EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Neubrandt Benedek

Algebra és Számelmélet versenyfeladatok a középiskolában

SZAKDOLGOZAT
Matematika BSc, Elemző Matematikus szakirány

TÉMAVEZETŐ:

Dr. Kiss Emil
Algebra és Számelmélet tanszék

BUDAPEST, 2020

Tartalomjegyzék

1. Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni Dr. Kiss Emil tanár úrnak, hogy elvállalta a dolgozat témavezetését és szaktudásával segített annak megírásában. Valamint ezúton szeretném megköszönni a munkáját minden tanáromnak aki foglalkozott velem a tanulmányaim során.

Továbbá szeretném kifejezni hálám és köszönetem hozzátartozóimnak, a családomnak a megértésért, türelemért és támogatásért, amit felém intéztek az eddigi tanulmányaim során.

2. Bevezetés

A témaválasztásban leginkább az motivált, hogy olyan témát találjak amely valahogy kötődik a középiskolához. Gimnáziumi éveim alatt került hozzám igazán közel a matematika szeretete, és az a szemlélet melyet ez a tudomány ad az embereknek, hogy merjenek megkérdőjelezni illetve megkérdezni dolgokat mellyel nincsenek tisztában.

"Az absztrakciónak rossz híre van: színtelennek, céltalannak, a világtól elszakadtnak és tartalom nélkülinek tartják. Terméketlennek. A matematikát néha megrójják azért, mert absztrakt: mintha ez egy veszélyes lejtőn tett rossz lépés lenne. Pontosan az absztrakció az azonban, ami a matematika feltűnő és gyakran nem is várt hatékonysága mögött rejtőzik. Készség az összes lényegtelen tényező figyelmen kívül hagyására, a valóságosnál szélesebb tartományban való vizsgálódásra, összehasonlítani azt, ami van, azzal, ami lehetséges, sőt, ami lehetetlen - ez a matematika sikerének titka."

Karl Sigmund

Dolgozatom első felében számelmélet versenyfeladatokra mutatok megoldásokat, majd két olyan algebrai témát mutatok, melyek inkább egy matematika szakkörön vagy egy speciális matematika tagozaton lehetnek érdekes témák.

3. Oszthatósággal kapcsolatos feladatok

3.1. Néhány elemi oszthatósági feladat

1. Feladat. *[4]* ***Kömal B. 3852.*** *Az a, b egészekre igaz, hogy* $2005 \mid a^3 + b^3$ *és* $2005 \mid a^4 + b^4$. *Bizonyítsuk be, hogy* $2005 \mid a^5 + b^5$.

Megoldás: Vegyük észre, hogy $a^5 + b^5$ felírható a következőképpen:

$$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 + b^4) - ab(a^3 + b^3)$$

Tudjuk, hogy ha $x \mid y$ és $x \mid z$ akkor $x \mid sy + tz$ ahol az s és t egész szám. Ha x=2005, $y = a^4 + b^4$, $z = a^3 + b^3$, $s = a + b$ és $t = -ab$, akkor a feladat feltételéből pont a fenti említett összefüggést kapjuk. Tehát:

$$2005 \mid (a + b)(a^4 + b^4) - ab(a^3 + b^3) = a^5 + b^5$$

Megjegyzés: A feladat megoldása során nem használtuk ki, hogy $x = 2005$, x bármilyen más egész szám lehetne.

2. Feladat. *[4]* ***Kömal B. 4472.*** *Bizonyítsuk be, hogy hét egymást követő egész szám négyzetének az összege nem lehet négyzetszám.*

Megoldás: Írjuk fel a hét egymást követő számot úgy, hogy a középső n legyen:

$$(n - 3)^2 + (n - 2)^2 + (n - 1)^2 + n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 + (n + 3)^2 = 7k^2 + 28 = 7(k^2 + 4)$$

Ha megvizsgáljuk, hogy egy négyzetszám milyen maradékokat adhat 7-tel osztva a következőket kapjuk: 0,1,2 és 4. Így ha hozzájuk adunk 4-et a maradékoknak rendre 4,5,6 és 1-nek kell lenniük, így megkapjuk, hogy $(k^2 + 4)$ nem osztható 7-tel, amiből következik, hogy $7 \cdot (k^2 + 4)$ nem osztható 7^2-nel, pedig egy négyzetszámban minden prímtényezős felbontásában minden számnak páros hatványon kell szerepelnie.

3. Feladat. *[3] Ez a feladat a 2005/2006. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyen szerepelt az második fordulóban, a II. kategóriában.*

Az a, b, c és d egészek olyanok, hogy az ac, $bc + ad$, *bd mindegyike osztható az n egésszel. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a* $bc + ad$ *összeg tagjai külön-külön is oszthatók n-nel, azaz* $n \mid bc$ *és* $n \mid ad$.

Megoldás: Ha egy szám osztója egy másik számnak az azt jelenti, hogy benne az összes prím kitevője legalább akkora mint a számban amit oszt. Így nézzük egy szabadon választott p prím kitevőit az a, b, c, d és n számokban és jelöljük őket $\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c, \alpha_d$ valamint α_n-nel.

Az $n \mid ac$-ből következik, hogy $\alpha_a + \alpha_c \geq \alpha_n$ és ehhez hasonlóan felírható $n \mid bd$-ből, hogy $\alpha_b + \alpha_d \geq \alpha_n$.

Ez a két egyenlőtlenség összeadható, amelyből következik $(\alpha_a + \alpha_c) + (\alpha_b + \alpha_d) \geq 2 \cdot \alpha_n$. Tehát $p^{\alpha_n} \mid ad$ vagy $p^{\alpha_n} \mid bc$ közül legalább az egyiknek teljesülnie kell.

Valamint, mivel tudjuk, hogy $n \mid (bc + ad)$ így az összeadás másik elemét is osztania kell az n-nek.

4. Feladat. *[3] Ez a feladat a 2014/2015. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyen szerepelt az első fordulóban, a III. kategóriában.*

Mely 1-nél nagyobb egész számok lehetnek két egymást követő $n^2 + 3$ *alakú szám közös osztói?*

Megoldás: Tehát feltehetjük, hogy létezik $k \in \mathbb{N}$ amely osztója $n^2 + 3$-nak valamint $(n+1)^2 + 3$-nak is. Nézzük milyen oszthatóságok következnek még ebből, például a kettő különbségéből a következő oszthatóság írható fel:

$$k \mid 2n + 1$$

Ekkor ezt az oszthatóságot tovább felhasználva felírhatjuk, hogy k osztója $n(2n-1) - 2(n^2+3)$, tehát:

$$k \mid n - 6$$

És így felírható $(2n+1) - 2(n-6)$, amiből következik, hogy:

$$k \mid 13$$

Mivel a 13 prím szám, így $k = 13$. Leellenőrizve megkapjuk, hogy 13 valóban megoldás ugyanis $n = 6$-ra megkapjuk $n^2 + 3 = 39$ illetve $(n+1)^2 + 3 = 52$ amely számoknak osztója a 13.

Megjegyzés: Nyilván a megoldáshoz másfajta kombinációkon keresztül is eljuthatunk, például ha észrevesszük hogy $4(n^2+3) - (2n-1)(2n+1) = 13$.

5. Feladat. *[3] Ez a feladat a 2016/2017. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyen szerepelt az első fordulóban, a III. kategóriában.*

Ha k pozitív egész szám, jelölje p_k *a k-adik prímszámot (tehát* $p_1 = 2, p_2 = 3,, \ldots$*). Vannak-e olyan k és n pozitív egész számok, amelyekre* $p_1.p_2 \ldots p_k = 2016^n + 10n - 26$ *?*

1. Megoldás: Írjuk fel a binomiális tételt a következő alakban:

$$2016^n = (2015+1)^n = \binom{n}{n} \cdot 2015^n + \binom{n}{n-1} \cdot 2015^{n-1} + \cdots + 2015n + 1$$

Ennek az összegnek az utolsó kettő kivételével mindegyik tagja osztható 25-tel. Valamint a 2016^n szám 25-tel osztva ugyanannyi maradékot ad, mint $2015n + 1$.

$$25 \mid 2015n + 1 + 10n - 26 = 2025n - 25,$$

ezért $25 \mid 2016^n + 10n - 25$.

