Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Ambrus Áron Ferenc

Beírt és körülírt egyenlő szárú háromszögek tulajdonságai

BSc Elemző Matematikus Szakdolgozat

Témavezetők:

Kiss Gergely
Somlai Gábor

Algebra és Számelmélet Tanszék

Budapest, 2021

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőimnek, Kiss Gergelynek és Somlai Gábornak a remek közös munkát, illetve hogy felkeltették az érdeklődésem a téma kapcsán. Köszönettel tartozom a családomnak a rengeteg támogatásért, illetve minden kedves ismerősömnek, barátomnak akik segítettek egyetemi éveim során.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

A geometriai tartalmazás már nagyon régóta foglalkoztatja az embereket. A téma sok szempontból érdekes lehet való életben történő problémák megoldására, illetve a sok felhasználási terület miatt kiterjedt problémakörről beszélünk. Ezekkel a problémákkal már a matematikai tanulmányaink korai szakaszában is találkozunk, például a háromszögek köré, illetve beírt köreivel már általános iskolában megismerkedtünk. Természetesen a témakörben vannak a korábban megismertnél komolyabb problémák is, ilyenek lehetnek a különböző alakzatok egymásba helyezhetőségének feltételei, vagy akár annak a problémája is, hogy mekkora területű alakzatra van szükségünk, hogy körbe tudjunk benne forgatni például egy egység hosszú szakaszt (Kakeya problem [4]). A témában előjönnek szélsőérték feladatok is, mint például Kiss Gergely, Pach János és Somlai Gábor cikke [1], melyben azt vizsgálják, hogy egy tetszőleges háromszöget tartalmazó egyenlő szárú háromszögek közül melyiknek a legkisebb a területe. Jelen dolgozat, az említett cikkhez hasonlóan, az R. Nandakumar által írt cikkben [2] felállított sejtésekkel foglalkozik. R. Nandakumar azt állítja, hogy a beírt, illetve a körülírt háromszögek területének, illetve kerületének is a később felvázolt 3 speciális beírt, illetve 3 speciális körülírt egyenlő szárú háromszögekben lesz az optimuma. Az előbb említett sejtések közül egyet már megoldották az említett [1] cikkben, a másik három sejtés eldöntéséről pedig jelenleg közös cikket írunk Csikós Mónikával, Kiss Gergellyel, Pach Jánossal és Somlai Gáborral. A dolgozat különböző fejezeteiben az itt megismert eredményeink egy részét szeretném bemutatni, ezek közül a maximális területű, egyenlő szárú beírt háromszöggel foglalkozó sejtés belátását szeretném a negyedik fejezetben részletesebben kifejteni, mivel ebben a részben sikerült a legtöbb eredményt elérnem. Ebben a részben a tételt sikerült tisztán elemi geometriai állítások segítségével belátnunk. A dolgozat további fejezetei összefoglalják a [1] cikket, illetve a kerülettel kapcsolatos eredményeinket mutatják be röviden. A minimális kerülettel foglalkozó állításon kívül a többi esetben a sejtést beláttuk, illetve ebben az esetben is megtaláltuk az összes ellenpéldát.

1.1. Alap állítások, jelölések

A bevezetés ezen részében szeretnénk bevezetni néhány alapvető jelölést, melyek segítségünkre lesznek a továbbiakban. Ezek mellett néhány segédállítás szerepel még a fejezetben, ezek közül ebben a dolgozatban csak az egyenlő szárú, köré írt háromszög területével kapcsolatos állításokkal foglalkozunk részletesebben.

Bármely két A, és B pontra jelölje AB az A, és B pont közti zárt szakaszt, illetve ennek a szakasznak a hosszát jelölje $|AB|$. Innentől legyenek a vizsgált háromszög csúcsai rendre A, B, C, illetve az oldalaik hossza $a = |BC|$, $b = |AC|$, és $c = |AB|$. Ha valamely két oldal egyenlő lenne, akkor ABC a legnagyobb beírható/legkisebb köré írható egyenlő szárú háromszög, tehát nincs mit vizsgálnunk. Innentől az általánosság megszorítása nélkül feltesszük, hogy az ABC háromszögre $a < b < c$, illetve emiatt $\alpha < \beta < \gamma$, ahol $\alpha = CAB\measuredangle, \beta = ABC\measuredangle, \gamma = BCA\measuredangle$.

1.1.1. Lemma. *Minden ABC háromszöghöz létezik legalább egy maximális területű, és legalább egy maximális kerületű ABC háromszögbe írt egyenlő szárú háromszög. Hasonlóan minden ABC háromszöghöz létezik legalább egy minimális területű, és legalább egy minimális kerületű ABC háromszög köré írt egyenlő szárú háromszög.*

1.1.2. Lemma. *Legyen SPR háromszög az ABC háromszög köré írt minimális területű (/kerületű) egyenlő szárú háromszög. Ekkor*

1. *SPR háromszögnek van olyan oldala, amely A, B, C csúcsok közül kettőt tartalmaz.*
2. *SPR háromszög minden oldala legalább egyet tartalmaz ABC háromszög csúcsai közül.*
3. *ABC háromszög minden csúcsa SPR háromszög oldalain található.*

1.1.3. Lemma. *Legyen SPR háromszög az ABC háromszögbe írt maximális területű (/kerületű) egyenlő szárú háromszög. Ekkor*

1. *ABC háromszögnek van olyan oldala, amely S, P, R csúcsok közül kettőt tartalmaz.*

2. *ABC háromszög minden oldala legalább egyet tartalmaz SPR háromszög csúcsai közül.*

3. *SPR háromszög minden csúcsa ABC háromszög oldalain található.*

Az 1.1.1, 1.1.2, 1.1.3 lemmák bizonyítása a beírt háromszög területével foglalkozó esetben a 4. fejezetben találhatóak, a többi eset bizonyítása ezekhez hasonlóan áll elő.

2. fejezet

Minimális területű, egyenlő szárú köré írt háromszög

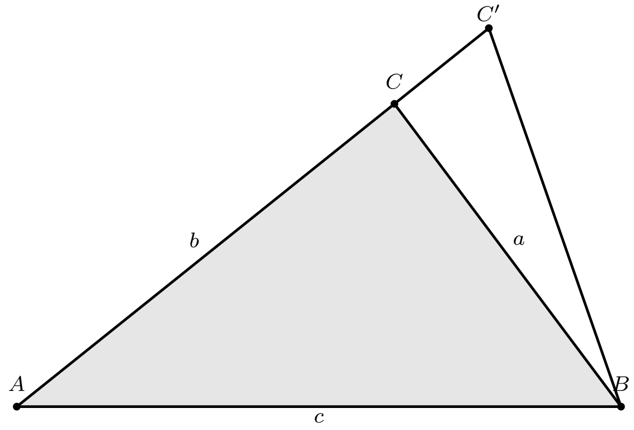
Ebben a fejezetben a [1] cikkben szereplő eredmények összefoglalásáról lesz szó. Ebben a részben a bizonyításokat vázlatosan ismertetjük, minden bizonyítás részletesen megtalálható a [1] cikkben. A fejezet elején megnézzük milyen speciális háromszögek jöhetnek szóba, ha egy tetszőleges ABC háromszöget egy egyenlő szárú háromszöggel szeretnénk lefedni. Ezek után vázlatosan bebizonyítjuk a 2.0.1 tételt, majd megvizsgáljuk, hogy egy adott ABC háromszöghöz maximum hány minimális területű, köréírt háromszög tartozhat.

2.0.1. Tétel. *Legyen ABC egy tetszőleges háromszög, és SPR egy hozzá tartozó minimális területű egyenlő szárú köréírt háromszög. Ekkor SPR háromszög egyike a speciális körülírt háromszögeknek.*

2.0.2. Tétel. *Ha egy tetszőleges ABC háromszög minimális területű egyenlő szárú köré írt háromszöge hegyesszögű, akkor ez egy első fajta speciális körülírt háromszög.*

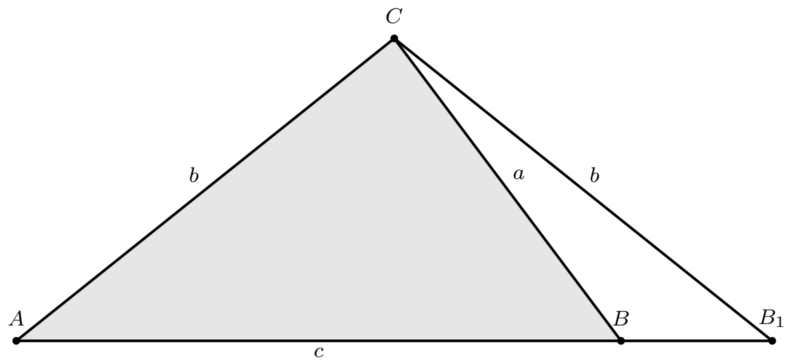
2.1. A speciális körülírt háromszögek.

