre is definiálja az ARÁNY1 szétosztást, amikor negatív értékű tárgyak is lehetnek.

Az igazságosság mellett szeretnénk hatékonyak is lenni, ezért használjuk a Pareto-javítás és Pareto optimalitás fogalmakat.

2.2.3. Definició. [3] Adott egy π és egy π' szétosztás. π' szétosztás Pareto-javítása (PJ) π-nek, ha

$$u_i\left(\pi_i'\right) \geq u_i\left(\pi_i\right), \quad \forall i \in N, \text{ és} \tag{2.16}$$

$$u_j\left(\pi_j'\right) > u_j\left(\pi_j\right), \quad \text{legalább egy } j \in N\text{-re.} \tag{2.17}$$

2.2.4. Definició. [3] Egy π szétosztás Pareto optimális (PO), ha nem létezik olyan π' szétosztás, ami Pareto-javítása π-nek.

3. fejezet

Pozitív tárgyak

3.1. Maximin közelítés

A maximin igazságosság eléréséhez először különböző értékű approximációkat keresünk. Egy $\frac{2}{3}$ approximációt az alábbi módon találhatunk:

3.1.1. Tétel. *[1] Adott n ügynök, u_i, $\forall i \in N$ additív értékfüggvényekkel, és adott m feldarabolhatatlan tárgy. Polinom időben találhatunk egy π $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$ szétosztást, amely kielégíti az alábbi egyenlőtlenséget:*

$$u_i(\pi_i) \geq \frac{2n}{3n-1} h_i, \tag{3.1}$$

ahol h_i az adott i ügynök maximin értéke.

A bizonyítást Bouveret és Lemaître 2 részből állították össze:

Első lépésben belátták, hogy az általános eset visszavezethető az azonosan rendezett esetre, tehát feltesszük, hogy egy sorrend állítható fel az m db tárgyhoz, melyeket így indexelhetünk: $o_1, o_2, \ldots, o_m$. Minden ügynök tiszteletben tartja ezt a sorrendet, tehát $a < b$ esetén $u_i(o_a) \geq u_i(o_b)$.

Második lépésben készítettek egy $\frac{2}{3}$ közelítő algoritmust a fenti esetre.

3.1.2. Definició. [1] Egy feladatot rendezett feladatnak hívunk, ha létezik egy < rendezés az elemeken úgy, hogy, $\forall i \in N$ és $\forall a, b \in O$, ahol $a < b$ igaz, hogy $u_i(o_a) \geq u_i(o_b)$. Tehát létezik egy alábbi sorrend:

$$u_i(o_1) \geq u_i(o_2) \geq \cdots \geq u_i(o_m). \tag{3.2}$$

Bouveret és Lemaître [5] bizonyították, hogy ha létezik egy π' szétosztás amely garantálja minden ügynök számára a maximin igazságos szétosztását F' szerint, akkor létezik π szétosztás, amely garantálja minden ügynök maximin igazságos szétosztását F szerint. Amennyiben adott π' maximin igazságos széotsztás F' szerint, akkor π maximin igazságos szétosztás polinom idő alatt található F feladat esetében.

Az algoritmus által kapott $\pi\ (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$ szétosztás kielégíti a következő egyenlőtlenséget: $u_i\left(\pi_i\right) \geq \frac{2n}{3n-1} h_i\ \forall i \in N$

3.2. Irigység Gráf algoritmus

Láthattuk, hogy az előző algoritmus működéséhez az volt a fontos, hogy az m tárgy $o_1, o_2, \ldots, o_m$ értékük szerint csökkenő sorrendbe legyenek rendezve $\forall i \in n$ esetén. Az alábbiakban egy irigység gráf készítésével működő algoritmust láthatunk.

Az irigység gráf felépítése: A $G\left(\pi\right)$ irányított irigység gráf az ügynökök közti irigységet ábrázolja. A pontok az ügynökök, míg az élek azt jelzik, hogy egy ügynök irigy egy másikra. Egy irányított él $i \longrightarrow j$ akkor és csak akkor létezik, ha i irigy j-re, tehát

$$u_i\left(\pi_i\right) < u_i\left(\pi_j\right). \tag{3.3}$$

Az algoritmus az alábbi [5]:

Algorithm 1: Irigység Gráf algoritmus

Input: Egy $F = (N, O, U)$ rendezett feladat, ahol n az ügynökök, m pedig a tárgyak száma.

Output: Egy olyan π szétosztás, amely közelíti a maximin szétosztást.

1 Rendezzük sorba a tárgyakat úgy, hogy $\forall i \in N$ és $a < b$ esetén igaz legyen, hogy $u_i\left(o_a\right) \geq u_i\left(o_b\right)$. Így kapjuk $o_1, o_2, \ldots, o_m$ sorrendet.

2 Vegyük π szétosztást, ahol $\pi_i = \emptyset,\ \forall i \in N$.

3 Ezután $j = 1$-től m-ig tegyük az alábbit: Válasszunk egy i pontot, melynek nincs bemenő éle $g\left(\pi\right)$ gráfban. Ez a pont egy forrás. Majd módosítsuk úgy, hogy $\pi_i = \pi_i \cup \{o_j\}$. Amennyiben az így keletkezett $G\left(\pi\right)$ gráf tartalmaz kört, használjuk a 3.2.1-es lemmát és készítsünk belőle egy π' szétosztást ami nem a gráfja már aciklikus. Folytassuk ciklust ezzel az új gráffal.