A $p_1, p_2 \ldots p_k$ szorzat bármelyik prímtényezője, köztük az 5 tényező is legfeljebb első hatványon szerepelhet, ezért ez a szorzat sohasem osztható 25-tel. Tehát nincsenek olyan k és n pozitív egész számok, amelyekre teljesül a szóban forgó egyenlőség.

2. Megoldás: Teljes indukcióval belátjuk, hogy $25 \mid 2016^n + 10n - 25$. Megvizsgáljuk n=1 esetet, ez eleget tesz a feltételnek, így felírjuk n-re a feltevésünket:

$$25 \mid 2016^n + 10n - 26$$

Meg mutatjuk, hogy ugyanaz n helyett $n+1$-re is érvényes:

$$2016^{n+1} + 10(n+1) - 26 = 2016 \cdot (2016^n + 10n - 26) - 20150n + 52400$$

Az első tag az indukciós feltevés alapján osztható 25-tel, és a következő két tagban is oszthatók az együtthatók 25-tel. Tehát az oszthatóság n+1 esetében is teljesül. Innentől a feladatot ugyanúgy fejezhetjük be mint az első megoldásban.

6. Feladat. *[3] Ez a feladat a 2019/2020. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyen szerepelt az első fordulóban, a III. kategóriában.*

Jelölje $d(n)$ az n pozitív egész szám, pozitív osztóinak a számát. Tegyük fel, hogy $d(k)^2 = d(k^4)$. Bizonyítsuk be, hogy alkalmas $j \geq 0$ egészre $d(k) = 3^j$.

Megoldás: Tudjuk, hogy k egész szám prímtényezős felbontása:

$$k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_m}, \text{ akkor } d(k) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_m+1), \text{ illetve}$$
$$d(k)^2 = (\alpha_1+1)^2(\alpha_2+1)^2\ldots(\alpha_m+1)^2$$

Valamint k^4 prímtényezős felbontása a hatványozás azonosságai alapján:

$$k^4 = p_1^{4\alpha_1} p_2^{4\alpha_2} \ldots p_k^{4\alpha_m}, \text{ tehát } k^4 \text{ osztói: } d(k) = (4\alpha_1+1)(4\alpha_2+1)\ldots(4\alpha_m+1)$$

Így a $d(k)^2 = d(k^4)$ feltételből kapott összefüggés:

$$(\alpha_1+1)^2(\alpha_2+1)^2\dots(\alpha_m+1)^2 = (4\alpha_1+1)(4\alpha_2+1)\dots(4\alpha_m+1)$$

Vegyük észre, hogy az egyenlet jobb oldalán $4k+1$ vagyis páratlan számok szorzata áll, így mindkét oldalnak páratlannak kell lennie. Ezért minden (α_i páros, így szükségképpen legalább 2. Valamint minden α_i-re felírható a következő egyenlőtlenség:

$$(\alpha_i+1)^2 = (\alpha_i)^2 + (2\alpha_i) + 1 \geq (4\alpha_i) + 1$$

Ami csak $\alpha_i = 2$ esetén teljesül, így csak ezt a megoldást kell ellenőrizni

$$d(k) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_m+1) = 3^m$$

3.2. Kongruenciák

3.1. Definíció. [1] Legyenek a és b egész számok és m pozitív egész. Azt mondjuk, hogy a kongruens b-vel modulo m, ha $m \mid a - b$. **Jelölés**: $a \equiv b(\mathrm{mod} m)$.

1. Tétel. *[1] A kongruenciákra igazak a következők:*

(i) *Minden a-ra* $a \equiv a(\mathrm{mod} m)$.

(ii) $a \equiv b(\mathrm{mod} m) \Longrightarrow b \equiv a(\mathrm{mod} m)$.

(iii) $a \equiv b(\mathrm{mod} m)$ *és* $b \equiv c(\mathrm{mod} m) \Rightarrow a \equiv c(\mathrm{mod} m)$.

(iv) $a \equiv b(\mathrm{mod} m)$ *és* $c \equiv d(\mathrm{mod} m) \Rightarrow a + c \equiv b + d(\mathrm{mod} m)$ *illetve* $a - c \equiv b - d(\mathrm{mod} m)$

(v) $a \equiv b(\mathrm{mod} m)$ *és* $c \equiv d(\mathrm{mod} m) \Rightarrow ac \equiv bd(\mathrm{mod} m)$.

7. Feladat. *[4]* ***Kömal B. 3825.*** *Az n olyan pozitív egész, amelyre* $2n + 1$ *és* $3n + 1$ *is négyzetszám. Bizonyítsuk be, hogy n osztható 40-nel.*

Megoldás: Mivel a $40 = 2^3 \cdot 5$ és ez a két szám relatív prím, ezért azt kell belátnunk, hogy:

$$n \equiv 0(\mathrm{mod} 5) \text{ és } n \equiv 0(\mathrm{mod} 8)$$

Nézzük meg milyen maradékot adnak a 5-tel osztva a számok:

$n \equiv$	0	1	2	3	4
$2n+1 \equiv$	1	3	0	2	4
$3n+1 \equiv$	1	4	2	0	3

És ha vesszük a kvadratikus maradékokat modulo 5, tehát négyzetszámok maradékát 5-tel osztva, akkor megkapjuk, hogy azok csak: 0, 1 és 4 lehetnek. A fenti táblázatban csak az n=0 esetben áll a második és a harmadik sorban is kvadratikus maradék, és mivel mindkét szám négyzetszám így azt kapjuk, hogy $n \equiv 0$ (modulo 5).

Most nézzük meg mennyi maradékot adnak 8-cal osztva a számok:

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7
$2n+1 \equiv$	1	3	5	7	1	3	5	7
$3n+1 \equiv$	1	4	7	2	5	0	3	6

Most nézzük a kvadratikus maradékokat modulo 8, amelyek szintén: 0, 1 és 4. Így ugyanazzal a meggondolással amit feljebb alkalmaztunk megkapjuk, hogy $n \equiv 0$ (modulo 8). És a két kongruenciát összeszorozva kapjuk, hogy $n \equiv 0$ (modulo 40)

8. Feladat. *[3] Ez a feladat a 2018/2019. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyen szerepelt az első fordulóban, a III. kategóriában. Keressük meg az összes nemnegatív egész számokból álló k, l, m számhármast, amelyre:*

$$13^k + 43^l = 2018^m$$

Megoldás: Vegyük mindkét oldalnak a 3-mal vett osztási maradékát:

$$13^k \equiv\ 1(\text{mod}3)\ 43^l \equiv\ 1(\text{mod}3)$$

A jobb oldalt vizsgálva azt kapjuk, hogy

$$2018^m \equiv\ 1(\text{mod}3) \text{ ha } 2 \mid m.\ 2018^m \equiv\ 2(\text{mod}3) \text{ ha } 2 \nmid m.$$

Mivel az egyenlet bal oldala a kettes maradékosztályba tartozik ezért az m-nek páratlannak kell lennie. Vizsgáljuk meg az egyenletnek a 7-tel vett osztási maradékait is:

$$13^k \equiv\ 1(\text{mod}7) \text{ ha } 2 \mid m\ 13^k \equiv\ -1(\text{mod}7) \text{ ha } 2 \nmid m\ 43^l \equiv\ 1(\text{mod}7).$$

Mivel 2018 hatványai nem oszthatók 7-tel, ezért k szükségképpen páros. Most vizsgáljuk az egyenletet modulo 8. Mivel k páros, ezért:

$$13^k = 169 = (8 \cdot 21 + 1)^{k/2} \equiv\ 1(\text{mod}8).$$

Illetve a bal oldali másik tagra igaz, hogy

$$43^l = (8 \cdot 5 + 3)^l \equiv\ 1(\text{mod}8) \text{ ha } 2 \mid l\ 43^l = (8 \cdot 5 + 3)^l \equiv\ 1(\text{mod}8) \text{ ha }\ 2 \nmid l.$$

Így $13^k + 43^l$ nyolcas maradéka csak 4 vagy 2 lehet. A jobb oldalon egy páros szám m-edik hatványa áll, ami osztható 8-cal, ha $m \geq 3$. Ezért az m kitevő értéke 3-nál kisebb.

