NYILATKOZAT

Név: Bene Viktória

ELTE Természettudományi Kar, szak: BSc Matematikai elemző

NEPTUN azonosító: ITKW77

Szakdolgozat címe: Véges geometriai konstrukciók

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2021.05.28.

Bene Viktória

a hallgató aláírása

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Bene Viktória

Véges geometriai konstrukciók

Matematikai Elemző BSc szakdolgozat

Témavezető:

Sagmeister Ádám

Geometria Tanszék

Budapest, 2021

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Sagmeister Ádámnak a sok segítségért és útmutatásért, nélküle ez a dolgozat nem született volna meg. Továbbá szeretnék köszönetet mondani családomnak és Bogyónak a támogatásukért, és hogy hősiesen vállalták 1-1 rész elolvasását és ellenőrzését. Nem utolsó sorban pedig a Netflixnek, hogy a kedvenc sorozatom folytatását a szakdolgozat leadási határidejére időzítették.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

A véges geometria a matematikának egy viszonylag új és gyorsan terjedő ága, mely a véges sok pontból építkező geometriai rendszerekkel foglalkozik. Eredete a XIX. század közepére nyúlik vissza, amikor *Wesley S. B. Woolhouse* megfogalmazta a ma *Steiner hármasrendszer*ként ismert kérdését a *Lady's and Gentlemen's Diary* folyóiratban 1844-ben. A felvetett problémát 1847-ben *Thomas Kirkman* oldotta meg (*Kirkman's schoolgirl problem*). *Kirkman* munkájának ismerete nélkül *Jakob Steiner* is publikált a hármas rendszerekről 1853-ban. Mivel *Steiner* munkája szélesebb körben volt ismert, a rendszereket az ő tiszteletére nevezték el. *Kirkman* és *Steiner* által vizsgált kombinatorikus problémákból alakult ki a blokkrendszer elmélete.

Az első, egy véges test elemeivel koordinátázott projektív tér leírása *Von Staudt* 1856-ban megjelent könyvében található. Később számos matematikus tanulmányozta a témakört, úgy mint *Fano, Hilbert, Veblen* és *Young.* Ez a terület az 1940-es években indult gyors fejlődésnek, főleg *Bose, Baer, Bruck, M.Hall*, majd *B. Segre* munkásságának köszönhetően. Később csoportelméleti, illetve az extremális gráfelmélet terén is hasznosnak bizonyult, legújabban pedig a kódelméleti alkalmazások irányították a figyelmet a véges geometria bizonyos területeire. Hazánkban *Kárteszi Ferenc* kezdte el a véges geometria oktatását az ELTE-n. A tárgy a 90'-es évek elejétől fokozatosan vált a matematikus és a matematika tanár szakos hallgatók kötelezően választható tananyagának részévé.

A címből is adódik, hogy a dolgozat során több különböző konstrukcióval fogok foglalkozni és nem csak egy témakörre koncentrálni. Ez a fajta megközelítés az életben is sokkal közelebb áll hozzám. Inkább szeretek több mindent megérteni is tudni, és elfogadom, hogy ezzel nem én leszek egy-egy terület szakértője. Amikor gondolkoztam, hogy miről szeret-

nék írni, mindeképpen szempont volt, hogy kézzel fogható példákról is tudjak beszélni. Ennek két oka is van. Az egyik, hogy sokkal könnyebbnek találom én is, mind megérteni, mind magyarázni egy témakört, ha azt egy teljesen hétköznapi példán keresztül le lehet vezetni. A másik, hogy a számtalanszor feltett "És ez mire jó?" kérdésre könnyedén tudok válaszolni és olyan példát hozni, amiről a nem szakavatott emberek nem is gondolnák, hogy emögött bizony ott lapul a matematika.
Először bemutatom a véges projektív sík és terek alapvető tulajdonságait és megvizsgálunk a témakörrel kapcslatban pár olyan példát amivel a való életben is találkozhatunk. Ismerkedni fogunk különböző ívekkel és tulajdonságaikkal a projektív síkon és térben, végül az általánosított sokszögeket fogjuk vizsgálni.

