EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Portik-Szabó Áron

GÖMBHÁROMSZÖGEK ÉS TULAJDONSÁGAIK

SZAKDOLGOZAT
Matematika BSc, Matematikai elemző szakirány

TÉMAVEZETŐ:

Moussong Gábor
GEOMETRIAI TANSZÉK

BUDAPEST, 2019.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A témára akkor figyeltem fel először, amikor megtudtam, hogy a kötelező geometria kurzusnak, amit elvégeztem, nem volt része a nem-eukilideszi geometriák megemlítése illetve tárgyalása. Ebből kifolyólag döntöttem úgy, hogy harmadévesen olyan szabadon választható tárgyat veszek fel, ami ezzel foglalkozik. Így találtam rá Lénárt István *Nem-euklideszi geometriák az iskolában I.* nevű kurzusára, amivel betekintést nyertem a témába és megalapozta a szakdolgozatomhoz szükséges tudást.

Örömmel dolgoztam a témával, mert egy új látásmódot nyitott meg előttem és sikerült kiszakítani a megszokottakból. Ezt szemelőtt tartva készítettem el a szakdolgozatom, hogy egy olyan dokumentumot készítsek, amely másoknak is hasonló élményt nyújt. A dolgozat során a már ismert, síkbeli fogalmakat vizsgáljuk, hogy hogyan tudjuk meghatározni a gömbön. Majd megvizsgáljuk, hogy a síkon szintén ismert tételeinket hogyan tudjuk átültetni a gömbre, milyen változtatásokkal tudjuk kimondani őket. Lesznek olyanok, amik teljesen azonosak lesznek az átdolgozott fogalmakkal; amiket másképp tudunk kimondani; de olyan tételek is, amik egyáltalán nem működnek a gömbön.

Köszönet Lénárt Istvánnak a fent említettekért, Dr. Kertész Gábornak, aki a *Számítógépes Geometria* kurzus keretein belül megtanította a GeoGebra program használatát, illetve témavezetőmnek, Moussong Gábornak, aki figyelemmel kísérte és segítette munkámat.

2. Alapfogalmak

Ahhoz, hogy vizsgálni tudjuk az euklideszi geometriában már jól ismert jelenségeket, illetve át tudjuk vezetni az ottani tételeinket a gömbre (amelyek érvényesek) tisztáznunk kell a legegyszerűbb fogalmakat.

2.1. Definíció. Adott egy K pont és egy R pozitív szám. **Gömb**nek nevezzük azoknak a pontoknak a halmazát a térben, amelyek R távolságra vannak az adott K középpontól.

A dolgozatom egészében egységsugarú gömbön vizsgálok mindent az egyszerűség kedvéért, de mivel minden gömb között hasonlósági transzformáció áll fent, ezért könnyedén átírható minden formula bármilyen R sugarú gömbre.

2.2. Definíció. Két pont **gömbi távolsága** a gömbön a pontokból húzott sugarak közt bezárt szög nagysága.

2.3. Definíció. A gömb középpontján átmenő egyenes két pontban metszi a gömböt. Ezeket a pontokat **átellenes pontok**nak nevezzük.

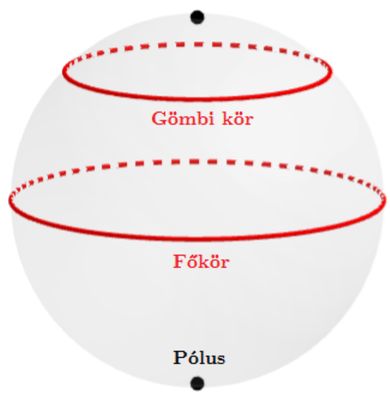
Ebből a definícióból következik, hogy egy átellenes pontpár közti gömbi távolság π.

2.4. Definíció. Adott egy P pont és egy r, π-nél szigorúan kisebb pozitív szám. Azoknak a pontoknak a halmazát a gömbön, amelyek ezen P ponttól egyenlő r gömbi távolságra vannak, **gömbi kör**nek nevezzük. Az adott P pontot és annak átellenes pontját a **gömbi kör középpontjai**nak nevezzük.

A definícióból látszik, hogy minden gömbi körnek két középpontja van. A két középpontból mért sugár kiegészítik egymást π-re. Nevezzük innentől kezdve a gömbi körök sugarának a kettő közül a nem hosszabbat, hogy egyértelműen tudjunk referálni rá.

2.5. Definíció. A legnagyobb sugarú ($\frac{\pi}{2}$) kört a gömbön **főkör**nek (gömbi egyenesnek) nevezzük.

2.6. Definíció. Minden főkörhöz hozzá tudunk rendelni két pontot a gömbön úgy, hogy a főkör síkjára merőleges egyenest állítunk a gömb középpontjába. Ezeket a pontokat nevezzük a főkör **pólus**ainak.



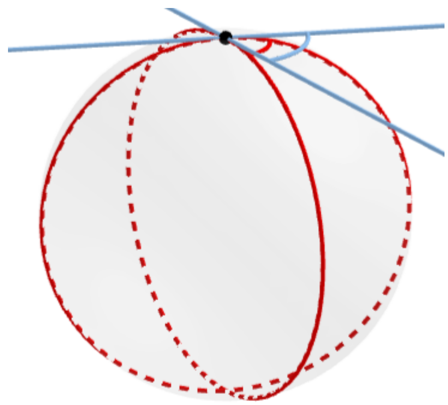
1. ábra

Ha a gömböt elmetsszük egy, a gömb középpontján átmenő síkkal az főkört fog kimetszeni a gömbön. Ha veszünk két nem átellenes pontot a gömbön azokon egyértelműen áthalad egy főkör. A két ponton és a gömb középpontján átmenő sík meghatározza azt. Amennyiben viszont átellenes pontokat veszünk, végtelen sok ilyen síkkal tudjuk elmetszeni a gömböt és nem lesz egyértelmű a főkör. Jól ismert főkör és a hozzátartozó átellenes pontpárja (pólusai) az Egyenlítő illetve az Északi-, és Déli-sarkok.

Egy egyenes a térben egyértelműen kijelöl egy főkört a gömbön, ha nem megy át annak középpontján. Vegyük a gömb középpontján és az egyenesen átmenő síkot. Ez főkört fog kimetszeni a gömbből. Ha az egyenes átmegy a gömb középpontján végtelen sok síkot tudunk rajtuk keresztül húzni. Ezt a tulajdonságot a későbbiekben egy bizonyításban felhasználjuk majd.

2.7. Definíció. Legyen a gömbön két pont A és B. Amennyiben ezek átellenes pontok, nem határoznak meg egyértelműen főkört. Azonban minden főkört, amik keresztülmennek a pontokon két egyenlő részre bontják a pontok. Amenyiben A és B nem átellenes pontok, akkor az általuk kifeszített főkört szintén két, de nem egyenlő részre bontják. **Gömbi szakasz**nak nevezzük a nem hosszabbik részt a főkörből a két pont között a gömbön. Ennek a hossza lesz a két pont gömbi távolsága.