4 Végül adjuk vissza π szétosztást.

Az algoritmus használatához ismernünk kell továbbá az alábbi lemmát:

3.2.1. Lemma. *[6] Adott egy részleges elosztás* $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$ *egy* $S \subseteq m$ *tárgyak részhalamzára. Polinom idő alatt tudunk találni egy másik,* $\pi' = \left(\pi'_1, \pi'_2, \ldots, \pi'_n\right)$ *részleges szétosztást S részhalmazra, úgy, hogy:*

$$i: \text{Egyetlen ügynökhöz rendelt csomag értéke sem csökken: } u_i\left(\pi'_i\right) \geq u_i\left(\pi_i\right)\ \forall i \in n. \tag{3.4}$$

$$ii: \text{A } G\left(\pi'\right) \text{ irigység gráf aciklikus.} \tag{3.5}$$

Az algoritmus végén kapott $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$ szétosztás irigység mentes egy tárgy kivételével.

3.3. Round Robin algoritmus

Egy olyan π szétosztás, amely IM1 egy egyszerű algoritmussal is található. Képzeljük el, hogy a szétosztandó tárgyak egy nagy kupacban vannak középen, míg az ügynökök körben helyezkednek el körülötte. Minden ügynök $1, 2, \ldots, n-1, n$ sorban kiválasztja a számára legértékesebb még a kupacban lévő (a többiek által még ki nem választott) tárgyat. Ha a kör végére értünk, ismételjük az előző metódust egészen addig, míg minden tárgyat szét nem osztottunk. Ezt Round Robin algoritmusnak nevezzük.

Elsőre talán nehéz látni, hogy ezen algoritmus által létrehozott π szétosztás miért is lesz jó, úgyhogy nézzük meg, mégis miként lesz π IM1.

3.3.1. Állítás. *[2] A Round Robin algoritmus végeredménye egy* π *IM1 szétosztás.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy $i \in N$ ügynököt. Eredetileg egy kör az alábbi módon néz ki:

$$1, 2, \ldots, i-1, i, i+1, \ldots, n-1, n \tag{3.6}$$

Tagoljuk fázisokra a folyamatot. Egy fázis akkor kezdődök, amikor i ügynök kiválaszt egy tárgyat és éppen azelőtt végződik, hogy i újra választana.

$$i, i+1, \ldots, n-1, n, 1, 2, \ldots, i-2, i-1 \tag{3.7}$$

i minden fázisban olyan tárgyat szerez a saját csomagjába, amely egyértelműen értékesebb számára, mint amit a következő $n-1$ ügynök választ. Tehát az egyetlen lehetőség arra, hogy i irigy legyen valakire az, ha valaki előtte kiválasztott egy i számára értékesebb tárgyat az $1, 2, \ldots, i-1$ részben a legelső fázis megkezdése előtt. Így a sorban előtte választó $j \in [i-1]$ ügynököknek maximum 1 olyan tárgyuk van, ami miatt i irigy lehet j-re. Amennyiben fenn áll az irigység, úgy az adott tárgyat elvéve j csomagjából megszüntettük az irigységet. □

3.4. Nash-féle Maximum Jólét

A Round Robin algoritmus által generált IM1 szétosztásról sajnos semmi nem garantálja számunkra, hogy Pareto optimális. Az algoritmus meglehetősen korlátozott abban az értelemben, hogy minden ügynök azonos vagy egy híján azonos számú tárgyat kap a szétosztás során. Felmerül tehát a kérdés, hogy tudunk-e IM1 és PO szétosztást létrehozni.

Egy π szétosztás hasznosságának mérésére definiálunk egy a későbbiekben hasznos mérőszámot az alábbiak szerint.

3.4.1. Definició. [2] Egy π széosztás Nash-féle jóléte (NJ):

$$NJ\left(\pi\right) = \prod_{i \in N} u_i\left(\pi_i\right) \tag{3.8}$$

3.4.2. Definició. [2] A Nash-féle maximum jólét megoldása egy olyan π szétosztás, amely az összes lehetséges széosztás Nash-féle jólétének maximuma. Ezt a szétosztást π^{NMJ}-vel jelöljük.

$$\pi^{NMJ} \in \arg\max NJ\left(\pi\right) \tag{3.9}$$

Mivel a NJ egy szorzat, így ha csak egy eleme is 0, az egész 0 lesz. Amennyiben létezik olyan szétosztás, hogy a NJ pozitív legyen, tehát egyik ügynök csomagja sem nulla értékű, úgy válasszunk maximumot a szétosztások közül. Amennyiben nem létezik olyan szétosztás, hogy NJ pozitív legyen, tehát kevesebb tárgyunk van, mint amennyi ügynökünk, akkor válasszuk ki az ügynököknek azt a lehető legnagyobb részhalmazát, akiknek pozitív értékű csomagot tudunk biztosítani és csak rájuk nézve maximalizáljuk a NJ-et.

Ez a π^{NMJ} szétosztás lehet, hogy jobb eredményre juttat mint az előző Round Robin algoritmus? Lássuk be, hogy ez a szétosztás IM1 és PO is.