Tehát csak m = 1 lehetséges. Mivel $43^3 > 13^3 > 2018$, csak k, $l \leq 2$ jöhet szóba. Ha $k = l = 2$, akkor $13^k + 43^l$ éppen 2018-cal egyenlő, különben kisebb. Ezért a feladatnak az egyetlen megoldása a k = 2, l = 2, m = 1 számhármas.

9. Feladat. *Ez a feladat a 2016/2017. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyen szerepelt a második fordulón fordulóban, a II. kategóriában. Határozzuk meg, mely a, b, c nemnegatív egész számok esetén teljesül:*

$$3^a + 17 \cdot 4^b = c^2$$

Megoldás: Az előző feladathoz nagyon hasonló lesz a megoldás. De itt kihasználjuk a Kis Fermat-tételt.

2. Tétel. *[1] **Kis Fermat-tétel:** Ha p prím és $(a,p)=1$, akkor $a^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod} p)$.*

Vesszük mindkét oldal 3-mas maradékát. Tudjuk hogy $17 \cdot 4^b$-nek a 3-mas maradéka 2, illetve azt hogy négyzetszámnak nem lehet 2 a maradéka 3-mal osztva. Így szükségképpen $a = 0$. Ezt felhasználva kapjuk a következő egyenletet:

$$17 \cdot 4^b = c^2 - 1 = (c+1)(c-1)$$

Mivel a 18 nem négyzetszám ezért a $b \neq 0$. Valamint mindkét oldal páros, sőt a jobb oldalon két egymás utáni páros szám szorzata áll, amelyek közül az egyik osztható néggyel. Ebből következik:

$$17 \cdot 2 = c + 1 \text{ vagy } 17 \cdot 2 = c - 1$$

Amely egyenletek párja rendre:

$$2^{2b-1} = c - 1 \text{ vagy } 2^{2b-1} = c + 1$$

Az első egyenlet rendszerből kapjuk a $b = 3$ illetve $c = 33$ megoldásokat, amelyek az egyetlenek mert a másik egyenletrendszer nem jó megoldásra vezet.

3.3. Tökéletes számok

[10] Erdős Pál mondta a témában: „Máig is teljesen reménytelen annak az eldöntése, hogy van-e végtelen sok 2p 1 alakú prímszám, ahol p prímszám. Azt szoktam mondani, hogy ez a kérdés talán nem a legsürgősebb, amelyet az emberiségnek meg kell oldani, de mindenesetre nincs nála nehezebb.” Ha sikerül bizonyítani, hogy végtelen sok ilyen prím van, abból Euklidesz egyik tétele alapján adódna az, hogy végtelen sok tökéletes szám van.

[1] A ókori görögök számmisztikájának fontos eleme, hogy egy szám osztóját (kivéve magát a számot) a szám részének tekintették, és tökéletesnek nevezték azokat a számokat, amelyek a „részeikből összeállnak”. Ilyen például a $6 = 1+2+3$ és a $28 = 1+2+4+7+14$. Euklidész Elemek című könyvében szerepel az alábbi általános konstrukció is:

"Ha az egységtől kezdve kétszeres arányban képezünk egy mértani sorozatot, amíg a sorösszeg prím nem lesz, és az összeggel megszorozzuk az utolsó tagot, akkor a szorzat tökéletes szám lesz."

Napjainkban már magát a számot is önmaga osztójának tekintjük, így a tökéletes számot következőképpen definiáljuk:

3.2. Definíció. [1] Az n pozitív egész tökéletes szám, ha $\sigma(n) = 2n$.

3. Tétel. *[1] Ha az n kanonikus alakja $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, akkor*

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^{r} (1 + p_1^{\alpha_1} + p_2^{\alpha_2} + \cdots + p_n^{\alpha_r}) = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

10. Feladat. *[4]* ***Kömal B. 4553.*** *Melyek azok a k pozitív egész számok, amelyekre $2 \cdot 3^k$ tökéletes szám?*

Megoldás: Nézzük meg az $n = 2 \cdot 3^k$ szám pozitív osztóit, melyek a következőek:

$$\sigma(n) = \sigma(2 \cdot 3^k) = (1+2) \cdot (1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^k) =$$
$$= (1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^k) + 2 \cdot (1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^k) =$$
$$= 3 \cdot (1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^k) = 3 \cdot \frac{3^{k+1} - 1}{2}$$

Az $n = 2 \cdot 3^k$ egyenlet átrendezéséből következik, hogy $3 \cdot \frac{n}{2} = 3^{k+1}$, és ezt beírva a következő egyenletre jutunk:

$$\frac{9n-6}{4} = 2n$$
$$n = 6 = 2 \cdot 3^1$$

Az egyetlen megoldása tehát a $k = 1$.

4. Csoportelmélet a középiskolában

4.1. Pálya és stabilizátor

4.1. Definíció. [1]Egy f számelmélet függvény multiplikatív, ha bármely $a, b \in \mathbb{N}$ és $(a, b) = 1$ esetén $f(ab) = f(a)f(b)$. Ha a $(a, b) = 1$ feltétel elhagyható, akkor totális multiplikativitásról beszélünk.

4. Tétel. ***Lagrange-tétel*** *[2] véges csoport minden részcsoportjának rendje osztója a csoport rendjének.*

4.2. Definíció. [2] Legyen X halmaz. Az S_X szimmetrikus csoport részcsoportjait transzformációcsoportoknak, illetve (elsősorban véges X esetén) permutációcsoportoknak nevezzük. Az X halmaz elemeit néha pontoknak hívjuk.

4.3. Definíció. [2] Legyen G transzformációcsoport az X halmazon. Ha $x \in \mathbb{X}$, akkor tekintsük azokat a $g \in G$ elemeket, melyek x-et fixen hagyják, azaz $g(x) = x$. Ezek nyilván részcsoportot alkotnak G-ben, melynek neve az x pont G-beli stabilizátora, jele G_x. Ha $g(x) = x$. Egy transzformáció fixpontmentes, ha nincs fixpontja.

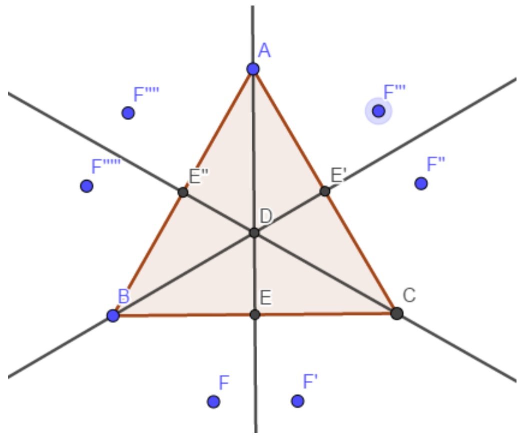
1. Lemma. *[2] Tegyük föl, hogy $G \leq S_X$ és $g \in \mathbb{G}$ egy rögzített elem. Legyen $x \in \mathbb{X}$ és $y = g(x)$. Ekkor azok az $f \in \mathbb{G}$ elemek, amelyekre $f(x) = y$, a gH mellékosztályt alkotják, ahol $H = G_x$ az x elem stabilizátora G-ben.*

4.4. Definíció. [2] Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport és $x \in \mathbb{X}$. A $g(x)$ alakú pontok halmazát, ahol g befutja G elemeit, az x pályájának (orbitjának) nevezzük, és $G(x)$-szel jelöljük. A pálya elemszámát a pálya hosszának hívjuk.