2.8. Definíció. Két főkör által bezárt **szög** megegyezik a metszéspontjukban húzott értintők által bezárt szöggel.



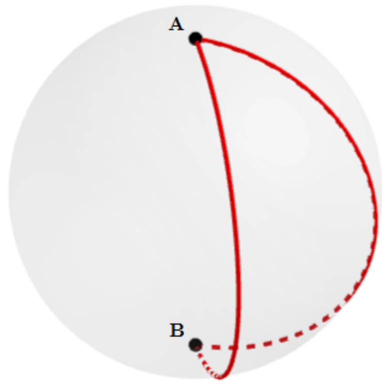
2. ábra

Amennyiben csak két félkört veszünk melyenknek közös a végpontja azok két szögtartományt határolnak be. A kettő szög amit mérhetünk egy csúcsnál kiegészítik egymást 2π-re. Egy főkör pólusából nem tudunk rá egyértelműen merőleges főkört állítani, hiszen az összes, azon ponton átmenő főkör merőleges lesz az eredetire. Ebből látszik, hogy egy adott főkörre merőleges főkör mindig átmegy annak pólusain. Így, ha adva van egy másik pont, amin át kell mennie a merőleges főkörnek egyértelműen meg van határozva, hiszen három pont egyértelműen meghatároz egy főkört. Pont és főkör távolsága a gömbön a pontból állított merőleges főkörön mért nem hosszabb gömbi szakasz hossza a pont és a két főkör metszéspontjai között. Ez 0 és $\frac{\pi}{2}$ között van.

Észrevehetjük, hogy két fél főkör, melyek végpontjai páronként egybeesnek, a gömbön egy szögtartományt zár be. A síkon, ha két félegyenest azonos pontból indítunk egy félsíkot kapunk (szintén egy szögtartományt). A gömbön viszont egy gömbi idomot fog meghatározni, melynek két szöge van.

2.9. Definíció. Egy átellenes pontpár és azok között húzott két fél főkör két részre osztják a gömböt. Mindkettő felület a határoló gömbi szakaszokkal egy-

egy **gömbkétszög**. Egy gömbkétszög két szöge megegyezik, amely 0 és 2π közé kell, hogy essen.

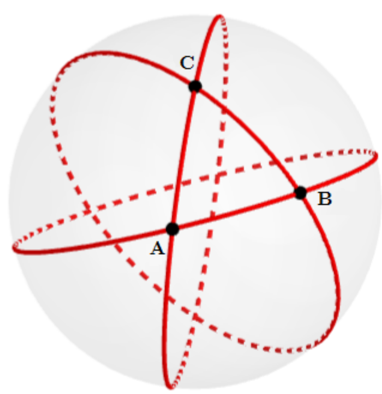


3. ábra

A definíció miatt egy szög egybevágóság erejéig egyértelműen meghatároz egy gömbkétszöget. Speciális gömbkétszögünk a félgömb, melynek szöge π.

Az alapok meghatározása után vezessük be a dolgozat fő témáját.

2.10. Definíció. Vegyünk három pontot a gömbön, amelyek nincsenek egy főkörön. A pontok páronként kijelölnek egy-egy főkört, melyek egyenként két félgömbre vágják a gömböt. Vegyük mind a három esetben azt a félgömböt, amelyiken a harmadik pont tartózkodik. Ennek a három félgömbnek a közös részét nevezzük **gömbháromszög**nek.



4. ábra

Így három pont a gömbön mindig egyértelműen meghatároz egy gömbháromszöget. Elegendő kikötés, hogy nincsenek egy főkörön a pontok, és nem kell kimondanunk, hogy páronként nem átellenesek, hiszen, ha két pont átellenes lenne, akkor rajtuk keresztül végtelen sok főkört tudnánk húzni és lenne egy, amelyik átmegy a harmadik ponton.

3. Alaptételek

Két különböző ponttól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a térben egy síkot alkot. Amennyiben a gömbön veszünk két pontot ez a sík át fog menni a gömb középpontján, hiszen a gömb középpontja egyenlő, sugárnyi távolságra van mind a két ponttól. Így a sík a gömbből egy főkört fog kimetszeni.

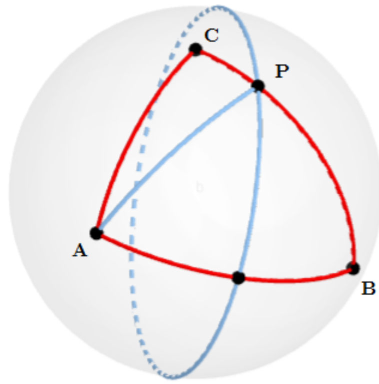
Vegyünk két gömbi szakaszt. Legyen az egyik hossza α, a másiké pedig β. Ekkor a gömbi szakaszok végpontjai által meghatározott szakaszok hossza $2\sin\frac{\alpha}{2}$ illetve $2\sin\frac{\beta}{2}$. Mivel α és β 0 és π közé esik, tehát $\frac{\alpha}{2}$ és $\frac{\beta}{2}$ pedig 0 és $\frac{\pi}{2}$ közé, illetve a szinusz függvény szigorúan monoton növő, igaz a következő: ha $\alpha \gtreqless \beta$, akkor $2\sin\frac{\alpha}{2} \gtreqless 2\sin\frac{\beta}{2}$. Tehát megfeleltetést tudunk felállítani az azonos végpontú szakaszok és gömbi szakaszok között. Emiatt a tulajdonság miatt egy pont a gömbön akkor és csak akkor van egyenlő gömbi távolságra két adott gömbi ponttól, ha a térben egyenes vonalban mérve egyenlő a két távolság. Ebből következik, hogy a térbeli felezőmerőleges sík a gömbi felezőmerőlegest fogja kimetszeni, ami mint láttuk egy főkör.

3.1. Definíció. Egy gömbi szakasz **felezőmerőleges főkör**e azon pontok halmaza a gömbön, amelyek egyenlő gömbi távolságra vannak a gömbi szakasz két végpontjától.

Egy gömbi szakasz felezőmerőleges főköre nyilvánvalóan két félgömbre vágja a gömböt. Bármely félgömbön veszünk egy pontot, akkor az a gömbi szakasz azon végpontjához van közelebb, amely azon a félgömbön helyezkedik el.

3.2. Definíció. Egyenlőszárú gömbháromszögnek nevezzük azokat a gömbháromszögeket, melyeknek két oldalának a hossza megegyezik.

3.3. Tétel. Minden gömbháromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög található.

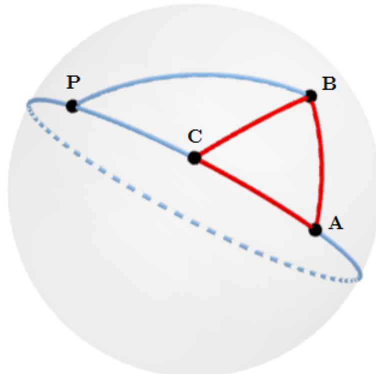


5. ábra

Bizonyítás: Legyen $BC > AC$. Vegyük az AB oldal felezőmerőlegesét, annak metszéspontját a gömbháromszög BC oldalával jelöljük P-vel. Így az eredeti gömbháromszögön belül megjelenő ABP gömbháromszög egy egyenlőszárú gömbháromszög, mivel P egyenlő távolságra van A-tól és B-től is a 3.1-es definíció alapján. Az eredeti gömbháromszög C csúcsa valamelyik, a felezőmerőleges által meghatározott félgömbön van. Tehát az előző megjegyzés alapján az egyik csúcshoz, jelen esetben A-hoz közelebb van. Látszik, hogy nagyobb a CAB szög, mint az egyenlőszárú gömbháromszög alapon fekvő szögei, tehát az PAB szög.