3.4.3. Tétel. *[2] Additív, nem negatív értékű feldarabolhatatlan tárgyak esetén minden NMJ szétosztás IM1 és PO.*

Bizonyítás. Legyen π egy NMJ szétosztás. Először tekintsük a $NJ\left(\pi\right) > 0$ esetet.

Lássuk be, hogy π Pareto optimális. Indirekt módon tegyük fel, hogy nem az. Ebben az esetben létezik egy π' szétosztás, ami Pareto-javítása π-nek. Így π' szétosztásban minden ügynök legalább akkora értékű csomagot kap, mint π esetén, és van légalább 1 olyan ügynök, akinek a csomagja nagyobb értékű, mint π esetén. Ebben az esetben azonban

$$NJ\left(\pi'\right) > NJ\left(\pi\right). \tag{3.10}$$

Ebből kifolyólag π szétosztás NJ-e nem a lehető legnagyobb az összes létező szétosztás NJ-e közül, tehát π szétosztás nem NMJ szétosztás. Ez ellentmondás.

Hasonlóan indirekt módon lássuk be, hogy π szétosztás IM1. Tegyük fel, hogy π nem IM1, tehát létezik legalább 2 ügynök i és j, hogy i irigy j-re, és nincs olyan tárgy j csomagjában, amelyet kivéve a csomagból megszűnne az irigység. Mivel i irigy j-re, tudjuk, hogy van legalább 1 olyan g tárgy j csomagjában, aminek az értéke i számára pozitív. Legyen

$$g' = \arg\min \frac{u_j(g)}{u_i(g)}. \tag{3.11}$$

Tegyük át ezt a g' tárgyat j csomagjából i csomagjába, minden egyéb tárgy maradjon annak a csomagjában, akiébe π szétosztásban volt. Ezt az új szétosztást nevezzük π' szétosztásnak.

$$u_k(\pi'_k) = u_k(\pi_k) \quad \forall k \in N \setminus \{i.j\}, \tag{3.12}$$

$$u_i(\pi'_i) = u_i(\pi_i) + u_i(g'), \tag{3.13}$$

$$u_j\left(\pi'_j\right) = u_j(\pi_j) - u_j(g'). \tag{3.14}$$

Ahogy azt a PO bizonyításánál is tettük, mutassuk meg, hogy

$$NJ(\pi') > NJ(\pi). \tag{3.15}$$

Ehhez elég belátnunk, hogy

$$\frac{NJ(\pi')}{NJ(\pi)} > 1. \tag{3.16}$$

g' megválasztása miatt, tudjuk, hogy

$$\frac{u_j(g')}{u_i(g')} \le \frac{\sum_{g\in\pi_j} u_j(g)}{\sum_{g\in\pi_j} u_i(g)}, \text{ és} \tag{3.17}$$

$$\frac{\sum_{g\in\pi_j} u_j(g)}{\sum_{g\in\pi_j} u_i(g)} = \frac{u_j(\pi_j)}{u_i(\pi_j)}, \text{ tehát} \tag{3.18}$$

$$\frac{u_j(g')}{u_i(g')} \le \frac{u_j(\pi_j)}{u_i(\pi_j)}. \tag{3.19}$$

Valamint tudjuk, hogy i azután is irigy j-re, hogy j csomagjából kivettük g' tárgyat.

$$u_i(\pi_i) < u_i(\pi_j) - u_i(g') \tag{3.20}$$

$$u_i(\pi_i) + u_i(g') < u_i(\pi_j). \tag{3.21}$$

Ha a fenti egyenlőtlenségeket összeszorozzuk, az alábbi kifejezésre jutunk, amit csak át kell alakítanunk.

$$\frac{u_j(g')}{u_i(g')}\left[u_i(\pi_i)+u_i(g')\right] < u_j\left(\pi_j\right) \tag{3.22}$$

$$\left[1-\frac{u_j(g')}{u_j\left(\pi_j\right)}\right]\left[1+\frac{u_i(g')}{u_i(\pi_i)}\right] > 1 \tag{3.23}$$

$$\frac{u_j\left(\pi'_j\right)u_i\left(\pi'_i\right)}{u_j\left(\pi_j\right)u_i(\pi_i)} > 1 \tag{3.24}$$

ezt a törtet bővítjük $\prod_{k\in N} u_k(\pi_k)$-vel, ahol $k\ inN\backslash\{i.j\}$. Így megkapjuk, hogy

$$NJ(\pi') > NJ(\pi). \tag{3.25}$$

Az előző bizonyításhoz hasonlóan, itt is ellentmondásra jutottunk, hiszen π egy NMJ szétosztás, így nem létezhet a fenti π'. Tehát a feltevésünk, miszerint π nem IM1 hamis.

Beláttuk, hogy π PO és IM1, abban az esetben, ha $NJ(\pi) > 0$.

Tekintsük meg azt az esetet, amikor $NJ(\pi) = 0$. Ez akkor fordul elő, ha legalább egy ügynök csomagja számára 0 értékű.

$$\exists k \in N, \text{ hogy } u_k(\pi_k) = 0. \tag{3.26}$$

Legyen C azon ügynökök halmaza, akik π NMJ szétosztás szerint pozitív értékű csomagot kaptak. NMJ megoldásának definíciója szerint C az ügynökök lehető legnagyobb halmaza, akik pozitív értékű csomagot kaphatnak.