A dolgozat első két fejezet alapjai [3] és [5] forrásokra támaszkodnak. Az utolsó pedig *Kiss György* kombinatorikus geometria előadásjegyzeteit veszi alapul.

2. fejezet

Affin/projektív síkok és terek

2.1. Affin- és projektív sík definíciója

2.1.1. Definíció. (Illeszkedési geometria) *Egy $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{I})$ rendezett hármast illeszkedési geometriának nevezzük, ha $\mathcal{P}$ és $\mathcal{E}$ két diszjunkt halmaz, és $\mathcal{I} \subseteq (\mathcal{P} \times \mathcal{E}) \cup (\mathcal{E} \times \mathcal{P})$ szimmetrikus reláció, azaz $(P; e) \in \mathcal{I}$ pontosan akkor, ha $(e; P) \in \mathcal{I}$.*
$\mathcal{P}$ elemeit pontoknak, $\mathcal{E}$ elemeit egyeneseknek, $\mathcal{I}$-t pedig illeszkedési relációnak nevezzük.

A dolgozat során mindvégig, ha nem mondunk mást, $\mathcal{P}$ és $\mathcal{E}$ halmazokat végesnek tekintjük.

Ha $(P, e) \in \mathcal{I}$, azt mondjuk, hogy P illeszkedik e-re, vagy e illeszkedik P-re.
Ha egy illeszkedési geometriában pontok egy halmazához található olyan egyenes, amelyre a halmaz összes eleme illeszkedik, akkor a tekintett ponthalmaz elemeit *kollineáris*nak nevezzük. Amennyiben egyenesek egy halmazához van olyan pont, amely a tekintett egyenesek mindegyikére illeszkedik, azt mondjuk, hogy az egyenesek *konkurrens*ek. Két egyenes *metsző*, ha van közös pontjuk. Látható, hogy az egyeneseket egy $\mathcal{P}$-től diszjunkt halmaz elemeiként definiáltuk, nem pedig $\mathcal{P}$-beli elemek halmazaként. Az intuíció kedvéért azonban mégis alkalmazzuk a következő jelölést: $e \backslash H$ jelöli az e-re illeszkedő nem H-beli pontok halmazát, ahol H részhalmaza $\mathcal{P}$-nek.

A projekció szó vetítést jelent. A térbeli alakzatok síkon történő ábrázolásához kézenfekvő vagy a parallel vetítés, vagy a centrális vetítés módszerét alkalmazni. Az emberi szem által a térbeli tárgyakról alkotott kép a centrális vetületnek felel meg. Ily módon főként a festészet és az építészet számára már évszázadokkal ezelőtt szükségesnek mutatkozott a centrális vetítés törvényszerűségeinek feltárása. A centrális vetítés összefüggéseinek tanulmányozása egy matematikai elmélet, a projektív geometria kialakulásához vezetett. A projektív sík, mint az euklideszi geometria egy kibővítése jelent meg. Ezt úgy érjük el, hogy az euklideszi sík minden egyenesét kibővítjük egy-egy ideális ponttal méghozzá úgy, hogy két egyenest pontosan akkor bővítünk ugyan azzal a ponttal, ha párhuzamosak. Vagyis az ideális pontokat tekinthetjük az euklideszi sík párhuzamos egyenesei által alkotott ekvivalencia-osztályoknak. Egy egyenes akkor tartalmaz egy ideális pontot, ha benne van annak megfelelő egyenesosztályában. Bevezetünk egy ideális egyenest is úgy, hogy tartalmazza az összes ideális pontot, de ne tartalmazzon az eukildeszi sík pontjai közül egyetlen egyet sem. A klasszikus projektív sík tehát az ideális pontokkal és az ideális egyenessel bővített euklideszi sík.

A klasszikus projektív síkon a pontok és egyenesek illeszkedéséről a következőket tudjuk:

- Bármely két különböző ponthoz pontosan egy egyenes (a két pont összekötő egyenese) illeszkedik.
- Bármely két különböző egyeneshez pontosan egy pont (a két egyenes metszéspontja) illeszkedik.