■

3.4. Tétel. (Háromszög-egyenlőtlenség) Minden gömbháromszög bármely két oldalának összege nagyobb, mint a harmadik oldala.

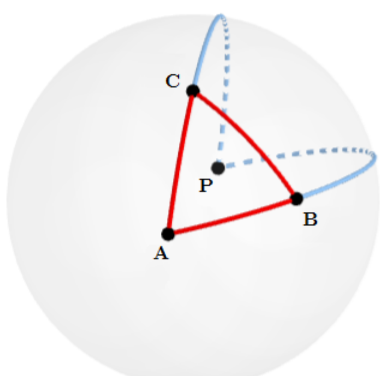


6. ábra

Bizonyítás: Ha $a + b \geq \pi$ akkor kész vagyunk, hiszen a 2.7-es, gömbi szakasz definíció alapján a harmadik oldal kisebb, mint π. Ha pedig $a + b < \pi$, akkor felmérjük a b oldal által meghatározott főkörre C csúcson túl a-t. Így ABP szintén egy gömbháromszög lesz, mert az adatai megfelelnek az 2.10-es definíciónak. A BPC egyenlőszárú gömbháromszögben lévő alapon fekvő szögnél nagyobb az új gömbháromszögbeli B csúcsnál lévő szög, tehát 3.3 alapján $c < a + b$.

■

3.5. Tétel. A gömbháromszögek kerülete 0 és 2π között van.



7. ábra

Bizonyítás: Az alsó korlát triviális. A felső korlát bebizonyításához meghosszabbítjuk a gömbháromszög b és c oldalát az A csúcsból annak átellenes, P pontjáig. A kapott új, CBP gömbháromszög oldalai (mivel kétszöggé egészíti ki az eredetit) a, $\pi - b$, $\pi - c$ lesz. Amennyiben felírjuk a kapott CBP háromszögre a háromszög-egyenlőtlenséget a következőt kapjuk:

$$(\pi - b) + (\pi - c) > a$$

$$a + b + c < 2\pi.$$

■

Vegyük az ABC gömbháromszöget a gömbön. Illetve nézzük meg az ABC síkban, a csúcsok által meghatározott háromszögben az ABC szög szögfelezősíkját a térben. Ez a szögszáraktól egyenlő távolságra lévő pontokat tartalmazó sík lesz. Ez a sík átmegy a gömb középpontján, így egy főkört fog kimetszeni a gömbből.

3.6. Definíció. Adott egy szög a gömbön. Azoknak a pontoknak a halmazát a gömbön **szögfelező főkör**nek nevezzük, amely az adott szöget két egyenlő részre osztja.

A gömb felszínét korábbi tanulmányaink alapján tudjuk, hogy 4π.

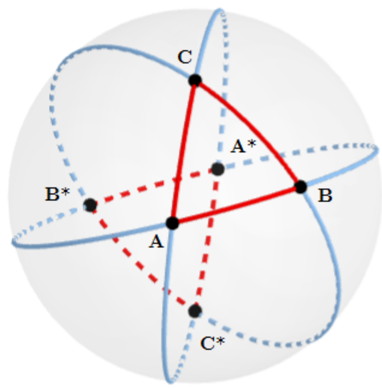
3.7. Tétel. Egy α szögű gömbkétszög felszíne 2α.

Bizonyítás: Legyen $\phi + \psi < 2\pi$. Vegyünk egy ϕ és egy ψ szögű gömbkétszöget egy azonos oldallal. Látjuk, hogy a szög és a felszín is összeadódik az új gömbkétszögben. Emiatt az a függvény, ami egy tetszőleges 0 és 2π közti α szöghöz hozzárendeli az α szögű gömbkétszög felszínét, az az α változó pozitív és additív függvénye. Tehát a gömbkétszögek felszíne egyenesen arányos a szögükkel, így valamilyen skalárszorosai lesznek egymásnak. Tudjuk, hogy a gömb felszíne 4π, a teljes szög pedig 2π, tehát az arányossági tényező 2.

■

3.8. Tétel. (Girard-tétel) Az α, β, γ szögű gömbháromszög felszíne:

$$T = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$



8. ábra

Bizonyítás: Legyenek a gömbön A, B és C csúcsok átellenes pontjai A^*, B^* és C^*. Vegyük az AA^*, BB^* és CC^* gömbkétszögeket úgy, hogy szögeik az ABC gömbháromszög szögei legyenek. A gömb középpontjára középpontosan szimmetrikusan ezeket a gömbkétszögeket ha vesszük velük egybevágó kétszögeket kapunk. Ez a 6 gömbkétszög lefedi az egész gömböt. Az ABC gömbháromszöget így háromszor fedtük le. A szimmetrikus gömbkétszögek alkotnak egy, az ABC gömbháromszöggel középpontosan szimmetrikus gömbháromszöget is, amit szintúgy háromször fedtek le a szimmetria miatt. Tehát összesen négyszer fedtük le feleslegesen a gömbháromszög felszínét, minden mást pedig csak egyszer. Ez képlettel: $4\pi = 4(\alpha + \beta + \gamma) - 4T-$. Átrendezve a keresett képletünket kapjuk.

■

Szintén kijön a képlet, ha nem azokat a gömbkétszögeket vesszük, amik lefedik a gömbháromszöget, hanem a három csúcsának kiegészítőszögeinél kiindulóakat. Ilyenkor viszont vigyázni kell, hogy ne legyen köztük átfedés. Jó választás például, ha az A csúcsból a B-t, illetve a C^*-ot tartalmazó szakaszok által meghatározott gömbkétszöget vesszük. A másik két csúcsnál ciklikusan permutáljuk ezeknek a pontoknak a jelölését. Így kivétel nélkül mindent lefedtünk csak az ABC gömbháromszöget és annak átellenesét nem. Ebben az esetben a gömb felszíne egyenlő lesz a gömbháromszög felszínének kétszeresének és a három gömbkétszög felszínének összegeként.

4. Poláris gömbháromszögek

Ahogyan azt már korábban láttuk bármely főkörhöz egyértelműen hozzá lehet rendelni egy pontpárt méghozzá, ha a főkör síkjára a gömb középpontjába állítunk egy merőleges egyenest, akkor ki fogja metszeni a pontokat a gömbből. Ezeket nevezzük a főkör pólusainak. Illetve hasonlóan minden ponthoz hozzá lehet rendelni egy főkört, ha a ponton és a gömb középpontján átmenő egyenesre a középponton átmenő síknak és a gömbnek vesszük a metszetét. A gömbháromszög oldalai által kifeszített főköröknek meg tudjuk különböztetni a pólusait az alapján, hogy azon a félgömbön van-e, mint a gömbháromszög harmadik csúcsa. Az elnevezés marad pólus a következőkben is, de innentől csak az egyik pontot fogja jelölni a kettő közül.