A PO könnyen belátható. Tegyük fel, hogy létezik egy π' szétosztás, amely Pareto-javítása π-nek. Ez a π' nem csökkenti a C-beli ügynökök csomagjainak értékét, azonban nem is növelheti azt, hiszen az növelné a pozitív csomagok szorzatának értékét, amelyet már π maximalizált.

Továbbá nem adhat pozitív értékű csomagot egyik $N\backslash C$-bel ügynöknek sem, hiszen azzal növelné az S-beli ügynökök számát, ami definíció szerint már maximális.

Az IM1 is könnyen belátható. Tekintsük a C-beli ügynököket. Róluk már az $NJ_\pi > 0$ esetben beláttuk, hogy a közöttük lévő szétosztás IM1. Az triviális, hogy egy C-beli ügynök nem irigy egy $N\backslash C$-beli ügynökre, hiszen utóbbiak csomagja üres.

Amit be kell látnunk, hogy $i \in N$ ügynök nem irigy egy tárgy kivételével $j \in C$ ügynökre. Indirekt tegyük fel, hogy az. Válasszunk egy $g_j \in \pi_j$ tárgyat, ami $u_i\left(g_j\right)$. Feltevésünk szerint i irigy lesz j-re azután is, hogy g_j tárgyat kivesszük j csomagjából.

$$u_i\left(\pi_j\backslash\{g_j\}\right) > u_i(\pi_i) = 0 \tag{3.27}$$

Tehát

$$\exists\, g_i \in \pi_j\backslash\{g_j\},\ \ u_i(g_i) > 0. \tag{3.28}$$

Így g_i tárgyat j csomagjából i csomagjába téve elérnénk, hogy $u_i(\pi_i) > 0$ legyen, miközben $u_j(\pi_j) > 0$ marad. Ezzel növeljük C-ben lévő ügynökök számát. C-ben lévő ügynökök száma maximális, így azt nem tudjuk növelni, ellentmondásra jutottunk.

Így hát $NJ(\pi) \geq 0$ esetén a π NMJ szétosztás PO és IM1. $\square$

4. fejezet

Pozitív és negatív értékű tárgyak

Eddig azt az esetet vizsgáltuk, amikor a kiosztandó tárgyaknak minden esetben pozitív értéke van. Azonban mi van akkor, ha a tárgyaknak lehet negatív és pozitív értéke is? Példaként tegyük fel, hogy adósságcédulákat és értékpapírokat kell szétosztanunk. Egy másik példa, ha nem tárgyakat, hanem feladatokat kell szétosztanunk. Van olyan feladat, amit A ügynök nagyon szívesen old meg, mert ért hozzá, azonban olyan is, amit kifejezetten nem szeretne megoldani, mert nehézséget jelent neki. Ilyen lehet egy matematikai feladat, melynek megoldása valaki számára szórakozás, más számára azonban kín és szenvedés.

Az alábbiakban egy olyan problémát vizsgálunk, ahol a tárgyak objektíven szétoszthatók csak negatív és csak pozitív értű tárgyakra [3]. A szemléltetés kedvéért ezeket hívjuk adósságoknak és értékpapíroknak. Legyen o

$$u_i(o) > 0 \text{ esetén értékpapír és} \tag{4.1}$$

$$u_i(o) < 0 \text{ esetén adósság.} \tag{4.2}$$

Természetes, hogy első gondolatunk a probléma megoldására egy más ismert módszer alkalmazása. Kipróbáljuk, hogy a Round Robin algoritmus pontosan mire is képes ebben az esetben, az általa generált szétosztás vajon IM1 lesz-e. Hamar rájövünk, hogy ez az egyszerű algoritmus nem kezeli megfelelő módon a feladatot, vegyük szemügyre az alábbi példát:

Legyen $n = 2$ ügynökünk i és j és $m = 4$ tárgyunk. A tárgyak az alábbi értékeket kapják:

$$u_i(o_1) = u_j(o_1) = 2 \tag{4.3}$$

$$u_i(o_2) = u_j(o_2) = -3 \tag{4.4}$$

$$u_i(o_3) = u_j(o_3) = -3 \tag{4.5}$$

$$u_i(o_4) = u_j(o_4) = -3 \tag{4.6}$$

Ebben a speciális esetben, ahol i és j számára megegyező értékkel rendelkeznek a tárgyak, lefuttatjuk a Round Robin algoritmust.

Első lépésben i kiválasztja a számára legértékesebb o_1 tárgyat, ezzel a csomagja $\{o_1\}$.

Ezt követően j választ. Innentől mindegy mit választ, hiszen minden tárgy egyenértékű számára, továbbá a harmadik és negyedik lépésben ismét véletlenszerűen választhatnak az előzőek alapján. Az egyszerűség kedvéért csomagjaik legyenek

$$u_i(\pi_i) = \{o_1, o_2\} = -1 \tag{4.7}$$

$$u_j(\pi_j) = \{o_3, o_4\} = -6. \tag{4.8}$$

Az adott helyzetben j irigy i-re. Láthatjuk, hogy akár i csomagjából veszünk el tárgyat, akár j csomagjából veszünk el egy tárgyat, az irigység nem oldható fel. Következtetésképpen ez a π szétosztás nem IM1.