Első fajta speciális körülírt háromszög. Legyen C' az AC szakasz azon pontja, melyre $|AC'| = |AB| = c$ (2.1. ábra). Ehhez hasonlóan legyenek B', és C'' a BC szakasz azon pontjai, melyekre $|B'C| = |AC| = b$, illetve $|BC''| = |AB| = c$. Az $AB'C$, az ABC', és az ABC'' háromszögek egyenlő szárúak lesznek, és őket nevezzük az *első fajta speciális körülírt háromszögeknek*.



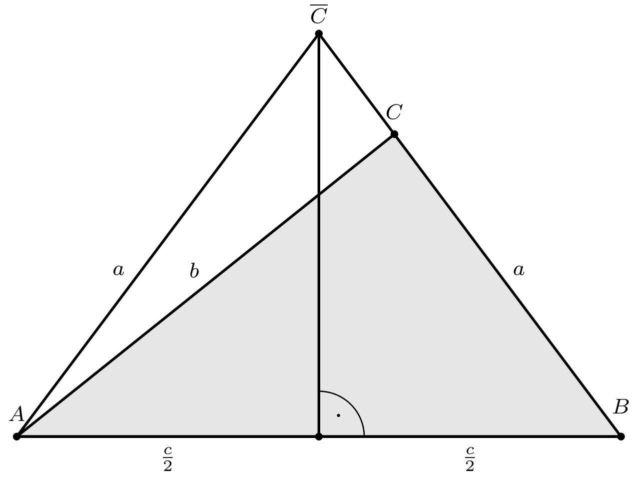
2.1. ábra. Az első fajta speciális körülírt háromszög.

Második fajta speciális körülírt háromszög. Legyen B_1 az AB oldal azon A-tól különböző pontja, melyre $|B_1C| = |AC| = b$ (2.2. ábra). Ehhez hasonlóan legyenek C_1, és C_2 az AC, és a BC oldalak azon A-tól, illetve B-től különböző pontjai, melyre $|BC_1| = |AB| = c$, illetve $|AC_2| = |AB| = c$. Az AB_1C, az ABC_1, és az ABC_2 háromszögek egyenlő szárúak lesznek, és őket nevezzük a *második fajta speciális körülírt háromszögeknek*.



2.2. ábra. A második fajta speciális körülírt háromszög.

Harmadik fajta speciális körülírt háromszög. Legyen $\overline{C}$ az AB oldal felezőmerőlegesének, illetve a BC oldalnak a metszéspontja (2.3. ábra). Ehhez hasonlóan legyenek $\overline{A}$, és $\overline{B}$ a BC, és az AC oldalak felező merőlegeseinek, az AC, illetve a BC oldallakkal vett metszéspontjai. Fontos megjegyezni, hogy tompaszögű ABC háromszög esetén csak az $AB\overline{C}$ háromszög jön létre. Az $\overline{A}BC$, az $A\overline{B}C$, és az $AB\overline{C}$ háromszögek egyenlő szárúak lesznek (amennyiben létrejönnek), és őket nevezzük a *harmadik fajta speciális beírt háromszögeknek*.



2.3. ábra. A harmadik fajta speciális körülírt háromszög.

2.2. Néhány segédállítás

2.2.1. Lemma. *Legyen ABC egy tetszőleges háromszög, és SPR egy hozzá tartozó minimális területű egyenlő szárú köréírt háromszög. Ekkor A, B, C csúcsok az SPR háromszög oldalain kell feküdjenek, illetve SPR háromszög minden oldalának tartalmaznia kell legalább egyet közülük.*

Legyenek SPR tetszőleges egyenlő szárú háromszög SP, PR, RS oldalainak felezőpontjai rendre m_R, m_S, m_P. Ekkor SPR konvex burkát három töröttvonalra oszthatjuk, nevezetesen:

$$\widehat{m_P m_R} = m_P S \cup S m_R, \quad \widehat{m_R m_S} = m_R P \cup P m_S, \quad \widehat{m_S m_P} = m_S R \cup R m_P.$$

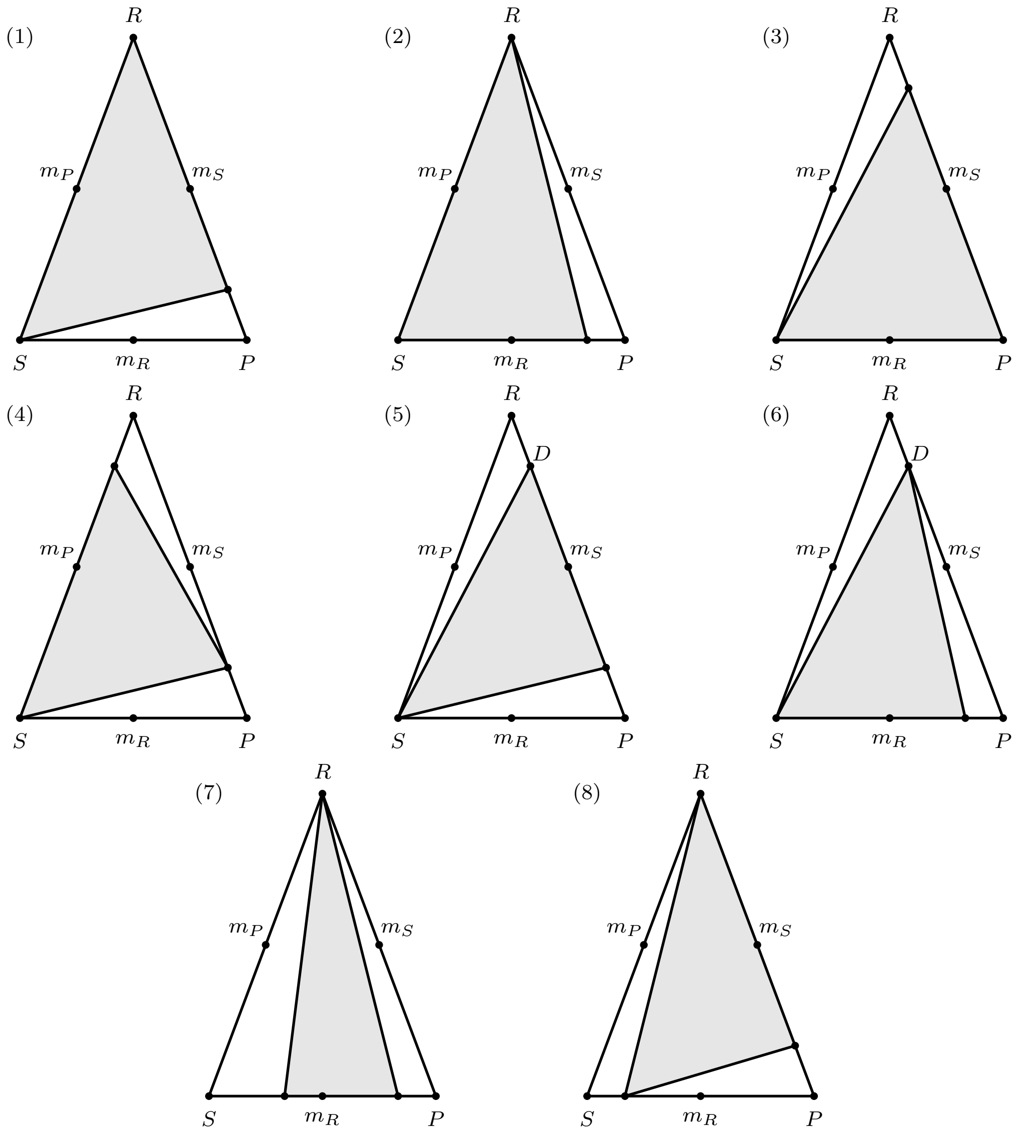
2.2.2. Lemma. *Legyen ABC egy tetszőleges háromszög, és SPR egy minimális területű egyenlő szárú köréírt háromszög. Ekkor az $\widehat{m_P m_R}, \widehat{m_R m_S}$, és $\widehat{m_S m_P}$ törtvonalak mindegyike pontosan egyet tartalmaz az A, B, C csúcsok közül.*

2.2.3. Lemma. *Legyen ABC egy tetszőleges háromszög, és SPR egy hozzá tartozó minimális területű egyenlő szárú köréírt háromszög. Ekkor ABC háromszögnek, és SPR háromszögnek van egy közös csúcsa.*

2.2.4. Lemma. *Tetszőleges ABC háromszögre $t(AB_1C) < t(AB\overline{C})$. Továbbá, ha ABC háromszög hegyesszögű, akkor $t(ABC_1) < t(A\overline{B}C)$, illetve $t(ABC_2) < t(\overline{A}BC)$ egyenlőtlenségek is fenn állnak. Tehát, a harmadik fajta speciális tartalmazó háromszög területe nem lehet minimális.*

2.3. A 2.0.1 tétel bizonyításának vázlata

Legyen SPR háromszög egy ABC háromszög minimális területű egyenlő szárú köréírt háromszöge. A 2.2.1 Lemma miatt a két háromszögnek van közös oldala, a 2.2.3 Lemma miatt pedig közös csúcsa. Ekkor a 2.2.2 Lemmát figyelembe véve a szimmetria erejéig 8 esetet különböztetünk meg a fentebb felsorolt segédállítások miatt. A bizonyítás hátralévő része a 8 esetből 5 esetről belátja, hogy a területe nem lehet maximális, a maradék három pedig speciális köréírt háromszögeket fog adni.