4.1. Definíció. Egy gömbháromszög egy oldalának a pólusa az az oldala által kifeszített főkör azon **pólus**a, amely azon a félgömbön helyezkedik el, mint a gömbháromszög harmadik csúcsa.

4.2. Állítás. Bármely gömbháromszögnek, ha vesszük minden oldalának a pólusait azok nincsenek egy főkörön.

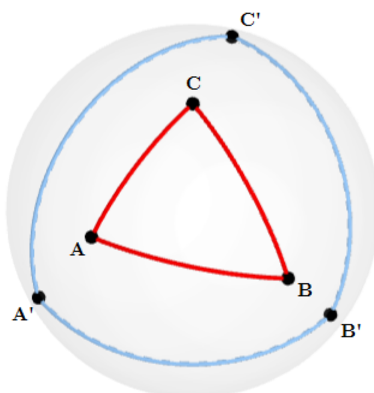
Bizonyítás: Tegyük fel indirekt módon, hogy egy főkörön van mind a három pólus. Ekkor, ha nézzük mind a három vektort ami a középpontból mutat az egyes pólusokba lesz egy, a középponton átmenő mind a háromra merőleges vektor. Ennek a vektornak a 4.1-es definíció alapján benne kell lennie bármely két csúcs (a gömbháromszögből) illetve a gömb középpontja által kifeszített síkban. Ha mind a három ilyen síkban benne van, akkor az azt jelenti, hogy a gömbháromszög csúcsai is egy főkörön vannak, ami ellentmond a gömbháromszög definíciójának. Tehát nincsenek egy főkörön a gömbháromszög pólusai.

■

4.3. Definíció. Egy gömbháromszögnek minden csúcsába vett pólusaiból alkotott gömbháromszöget az eredeti gömbháromszög **polárháromszög**ének nevezzük.

Jelöljük az ABC gömbháromszög oldalait a, b, c-vel, a szögeit pedig α, β, γ-val. Az ABC gömbháromszög polárháromszögét pedig $A'B'C'$-vel oldalait és szögeit pedig a', b', c'-vel, illetve α', β', γ'-vel, ahol A' az a oldalhoz tartozó pólus (hasonlóan a többi is).

Mivel az $A'O$ merőleges az OCB síkra, így normálvektora lesz. Iránya miatt pedig befelé mutató normálvektor.



9. ábra

4.4. Tétel. (Polárreciprocitás) Minden gömbháromszög polárháromszögének a polárháromszöge az eredeti gömbháromszög.

Bizonyítás: Az OB' vektormerőleges az AOC síkra, az OC' vektor pedig az AOB síkra. Ezeknek a síkoknak a metszete az OA egyenes. Tehát mindkettő vektor merőleges az OA vektorra, így az OA vektor az $OB'C'$ síkra. Illetve mivel az A' és az A pontok távolsága kisebb, mint $\frac{\pi}{2}$, ezért A a $B'C'$ oldal pólusa lesz. Hasonlóan végiggondolhatjuk ezeket a másik két csúcsról az eredeti gömbháromszögben.

■

Így tehát minden gömbháromszöghöz hozzárendelhetünk egyből egy másikat, a poláris gömbháromszögét. Így egy bijektív megfeleltetést kapunk, ami további tételeinknél és azoknak bizonyításában segítséget fog nyújtani.

Könnyen belátható, hogy annak a gömbháromszögnek, amelyiknek mind a három szöge derékszög, a poláris gömbháromszöge önmaga, hiszen a 4.1-es definíció alapján, ha bármely gömbháromszögben az egyik oldalhoz tartozó pólust összekötjük a hozzá tartozó oldal két végpontjával, akkor azoknál a pontoknál derékszögeket kapunk. Ezáltal, ha minden szög derékszög a gömbháromszögben minden oldalhoz tartozó pólus az eredeti gömbháromszög harmadik csúcsa lesz.

4.5. Tétel. Minden gömbháromszög bármely szögéhez tartozó polárháromszögbeli oldal kiegészíti őt π-re. Tehát: $a' = \pi - \alpha$, $b' = \pi - \beta$, $c' = \pi - \gamma$, illetve $\alpha' = \pi - a$, $\beta' = \pi - b$, $\gamma' = \pi - c$.

Bizonyítás: Elegendő lesz a hat egyenlőség közül egyet bebizonyítanunk az adatok logikai összefüggése miatt. Ahogyan már korábban láttuk a' oldal hossza megegyezik a gömb középpontjából a gömbi szakasz két végpontja felé mutató egy-egy vektor által közbezárt szöggel. A pólus definíciója alapján ez a két vektor befelé mutató normálvektora az AOC, és az AOB pontok által kifeszített síkokra. Így az a' kiegészítőszöge lesz a két sík által közbezárt szögnek, ami a gömbi szögmérés szerint pont az α szög lesz.

■

A következő tétel például szolgál a polárháromszögek alkalmazására.

4.6. Tétel. A gömbháromszögek szögösszege π és 3π között van.

Bizonyítás: Az alsó korlát bizonyításához az oldalösszeget írjuk fel az eredeti gömbháromszög polárháromszögére miszerint $a'+b'+c' < 2\pi$. Itt ha használjuk a 4.5-ös tételt átírhatjuk ezt $(\pi-\alpha)+(\pi-\beta)+(\pi-\gamma) < 2\pi$-re. Ezt átrendezve kész vagyunk. A felső korlát triviális, hiszen a gömbháromszögekben minden szög maximum π lehet, így a három szög összege pedig 3π.

■

5. Trigonometriai tételek

A következőkben megvizsgáljuk, hogy a síkon érvényes háromszögtani tételeink működnek-e a gömbön. Látni fogjuk, hogy ugyanúgy nem sikerül felírjuk őket, de hasonlókat igen, így megfeleltethetjük a gömbi párjuknak. Legyen sorra $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok a gömb középpontjából az adott gömbháromszög A, B, C csúcsába mutató vektorok, amelyek jobbsodrásúak. Nézzük ezeknek a skaláris szorzatát: $\underline{ab} = |\underline{a}||\underline{b}| \cos c$. Az eddigiekből egyértelmű, hogy a közbezárt szögük c, hiszen az A és B csúcsok a gömbön a c gömbi szakasz két végpontja, annak hossza pedig a középponti szöge, ami megegyezik e két vektor által közbezárt szöggel. Ezek vektoriális szorzatának hossza pedig $|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}||\underline{b}| \sin c$. Mivel egységsugarú gömbön dolgozunk így az $|\underline{a}|$ és $|\underline{b}|$ egyenlő lesz eggyel. Tehát a két szorzatunk a következő képpen néz ki: $\underline{ab} = \cos c$, $|\underline{a} \times \underline{b}| = \sin c$. Szükséges még felidéznünk továbbá az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok vegyes szorzatát, ami a következő: $\underline{abc} = (\underline{a} \times \underline{b})c$. Ismert tulajdonsága, hogy $\underline{abc} = \underline{bca} = \underline{cab} = -\underline{cba} = -\underline{bac} = -\underline{cab}$. Szükségünk lesz még a kifejtési tételre, ami szerint $\underline{u} \times (\underline{v} \times \underline{w}) = (\underline{uw})\underline{v} - (\underline{wu})\underline{v}$