4.1. A Double Round Robin algoritmus

A Round Robin algoritmus ötlete alapján megalkották a Double Round Robin algoritmust. Az algoritmus nagyon hasonlít elődjéhez. Egyszer óramutató járásával megegyezően, majd óramutató járásával ellentétes irányban választják ki sorban az ügynökök a tárgyakat. Az első körben a Round Robin algoritmus szerint az ügynökök adósságcédulákat választanak, tehát olyan tárgyakat, melynek értéke számukra negatív. Természetesen ezen tárgyak közül számukra a lehető legkisebb abszolút értékűt. Ezt követően az óramutató járásával ellentétesen az kezd, aki az első körben az utolsó volt, és ekkor értékpapírokat választanak, tehát olyan tárgyakat, amelyek számukra pozitív értékkel bírnak(itt a lehető legnagyobb abszolút értékűt).

Mindezeket kiegészítjük azzal, hogy hozzáadunk k db virtuális adósságcédulát úgy, hogy minden ügynök azonos számú adósságcédulát kapjon az algoritmus végén. Ezen k db adósságcédulák értéke 0.

Egy π szétosztás és X tárgycsomag esetén azt mondjuk, hogy i irigy j-re tekintettel X-re, ha

$$u_i(\pi_i \cap X) < u_i(\pi_j \cap X). \tag{4.9}$$

Az algoritmus az alábbi [3]:

Algorithm 2: Double Round Robin algoritmus

Input: Feladat $F = (N, O, U)$

Output: π szétosztás

1 Az O halmazt szétbontjuk egy $O^+ = \{o \in O | \exists i \in N,\ u_i(o) > 0\}$, és $O^- = \{o \in O | \exists i \in N,\ u_i(o) \leq 0\}$ halmazokra. $|O^-| = an - k$, ahol a egész szám és $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

2 Hozzáadunk k db virtuális, minden ügynök számára 0 értékű adósságcédulát O^--hoz. Ezzel $|O^-| = an$.

3 Az ügynökök egy round robin körben$(1, 2, \ldots, n)$ sorban kiválasztják a számukra leginkább kívánt tárgyat O^--ból, addig, amíg O^- ki nem ürül.

4 Az ügynökök egy fordított round robin körben $(n, n-1, \ldots, 1)$ sorban kiválasztják a számukra legértékesebb tárgyat O^+-ból, addig, amíg O^+ ki nem ürül. Ha egy ügynök nem talál olyan tárgyat, ami pozitív értékkel bír számára, akkor nem választ, vagyis úgy tesz, mintha választana egy számára 0 értékű virtuális tárgyat.

5 Kivesszük a virtuális tárgyakat az így kapott π szétosztásból és ezzel megkapjuk π' szétosztást.

4.1.1. Tétel. *[3] A Double Round Robin algoritmus $O\left(max\{m^2, mn\}\right)$ idő alatt ad egy π IM1 szétosztást.*

Bizonyítás. Legyen az algoritmus eredménye π szétosztás. Ahhoz, hogy belássuk, hogy π IM1, megmutatjuk, hogy bármely $i, j \in N,\ i < j$ ügynökökre igaz, hogy amennyiben irigy egyik a másikra, egy tárgy elvételével ez az irigység megszüntethető.

Először tekintsük az i irigy j-re esetet. Mivel $i < j$, ezért i előbb választ O^--ból, i nem irigy j-re tekintettel O^- csomagra. Lehetséges, hogy i irigy j-re tekintettel O^+-ra. Ha a j által először választott $o' \in O^+$ tárgyat elvesszük j csomagjából, akkor megszüntetjük az irigységet, hiszen a fennmaradó $o \in O^+$ tárgyak közül mindig i választott előbb. Így i nem irigy j-re tekintettel $O^+ \backslash \{o'\}$ csomagra. Tehát

$$u_i(\pi_i) \geq u_i\left(\pi_j \backslash \{o'\}\right). \tag{4.10}$$

Ezután tekintsük azt az esetet, hogy j irigy i-re. Az előzőhöz hasonlóan, mivel $i < j$, ezért j előbb választ O^+-ból, j nem irigy i-re tekintettel O^+ csomagra. Lehetséges, hogy j irigy i-re tekintettel O^--ra. Ha a j által utoljára választott $o' \in O^-$ tárgyat elvesszük j csomagjából, akkor megszüntetjük az irigységet, hiszen a fennmaradó $o \in O^-$ tárgyak közül mindig j választott előbb. Így j nem irigy i-re tekintettel $O^- \backslash \{o'\}$ csomagra. Tehát

$$u_j\left(\pi_j \backslash \{o'\}\right) \geq u_j(\pi_i). \tag{4.11}$$

Beláttuk, hogy π IM1. Ha elvesszük a k db 0 értékű virtuális adósságcédulát, amit hozzáadtunk az elején, az nem változtatja az ügynökök csomagjainak értékét, tehát π' szétosztás is IM1.