5. Tétel. *[2] Legyen $G \leq S_X$. Ekkor tetszőleges $x \in \mathbb{H}$-re $\mid G(x) \mid = \mid G : G_x \mid$. Tehát egy pont pályájának a hossza épp a pont stabilizátorának az indexe, vagy másképp fogalmazva az x pályájának elemszáma szorozva az x stabilizátorának elemszámával mindig G elemeinek a számát adja.*

Az előző tételt jól lehet szemléltetni kis elemszámú csoportoknál ábrákkal. Így nézzük is a következő egyszerű példát.

Példa: [2] X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja. A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés. Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.



(i) A D pont pályája egyelemű, mert mind a 6 transzformáció fixen hagyja.

(ii) Az F pont pályája háromelemű, mert 2 transzformáció hagyja fixen.(identitás + egy tükrözés)

(iii) Az E pont pályája hatelemű, mert csak 1 transzformáció hagyja fixen.

Tehát: (A pálya elemszáma) × (fixáló transzformációk száma) = (Csoport rendje)

11. Feladat. *[4] Kömal A. 706.*

Jelölje $\mathbb{Z}^+$ a pozitív egészek halmazát. Határozzuk meg az összes olyan $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ függvényt, melyre a következők teljesülnek:

- $f(mn) = f(m)f(n)$ *minden* $m, n \in \mathbb{Z}^+$*-ra, illetve*
- $f^{(n)}(n) = n$ *minden* $n \in \mathbb{Z}^+$*-ra (azaz* $f\Big(f\big(\ldots\big(f(n)\big)\ldots\big)\Big) = n$*, ahol a zárójelpárok száma* n*.*

Megoldás: [4] A feladat megoldásához három alállítást fogunk megfogalmazni.

1. Állítás: Ha $f(p) = p$ minden p prímszámra, akkor $f(n) = n$ minden n pozitív egészre.

Bizonyítás: Ez következik pusztán abból, hogy f függvény totálisan multiplikatív amit a a feladat első feltétele mond ki. Elemi számelméleti meggondolásból adódik, hogy $f(mn) = f(m)f(n)$ feltétel sokszori alkalmazásából, hogy ha $n > 1$ prímfelbontása $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_r}$, akkor:

$$f(n) = f(p_1)^{\alpha_1} f(p_2)^{\alpha_2} \ldots f(p_k)^{\alpha_k}.$$

2. Állítás: Minden $n \in \mathbb{Z}^+$-hoz rendeljük hozzá a pályáját amit bejár:

$$O_n := \{n, f(n), f(f(n)), \ldots, f^{(k)}(n), \ldots\}.$$

Ekkor $f^{(n)}(n) = n$ esetén O_n véges halmaz, és $|O_n|$ osztója nyilvánvalóan n-nek.

Bizonyítás: Tekintsük az $a_0 = n$, $a_1 = f(n)$, $a_2 = f(f(n))$, $\ldots$ sorozatot. Legyen d a legkisebb olyan pozitív egész, melyhez $a_{k+d} = a_k$ valamilyen k-ra (ami $a_n = a_0$ okán létezik). Ekkor f-et a két oldalra alkalmazva, $a_{k+d+\ell} = a_{k+\ell}$ adódik $\ell = 1, 2, \ldots$-ra. Mivel $f^{(n)}(n) = n$, ezért $a_{nk} = n$, s így $a_{nk+d} = a_{nk}$ miatt $f^{(d)}(n) = n$. Ezért $a_0 = a_d$, és így $a_1 = a_{d+1}$ stb., azaz (a_k) sorozat d hosszú periódusokban ismétlődik. Továbbá d minimalitása miatt az ismétlődő $a_0, a_1, \ldots, a_{d-1}$ periódusok páronként különböző számokat tartalmaznak. Ebből $d|n$ és $d = |O_n|$ adódik.

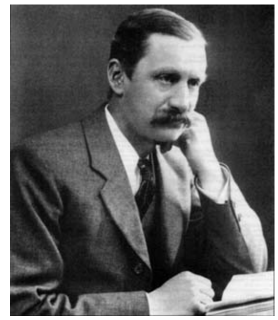
3. Állítás: Minden p prímszámra $f(p) = p$.

Bizonyítás: A 2. állítás szerint $|O_p|$ értéke 1 vagy p. Hogyha $|O_p| = 1$, akkor $f(p) = p$. Ha azonban $|O_p| = p$, akkor mivel $x \in O_p$ esetén $O_x = O_p$, így a 2. állítás szerint $|O_x| = p$ osztja x-et. Multiplikativitás miatt $p|x$-ből $f(p)|f(x)$ következik. Ezek alapján felírható a $p|f(p)|f\big(f^{(p-1)}(p)\big) = p$ osztólánc, amiből ismét $f(p) = p$ következik.

Az 1. és 3. állításból kapjuk, hogy $f(n) = n$ minden n pozitív egészre, és az egyetlen megoldás minden $n \in \mathbb{Z}^+$-ra.

4.2. Burnside-lemma

William Burnside nevéhez kötik azt a tételt mellyel leszámlálási problémákat egyszerűen tudunk kezelni, bár bizonyítást először Georg Frobenius adott rá, aki 1887 látta be az állítást. Számos csoportelméleti eredménye mellett 1897-ben kiadta The Theory of Groups of Finite Order című könyvét – amely az első angol nyelvű könyv volt ebben a témakörben, valamint tartalmazta a Burnside-lemmát amely így szélesebb körben vált ismerté.



1. ábra. William Burnside [6]

2. Lemma. ***Burnside-lemma:*** *[2] Hasson a G véges csoport az X véges halmazon. Bizonyítsuk be, hogy a G pályáinak száma éppen a G elemei fixpontjainak átlagos száma. Tehát:*

$$|N| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)|$$

Ahol N a pályák száma, valamint |Fix(g)| azon $x \in X$ elemek száma amelyeket g önmagába visz.

Bizonyítás: [2] Legyenek G pályái az X halmazon $O_1, \ldots, O_k$. (Ezek páronként nem metszik egymást és lefedik X-et.) Kétféleképpen megszámoljuk azokat a (g, A) párokat, ahol $g(A) = A$ (és $g \in G, A \in X$). A számuk legyen N.

Rögzített A mellett ez A stabilizátorának elemszáma. A pálya-stabilizátor tétel miatt a $|G|/|O_i|$ számokat kell összeadni, a $|G|/|O_i|$-t annyiszor, ahány eleme O_i-nek van. Ezért $N = k|G|$ (ahol k a pályák száma).

Rögzített g mellett g fixpontjainak számát kapjuk. Tehát N a fixpontok számának összege is egyúttal. A G elemszámával osztva az állítást kapjuk: a fixpontok számának átlaga a pályák száma.

Most pedig nézzünk néhány feladatot ahol ez a lemma alkalmazható.