E két tulajdonságot megtartva definiáljuk az absztrakt projektív síkot.

2.1.2. Definíció. *A $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{I})$ illeszkedési geometriát projektív síknak nevezzük, ha kielégítik a következő 4 axiómát:*

P1 $\mathcal{P}$ bármely két különböző eleméhez pontosan egy olyan eleme van $\mathcal{E}$-nek, amely mindkettővel relációban áll.

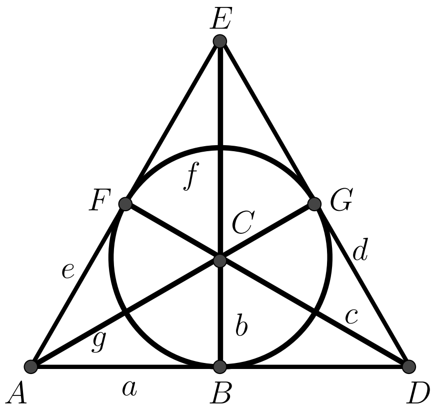
P2 $\mathcal{E}$ bármely két különböző eleméhez pontosan egy olyan eleme van $\mathcal{P}$-nek, amely mindkettővel relációban áll.

P3 $\mathcal{E}$ minden eleme legalább három különböző $\mathcal{P}$-beli elemmel áll relációban.

P4 $\mathcal{P}$ minden eleme legalább három különböző $\mathcal{E}$-beli elemmel áll relációban.

2.1.3. Definíció. *A $\Pi' = (\mathcal{P}', \mathcal{E}', \mathcal{I}')$ projektív sík a $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{I})$ projektív síknak részsíkja, ha $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}, \mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$, és $\mathcal{I}'$ a $\mathcal{P}' \times \mathcal{E}' \cup \mathcal{E}' \times \mathcal{P}'$ halmazon megegyezik $\mathcal{I}$-vel. Azaz egy részsíkbeli pont pontosan akkor illeszkedik egy részsíkbeli egyenesre, ha az eredeti síkon is illeszkednek.*

2.1.4. Példa. (Fano-sík)



Ha egy projektív sík bármely egyenesét és a rajta lévő pontokat elhagyjuk, akkor affin síkot kapunk.

2.1.5. Definíció. *A $(\mathcal{P}', \mathcal{E}', \mathcal{I}')$ illeszkedési geometriát affin síknak nevezzük, ha kielégíti a következő 4 axiómát:*

A1 *$\mathcal{P}'$ bármely két különböző eleméhez pontosan egy olyan eleme van $\mathcal{E}'$-nek, amely mindkettővel relációban áll.*

A2 *Ha $P \in \mathcal{P}'$ nem áll relációban az $e \in \mathcal{E}'$ elemmel, akkor $\mathcal{E}'$-nek pontosan egy olyan eleme van, amely relációban áll P-vel, de nem áll relációban egyetlen olyan $\mathcal{P}'$-beli elemmel sem, amely e-vel relációban áll.*

A3 *$\mathcal{E}'$ minden eleme legalább két különböző $\mathcal{P}'$-beli elemmel áll relációban.*

A4 *$\mathcal{P}'$ minden eleme legalább három különböző $\mathcal{E}'$-beli elemmel áll relációban.*

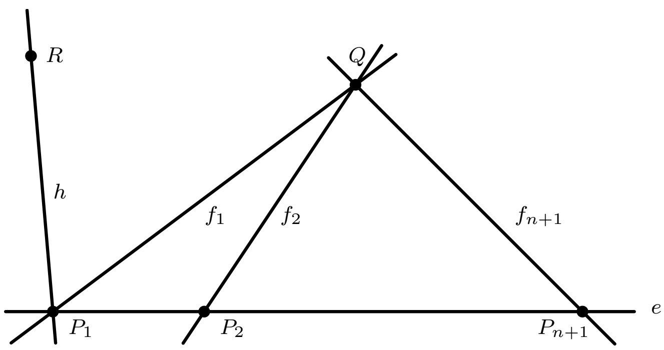
Az eljárás visszafelé is működik, azaz egy affin síkból is mindig lehet projektív síkot készíteni.