2.4. ábra. A 8 különböző eset a szimmetria erejéig.

Az (1), (2), (3) esetek a három speciális körülírt háromszöget reprezentálják, tehát a tétel belátásához már csak a (4)-(8) eseteket kell kizárnunk. A (4) esetet sajnos csak koordinátageometria segítségével tudjuk kiszámolni, amely a [1] cikkben megtalálható. A többi esetben elemi geometriával könnyen belátható, hogy a terület nem lehet minimális. Az (5), (6) esetekben az SPD háromszög tartalmazza ABC háromszöget, illetve SPR háromszög harmadik típusú speciális köréírt háromszöge SPD háromszögnek, tehát a 2.2.4 Lemma miatt ezekben az esetekben sem lehet optimális az SPR háromszög területe. A (7) esetben SPR háromszög alapját tudjuk csökkenteni, a magasság megtartásával úgy, hogy továbbra is tartalmazza ABC háromszöget, tehát ezt az esetet is kizárhatjuk. Végül a (8) esetben az ABC háromszöget R csúcsból tudjuk úgy forgatni, hogy továbbra is SPR háromszögön belül maradjon, azonban ABC csúcsai közül nem mind fog SPR oldalain feküdni, ami a 2.2.1 Lemma miatt szintén ellentmondás. Tehát, csak a speciális köréírt háromszögek felelnek meg, a bizonyítás vázlatát ezzel befejeztük.

2.3.1. Tétel. *Minden nem egyenlő szárú ABC háromszöghöz maximum 3 minimális területű körülírt háromszög létezik. Ezek az $AB'C$, ABC' és AB_1C háromszögek lehetnek.*

Létezik egy T^* háromszög, melynek a szögei $\alpha^* \approx 41.831452°, 2\alpha^*$ és $180° - 3\alpha^*$, ahol α^* a $\sin(\alpha)\sin(2\alpha) - \sin^2(3\alpha) = 0$ egyenlet egyetlen megoldása a $[36°, 45°]$ intervallumon.

3. fejezet

Minimális kerületű, egyenlő szárú köré írt háromszög

Ebben a fejezetben a sejtést cáfolni fogjuk a körülírt háromszögek kerületére vonatkozóan. Először kiválasztjuk azt a három speciális körülírt háromszöget, melyeknek a kerülete minimális lehet, majd a 4.5 ábrán szereplő eseteket megvizsgálva a második, illetve a harmadik esetben ellenpéldát mutatunk, melyek bizonyos ABC háromszögekre kisebb kerületű körülírt háromszöget generálnak, mint a speciálisok. Végül a 2.0.1 tétel bizonyításában is bemutatott esetszétválasztáshoz hasonló módszerrel belátjuk a következő tételt.

3.0.1. Tétel. *Ha SPR háromszög a tetszőleges ABC háromszög köré írt minimális kerületű egyenlő szárú háromszögek egyike, akkor SPR háromszög vagy valamelyik speciális körülírt háromszög, vagy pedig a 2 ellenpélda által generált körülírt háromszögek egyike.*

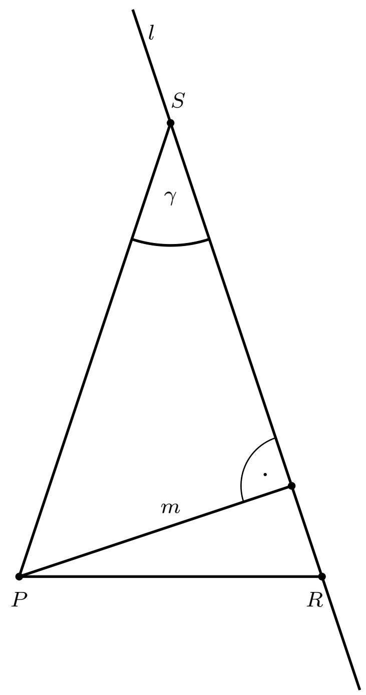
3.0.2. Lemma. *Az ABC háromszög köré írt speciális háromszögek közül az $AB'C$, ABC', vagy az $AB\overline{C}$ háromszög kerülete lesz minimális.*

3.1. Az egyik ellenpélda

3.1.1. Lemma. *Adott egy tetszőleges P pont a síkon, és hozzá egy l egyenes, melyre $P \notin l$. Legyen l egyenes, és a P pont távolsága m. Vegyünk fel ekkor egy SPR egyenlő szárú háromszöget, melyben az S, és az R csúcsok az l egyenesen helyezkednek el, illetve* *a γ csúcsszöge az a S csúcsban van. Ekkor SPR háromszög kerülete*

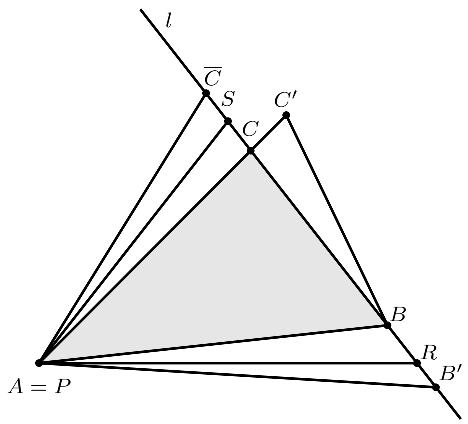
$$k_{SPR} = m(\frac{2}{\sin\gamma} + \frac{1}{\cos(\gamma/2)}).$$

A k_{SPR} kerület a $\gamma^* = 4\tan^{-1}(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}-\sqrt{2(1+\sqrt{5})}))$ (i.e., $\gamma^* \approx 76.3466^o$) szögben veszi fel a minimumát. A $0^o \leq \gamma \leq \gamma^*$ tartományon a kerületfüggvényünk monoton csökken, a $\gamma^* \leq \gamma \leq 90^o$ tartományon pedig monoton nő.



3.1. ábra. A 3.1.1 Lemma.

3.1.2. Következmény. A 3.1.1 Lemma segítségével létre tudunk hozni olyan ABC háromszöget, melyhez a 3.1.1 Lemmában bemutatott háromszög kisebb kerületű körülírt háromszöget ad, mint a speciális esetekben szereplők.



3.2. ábra. A második esetből generált ellenpélda.

Ezután már csak azt kell belátnunk, hogy SPR háromszög területe kisebb, mint az $AB'C$, ABC' és az $AB\overline{C}$ háromszögek kerületei. Az $a \approx b$ miatt tudjuk, hogy $K_{AB'C} < K_{ABC'}$, tehát elég megmutatnunk, hogy az SPR háromszög kerülete kisebb mint az $AB'C$, illetve az $AB\overline{C}$ háromszögek kerületei. Ez pedig a 3.1.1 Lemma miatt igaz lesz. A teljes bizonyítás a készülő cikkben kerül leírásra.

4. fejezet

Maximális területű, egyenlő szárú beírt háromszög

Ebben a fejezetben a maximális területű, egyenlő szárú beírt háromszögekkel fogunk részletesebben foglalkozni, mely kapcsán belátjuk R. Nandakumar a bevezetőben szereplő sejtését.

4.0.1. Tétel. *Bármely háromszöghöz, a legnagyobb területű, egyenlő szárú beírható háromszög valamelyik speciális beírt háromszög lesz.*

A most következő két Lemma általános kimondása a bevezetőben is szerepel (1.1.2, és 1.1.3 Lemmák), alább a maximális területhez kapcsolódó formájuk, illetve annak bizonyítása található.

4.0.2. Lemma. *Minden ABC háromszöghöz tartozik legalább egy maximális méretű beírt egyenlő szárú háromszög.*

Bizonyítás. Legyenek az ABC háromszögbe írható háromszögek csúcsai S, P, R. Az SPR háromszögek területeinek létezik szuprémuma, mivel a T_{ABC} mindig felső korlátja a területeknek. Az S, P, R csúcsok halmaza kompakt, illetve T_{SPR} függvény folytonos, tehát a területekből képzett sorozatok határértéke is felvétetik a halmazon belül. Mivel a területhalmaznak létezik szuprémuma, ezért létezik a szuprémumhoz tartó sorozat is, tehát a szuprémum egyben maximum is. □

4.0.3. Lemma. *Legyen ABC egy háromszög, és SPR egy maximális területű egyenlő szárú beleírható háromszög. Ekkor az S, P, R pontok az ABC háromszög oldalain kell legyenek, és ABC minden oldalának tartalmaznia kell legalább egyet az S, P, R pontokból.*

Bizonyítás. Először azt mutatjuk meg, hogy ABC minden oldala tartalmaz legalább egy csúcsot SPR csúcsai közül. Ha ABC valamely oldala nem tartalmazná SPR egyetlen csúcsát sem, akkor SPR háromszöget eltolhatnák egy picivel az adott oldalra merőleges irányban az oldal felé úgy, hogy az ABC háromszögön belül maradjon, ami miatt SPR egyetlen csúcsa sem feküdne ABC oldalain, ezért nagyítható lenne, ami ellentmond a maximalitásának.