12. Feladat. *[2] Bontsunk egy négyzetet 9 egybevágó kisebb négyzetre. Hányféleképpen lehet ezek közül hármat kiszínezni (egy színnel) úgy, hogy a négyzet szimmetriáival egymásba átvihető színezéseket nem tekintjük különbözőnek? Oldjuk meg a feladatot három helyett négy kis négyzettel is.*

Megoldás: Nézzük először a forgatásokat. Természetesen mivel 3×3 kis négyzetünk van ebből $\binom{9}{3} = 84$-féleképpen lehet kiválasztani 3-mat, ami természetesen az identikus leképezés fixpontjainak a száma. Könnyen látható, hogy a $+90^\circ$ illetve a -90°-os forgatásoknak nincs fixpontja. A 180°-os forgatásnak négy fixpontja van, középpontot mindenképpen bele kell vennünk és négy olyan pár van amelyek a középpontra szimmetrikusak.

Most nézzük meg a tükrözéseket. Minden tükrözésnél van az az eset amikor mindhárom elemet a tükörtengelyről választjuk. Egy elemet mindenképpen a tengelyről kell választanunk amire három lehetőségünk van, és minden ilyen kiválasztáshoz tartozik három tengelyre szimmetrikus pár, így kapjuk eredményül $1 + 3 \cdot 3 = 10$

A következő táblázattal is össze lehet foglalni a felül írottakat:

1	f_1	f_2	f_3	t_1	t_2	t_3	t_4
84	0	4	0	10	10	10	10

Melyekre alkalmazva a Burnside-lemmát $(84 + 4 + 4 \cdot 10)/8 = 128/8 = 16$-ot kapunk eredményül.

Most nézzük meg milyen eredményre jutunk ha 4 kockát választhatunk ki. Most $\binom{9}{4} = 126$ eset tartozik az identitáshoz. A $+90^\circ$ illetve a -90°-os forgatásnak is kettő fixpontja van és ezek megegyeznek, a középpont nem lehet benne így a két megoldás az, hogy a négy sarokban lévő négyzetet választjuk, vagy azt a négyet amelyek nincsenek a sarokban. A 180°-os forgatásnál sem lehet a középpont benne és a megmaradó négy középpontra szimmetrikus párból kettőt kell kiválasztanunk, azaz $\binom{4}{2} = 6$ fixpontja van.

Most nézzük a tükrözéseket ennél a feladatnál. Csak páros darabszámút választhatunk ki azon négyzetek közül amelyeken a tükörtengely áthalad, tehát vagy nullát vagy kettő darabot. Ha nem választunk ki a tengelyről négyzetet akkor a maradék három tengelyre szimmetrikus párból kell kiválasztanunk kettőt, ezt $\binom{3}{2} = 3$-féleképpen tehetjük meg. Illetve ugyanígy háromféleképpen választhatunk ki kettőt azon négyzetek közül amin áthalad a tengely és a maradék három tengelyre szimmetrikus párból szintén háromféleképpen választhatunk ki egyet. Így minden tükrözésnek $3 + 3 \cdot 3 = 12$ fixpontja van.

1	f_1	f_2	f_3	t_1	t_2	t_3	t_4
126	2	6	2	12	12	12	12

Az orbitok száma tehát $(126 + 2 \cdot 2 + 6 + 4 \cdot 12)/8 = 184/8 = 13$.

13. Feladat. *[9] Ha a forgatással vagy tükrözéssel egymásba vihetőket nem számítjuk különbözőnek hány különböző karkötőt lehet készíteni két piros, két kék, két sárga és két fehér gyöngy felfűzésével? Mi helyzet, ha 4 zöld és 7 fehér gyöngyünk van?*

Megoldás: Gondoljunk úgy a karkötőre mintha a szabályos nyolcszög csúcsait színeznénk különböző színekkel. Először vizsgáljuk magát a színezést és utána áttérünk az orbitok leszámolására. Négyfajta színünk van és nyolc darab gyöngyünk, így az első színt $\binom{8}{2} = 28$-féleképpen helyezhetjük el, majd a másodikat $\binom{6}{2} = 15$-féleképpen majd a harmadikat $\binom{4}{2} = 6$-féleképpen amellyel meg is határoztuk az utolsó kettő pozícióját, így az identitásnak $28 \cdot 15 \cdot 6 = 2520$ darab fixpontja van. A szabályos nyolcszögnek 8 darab forgás és 8 darab tengelyes szimmetriája van, az utóbbiból négy olyan van mely a szemközti csúcsokon megy át, valamint 4 olyan ahol szemközti oldalfelező pontokon megy át a szimmetriatengely.

Most nézzük végig az egyes szimmetriák fixpontjait, könnyen látható, mivel minden színből csak kettő van, hogy csak a 180°-os forgatásnak van fixpontja és nagyon hasonlóan magyarázható a tükrözéseké is, ugyanis ha kijelöljük négy egymás melletti gyöngy színét és választunk mellé egy tengelyes szimmetriát, vagy a középpontos tükrözést úgy a teljes karkötőt meghatároztuk. És a négy gyöngyöt természetesen $4! = 24$-féleképpen tudjuk színezni úgy négy színnel, hogy mindegyiket csak egyszer használjuk. Ezt felhasználva a következő táblázatot kapjuk:

1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8
2520	0	0	0	24	0	0	0	24	24	24	24	24	24	24	24

Átlagolva az orbitok számát $(2520 + 9 \cdot 24)/16 = 171$ különböző felfűzési módot kapunk a feladatra.

Megjegyzés: A megoldást általánosítani lehet $2n$ hosszú gyöngysorra amelyet n színnel színezünk úgy, hogy minden színből kettő darab gyöngy legyen. Ekkor az identitáshoz $\binom{2n}{2} \cdot \binom{2n-2}{2} \cdot \dots \cdot \binom{4}{2}$-féle színezés tartozik. És a feljebb említettek szerint csak a 180°-os forgatásnak, valamint tükrözéseknek lesz fixpontja, mégpedig $n!$ darab.

Most tekintsük a feladat második felét amire szintén úgy tekintünk mintha a szabályos 11-szögnek színeznénk a csúcsait. Nyilván $\binom{11}{4} = 330$-féleképpen színezhetjük gyöngysort és ennyi az identitás fixpontja is, viszont a többi forgatásnak nincs fixpontja mert egy csúcs zöldre színezése maga után vonná az össze többi zöldre színezését, mivel a 11 prím.

A tükrözéseknél a következő három dolgot kell biztosítani ahhoz, hogy fixpontjuk legyen:

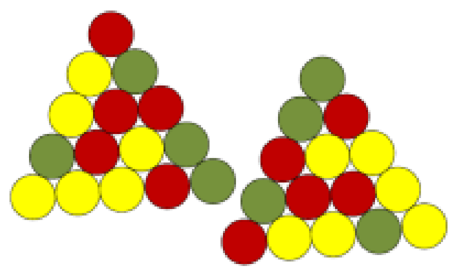
(i) A tengelyen lévő egyetlen csúcsnak fehérnek kell lennie.

(ii) A tengely egyik felén szereplő öt csúcs közül kettőnek zöldnek kell lennie.

(iii) A tengelyre szimmetrikusan ugyanolyan színű gyöngyöknek kell szerepelniük.

Ezt meggondolva minden tükrözésnél $\binom{5}{2} = 10$ fixpontot találunk. Ezeket átlagolva kapjuk meg végeredményül, hogy $(330 + 11 \cdot 10)/22 = 20$ különböző gyöngysort tudunk készíteni.

14. Feladat. *[8] 15 golyót elhelyeztünk az ábrán látható módon szabályos háromszög alakban. Hányféleképpen színezhetjük ki a golyókat 3 színnel, ha az elforgatással egymásba vihető színezéseket nem különböztetjük meg?*



Megoldás: Az így összerakott golyók egy szabályos háromszöget alkotnak, amelynek ismerjük a szimmetriáit: $+120°$ illetve $-120°$-os forgatások valamint az identitás, illetve a három tengelyes szimmetria, amelyet a csúcson és a vele szemben lévő oldalfelező ponton keresztülmenő egyenes alkot.