5.1. Tétel. (Szinusztétel) A gömbháromszög oldalainak szinuszai úgy aránylanak egymáshoz, mint a szemközti szögek szinuszai. Képlettel:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}.$$

Bizonyítás: Írjuk fel $(\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{b} \times \underline{c})$ abszolútértékét kétféleképpen. A vektoriális szorzat hossza a fent felidézett képlet alapján:

$$|(\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{b} \times \underline{c})| = |\underline{a} \times \underline{b}||\underline{b} \times \underline{c}| \sin(\pi - \beta) = \sin c \sin a \sin \beta.$$

A vektorok közbezárt szögét a 4.5-ös tétel bizonyításában elmondottak alapján tudjuk. Majd alkalmazva a kifejtései tételt:

$$|(\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{b} \times \underline{c})| = |(\underline{a}(\underline{b} \times \underline{c}))\underline{b} - (\underline{b}(\underline{b} \times \underline{c}))\underline{a}| = |(\underline{abc})\underline{b}| = \underline{abc},$$

hiszen $\underline{abc} > 0$, mert a jelölések meghatározásánál jobbsodrású rendszert alkottunk és $|\underline{b}| = 1$, mivel egységsugarú gömbön vagyunk. Ebből következően $\underline{abc} = \sin c \sin a \sin \beta$. Amennyiben az eredeti $(\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{b} \times \underline{c})$ kifejezésben a vektorokat ciklikusan permutáljuk, és ismét végigvezetjük a két módszerünkkel, az az egyenletünk bal oldalán a vegyes szorzat tulajdonsága alapján nem változtat. A jobb oldalon pedig a következőket kapjuk:

$$|(\underline{b} \times \underline{c}) \times (\underline{c} \times \underline{a})| = |\underline{b} \times \underline{c}||\underline{c} \times \underline{a}| \sin(\pi - \gamma) = \sin a \sin b \sin \gamma,$$

$$|(\underline{c} \times \underline{a}) \times (\underline{a} \times \underline{b})| = |\underline{c} \times \underline{a}||\underline{a} \times \underline{b}| \sin(\pi - \alpha) = \sin b \sin c \sin \alpha.$$

Tehát mind a három jobb oldal egyenlő, és mint látjuk mindig lesz egy közös tényező, amivel le tudunk egyszerűsíteni, hiszen tudjuk, hogy a gömbháromszög oldalai 0 és π között vannak, tehát szinuszuk nem lesz egyenlő nullával. Így a következő egyenleteket kapjuk:

$$\begin{cases} \sin c \sin a \sin \beta = \sin a \sin b \sin \gamma \\ \sin a \sin b \sin \gamma = \sin b \sin c \sin \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\sin \beta}{\sin b} = \dfrac{\sin \gamma}{\sin c} \\ \dfrac{\sin \gamma}{\sin c} = \dfrac{\sin \alpha}{\sin a} \end{cases}$$

Tehát $\dfrac{\sin \alpha}{\sin a} = \dfrac{\sin \beta}{\sin b} = \dfrac{\sin \gamma}{\sin c}$.

■

A következő érdekesség, hogy a gömbön kétféle koszinusztételt is fel tudunk írni. Ez a polaritásból következik, ami a második bizonyításában látszik is.

5.2. Tétel. (Koszinusztétel oldalakra) Bármely gömbháromszögben fennáll a szögekre és oldalakra az alábbi egyenlőtlenség:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha.$$

Bizonyítás: Írjuk fel a $(\underline{c} \times \underline{a})(\underline{a} \times \underline{b})$ kifejezést kétféleképpen. A skaláris szorzat értéke:

$$(\underline{c} \times \underline{a})(\underline{a} \times \underline{b}) = |\underline{c} \times \underline{a}||\underline{a} \times \underline{b}| \cos(\pi - \alpha) = -\sin b \sin c \cos \alpha.$$

A vektorok közbezárt szögét a 4.5-ös tétel bizonyításában elmondottak alapján tudjuk. Majd alkalmazva a kifejtési tételt:

$$\begin{aligned}(\underline{c} \times \underline{a})(\underline{a} \times \underline{b}) &= ((\underline{c} \times \underline{a}) \times \underline{a})\underline{b} = ((\underline{ca})\underline{a} - (\underline{aa})\underline{c})\underline{b} = \\ &= (\underline{ca})(\underline{ab}) - (\underline{cb}) = \cos b \cos c - \cos a.\end{aligned}$$

Tehát $-\sin b \sin c \cos \alpha = \cos b \cos c - \cos a$. Ezt átrendezve megkapjuk a keresett egyenletünket.

■

5.3. Tétel. (Koszinusztétel szögekre) Bármely gömbháromszögben fennáll a szögekre és oldalakra az alábbi egyenlőtlenség:

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a.$$

Bizonyítás: Vegyük a gömbháromszögünknek a polárháromszögét és arra írjuk fel az oldalakra vonatkozó koszinusztételt a 4.5-ös tételt használva.

$$\cos(\pi - \alpha) = \cos(\pi - \beta)\cos(\pi - \gamma) + \sin(\pi - \beta)\sin(\pi - \gamma)\cos(\pi - a)$$

$$-\cos \alpha = (-\cos \beta)(-\cos \gamma) + \sin \beta \sin \gamma(-\cos a)$$

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$$

■

Amikor a síkon a koszinusztételt derékszögű háromszögre néztük és leegyszerűsödött a képletünk megkaptuk a Pitagorasz-tételt. Vizsgáljuk meg, hogy a gömbön milyen alakot ölt derékszögű gömbháromszögekre a gömbi, oldalakra vonatkozó koszinusztétel. Ezt a speciális esetet tekinthetjük a gömbi Pitagorasz-tételnek a sajátosság hasonlósága végett.

5.4. Tétel. $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ esetén $\cos a = \cos b \cos c$.

Bizonyítás: Az oldalakra vonatkozó koszinusztételbe az $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ behelyettesítéssel megkapjuk a képletet.

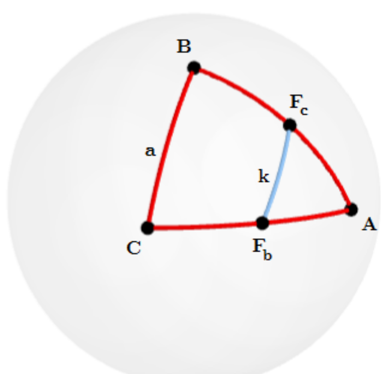
■

5.5. Definíció. Egy gömbháromszög egyik oldalához tartozó **középvonal** az a másik két oldal felezőpontjait összekötő gömbi szakasz.

Síkgeometriában, az ismereteink szerint a háromszög középvonala fele olyan hosszú, mint a hozzá tartozó oldal hossza. Ez a gömbön nem fog teljesülni, mindig nagyobb lesz a középvonal hossza mint a hozzátartozó oldal hosszának a fele. Ennek bizonyításához az oldalakra felírt gömbi köszinusztétel, illetve az alábbi trigonometrikus azonosságokat alkalmazzuk:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1,\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$
$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},\ \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$
$$\sin x \cos y = \frac{\sin(x - y) + \sin(x + y)}{2}.$$

5.6. Tétel. Minden gömbháromszögben bármely középvonal hossza nagyobb, mint a hozzátartozó oldal hosszának fele. Képlettel: $k > \dfrac{a}{2}$.