A következő lépés, hogy SPR minden csúcsa ABC valamely oldalán kell feküdjön. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy S nem ABC valamely oldalán van. Ekkor, ha P, R pontok egyike sem esik ABC háromszög valamely csúcsába, akkor ABC valamely oldalán nem volt egyetlen csúcsa sem SPR háromszögnek, tehát készen vagyunk. Amennyiben pontosan egy csúcs közös, akkor ebből a közös csúcsból tudjuk úgy forgatni SPR háromszöget, hogy csak a közös csúcs legyen rajta ABC oldalain, tehát ismét lesz egy oldal, amely nem tartalmaz csúcsot. Amennyiben P, és R pontok is egybeesnek ABC csúcsaival, két esetet különböztetünk meg. Amennyiben ABC háromszög P, vagy R csúcsánál lévő szöge tompa, akkor a másik csúcsból ugyanúgy elvégezhető az említett forgatás. Amennyiben mindkét szög hegyes, tudjuk mozgatni S csúcsot úgy, hogy SPR továbbra is egyenlő szárú, beírt háromszög maradjon, azonban a területe nőjön. Ezt abban az esetben, amennyiben S a két szár metszéspontja, távolabb toljuk az alaptól, az alaphoz tartozó magassságvonalon, ha S az alapon fekszik, akkor pedig nyitjuk a két szár által bezárt szöget, amiről tudjuk, hogy hegyesszög, ezáltal az SPR háromszög területe nő. $\square$

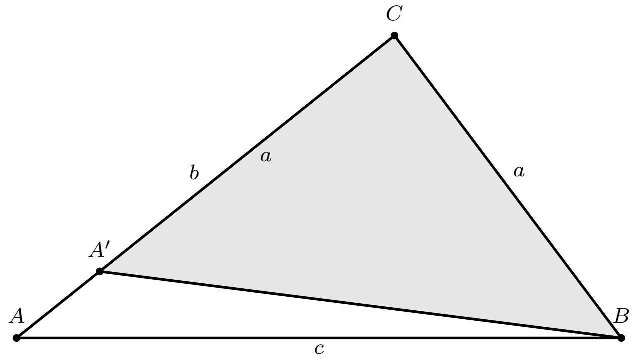
4.1. A speciális beírt háromszögek

Első fajta speciális beírt háromszög. Legyen A' az AC szakasz azon pontja, melyre $|A'C| = |BC| = a$ (4.1. ábra). Ehhez hasonlóan legyenek B', és A'' az AB szakasz azon pontjai, melyekre $|AB'| = |AC| = b$, illetve $|A''B| = |BC| = a$. Az $A'BC$, az $AB'C$, és az $A''BC$ háromszögek egyenlő szárúak lesznek, és őket nevezzük az *első fajta speciális beírt háromszögeknek.* A szinusos területképlet segítségével könnyen számolhatóak az első fajta speciális beírt háromszögek területei, melyek a következők:

$$T_{A'BC} = \frac{a^2 \sin(\gamma)}{2}$$

$$T_{AB'C} = \frac{b^2 \sin(\alpha)}{2}$$

$$T_{A''BC} = \frac{a^2 \sin(\beta)}{2}$$



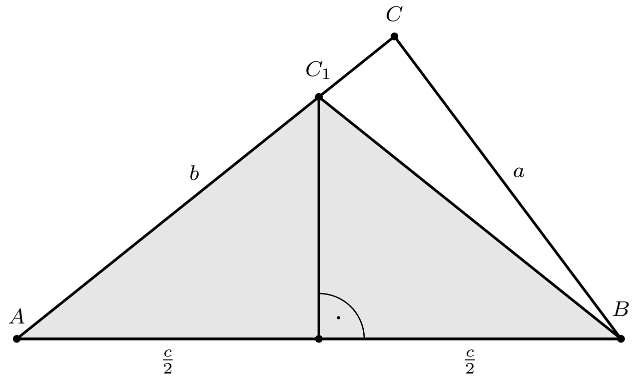
4.1. ábra. Az első fajta speciális beírt háromszög.

Második fajta speciális beírt háromszög. Legyen C_1 az AB oldal felezőmerőlegesének, illetve az AC oldalnak a metszéspontja (4.2. ábra). Ehhez hasonlóan legyenek A_1, és B_1 a BC, és az AC oldalak felező merőlegeseinek, az AB oldallal vett metszéspontjai. Az A_1BC, az AB_1C, és az ABC_1 háromszögek egyenlő szárúak lesznek, és őket nevezzük a *második fajta speciális beírt háromszögeknek*. A második fajta speciális beírt háromszögek területei a következők:

$$T_{A_1BC} = \frac{a^2 \tan(\beta)}{4}$$

$$T_{AB_1C} = \frac{b^2 \tan(\alpha)}{4}$$

$$T_{ABC_1} = \frac{c^2 \tan(\alpha)}{4}$$



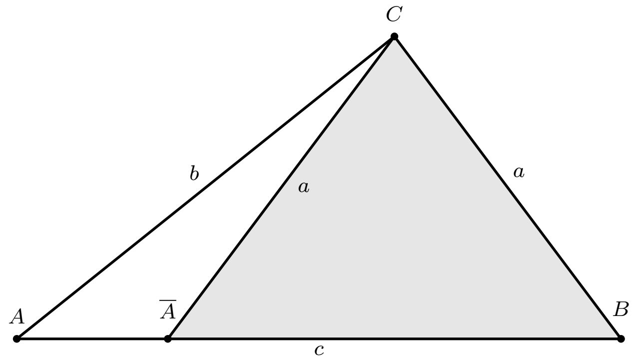
4.2. ábra. A második fajta speciális beírt háromszög.

Harmadik fajta speciális beírt háromszög. Legyen $\overline{A}$ az AB szakasz azon pontja, melyre $|\overline{A}C| = |BC| = a$ (4.3. ábra). Ehhez hasonlóan legyenek $\overline{\overline{A}}$, és $\overline{B}$ az AC, és a BC szakasz azon pontjai, melyekre $|\overline{\overline{A}}B| = |BC| = a$, illetve $|\overline{B}A| = |AC| = b$. Megjegyzendő, hogy az utóbbi két eset nem jön létre tompaszögű háromszög esetén. Az $\overline{A}BC$, $\overline{\overline{A}}BC$, és az $A\overline{B}C$ háromszögek (amennyiben létrejönnek) egyenlő szárúak lesznek, és őket nevezzük a *harmadik fajta speciális beírt háromszögeknek*. A harmadik fajta speciális beírt háromszögek területei:

$$T_{\overline{A}BC} = \frac{a^2 \sin(2\beta)}{2}$$

$$T_{\overline{\overline{A}}BC} = \frac{a^2 \sin(2\gamma)}{2}$$

$$T_{A\overline{B}C} = \frac{b^2 \sin(2\gamma)}{2}.$$



4.3. ábra. A harmadik fajta speciális beírt háromszög.

4.2. Az SPR háromszög csúcsainak elhelyezkedése

Legyenek ABC háromszög oldalfelező pontjai rendre: m_A, m_B, m_C, ekkor ABC külső burka 3 részre esik szét, melyek a következőek: $\widehat{m_A m_B}, \widehat{m_B m_C}$ és $\widehat{m_C m_A}$. Ezek mindegyike 2 szakaszból áll:

$$\widehat{m_A m_B} = m_A C \cup C m_B, \quad \widehat{m_B m_C} = m_B A \cup A m_C, \quad \widehat{m_C m_A} = m_C B \cup B m_A.$$

4.2.1. Lemma. *Legyen ABC egy adott háromszög, és SPR egy maximális területű ABC-be írható egyenlő szárú háromszög. Ekkor az $\widehat{m_A m_B}, \widehat{m_B m_C}$, és $\widehat{m_C m_A}$ töröttvonalak mindegyike pontosan egyet tartalmaz SPR csúcsai közül.*