Tekintsük a forgatásokat először, mivel három színnel színezünk így az identitásnak 3^{15} fixpontja van. A maradék két forgatás fixpontjai megegyeznek, minden golyó pályája 3 hosszú, így a háromszög egyik oldalán egymás mellett lévő négy gyöngy valamint a középső golyó színének a megválasztásával megkapjuk az összes fixpontot, tehát ebből 3^5 darab van.

Most nézzük a tengelyes szimmetriákat, ahol a tengelyen levő három elemet (az első sor, a három hosszú golyósor középső eleme, illetve az öt hosszú golyósor középső eleme) szabadon választhatjuk, és ha a tengely egyik oldalán fekvő öt golyót meghatározzuk azzal meghatározzuk a másik oldalt is. Így mind a három tengelyes szimmetriához 3^8 darab fixpont tartozik.

Ezeket átlagolva kapjuk az eredményt: $(3^{15} + 2 \cdot 3^5 + 3 \cdot 3^8)/6 = 2394846$ különböző színezése létezik az így strukturált golyóknak.

5. Átdarabolhatóság

5.1. Átdarabolhatósággal kapcsolatos feladatok

Néhány feladat következik Freud Róbert Lineáris algebra könyvéből (ELTE Eötvös Kiadó, 2014). De ehhez szükségünk lesz az átdarabolhatóság definíciójára:

1. Definíció. *Két sokszöget/poliédert egymásba átdarabolhatónak nevezünk, ha páronként egybevágó, közös belső pont nélküli sokszögekre/poliéderekre bonthatók.*

Két sokszöget/poliédert együttesen kiegészíthetőnek nevezünk, ha ki lehet őket sokszögekkel/poliéderekkel olyan sokszögekké/poliéderekké egészíteni, melyek átdarabolhatók egymásba.

6. Tétel. ***Bolyai-Gerwien tétel:*** *Egyenlő területű sokszögek átdarabolhatók egymásba.*

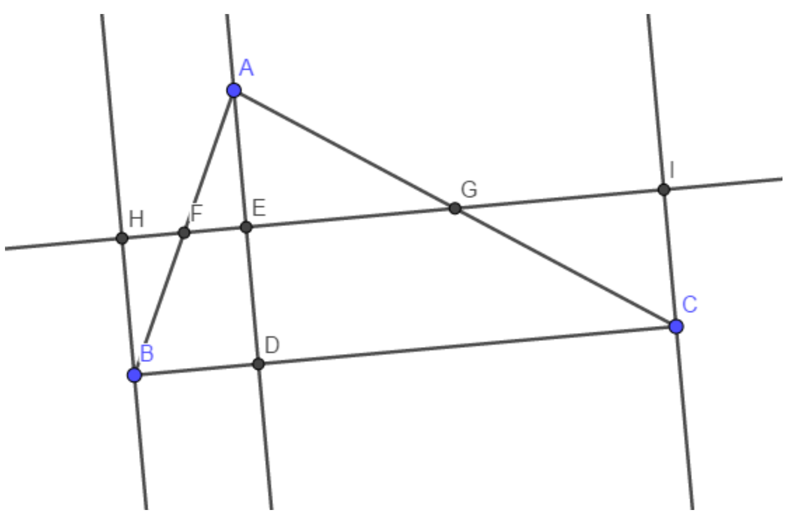
A tétel Bolyai Farkas és a Paul Gerwien matematikusok nevéhez fűződik, akik egymástól függetlenül jutottak hasonló eredményre.

15. Feladat. *[1] Igazoljuk a Bolyai-Gerwien tételt*

Bizonyítás: A feladat megoldásához három alállítást fogunk belátni.

1. Állítás: Háromszög átdarabolható téglalappá.

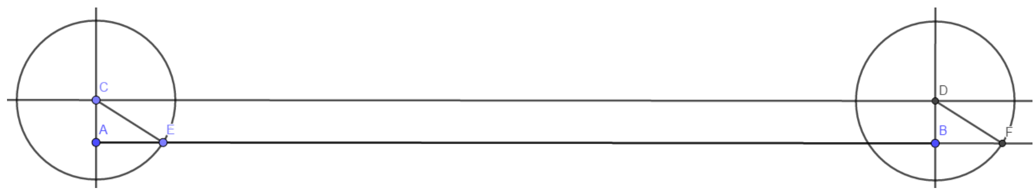
Bizonyítás: Egy csúcsból behúzzuk a magasságvonalat. A magasság felezőpontján keresztül párhuzamost húzunk a csúccsal szembeni alappal. Az így kapott trapézt kiegészítjük téglalappá.



2. ábra. Háromszög átdarabolása téglalappá

2. Állítás: Minden téglalap átdarabolható olyan paralelogrammává, amelynek az egyik oldala adott.

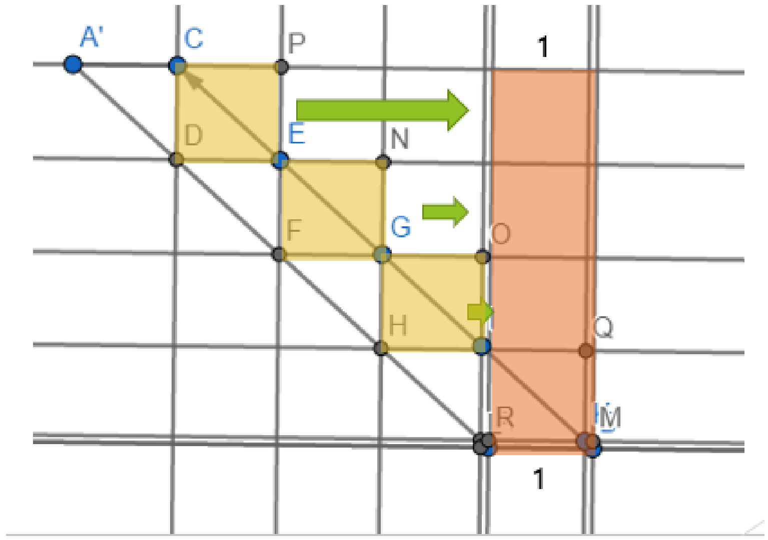
Bizonyítás: Csíkozzuk fel az adott téglalapot olyan az egyik oldala mentén rövidebb oldalhosszúságú téglalapokra mint a kívánt oldalhossz.(Ez az oldal felezéseivel elérhető). Ezután ezeket a téglalapokat összeragasztjuk egy hosszú téglalappá, majd bal felső csúcsból körzőzve levágjuk azt a derékszögű háromszöget melynek az átfogója pont a kívánt oldalhossz, és átragasztjuk a téglalap másik végére így megkapva a paralelogrammát.



3. ábra. Adott oldalhosszúságú paralelogramma szerkesztése téglalapból

3. Állítás: Adott a oldalhosszú paralelogramma átdarabolható a oldalhosszú téglalappá.

Bizonyítás: Állítsunk merőlegest a oldal végpontjaiban az oldalra, majd ezzel párhuzamosan vágjuk fel a paralelogrammát egymástól a távolságra lévő párhuzamos egyenesekkel horizontális és vertikális irányban is. Vegyük észre az egybevágó háromszögeket, melyek a oldalhosszú négyzetekké ragaszthatóak össze. Az esetlegesen megmaradó vékony sávot pedig úgy tudjuk a oldalú téglalappá átdarabolni úgy, hogy a megmaradó paralelogramma jobb felső csúcsában állított merőlegessel levágunk egy derékszögű háromszöget és azt a másik rövidebb oldalhoz ragasztjuk. Majd ezeket az egyenlő alaphosszú téglalapokat összecsúsztatjuk az ábrának megfelelően.