Tekintsük hát az algoritmus futási idejét. Az első sorban $O(mn)$ idő alatt minden ügynök végignéz minden tárgyat, majd a 3. és 4. sor $O\left(m^2\right)$ időt vesz igénybe, hiszen maximum m iteráció alatt minden ügynök maximum m tárgyat vesz figyelembe. Tehát a teljes futási idő

$$O\left(\max\{m^2, mn\}\right). \tag{4.12}$$

Ezzel beláttuk a tételt. □

4.2. Egy speciális eset

Láthattuk már korábban a 3.4-es alfejezetben, hogy tisztán pozitív értékű tárgyak esetén IM1 és PO szétosztás mindig létezik. Azonban a most tárgyalt feladatnál, pozitív és negatív értékű tárgyak esetében erről még nem tudunk semmit. Két probléma áll előttünk:

Ahogy a 4.1.1 alfejezetben megmutattuk, úgy találunk egy π IM1 szétosztást, de arról nem tudjuk, hogy Pareto optimális-e avagy sem. Ha találunk egy Pareto-javítást, akkor sem vagyunk készen, hiszen semmi nem biztosítja, hogy az új, Pareto-javítással létrehozott szétosztásunk IM1. Továbbá Pareto-javítást találni NP-nehéz feladat [7]. A mai napig nyitott kérdés, hogy létezik-e IM1 és PO szétosztás általánosan a pozitív és negatív tárgyak világában [3].

Tekintsünk hát egy speciális esetet, amelyre könnyebben tudunk kimondani bármit is. Vegyük azt az esetet, mikor csak 2 ügynök között szeretnénk szétosztani a pozitív és negatív értékű tárgyakat (a feltétel, hogy minden tárgyról objektíven megítélhető, hogy adósságcédula vagy értékpapír továbbra is fennáll).

4.2.1. Tétel. *[3] Két ügynök esetében mindig létezik olyan szétosztás, amely egyszerre IM1 és PO, továbbá polinom idő alatt ki tudunk számolni.*

Bizonyítás. Ahogy azt eddig is, most is feltételezzük, hogy a tárgyakról objektíven eldönthetők, hogy pozitív illetve negatív értékük van minden ügynök számára, továbbá egyik ügynök számára sincs 0 értékű tárgy. Ezt követően az ügynököket (tekintettel arra, hogy most csak ketten vannak) nem i-vel és j-vel jelöljük, hanem egyiküket győztesnek (winner), másikukat vesztesnek (loser) nevezzük.

Elöször is szétosztunk minden tárgyat úgy, hogy minden pozitív értékű tárgyat a győztesnek és minden negatív értékű tárgyat a vesztesnek adunk.

Másodszor, sorba rendezünk minden tárgyat $\frac{\|u_l(o)\|}{\|u_w(o)\|}$ szerint monoton csökkenő sorrendben.

Harmadszor, elkezdjük újraosztani a tárgyakat az előbb említett sorrendben (balról jobbra), aszerint, hogy ha értékpapírhoz érünk, akkor azt a győztes csomagjából a vesztes csomagjába rakjuk, ha adósságcédulához érünk, akkor azt a vesztes csomagjából a nyertes csomagjába rakunk. Ezt addig csináljuk, míg el nem érjük, hogy a vesztes irigy legyen a győztesre egy tárgy kivételével.

Bebizonyítjuk, hogy az így létrehozott összes π szétosztás, melyet a fenti metódus lépései közben kapunk egytől-egyik Pareto optimálisak. Tekintsük bármelyik ilyen π szétosztást és indirekt tegyük fel, hogy $\exists\ \pi'$ szétosztás, amely Pareto-javítása π-nek.

Ezután a tárgyak alábbi halmazait hozzuk létre, $\forall i, j \in \{w, l\}$-re, ahol $i \neq j$:

$$G_{ii} \text{ azon értékpapírok halmaza, melyek benne vannak a } \pi_i \cap \pi_i'\text{-ben,} \tag{4.13}$$

$$C_{ii} \text{ azon adósságcédulák halmaza, melyek benne vannak a } \pi_i \cap \pi_i'\text{-ben,} \tag{4.14}$$

$$G_{ij} \text{ azon értékpapírok halmaza, melyek benne vannak a } \pi_i \cap \pi_j'\text{-ben,} \tag{4.15}$$

$$C_{ij} \text{ azon adósságcédulák halmaza, melyek benne vannak a } \pi_i \cap \pi_j'\text{-ben.} \tag{4.16}$$

Mivel π' Pareto-javítása π-nek, ezért a győztes csomagjának értéke legalább akkora π' szétosztásban, mint π-ben, míg a vesztes csomagja szigorúan nagyobb értékű π'-ben, mint π-ben.

Természetesen a $G_{ww}, G_{ll}, C_{ww}, C_{ll}$ halmazok megegyeznek a π és π' szétosztásokban, Így

$$u_w\left(G_{lw}\right) + u_w\left(C_{lw}\right) - u_w\left(G_{wl}\right) - u_w\left(C_{wl}\right) \geq 0, \text{ és} \tag{4.17}$$

$$u_l\left(G_{wl}\right) + u_l\left(C_{wl}\right) - u_l\left(G_{lw}\right) - u_l\left(C_{lw}\right) > 0 \tag{4.18}$$

Továbbá tudjuk, hogy G_{lw} és C_{wl} halmazok tárgyai előbb jönnek a sorban az algoritmus futása során, mint G_{wl} és C_{lw} tárgyai, így az előbbiek $\frac{\|u_l(o)\|}{\|u_w(o)\|}$ értéke legalább akkora, mint az utóbbiaké. Legyen egy α az alábbi:

$$\max_{o \in G_{wl} \cup C_{lw}} \frac{\|u_l\left(o\right)\|}{\|u_w\left(o\right)\|} \leq \alpha \leq \min_{o \in G_{lw} \cup C_{wl}} \frac{\|u_l\left(o\right)\|}{\|u_w\left(o\right)\|}. \tag{4.19}$$