Bizonyítás. A Lemma 4.0.3, miatt SPR csúcsai ABC háromszög oldalain fekszenek. Az általánosság megszorítása nélkül tegyük fel, hogy az $\widehat{m_A m_B}$ törtvonal tartalmaz SPR csúcsai közül kettőt, legyen ez a két csúcs P, és R (4.4.ábra). Legyenek T_1, és T_2 az $m_A m_C$ szakasz PR, illetve RS szakaszokkal vett metszéspontjai. Mivel $SPT_1T_2 \subseteq Bm_Am_C$, ezért

$$t(SPT_1T_2) \leq t(Bm_Am_C).$$

Illetve $|T_1T_2| \leq |m_Am_C|$ miatt

$$T_{T_2T_1R} \leq T_{m_Am_Bm_C}.$$

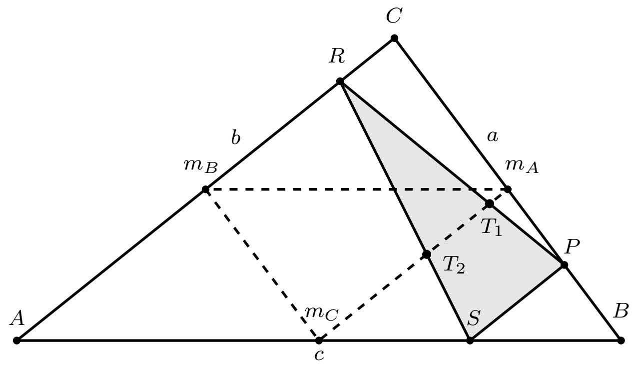
Tehát a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$T_{SPR} \leq T_{Bm_Am_C} + T_{m_Am_Bm_C} = \frac{T_{ABC}}{2}.$$

Egyenlőség akkor állhat fenn, ha $P = B, R = C, S = m_C$, vagy $P = m_A, R = A, S = B$. Mivel $c \le a + b \le 2b$ a következőt kapjuk:

$$T_{AB'C} = \frac{b^2 \sin(\alpha)}{2} > \frac{bc \sin(\alpha)}{4} = \frac{T_{ABC}}{2}.$$

Tehát van olyan beírt háromszögünk, aminek a területe legalább az ABC háromszög területének fele, így az előbbi SPR háromszög területe nem lehet maximális. □



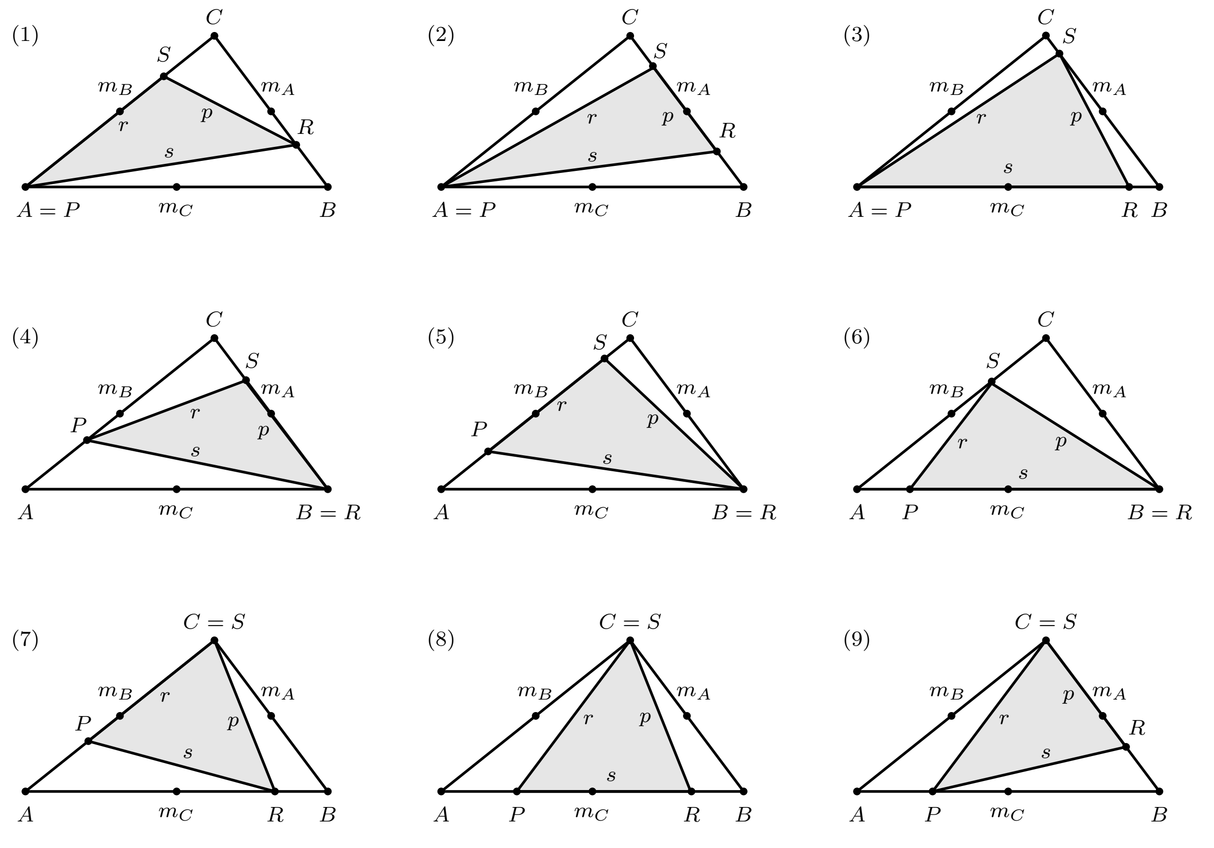
4.4. ábra. Az 4.2.1. lemma bizonyítása.

4.2.2. Lemma. *Legyen ABC egy háromszög, és SPR egy maximális területű, beleírható egyenlő szárú háromszög. Ekkor ABC-nek, és SPR-nek van közös csúcsa.*

Bizonyítás. Az 4.0.3 lemma miatt az SPR háromszög csúcsai az ABC háromszög oldalain kell legyenek. Az 4.0.3, és az 4.2.1 lemmák miatt kétféleképpen helyezkedhetnek el az S, P, R pontok az oldalakon: m_AB, m_BC, m_CA szakaszok mindegyike tartalmaz pontosan egyet, vagy pedig m_AC, m_BA, m_CB szakaszok mindegyike tartalmaz pontosan egy pontot. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $P \in m_AB, R \in m_BC, S \in m_CA$. Ekkor az SPR háromszögbe írt kör középpontjából negatív irányban nagyon keveset forgatva SPR háromszöget, elérhetjük, hogy az így kapott S', P', R' pontok az ABC háromszög belsejébe kerüljenek. Az 4.0.3. lemma miatt az $S'P'R'$ területe nem lehet maximális, tehát SPR háromszög területe sem lehetett maximális, így ellentmondásra jutottunk. A beírt SPR háromszögnek tehát legalább egy csúcsa egybe kell essen az eredeti ABC háromszög valamely csúcsával. □

4.3. Az 4.0.2 tétel bizonyítása.

Először is nézzük meg, hogy hol helyezkedhetnek el SPR háromszög csúcsai ABC háromszög oldalain belül. Az 4.0.3.lemma miatt az S, P, R pontok az ABC oldalain kell legyenek. Az 4.2.1 lemma miatt az $\widehat{m_Am_B}, \widehat{m_Bm_C}$, és $\widehat{m_Cm_A}$ töröttvonalak mindegyike pontosan egyet kell tartalmazzon az S, P, R pontok közül. Az 4.2.2 lemma miatt ABC háromszögnek, és SPR háromszögnek van közös csúcsa. Most nézzük meg, hol helyezkedhetnek el a beírt SPR háromszög csúcsai, ha SPR háromszögnek, és ABC háromszögnek pontosan egy közös csúcsa van. Ezen feltételek mellett a szimmetria erejéig 9 esetet különböztetünk meg, melyek a következőek:



4.5. ábra. Az S, P, R pontok 9 különböző lehetséges elhelyezkedése.

4.3.1. Lemma. *Az 4.5 ábrán tárgyalt 9 eset közül egyik sem adhat maximális területű beírt háromszöget.*

Bizonyítás.

(1). eset: A beírt SPR háromszöget P csúcsából tudjuk forgatni negatív irányba úgy, hogy az S, R csúcsok ABC háromszögön belülre kerüljenek. Ehhez csak azt kell belátnunk, hogy $ARB\measuredangle$ tompaszög, ami pedig nyilvánvalóan igaz, ugyanis $b < c$ miatt az a oldalhoz tartozó magasság talppontja a Cm_A szakaszra esik. Tehát a 4.0.3. lemma miatt SPR háromszög nem lehet a legnagyobb egyenlő szárú beírt háromszög.

(2). eset: Amennyiben r, és s oldalak az SPR háromszög egyenlő szárai, tudjuk "nyitni" az SPR szöget, amivel SPR háromszög területét növeljük, mivel $CAB\measuredangle < 90°$. Ezt egészen addig tudjuk csinálni, amíg az S csúcs egybe nem esik C-vel, tehát a terület ebben az esetben nem lehet optimális. (Hegyesszögű ABC háromszög esetén, az $S = C$ pont az $A\overline{B}C$ speciális beírt háromszöget fogja adni, tompaszögű háromszög esetén pedig nem jön létre a *(2). eset.*) A SPR háromszög máshogy pedig nem lehet egyenlő szárú, ugyanis $a < b$ miatt

$$|AS| = r > |SB| > |SR| = p.$$

Tehát $p \neq r$. Analóg módon a $p = s$ sem lehetséges.