10. ábra

Bizonyítás: Írjuk fel az oldalakra vonatkozó gömbi koszinusztételt az AF_bF_c és az ABC gömbháromszögekben:

$$\begin{cases} \cos k = \cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2} + \sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\cos\alpha \\ \cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos\alpha \end{cases}$$

Kell nekünk, hogy $\cos(2k) < \cos a$ legyen. Tudjuk, hogy $\cos(2k) = 2\cos^2 k - 1$, így az első egyenlet a következőképpen fog alakulni:

$$\begin{aligned} 2\cos^2 k - 1 &= 2\left(\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2} + \sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\cos\alpha\right)^2 - 1 = \\ &= 2\left(\cos^2\frac{b}{2}\cos^2\frac{c}{2} + 2\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\cos\alpha + \sin^2\frac{b}{2}\sin^2\frac{c}{2}\cos^2\alpha\right) - 1 = \\ &= 2\left(\frac{1+\cos b}{2}\frac{1+\cos c}{2} + 2\frac{\sin b}{2}\frac{\sin c}{2}\cos\alpha + \frac{1-\cos b}{2}\frac{1-\cos c}{2}\cos^2\alpha\right) - 1 = \\ &= \frac{1+\cos b+\cos c+\cos b\cos c}{2} + \sin b\sin c\cos\alpha + \\ &\quad + \frac{1-\cos b-\cos c+\cos b\cos c}{2}\cos^2\alpha - 1. \end{aligned}$$

Látjuk, hogy a második egyenletben is szerepel a $\sin b\sin c\cos\alpha$ tag, amivel le tudunk egyszerűsíteni. Az egyenlőtlenség tehát:

$$\frac{1+\cos b+\cos c+\cos b\cos c}{2} + \frac{1-\cos b-\cos c+\cos b\cos c}{2}\cos^2\alpha - 1 < \cos b\cos c$$

$$(1+\cos^2\alpha)(1+\cos b\cos c) + (1-\cos^2\alpha)(\cos b+\cos c) < 2\cos b\cos c + 2$$

$$(1-\cos^2\alpha)(-1-\cos b\cos c) + (1-\cos^2\alpha)(\cos b+\cos c) < 0$$

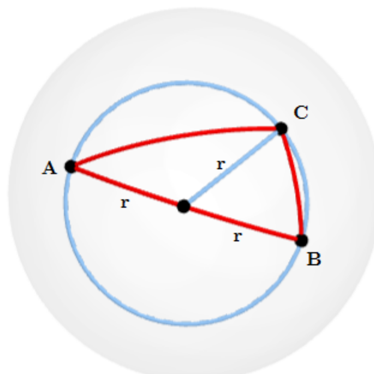
$$(\cos b+\cos c-1-\cos b\cos c)\sin^2\alpha < 0$$

Tudjuk, hogy $\sin^2\alpha$ pozitív, ezért a zárójelben lévő összegnek kell negatívnak lennie, hogy teljesüljön az egyenlőtlenség. Tudjuk, hogy $\cos b + \cos c - 1 - \cos b\cos c = -(1-\cos b)(1-\cos c) < 0$ minden b és c-re. Tehát $\cos 2k < \cos a$, amiből következik a tétel.

$\blacksquare$

A Thalész-tétel egy újabb példa arra, hogy nem minden, amit a síkon ismerünk, működik változatlan formában a gömbön is.

5.7. Állítás. Vegyünk egy gömbi szakaszt és a gömbi szakasz, mint átmérő köré húzzunk egy gömbi kört. Ekkor a körvonalon, ha választunk egy harmadik csúcsot és alkotunk egy gömbháromszöget, akkor az annál a csúcsnál lévő γ szög nagyobb lesz, mint $\frac{\pi}{2}$.



11. ábra

Bizonyítás: Nyilvánvaló, hiszen, ha a gömbi kör középpontjából a harmadik, C csúcsba húzúnk egy sugarat, akkor az ABC gömbháromszöget két egyenlőszárú gömbháromszögre osztottuk. Ebből egyből következik, hogy $\gamma = \alpha + \beta$. A 4.6-os tételből tudjuk, hogy $\alpha + \beta + \gamma > \pi$. Tehát $2\gamma > \pi$.

■

6. Nevezetes pontok

A síkgeometriában vannak a háromszögeknek nevezetes pontjaik, mint a magasságpont, súlypont illetve a háromszög köré, és beírt körének a középpontja. E fejezet célja, hogy megvizsgáljuk hogyan is lehet ezeket meghatározni a gömbön, ha léteznek.

A nevezetes pontok a gömbön is nevezetes vonalak közös pontjaiként fognak előállni, ahogyan ezt a síkon is láttuk. Tudjuk, hogy a nevezetes vonalak főkörökként fognak előállni a gömbön, így, ha ezek közös ponton haladnak át, átellenes pontpárt fognak magukba foglalni. Tehát a síkon megjeleneő nevezetes pontok helyett a gömbön nevezetes pontpárokról beszélhetünk.

6.1. Definíció. A gömbháromszög egy csúcsából a szemközti oldalra állított merőleges fökőrt nevezzük **magasságvonal**nak.

Ez a gömbön nem lesz egyértelmű, mint a síkon, mivel ha a gömbháromszögnek egynél több derékszöge van, például ha van két derékszöge, akkor a harmadik csúcsból végtelen sok magasságvonal húzható, ahogyan ezt a dolgozat elején megtárgyaltuk már.

6.2. Lemma. Vegyük a gömbnek egy S érintősíkját. Amennyiben az érintési ponton átmegy egy egyenes az S síkon és arra az egyenesre merőlegest állítunk szintén az S síkon, akkor ezeknek az egyeneseknek a gömbön, a gömb középpontján át való vetítéssel vett képe is merőleges lesz egymásra.

Bizonyítás: Az érintő egyenes vetülete a gömbön nyilvánvalóan egy főkör lesz. A másik egyenes képének a gömbön is merőlegesnek kell lennie erre a főkörre, hogy meg tudja tartani az S sík és a két benne lévő egyenesekbe, az S síkra merőleges síkok által alkotott szimmetriát.

■

A síkgeometriában látottak alapján azt várjuk, hogy egy gömbháromszög magasságvonalai egy pontban metsszék egymást, a fejezet bevezetésében tárgyaltak alapján viszont egy pontpárt várunk.

6.3. Tétel. Amennyiben egy gömbháromszögnek legfeljebb egy derékszöge van, a magasságvonalai egy átellenes pontpárban metszik egymást.