Ezeket egyesével átszorozva az alábbi egyenlőtlenségeket kapjuk:

$$u_l\left(G_{wl}\right) \leq \alpha u_w\left(G_{wl}\right), \tag{4.20}$$

$$\alpha u_w\left(G_{lw}\right) \leq u_l\left(G_{lw}\right), \tag{4.21}$$

$$-\alpha u_w\left(C_{wl}\right) \leq -u_l\left(C_{wl}\right), \tag{4.22}$$

$$-u_l\left(C_{lw}\right) \leq -\alpha u_w\left(C_{lw}\right). \tag{4.23}$$

Ha felírjuk ismét a fentebb már használt egyenlőtlenséget, és becsüljük egyesével minden tagját az előzőek alapján, az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk:

$$0 < u_l\left(G_{wl}\right) + u_l\left(C_{wl}\right) - u_l\left(G_{lw}\right) - u_l\left(C_{lw}\right) \leq \tag{4.24}$$

$$\leq -\alpha\left(u_w\left(G_{lw}\right) + u_w\left(C_{lw}\right) - u_w\left(G_{wl}\right) - u_w\left(C_{wl}\right)\right) \leq 0. \tag{4.25}$$

Ezzel ellentmondásra jutottunk (rendőr elv).

Beláttuk hát, hogy az algoritmus futása során minden lépés után kapott π szétosztás PO. Most lássuk be, hogy az algoritmus végeredményeként kapott $\pi*$ szétosztás IM1.

Az algoritmusunk befejeztével kapott π^* szétosztásban legfeljebb az egyik ügynök irigy a másikra, hiszen ha mindketten irigyek lennének a másik csomagjára, akkor az feloldható volna úgy, hogy megcseréljük a kapott csomagjaikat. Így már nincs köztük semmiféle irigység, azonban ez egy Pareto-javítása lenne π^* szétosztásnak, márpedig $\pi*$ Pareto optimális. Vegyük továbbá számításba az esetet, hogy a vesztes irigy a győztesre. Ekkor $\pi*$ IM1, hiszen nem állt volna le az algoritmus, ha nem így lenne. Tekintsük most azt az esetet, mikor a győztes irigy a vesztesre. Legyen π' szétosztás az utolsó lépés előtti szétosztás, ami után $\pi*$-ot kaptuk. Továbbá legyen

$$X = \pi'_w \cap \pi *_w \text{ és} \tag{4.26}$$

$$Y = \pi'_l \cap \pi *_l \,. \tag{4.27}$$

Ebből a π' szétosztásból azért léptünk tovább, mert a vesztes irigy volt a győztesre és ezt az irigységet nem lehetett feloldani egy tárgy elvételével. Tehát

$$u_l\left(Y\right) < u_l\left(X\right). \tag{4.28}$$

Valamint tegyük fel, hogy a győztes több mint egy tárgy kivételével irigy a vesztesre, tehát nincs olyan tárgy, amit elvéve feloldható ez az irigység. Ekkor természetesen

$$u_w\left(X\right) < u_w\left(Y\right). \tag{4.29}$$

Ha g volt az utolsó értékpapír amit a győztes csomagjából a vesztesébe tettünk, akkor X csomagot a vesztesnek adva és $Y \cup \{g\}$ csomagot a győztesnek adva létrehoznánk egy Pareto-javítását π'-nek, hiszen

$$u_l\left(\pi'_l\right) < u_l\left(X\right), \text{ és} \tag{4.30}$$

$$u_w\left(\pi'_w\right) < u_w\left(Y \cup \{g\}\right). \tag{4.31}$$

Hasonlóan, ha c volt az utolsó adósságcédula, amit a vesztes csomagjávól a győztes csomagjába tettünk, akkor $X \cup \{c\}$ csomagot a vesztesnek adva és Y csomagot a győztesnek adva ismét egy Pareto-javítását adnánk π'-nek, hiszen

$$u_l\left(\pi'_l\right) < u_l\left(X \cup \{c\}\right), \text{ és} \tag{4.32}$$

$$u_w\left(\pi'_w\right) < u_w\left(Y\right). \tag{4.33}$$

Ez nyilván ellentmondás, hiszen π' szétosztás Pareto optimális volt.

Ezzel beláttuk, hogy $\pi*$ szétosztás PO és IM1. $\square$

5. fejezet

Igazságos osztozkodás valós időben

5.1. Egy élelmiszerbank problémája

Tekintsünk most másfelé, és nézzünk meg egy különleges igazságos osztozkodási problémát. [4] -ben bemutattak egy olyan különleges problémát, amely rávilágít arra, hogy mennyire nehéz olyankor igazságos szétosztást találnunk. Egy ausztrál élelmiszerbank problémáját vizsgálták meg.