4. ábra. Adott a oldalú paralelogramma átdarabolása a oldalú téglalappá (a=1)

Tehát S_1 és az S_2 egyenlő területű sokszögeket háromszögekre vágjuk. 1. szerint ezeket a háromszögeket téglalapokká daraboljuk át, és a kapott téglalapokat 2. szerint adott oldalhosszú paralelogrammává daraboljuk, majd 3. szerint adott a oldalhosszú téglalappá. Ezeket egymás mellé helyezve két egybevágó téglalapot kapunk, amik nyilván egymásba átdarabolhatók.

Az alábbi feladat még később a Dehn-invariáns kapcsán lesz hasznunkra, hogy belássuk az azonos térfogatú tetraéder és kocka nem átdarabolhatóak egymásba.

16. Feladat. *[1] Mutassuk meg, hogy* $cos\alpha = 1/3$ *esetén* α/π *irracionális szám.*

Megoldás: Tegyük fel indirekt, hogy α/π racionális. Ekkor léteznek $k, m \in \mathbb{N}^+$, melyekre $m\alpha = 2k\pi$. Azt kell belátnunk, hogy $cos(m\alpha) = \frac{a_i}{3^m}$ alakú szám, ahol a_i egy 3-al nem osztható egész szám. A következő összefüggést fogjuk használni:

$$cos(n\alpha) = 2cos((n-1)\alpha)cos\alpha - cos((n-2)\alpha).$$

Teljes indukcióval feltesszük, hogy minden i-nél kisebb egészre igaz az állítás, és vizsgáljuk meg $i+1$-re:

$$cos((i+1)\alpha) = 2cos(i\alpha)cos\alpha - cos((i-1)\alpha).$$

Az egyenlet jobb oldalát átírva kapjuk, hogy:

$$\frac{2a_i}{3^i}cos\alpha - \frac{a_{i-1}}{3^{i-1}} = \frac{2a_i}{3^i} \cdot \frac{1}{3} - \frac{a_{i-1}}{3^{i-1}} = \frac{2a_i - 9a_{i-1}}{3^{i+1}}$$

Tehát kapjuk $a_{i+1} = 2a_i - 9a_{i-1}$ egész számot, ami nem osztható 3-mal ugyanis a_i nem osztható 3-mal. Tudjuk, hogy $cos(2k\pi) = 1$ de $\frac{a_i}{3^m}$ nem lehet 1. Ellentmondásra jutottunk, tehát a feladatot beláttuk.

17. Feladat. *[1] Átdarabolható-e egymásba két azonos térfogatú hasáb? (az alapok tetszőleges sokszögek lehetnek)*

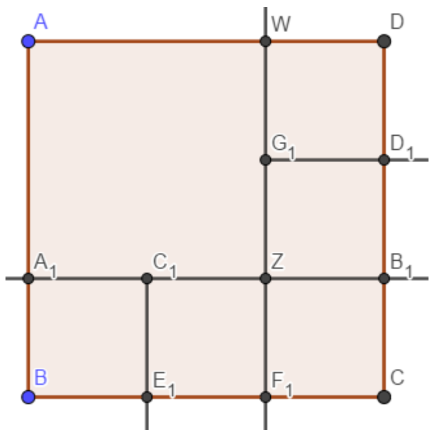
Megoldás: Használjuk ki az előző feladatban leírtakat. Állítsuk föl a hasábokat alapsokszögre. Az alapsokszögek síkjára merőleges vágásokkal daraboljuk át a hasábokat olyan hasábokká, amelyeknek az alaplapja egy-egy téglalap, s mindegyik téglalapnak az egyik oldala egységhosszúságú. Most döntsük el az oldalára a hasábokat úgy, hogy az egységoldal a téglák magassága legyen. Ekkor az alapterületük is egyenlő, s miként az előbb is, az alaplapra merőleges vágásokkal a két tégla átdarabolható egy olyan téglává, melynek most már két különböző irányú oldala egységhosszúságú. Így nyilván két egybevágó hasábot kapunk.

18. Feladat. *[1] Négyzet és háromszög. Mutassuk meg, hogy egy azonos területű négyzet és háromszög csak eltolásokkal nem darabolható át egymásba.*

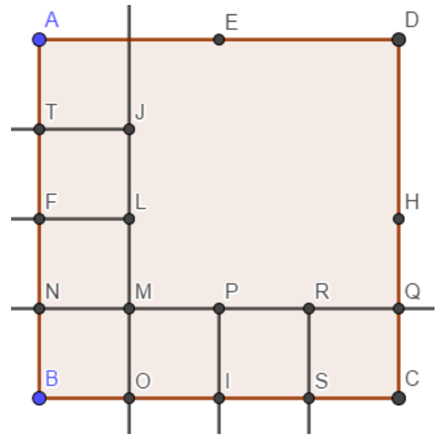
Megoldás: Ha egy sokszöget szétvágunk két darabra akkor az oldalvektoroknál keletkezik egy új pár, amik ellenkező irányba mutatnak. Így bármilyen irányt választva az azzal párhuzamosak összege nem változik. Vegyük a négyzet egyik oldalát mint eltolási irányvektort, ekkor az invariáns nulla, míg a háromszögnél nem lehet nulla.

19. Feladat. *[1] Mutassuk meg, hogy egy négyzet akkor és csak akkor vágható szét pontosan n darab négyzetre, ha $n \neq 2$, 3 vagy 5.*

Megoldás: Először megmutatjuk, hogy bármely más számú négyzetté feldarabolható. Nyilván ha egy négyzetet az oldalfelező merőlegesei mentén szétvágunk úgy a négyzetek száma 3-mal nő, így könnyű belátni hogy $3k + 1$ alakú számokra mindig szét tudjuk vágni a négyzetet, ha $k \in \mathbb{N}$. A következő két ábrán láthatunk példát a másik két 3-mas maradékosztályra:



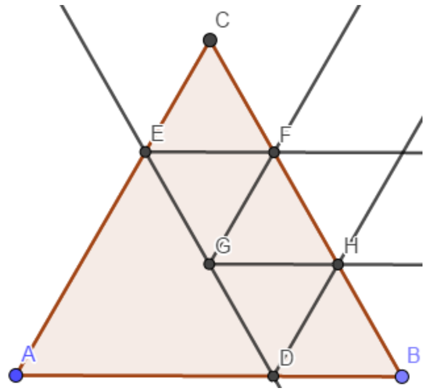
5. ábra. $3k$ db-ra vágás ($k \geq 2$)



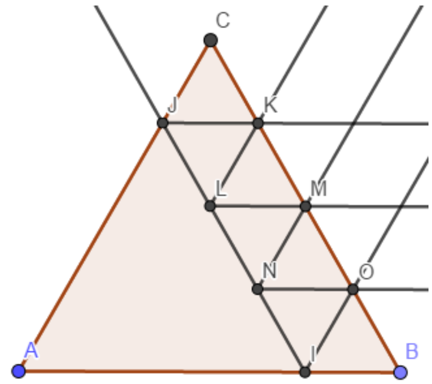
6. ábra. $3k+2$ db-ra vágás ($k \geq 2$)

Most pedig lássuk be, $n \neq 2$, 3 vagy 5-nél ez nem lehetséges. Négynél kevesebb nem lehet a szám ugyanis a négyzet minden csúcsának különböző négyzetbe kell kerülnie a szétvágások során. Ehhez hasonlóan az $n = 5$-re is a négyzet minden csúcsa külön négyzetbe kell kerülnie, valamint az esetek vizsgálatával belátható hogy egyik oldalhoz sem érintkezhet az 5., illetve a közepében sem lehet.