(3). eset: Az előző esethez hasonlóan $r = p$ itt sem lehetséges, ugyanis, S pontot, ha AB szakaszra vetítjük, akkor $S' \in m_C B$, illetve az R pontot megkaphatjuk, ha A-t tükrözzük S'-re, viszont az előző megfigyelésünkből látszik, hogy $R \notin AB$ lenne, ami ellentmondás. Mivel a $p = s$ esetben az s-hez tartozó magasság kisebb mint az ABC háromszög C csúcshoz tartozó magassága, illetve $s = p < a$, ezért $T_{A''BC} \geq T_{SPR}$, tehát $p = s$ esetben nem lehet maximális a terület. Az $r = s$ esethez nézzük azokat az $S'PR$ háromszögeket, melyeket úgy kapunk, hogy az $AB'C$ háromszög $B'C$ oldalát $\vec{AB}$ irányában eltoljuk ε-nal. Ekkor minden *(3). esetben* szereplő SPR háromszöghöz, melyre $r = s$ tartozik egy $S'PR$ háromszög, melyekből megkaphatjuk az SPR háromszögeket, ha az S' csúcsot adig toljuk B csúcs irányába, amíg $r = s$ lesz(4.6 ábra). Könnyen végiggondolható, hogy

$$T_{SPR} < T_{S'PR} = T_{AB'C}\frac{b+\varepsilon}{b}\frac{c-b-\varepsilon}{c-b}.$$

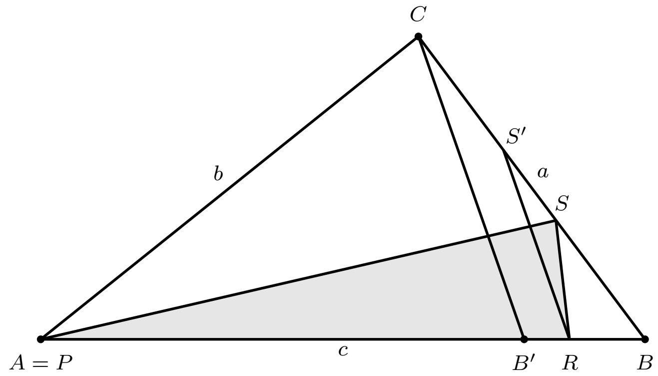
Tehát, amennyiben

$$\frac{b+\varepsilon}{b}\frac{c-b-\varepsilon}{c-b} < 1$$

készen vagyunk a *(3). esettel.* A szorzást elvégezve, majd a nevezővel átszorozva ($b > 0$, illetve $c - b > 0$) a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$-\varepsilon^2 - (2b - c)\varepsilon < 0.$$

Ez pedig a háromszög-egyenlőtlenség miatt mindig igaz lesz.



4.6. ábra. A *(3). eset* bizonyítása.

(4). eset: A beírt SPR háromszöget R csúcsából tudjuk forgatni pozitív irányba úgy, hogy az P, S csúcsok ABC háromszögön belülre kerüljenek, ezért SPR háromszög területe nem lehet maximális (4.0.3. lemma). A bizonyítás analóg az *(1). esetben* látottal, $b < c$ miatt.

(5). eset: Az $r = s$ eset nem lehetséges, ugyanis $b < c$ miatt $|PR| = s > |PC| > |PS| = r$. A $p = s$ esetben a *(2). esethez* hasonlóan tudjuk nyitni a PRS szöget, amiből látjuk, hogy $T_{SPR} < T_{\bar{\bar{A}}BC}$. A $p = r$ esetben külön kell nézzük a tompa, illetve a hegyesszögű ABC háromszögeket. Amennyiben ABC háromszög tompaszögű, akkor $T_{SPR} < T_{ABC_1}$, ugyanis mindkét háromszög $B = R$ csúcshoz húzott magassága ugyanakkora, az ehhez tartozó alap pedig a SPR háromszögben $r = p$ hosszú. Ez pedig $90° < BCA\measuredangle < RSP\measuredangle$ miatt akkor lesz maximális, ha $A = P$, tehát $SPR\triangle = ABC_1\triangle$. Hegyesszögű ABC háromszög esetén, amennyiben a B-ből húzott magasság talppontjától A irányában található az S pont, azesetben a SPR háromszög R-ből pozitív irányban forgatható, tehát a területe nem lehetett optimális (4.0.3. lemma). Most nézzük meg mi történik, ha S a talppont másik oldalán található. Mivel a fent említett két magasság ebben az esetben is megegyezik, ezért szintén az $r = p$ hossza határozza meg a háromszög területét. Mivel S a talppont megfelelő oldalán helyezkedik el, ezért S pontot C irányába mozgatva, SPR háromszög területét növeljük, tehát $T_{SPR} < T_{A'BC}$, így az *(5). eset* sem lehet optimális.

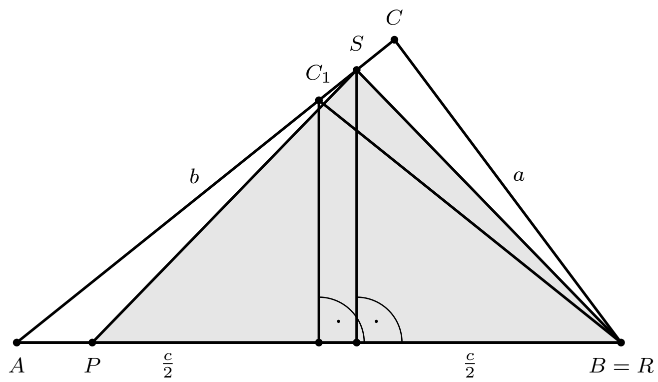
(6). eset: Jelölje az ABC háromszög C csúcshoz tartozó magasságát ebben az esetben m, ekkor $T_{SPR} \leq \frac{ms}{2}$, illetve $T_{AB'C} = \frac{mb}{2}$. Tehát ahhoz, hogy $T_{AB'C} \leq T_{SPR}$, szükséges, hogy $b \leq s$. Mivel $r < |AS| < b$, ezért az $r = s$ eset nem lehet optimális. Amennyiben S csúcs az AB szakasz felező merőlegesétől A csúcs irányába található, akkor erre a felező

merőlegesre tükrözve SPR háromszöget, a kapott $P'R'S'$ háromszög csúcsaira: $P', R' \in AB$, viszont az S' csúcs ABC háromszög egy belső pontja lesz, tehát 4.2.1 miatt a terület így nem lehet optimális. Következésképpen az S csúcs vagy a felező merőlegesen található, vagy pedig a felező merőlegestől C csúcs irányába. Amennyiben a felező merőlegesen helyezkedik el, az esetben az ABC_1 háromszög tartalmazza az SPR háromszöget, tehát ezt az esetet is kizárhatjuk. Mivel S a felező merőleges C felöli oldalán van, $p < |AS| < |AC| = b$, tehát a $b \leq s$ feltétel miatt a $p = s$ eset sem lehetséges.

A megmaradt $p = r$ esetben a SPR háromszöget, illetve annak területét is az ABC_1 háromszögből fogjuk képezni, a következőképpen: az ABC_1 háromszög A csúcsát 2ε-nal eltoljuk $\vec{AB}$ irányba, illetve ehhez igazítjuk hozzá az S csúcsot is úgy, hogy $p = r$ egyenlőség igaz maradjon (4.7 ábra). Ekkor s hossza $\frac{c-2\varepsilon}{c}$-szeresére csökken, az ehhez az oldalhoz tartozó magasság pedig $\frac{c+2\varepsilon}{c}$-szeresére nő, ugyanis az új magasság egybeesik az $Am_C C_1$ háromszög A pontból $\frac{\frac{c}{2}+\varepsilon}{\frac{c}{2}}$-szeresére nyújtott $m_C C_1$ oldalával. Tehát

$$T_{SPR} = T_{ABC_1} \frac{c + 2\varepsilon}{c} \frac{c - 2\varepsilon}{c} = T_{ABC_1} \frac{c^2 - \varepsilon^2}{c^2}.$$

Így az $\varepsilon = 0$ esetben lesz maximális a terület, ezért a (6). eset sem adhatott megfelelő beírt háromszöget.



4.7. ábra. A *(7). eset* bizonyítása.

(7). eset: Amennyiben az R csúcs az ABC háromszög C csúcsból állított magasságának talppontjától B csúcs irányába található, az SPR háromszöget S csúcsból tudjuk úgy forgatni pozitív irányba, hogy P, R pontok az ABC háromszögön belülre kerüljenek, tehát SPR területe nem lehetett optimális (4.0.3. lemma). Amennyiben az R csúcs a talpponttól

az A csúcs irányába helyezkedik el, az $AB'C$ háromszög tartalmazza az SPR háromszöget, tehát az SPR háromszög itt sem lehetett a legnagyobb egyenlő szárú beírt háromszöge ABC háromszögnek.