Az alapprobléma nem más, minthogy szétosszák az adományozott feldarabolhatatlan élelmiszereket/élelmiszercsomagokat különböző jótékonysági szervezetek között. Szeretnék ezt minél igazságosabban tenni. Egy adott élelmiszer vagy élelmiszercsomag a különböző szervezeteknek más-más értékű lehet. Van akiknek különösen hasznos egy adott szétosztásra váró élelmiszer, van akinek kevésbé, sőt, olyan is lehet, hogy valakiknek egyáltalán nem is hasznos. A probléma eddig nem tűnik bonyolultnak, hiszen ilyen problémára láttunk már megoldást 3.3, azonban a feladat nehézsége két dologban rejlik. Bonyolítja a problémát az, hogy nem áll rendelkezésünkre az az ismeret, hogy a szervezetek számára mennyire értékes egy adott tárgy, továbbá a tárgyak egyesével érkeznek az ételbankba és azokat azonnal tovább kell küldeni.

5.2. Lehetséges megoldási metódusok

A modellünket az egyszerűség (és a következetesség) kedvéért alakítsuk úgy, hogy jótékonysági szervezetek és élelmiszerek helyett ügynökökről és tárgyakról (javakról) beszéljünk.

Legyen n ügynökünk és m tárgyunk. A tárgyak egyesével jönnek $1, 2, \ldots, m$ sorrendben. Két különböző szétosztási mechanizmust fogunk megvizsgálni, az első a LIKE mechanizmus. Eszerint az ügynökök jelzik, hogy igényt tartanak-e az éppen szétosztásra váró tárgyra avagy sem, majd közöttük teljesen véletlenszerűen választjuk ki azt, aki megkapja az adott tárgyat. Ezután érkezik a következő tárgy és így tovább, míg az utolsó m-edik tárgyat is oda nem adtuk valakinek.

A LIKE mechanizmus alapvető hátránya az, hogy ha rosszul jön ki a lépés, akkor egy-egy ügynök nagyon szerencsétlenül járhat. Megvan rá az esély, hogy egy ügynök minden tárgynál jelzi, hogy szüksége lenne rá, azonban egyet sem kap meg belőlük.

Annak érdekében, hogy az előzőleg ismertetett szerencsétlen helyzet ne alakulhasson ki, kipróbálunk egy másik módszert, a Kiegyensúlyozott LIKE mechanizmust. Ahogy azt a neve is sugallja, nagyon hasonló az előzőhöz. Továbbra is azzal kezdjük az éppen aktuális szétosztásra váró tárgy szétosztását, hogy az ügynökök jelzik, hogy igényt tartanak-e az adott tárgyra avagy sem. Ezután ezen ügynökök közül annak adjuk a tárgyat, aki eddig a legkevesebb tárgyat kapta. Amennyiben több ilyen ügynök van, úgy közöttük véletlenszerűen döntünk. Ezzel elérjük azt, hogy egy ügynök legalább egy tárgyat biztosan megkapjon n olyan tárgy közül, aminél jelezte, hogy szüksége lenne rá.

Aszerint vizsgálták ezt a két mechanizmust, hogy vajon stratégia-védettek-e. Egy mechanizmusra akkor mondjuk, hogy stratégia-védett, ha egy ügynök nem tudja befolyásolni saját igényeinek megváltoztatásával (vagy meghamisításával) a szétosztás kimenetelét úgy, hogy jobb legyen neki. Feltételezzük, hogy erre akkor lenne képes, ha tudná előre, hogy milyen tárgyak fognak megjelenni a sorban.

5.2.1. Tétel. *[4] A LIKE mechanizmus stratégia-védett.*

5.2.2. Tétel. *[4] A Kiengyensúlyozott LIKE mechanizmus nem stratégia-védett még abban az esetben sem, ha csak* $0, 1$ *értékeket adunk a tárgyaknak.*

Vizsgálták a stratégia-védettséget sok különböző esetre és azt mondhatjuk, hogy a Kiegyensúlyozott LIKE mechanizmust csak akkor érdemes használni, ha minden ügynök ugyan azokkal az értékekkel rendelkezik a tárgyak felett (például 0, 1).

Irodalomjegyzék

[1] S. Barman és S. Kumar Krishna Murthy. *Approximation algorithms for maximin fair division* Proc. of the 18th ACM-EC Conference, 647–664, 2017

[2] I. Caragiannis, D. Kurokawa, H. Moulin, A. D. Procaccia, N. Shah, és J. Wang. *The unreasonable fairness of maximum Nash welfare* Proc. of the 17th ACM-EC Conference, 305–322, 2016

[3] Haris Aziz, Ioannis Caragiannis, Ayumi Igarashi és Toby Walsh. *Fair Allocation of Indivisible Goods and Chores* Proc. of the Twenty-Eighth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-19), 53-59, 2019

[4] Martin Aleksandrov, Haris Aziz, Serge Gaspers és Toby Walsh. *Online Fair Division: Analysing a Food Bank Problem* Proc. of the Twenty-Fourth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI 2015), 2540–2546, 2015

[5] Sylvain Bouveret és Michel Lemaître. *Characterizing conflicts in fair division of indivisible goods using a scale of criteria* Autonomous Agents and Multi-Agent Systems 30, 2, 259–290, 2016

[6] Richard J Lipton, Evangelos Markakis, Elchanan Mossel, és Amin Saberi. *On approximately fair allocations of indivisible goods* Proc. of the 5th ACM conference on Electronic commerce. ACM, 125–131, 2004

[7] B. de Keijzer, S. Bouveret, T. Klos, és Y. Zhang. *On the complexity of efficiency and envyfreeness in fair division of indivisible goods with additive preferences* Proc. of the 1st International Conference on Algorithmic Decision Theory, 98–110, 2009