Első bizonyítás: Célunk a bizonyítás során belátni, hogy lineárisan összefüggőek a magasságvonalak síkjai, azaz azok normálvektorai. Így egy síkban lesznek a normálvektorok és a gömb középpontját tartalmazzák a síkok (hiszen főkört metszenek ki a gömbből), tehát egy egyenesben metszik egymást, ami így egy átellenes pontpárt metsz ki a gömbből. A magasságvonalakat az azokat kimetsző síkok normálvektoraival tudjuk meghatározni. Ahhoz, hogy átmenjen a főkör az A csúcson, $\underline{a}$-ra merőleges kell, hogy legyen annak normálvektora. Szükséges még, hogy a BC által meghatározott főkörre is merőleges legyen. Így a vektor a következő lesz: $\underline{m_a} = \underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c})$. Hasonlóan határozhatjuk meg a másik kettő normálvektort is: $\underline{m_b} = \underline{b} \times (\underline{c} \times \underline{a})$, $\underline{m_c} = \underline{c} \times (\underline{a} \times \underline{b})$. Mivel a kikötés szerint csak egy derékszöge lehet a háromszögnek, ezért nem lesz nulla a három vektor egyike sem. Tegyük fel, hogy $\underline{m_a} = 0$. Ekkor az $\underline{a}$ és a $\underline{b} \times \underline{c}$ vektor párhuzamos, ami azt jelenti, hogy $\underline{a}$ merőleges $\underline{b}$-re és $\underline{c}$-re is. Ebből az következik, hogy az AB és az AC oldal is $\frac{\pi}{2}$ hosszúak, tehát az A csúcs az a BC oldal egyik pólusa. Ebből következik, hogy a gömbháromszögben a B és a C csúcsnál is derékszög van. Elegendő tehát nekünk, hogy $\underline{m_a} + \underline{m_b} + \underline{m_c} = 0$.

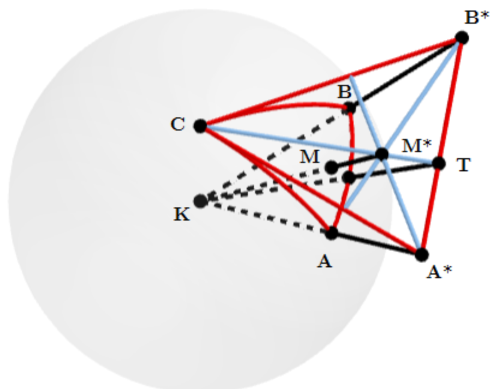
$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) + \underline{b} \times (\underline{c} \times \underline{a}) + \underline{c} \times (\underline{a} \times \underline{b}) = 0$$

A kifejtési tételt használva:

$$(\underline{ac})\underline{b} - (\underline{ab})\underline{c} + (\underline{ba})\underline{c} - (\underline{bc})\underline{a} + (\underline{cb})\underline{a} - (\underline{ca})\underline{b} = 0.$$

Mivel a skaláris szorzás kommutatív, így teljesül az egyenlőség, ezzel pedig a tétel is.

■



12. ábra

Második bizonyítás: Vegyük a gömb érintősíkját a C csúcsban. Vetítsük ki a K középpontból a háromszög másik két csúcsát a síkra: A^*, B^*. Mivel a kikötésünk szerint legfeljebb egy derékszöge van a gömbháromszögünknek, ezért minden esetben ki tudjuk vetíteni a keletkező síkra a csúcsokat. Amennyiben nincs derékszög a gömbháromszögben bármelyik csúcsba állíthatjuk az érintősíkot. Amennyiben viszont van egy $\frac{\pi}{2}$ hosszúságú oldala a gömbháromszögnek muszáj azt a harmadik csúcsot választani, ami nem ennek az oldalnak a végpontja. Különben nem tudnánk kivetíteni az egyik pontot a síkra, mert a vetítő egyenes párhuzamos lenne azzal (ez történik mind a két vetítendő csúccsal, amikor van két derékszöge a gömbháromszögnek). A síkon keletkező A^*B^*C háromszögnek venni tudjuk a magasságvonalait, amik egy pontban fogják metszeni egymást: M^*. A 6.2-es lemma alapján mind a három síkbeli magasságvonal képe merőleges lesz a gömbháromszögek megfelelő oldalaira. Tehát a gömbön ezek képei lesznek a magasságvonalak főkörei. A síkon levő metszéspontjukat is egy egyenessel fogjuk levetíteni a gömbre. Tehát az ABC gömbháromszög magasságpontjai a KM^* egyenes és a gömb metszéspontjaiban lesznek.

■

A súlypont meghatározásánál is azonos módszerrel dolgozunk. A már ismert síkbeli fogalmakat átvezetjük a gömbre és megnézzük hasonló eredményeket kapunk-e.

6.4. Definíció. A gömbháromszög egy csúcsából a szemközti oldal felezőpontjába húzott gömbi szakaszt nevezzük **súlyvonal**nak.

Mivel a magasságvonalakkal ellentétben a súlyvonalak minden gömbháromszög esetében a gömbháromszögön belül helyezkednek el ezért definiáltam csak gömbi szakasszal a súlyvonalat. Ha azonban úgy definiálnánk, hogy nem csak a gömbi szakaszt vennénk, hanem az egész főkört, szintén két metszéspontja lenne a három súlyvonalnak a fejezet bevezetésében látottak alapján.

6.5. Tétel. A gömbháromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást.

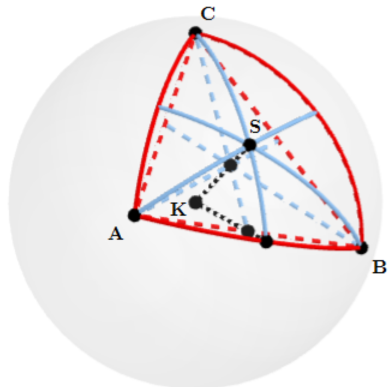
Első bizonyítás: Célunk a bizonyítás során, hogy belássuk, hogy lineárisan összefüggőek a súlyvonalak síkjai, mert a gömb középpontját tartalmazzák (hiszen főkört metszenek ki a gömbből) és akkor egy egyenesben metszik egymást, ami így egy átellenes pontpárt metsz ki a gömbből. A súlyvonalakat az azokat kimetsző síkok normálvektoraival tudjuk meghatározni. Ahhoz, hogy átmenjen a főkör az A csúcson annak helyvektorára merőleges kell, hogy legyen annak normálvektora. Szükséges még, hogy a BC oldal oldalfelezőpontja felé mutató vektorra is merőleges legyen. Mivel $\underline{b}$ és $\underline{c}$ egységvektorok, így az összegük pont arra fog. Így a vektorunk a következő lesz: $\underline{s_a} = \underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c})$. Hasonlóan határozhatjuk meg a másik kettő normálvektort is: $\underline{s_b} = \underline{b} \times (\underline{c} + \underline{a})$, $\underline{s_c} = \underline{c} \times (\underline{a} + \underline{b})$. Elegendő tehát nekünk, hogy $\underline{s_a} + \underline{s_b} + \underline{s_c} = 0$.

$$\underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c}) + \underline{b} \times (\underline{c} + \underline{a}) + \underline{c} \times (\underline{a} + \underline{b})$$

$$\underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c} + \underline{b} \times \underline{c} + \underline{b} \times \underline{a} + \underline{c} \times \underline{a} + \underline{c} \times \underline{b} = 0$$

Az $\underline{a} \times \underline{b} = -(\underline{b} \times \underline{a})$ azonosságot használva háromszor (a megfelelő vektorokra) kész vagyunk.