(8). eset: Ha $p = r$, akkor az $RSP\measuredangle$ szöget nyitva az SPR háromszög területe növelhető, egészen addig, amíg az R, és B csúcsok egybe nem esnek, így pedig az $\overline{A}BC$ háromszöget kapjuk, tehát SPR háromszög területe nem lehetett optimális, mivel $T_{SPR} < T_{\overline{A}BC}$. A $p = s$ esetet két részre bontjuk, az alapján, hogy az R pont a C-ből állított magasság melyik oldalán van. Ha az A-hoz közeli részre esik, akkor az $AB'C$ háromszög tartalmazza az SPR háromszöget, így ezzel az esettel nem kell foglalkoznunk. Amennyiben az R pont a talppont másik oldalán található, s hossza éppen akkor lesz maximális, ha R, és B pont egybeesik, tehát $SPR\triangle = A''BC\triangle$. Mivel az s oldalhoz tartozó magasság nem változik, ezért $T_{SPR} < T_{A''BC}$. Az $r = s$ esetről a $p = s$ esethez hasonlóan elmondható, hogy $T_{SPR} < T_{AB'C}$.

(9). eset: A SPR háromszög az S pontból pozitív irányba forgatható úgy, hogy a P, R pontok az ABC háromszögön belülre kerüljenek, tehát az 4.0.3. lemma miatt a területe nem lehet maximális. $\square$

A 4.3.1. lemma miatt tudjuk, hogy ABC, és SPR háromszögeknek legalább két közös csúcsuk kell legyen (természetesen nem egyenlő szárú ABC háromszög esetén ez pontosan 2 közös csúcsot jelent), ehhez ha hozzávesszük az 4.0.3. lemmát, kiderül, hogy az ABC háromszögekbe írható egyenlő szárú háromszögek közül csak valamelyik speciális fajta beírt háromszögnek a területe lehet maximális. $\square$

4.4. A háromfajta speciális beírt háromszög

Ebben a fejezetben azzal foglalkozunk, hogy a speciális beírt háromszögek közül melyeknek a területe lehet optimális.

4.4.1. Lemma. *Az első fajta speciális beírt háromszögek közül az $A''BC$ háromszög területe nem lehet maximális.*

Bizonyítás. Az $A'BC$ első fajta speciális beírt háromszög területe minden ABC háromszögre legalább akkora lesz mint az $A''BC$ háromszög területe, mivel

$$T_{A''BC} = \frac{a^2 \sin(\beta)}{2} \leq \frac{a^2 \sin(\beta)}{2} \frac{c}{b} = \frac{a^2 \sin(\beta)}{2} \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\beta)} = T_{A'BC}.$$

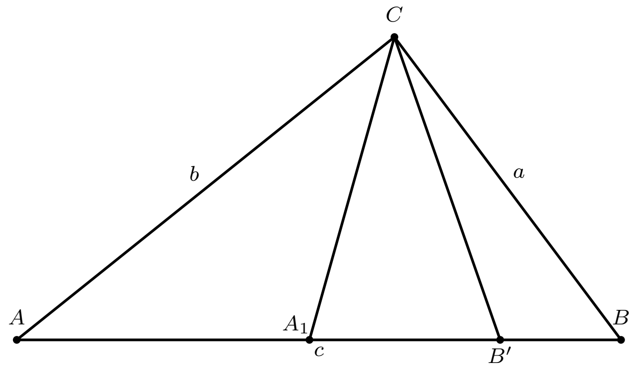
Egyenlőség akkor állhat fenn, ha $b = c$. $\square$

4.4.2. Lemma. *A második fajta speciális beírt háromszögek közül az* A_1BC *háromszög területe nem lehet maximális.*

Bizonyítás. Az A_1BC háromszög azért nem lehet optimális, mivel az $AB'C$ háromszög területe nagyobb nála. A két háromszög C csúcsból indított magassága azonos, viszont az ehhez tartozó alap az $AB'C$ háromszögben nagyobb lesz, ugyanis

$$|AB'| = |AC| \geq |A_1C| = |A_1B|.$$

□



4.8. ábra. A 4.4.2 lemma bizonyítása.

4.4.3. Lemma. *A második fajta speciális beírt háromszögek közül az* AB_1C *háromszög területe nem lehet maximális.*

Bizonyítás. Az ABC_1 háromszög területe legalább akkora, mint az AB_1C háromszög területe

$$T_{AB_1C} = \frac{b^2\tan(\alpha)}{4} \leq \frac{c^2\tan(\alpha)}{4} = T_{ABC_1}$$

Egyenlőség akkor állhat fenn, ha $b = c$. □

4.4.4. Lemma. *A harmadik fajta speciális beírt háromszögek közül az* $\overline{A}BC$ *háromszög területe nem lehet maximális.*

Bizonyítás. Az ABC_1 területe legalább akkora, mint az $\overline{A}BC$ háromszög területe.

$$T_{\overline{A}BC} \leq T_{ABC_1}$$

$$\frac{a^2\sin(2\beta)}{2} \leq \frac{c^2\tan(\alpha)}{4}$$
$$a^2\sin(\beta)\cos(\beta) \leq \frac{c^2\sin(\alpha)}{4\cos(\alpha)}$$

Fejezzük ki $\cos(\alpha)$-t, és $\cos(\beta)$-t a Koszinusztételből, majd helyettesítsük vissza az egyenletbe, illetve alkalmazzuk $\sin(\alpha)$-ra, és $\sin(\beta)$-ra a Szinusztételt.

$$a^2b\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \leq \frac{c^2}{4}a\frac{2bc}{b^2+c^2-a^2}$$
$$(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2) \leq c^4$$
$$-a^4-b^4+2a^2b^2 \leq 0$$
$$-(a^2-b^2)^2 \leq 0$$

Egyenlőség akkor állhat fenn, ha $a=b$. $\square$

4.4.5. Lemma. *A harmadik fajta speciális beírt háromszögek közül az $\overline{\overline{A}}BC$ háromszög területe nem lehet maximális.*

Bizonyítás. Az $A\overline{B}C$ területe legalább akkora, mint az $\overline{\overline{A}}BC$ területe.

$$T_{\overline{\overline{A}}BC} = \frac{a^2\sin(2\gamma)}{2} \leq \frac{b^2\sin(2\gamma)}{2} = T_{A\overline{B}C}$$

Egyenlőség $a=b$ esetén állhat fenn. $\square$

4.4.6. Lemma. *A harmadik fajta speciális beírt háromszögek közül az $A\overline{B}C$ háromszög területe nem lehet maximális.*

Bizonyítás. Az $AB'C$ háromszög területe nagyobb, mint az $A\overline{B}C$ háromszög területe, ugyanis mindkét háromszög egyenlő szárai b hosszúak, viszont a két szár által közrezárt szög $AB'C$ esetén nagyobb, de még itt is kisebb mint $90°$, tehát $T_{A\overline{B}C} \leq T_{AB'C}$. Egyenlőség $b=c$ esetén állhat fenn. $\square$

4.4.7. Tétel. *Bármely ABC háromszöghöz a maximális területű, egyenlő szárú beírt háromszög a következő speciális beírt háromszögek valamelyike: $A'BC, AB'C, ABC_1$.*

Bizonyítás. Az 4.0.2 tétel, illetve a 4.4.1 - 4.4.6 lemmák kizárnak minden más esetet. $\square$

4.4.8. Lemma. *Tompaszögű ABC háromszög esetén az $A'BC$ háromszögek területe nem lehet optimális.*

Bizonyítás. Tompaszögű háromszög esetén $0° < \alpha < 45°$, ezen az intervallumon a $\sin(2\alpha)$ függvény szigorúan monoton nő. Illetve $max(2\alpha) = 180° - \gamma$. Ezekből a következőt kapjuk:

$$\sin(2\alpha) \leq \sin(180 - \gamma) = \sin(\gamma)$$

$$2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \leq \sin(\gamma)$$

$$\sin(\alpha) \leq \frac{\sin(\gamma)}{2\cos(\alpha)}$$

szorozzuk be az egyenlőtlenséget $\frac{\sin(\alpha)\sin(\gamma)}{2}$-vel:

$$\frac{\sin^2(\alpha)\sin(\gamma)}{2} \leq \frac{\sin(\alpha)\sin^2(\gamma)}{4\cos(\alpha)}$$

ebből a Szinusztétel miatt:

$$\frac{a^2\sin(\gamma)}{2} \leq \frac{c^2\sin(\alpha)}{4\cos(\alpha)}$$

$$\frac{a^2\sin(\gamma)}{2} \leq \frac{c^2\tan(\alpha)}{4}$$

$$T_{A'BC} \leq T_{ABC_1}$$

Egyenlőség az $a = b$ esetben állhat fenn. □

4.5. Egyenlő optimumok esete

Ebben a részben azt vizsgáljuk, hogy a három lehetséges optimális háromszög területe mikor eshet egybe. Nevezetesen:

$$T_{A'BC} = T_{AB'C} = T_{ABC_1}.$$

Nézzük meg először, mit mond nekünk az $T_{A'BC} = T_{AB'C}$ egyenlőség.