Megjegyzés: A könyvben a kérdés fel van téve hasonló háromszögekkel is. A megoldás nagyon hasonló, ugyanis a háromszöget a három középvonala mentén szétvágva 3-mal növeljük a háromszögek számát, ezzel el is intéztük $3k+1$ alakú számokat, természetesen $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ ebben a feladatban is. A másik két maradékosztály legkisebb elemét is könnyen megkaphatjuk, ha egy oldal harmadoló pontján a hozzá közelebb eső oldallal párhuzamosan levágunk egy csíkot, majd a másik két oldalra párhuzamos vágásokkal 5 egybevágó háromszögre vágjuk így megkapjuk a $3k$ alakú számokat, valamint ha ugyanezt végigcsináljuk a negyedelő ponton keresztül, úgy a $3k+2$ alakú számokat kapjuk meg. A $n \neq 2$, 3 vagy 5 meggondolása is hasonló, minden csúcsban külön háromszögnek kell lennie, és ekkor a közepén is létrejön egy háromszög ezért az $n = 2$, 3 eset nem lehetséges, illetve mivel $n = 2$ nem lehetséges az $n = 5$ sem az, ugyanis a négy háromszögből valamelyiket két hasonló háromszögre kéne bontanunk, de a felül írottak miatt ez nem megoldható.



7. ábra. $3k$ db-ra vágás ($k \geq 2$)



8. ábra. $3k + 2$ db-ra vágás ($k \geq 2$)

20. Feladat. *[1] Mutassuk meg, hogy ha n elég nagy, akkor egy kocka szétvágható pontosan n darab kockára.*

Megoldás: Hasonlóan az előző feladathoz a kocka élére merőleges, azokat felező síkjaival egy kockát 8 db kicsi kockává tudunk szétvágni. Ehhez hasonlóan harmadoló síkokkal 26-tal tudjuk növelni ezt a számot. Ahhoz hogy bizonyítsuk az állítást meg kell mutatnunk, hogy minden 7-es maradékosztályban van szám. Keressük meg minden maradékosztály legkisebb elemét:

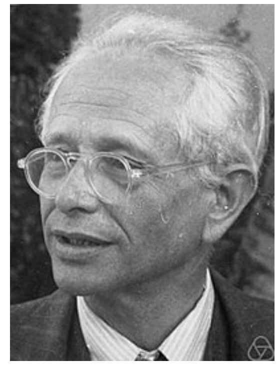
$$105 \equiv 0(\mathrm{mod}7) \tag{1}$$
$$1 \equiv 1(\mathrm{mod}7) \tag{2}$$
$$79 \equiv 2(\mathrm{mod}7) \tag{3}$$
$$157 \equiv 3(\mathrm{mod}7) \tag{4}$$
$$53 \equiv 4(\mathrm{mod}7) \tag{5}$$
$$131 \equiv 5(\mathrm{mod}7) \tag{6}$$
$$27 \equiv 6(\mathrm{mod}7) \tag{7}$$

Tehát ha n-t legalább 157-nek választjuk, akkor biztosan megoldható a feladat.

Megjegyzés: Természetesen ezek a számok csökkenthetőek, ha $2\times2\times2$-es vagy $3\times3\times3$-as ugyanakkora kis kockákat összevonunk. Például a 27 kockás előállításnál 8 kis kockát ($2\times2\times2$-eset) egybefogunk, akkor a 6 maradékúak közül már a 20 darabos előállítást is meg tudjuk valósítani. A 4 maradékúaknál például 53 helyett kaphatunk $53 - 2\cdot7 = 39$ darabos előállítást is, a 79 darabosból kaphatunk $79 - 3\cdot7 = 58$ darabos előállítást. Kereséseim alapján a legalacsonyabb küszöbszámok nincsenek meghatározva erre a feladatra.

5.2. Hilbert III. problémája

Történeti bevezető: [1] Mint ismeretes, az 1900-as párizsi nemzetközi matematikai kongresszuson David Hilbert „Matematikai problémák” címmel tartott előadást. Az itt felvázolt 23 problémakör jelentősen meghatározta a matematika fejlődési irányát, és a felvetett kérdések közül jó néhány ma is megoldatlan. Legkönnyebbnek a 3. probléma bizonyult, amely poliéderek átdarabolására vonatkozott, és amelyet Max Dehn (aki maga is Hilbert tanítványa volt) néhány hónap alatt megoldott. Már Bolyai Farkas felvetette a feljebb említett tétele megfogalmazása után, vajon érvényes-e hasonló tétel azonos térfogatú poliéderekre is, és azt is sejtette, hogy a válasz nemleges.



9. ábra. Max Dehn [7]

7. Tétel. *[1] Az egységnyi térfogatú kocka és szabályos tetraéder nem vágható szét véges sok poliéderre úgy, hogy az egyes darabokat alkalmas egybevágóságok átviszik egymásba.*

Bizonyítás:

Tegyük fel indirekt, hogy a kocka és a tetraéder mégis egymásba darabolhatók lennének, és legyenek a felbontási eljárás során keletkező P poliéderek összes lapszögei $\beta_1, \ldots, \beta_m$. A β_i-k között szerepel a kocka és a tetraéder lapszöge is, az előbbi $\pi/2$, az utóbbit jelöljük α-val, ekkor $cos\alpha = 1/3$.

Legyen V a valós számok szokásos vektortere a racionális test felett és ebben W a β_i-k által generált (legfeljebb m-dimenziós) altér. Mivel az α nem racionális számszorosa $\pi/2$-nek, vagyis $\pi/2$ és α lineárisan független vektorok W-ben, ezért α és $\pi/2$ kibővíthető a W bázisává. Ennélfogva megadható olyan $f : W \to Q$ lineáris leképezés, amelyre $f(\pi/2) = 0$ és $f(\alpha) = 1$. A linearitás alapján bármely $\gamma, \delta \in W$-re $f(\gamma + \delta) = f(\gamma) + f(\delta)$ érvényes, így speciálisan $f(\pi) = 2f(\pi/2) = 0$ is teljesül.

Dehn bebizonyította, hogy az egységnyi térfogatú kocka valamint szabályos tetraéder nem vágható szét véges sok poliéderre úgy, hogy az egyes darabokat alkalmas egybevágóságok átviszik egymásba. Ehhez bevezette, az úgynevezett Dehn-invariánst:

$$F(P) = \sum_{s} \mid e \mid \cdot f(\beta)$$

Ahol az összegezés a P poliéder összes e éle szerint történik, $\mid e \mid$ az e él hossza, β az e élnél levő lapszög és f az imént definiált függvény. Majd megmutatta hogy $F(P)$ additív függvény, azaz ha P-t egy S síkkal szétvágjuk P_1-re és P_2-re, akkor:

$$F(P) = F(P_1) + F(P_2)$$

Ahhoz hogy két poliéder egymásba darabolható legyen a Dehn-invariánsuknak meg kell egyeznie. Az egység kocka esetében ez a szám 0, míg a e oldalhosszú tetraédernél $6e$, így a két poliéder nem darabolható egymásba.

Hivatkozások

[1] Freud Róbert - Gyarmati Katalin: Számelmélet, Nemzedékek Tudása Tankönyvkiadó Zrt., 2014

[2] Kiss Emil: Bevezetés az algebrába, TypoTEXKiadó, 2014

[3] Az OKTV feladatok az oktatási hivatal honlapján (www.oh.gov.hu) a Köznevelés: Tanulmányi Versenyek: OKTV: Versenyfeladatok, javítási útmutatók menüpontja alatt elérhetőek a honlap 2020.05.28-i állapota szerint.

[4] A feladat a KÖMAL honlapján (www.komal.hu) a Pontverseny: Korábbi évek menüpontja alatt elérhető a honlap 2020.05.28-i állapota szerint.

[5] https://hu.wikipedia.org/wiki/Wallace-Bolyai-Gerwien-tétel

[6] https://hu.wikipedia.org/wiki/William_Burnside

[7] https://en.wikipedia.org/wiki/Max_Dehn

[8] http://www.math.u-szeged.hu/~ngaba/algkombi-18-2/index.html

[9] https://web.cs.elte.hu/~agoston/

[10] https://matek.fazekas.hu