■



13. ábra

Második bizonyítás: Vegyük az A, B és C csúcsok által meghatározott S síkot a térben. Az S síkon vett háromszögnek vegyünk a súlyvonalait melyek egy pontban metszik egymást. Célunk belátni, hogy ennek a súlypontnak a képe a gömbön az ABC gömbháromszög súlypontja lesz. Úgy vesszük a képét a síkon lévő pontoknak a gömbön, hogy a gömb középpontjából, a síkon lévő ponton átmenő félegyenest vesszük. Az A, B és C csúcsok képei önmagunk lesznek. A gömb húrját felező, rá merőleges egyenesek a húrhoz tartozó ívet is felezik. Így a háromszög oldalfelező pontjain (és a gömb középpontján) átmenő félegyenesek pedig át fognak menni a gömbháromszög oldalfelező pontjain is, és az lesz a képük. Vegyük a gömb középpontján, a C csúcson és a gömbháromszög azzal szemközti oldalának felezőpontján átmenő síkot. Ebben a síkban benne van a háromszög C csúcshoz tartozó súlyvonala. Benne van a súlyvonal minden pontjához tartozó egyenes is, ami kivetíti őket a gömbre. Tehát az ABC síkban lévő háromszög súlyvonalainak a képe a gömbön az ABC gömbháromszög súlyvonalai lesznek. Így a síkban lévő egyetlen metszéspontnak a gömbön lévő vetülete is az lesz. Tehát a súlyvonalak egy pontban metszik egymást.

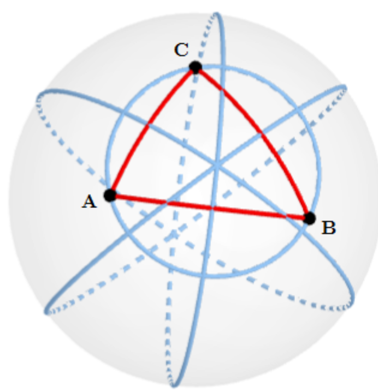
$\blacksquare$

Nyilvánvaló, hogy lesz minden gömbháromszögnek körülírt köre, hiszen három pont a térben meghatároz egy síkot, ami ki fog metszeni egy kört a gömbből. A gömbháromszög köré-, és beírt körének a középpontjának megtalálásáról szóló bizonyítások teljesen úgy működnek, mint ahogy a síkon.

6.6. Tétel. A gömbháromszög oldalfelező merőlegesei egy átellenes pontpárban metszik egymást.

Bizonyítás: A gömbháromszög AB oldalának szakaszfelező főkörének minden pontja egyenlő távolságra van az A és B pontoktól. Amennyiben vesszük A BC oldal szakaszfelező főkörét annak minden pontja egyenlő távolságra lesz a B és C csúcsoktól. Így a két főkör metszéspontjai egyenlő távolságra lesznek a gömbháromszög mind a három csúcsától, ezért a harmadik oldalfelező merőleges is átmegy a metszéspontokon. Tehát ezek a pontok gömbháromszög köréírt körének a középpontjai.

■

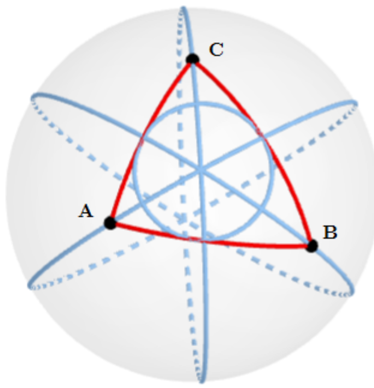


14. ábra

6.7. Tétel. A gömbháromszög szögfelezői egy átellenes pontpárban metszik egymást.

Bizonyítás: A gömbháromszög α szögének a szögfelezőjének minden pontja egyenlő távolságra van az AB és AC oldalak főköreitől. Hasonlóan a β szög szögfelezőjének minden pontja egyenlő távolságra van az AB és CB oldalak főköreitől. Tehát a metszéspontjaik egyenlő távolságra vannak a gömbháromszög mind a három oldalától, ezért a harmadik szögfelező is átmegy a metszéspontokon. Tehát ezek a pontok a gömbháromszög beírt körének a középpontjai.

■



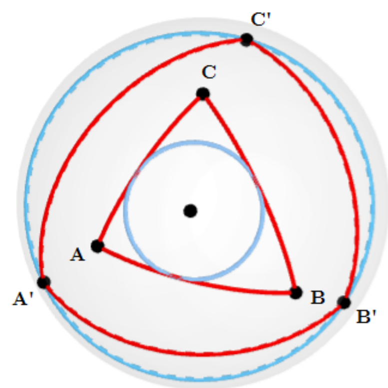
15. ábra

6.8. Tétel. Bármely gömbháromszög köréírt körének középpontjai azonosak a poláris gömbháromszög beírt körének középpontjaival.

Bizonyítás: Legyen K a gömbháromszög köréírt körének a középpontja. Ekkor tudjuk, hogy K egyenlő távolságra van a gömbháromszög mind a három csúcsától. Tudjuk továbbá, hogy az AK főkör a polárháromszög definíciójából következően merőleges lesz az a' oldal fökörére, illetve, hogy az A pont $\pi/2$ távolságra van tőle. Hasonlóan igaz ez a BK és b', illetve a CK és c' párokra. Az eddigiekből következik, hogy a K pont egyenlő távolságra van az eredeti gömbháromszög polárháromszögének minden oldalától, tehát annak a beírt körének a középpontja lesz.

■

A 4.4-es tételből következik persze, hogy minden gömbháromszög beírt körének középpontja pedig a polárháromszögének a köréírt körének középpontja. Észrevehetjük, hogy a gömbháromszög beírt/köréírt körének és polárháromszögének a köréírt/beírt körének összege $\frac{\pi}{2}$ lesz minden esetben.

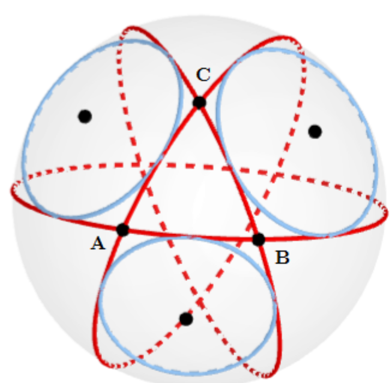


16. ábra

6.9. Tétel. A gömbháromszög egy belső és két másik szögéhez tartozó külső szögfelezője két pontban metszik egymást.

Bizonyítás: Az ABC gömbháromszög a oldalához tartozó hozzáírt köre pontosan az A^*BC gömbháromszög beírt köre, ahol A^* az az A pont átellenes pontja. Tehát amiatt, hogy a az A csúcsnál lévő belső szögfelező az megegyezik az A^* csúcsnál lévő belső szögfelezővel és a 6.7-es tétel alapján kész vagyunk. Ezek a gömbháromszög hozzáírt köreinek középpontjai.

∎



17. ábra

7. Irodalomjegyzék

[1] Hajós György: Bevezetés a geometriába, Nemzeti Tankönyvkiadó, 1999

[2] Moussong Gábor: Geometria 1 - előadásvázlat, 2018

[3] Moussong Gábor: Geometria, Typotex, 2014

[4] Csikós Balázs: Új matematikai mozaik - Gömbi geometria fejezet, Typotex, 2002

[5] Ábrák: GeoGebra 3D, 2019