$$\frac{a^2\sin(\gamma)}{2} = \frac{b^2\sin(\alpha)}{2}$$

Alkalmazzuk a Szinusztételt.

$$\frac{a^2c}{2} = \frac{b^2a}{2}$$

$$b^2 = ac$$

Most nézzük az $T_{A'BC} = T_{ABC_1}$ egyenlőséget.

$$\frac{a^2\sin(\gamma)}{2} = \frac{c^2\tan(\alpha)}{4}$$

$$a^2 \sin(\gamma) = \frac{c^2 \sin(\alpha)}{2\cos(\alpha)}$$

Itt is alkalmazzuk a Szinusztételt.

$$a^2 c = \frac{ac^2}{2\cos(\alpha)}$$

$$2a\cos(\alpha) = c$$

Fejezzük ki $\cos(\alpha)$-t a Koszinusztételből.

$$2a\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = c$$

$$ab^2 + ac^2 - a^3 = bc^2$$

Helyettesítsünk be a c-k helyére $\frac{b^2}{a}$-t.

$$ab^2 + \frac{ab^4}{a^2} - a^3 = \frac{b^5}{a^2}$$

Az egyenlőség megoldása számítógéppel történt, valós megoldásai pedig a következők: $a = b; a \approx -1,3803b; a \approx 0,81917b$. Ezek közül az $a \approx -1,3803b$ eset természetesen nem állhat elő. Az $a \approx 0,81917b$ esetben pedig c hossza: $c = \frac{b^2}{a} \approx \frac{b^2}{0{,}81917b} \approx 1,220748b$. Tehát ha az optimumok egybeesnek, akkor az ABC háromszög $a = b$ oldalai egyenlő hosszúak, vagy pedig a három oldal aránya: $a : b : c \approx 0,81917 : 1 : 1,220748$. Érdekesség, hogy ennek a háromszögnek a szögei ugyanakkorák, mint a 2.3.1 tételben szereplő háromszög szögei.

5. fejezet

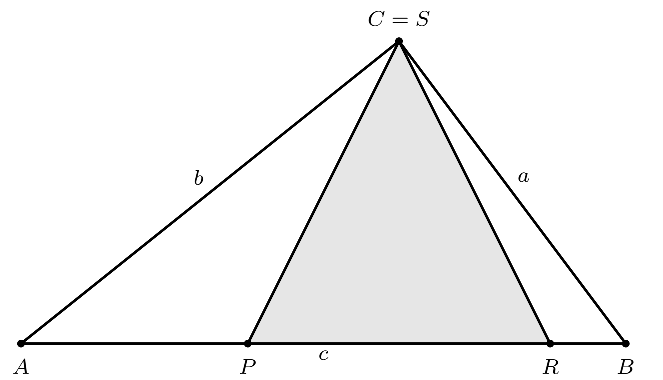
Maximális kerületű, egyenlő szárú beírt háromszög

A maximális terület esetéhez hasonlóan itt is sikerült belátni Nandakumar sejtését. A másik kerülettel foglalkozó esethez hasonlóan itt is csak az eredmények egy részét szeretnénk bemutatni, a bizonyítások, illetve a téma részletesebb kifejtése a korábban már említett, még meg nem jelent cikkben lesz olvasható. A bizonyítás az előző esetekhez hasonlóan itt is az 1.1.1, 1.1.2 és 1.1.3 Lemmákból indul ki.

5.0.1. Tétel. *Bármely háromszöghöz, a legnagyobb kerületű, egyenlő szárú beírható háromszög valamelyik speciális beírt háromszög lesz.*

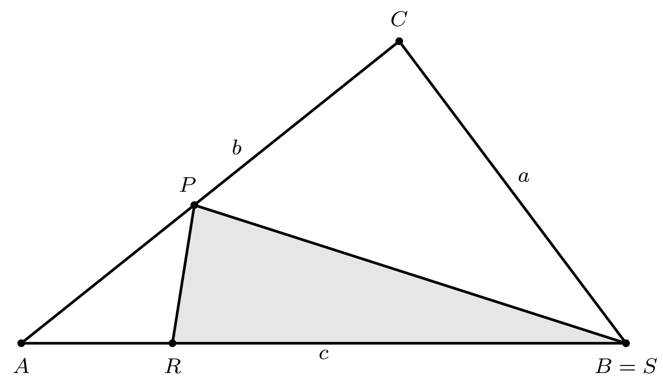
A bizonyítás vázlata: Ha ABC háromszögnek, és a beleírt SPR háromszögnek két közös csúcsa van, akkor SPR háromszög a speciális beírt háromszögek valamelyike. Nézzük meg tehát mi történik, ha ABC háromszögnek, és SPR háromszögnek pontosan egy közös csúcsa van. Ebben a részben az SPR háromszögnek mindig S lesz a csúcsszöge.

A.1 eset: S a közös pont, P és R csúcsok az S-el szemben lévő oldalon helyezkednek el.



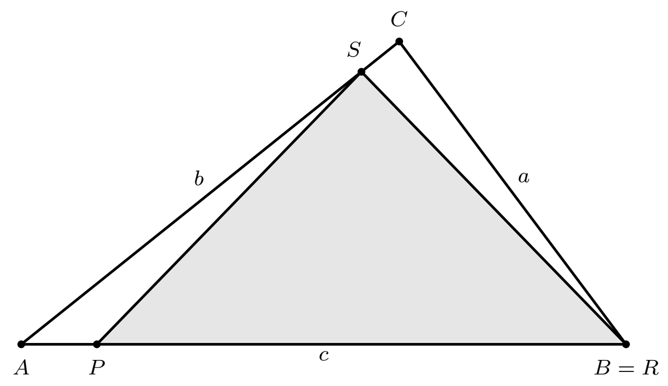
5.1. ábra. Az A.1 eset.

A.2 eset: S a közös pont, P és R csúcsok közül pontosan egy helyezkedik el az S-el szemközti oldalon.



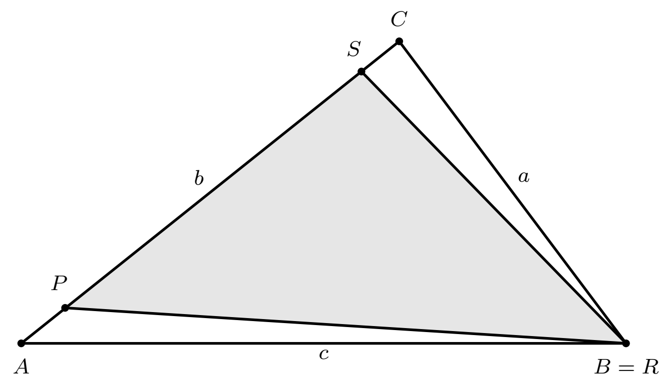
5.2. ábra. Az A.2 eset.

B.1 eset: R a közös pont, csak S csúcs van az R-rel szemközti oldalon.



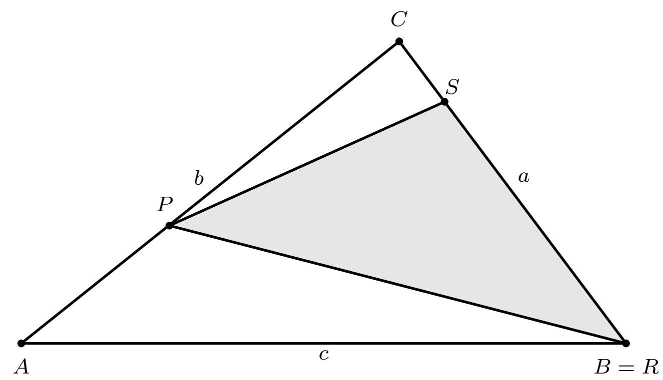
5.3. ábra. A B.1 eset.

B.2 eset: R a közös pont, P és S csúcsok is az R-rel szemközti oldalon találhatóak.



5.4. ábra. A B.2 eset.

B.3 eset: R a közös pont, csak P van az R-rel szemközti oldalon.



5.5. ábra. A B.3 eset.

Az **A.1** és a **B.1** esetben a P pont S-ből való negatív irányba történő forgatásával növelhetjük az SPR háromszög kerületét úgy, hogy továbbra is egyenlő szárú maradjon, illetve ABC háromszögön belül helyezkedjen el. A többi eset kizárása több számolást igényel, a korábban már említett cikkben lesz megtalálható.

Irodalomjegyzék

[1] Gergely Kiss, János Pach, Gábor Somlai, *Minimum Area Isosceles Containers*, 2020, Journal of Information Processing, 28, 759–765.

[2] R. Nandakumar, *Oriented convex container of polygons* https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1802/1802.10447.pdf

[3] K. A. Post, *Triangle in a triangle: On a problem of Steinhaus*, Geometriae Dedicata 45 (1) (1993), 115–120.

[4] Dvir, Zeev. *On the size of Kakeya sets in finite fields*, Journal of the American Mathematical Society 22.4 (2009): 1093-1097.