2.1.6. Állítás. (Dualitás) *Ha $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{I})$ projektív sík, akkor $(\mathcal{E}, \mathcal{P}, \mathcal{I})$ is projektív sík. Ezt a projektív síkot az eredeti duálisának mondjuk.*

Minden absztrakt projektív síknak van duális síkja, amit úgy kapunk, hogy az eredeti sík egyeneseit tekintjük a duális sík pontjainak, illetve az eredeti sík pontjait a duális sík egyeneseinek. Az illeszkedést pedig úgy definiáljuk, hogy a duális sík egy pontja akkor és csak akkor van rajta a duális sík egy egyenesén, ha az eredeti síkon a pontnak megfelelő egyenesre illeszkedik az egyenesnek mefelelő pont. Mivel a P1 és P2, illetve a P3 és P4 axiómák egymás duálisai, ezért, ha egy tétel levezethető belőlük, akkor annak duálisa is.

2.1.7. Tétel. *Ha a* Π *projektív síknak van olyan egyenese, amelyre* $n+1$ *pont illeszkedik, akkor a sík minden egyenesére* $n+1$ *pont illeszkedik, és a sík minden pontján* $n+1$ *egyenes halad át. A sík összesen* n^2+n+1 *pontot és ugyanannyi egyenest tartalmaz.*

Bizonyítás. Legyen e a projektív síkon egy $n+1$ pontot tartalmazó egyenes. Jelöljük e pontjait $P_1, P_2, ..., P_{n+1}$-gyel. Legyen Q olyan pont, ami nincs rajta e egyenesen. Mivel minden pontra legalább 3 egyenes illeszkedik (P4 axióma), így e egy tetszőleges pontján keresztül létezik legalább 3 egyenes. Ezek közül kiválasztom az egyiket, ami nem e, nevezzük g-nek. Mivel minden egyenesre legalább 3 pont illeszkedik (P3 axióma), ezért g-nek létezik legalább 3 pontja. Ezek közül csak az egyik illeszkedik e-re, mert bármely két egyenesnek pontosan egy közös pontja van (P2 axióma), tehát a többi pont bármelyike lehet Q. Mivel bármely két pontra pontosan egy egyenes illeszkedik (P1 axióma), ezért Q-t össze tudjuk kötni valamennyi P_i ponttal, és a QP_i egyenesek mind különbözők (jelöljük ezen egyeneseket f_i-vel), mert Q nincs rajta e egyenesen. P2 axióma miatt minden Q-n átmenő egyenes metszi e-t és ez a metszéspont csak a P_i pontok valamelyike lehet, azaz Q-n át pontosan $n+1$ egyenes megy.
A dualitás elvét felhasználva, ha van olyan E pont, amelyen át $n+1$ egyenes megy, akkor minden egyenesen $n+1$ pont van, amelyik nem megy át E-n.



Tudjuk, hogy minden ponton át létezik legalább 3 egyenes (P4 axióma). Akkor létezik h egyenes, például P_1-en keresztül, ami nem metszi Q-t és nem azonos e-vel. Ezen a h egyenesen kijelölünk egy R pontot, ami nem azonos P_1-gyel. R nem illeszkedik e-re, tehát rajta keresztül is van $n+1$ egyenes, ahogy azt már Q-nál láttuk. R nem illeszkedik f_1-re és a dualitásból következik, hogy f_1-nek is $n+1$ pontja van. Tehát Q-n átmenő egyeneseknek is $n+1$ pontjuk van. Ismét felhasználva a dualitást, ekkor e pontjain át is $n+1$ egyenes megy át.

Ha P a Π projektív sík egy tetszőleges pontja, ekkor az előzőekben bizonyítottak miatt P pontra $n+1$ egyenes illeszkedik, és minden egyenesnek a P ponton kívül további n pontja van. Így a P ponttal együtt megkapjuk a sík összes pontját, azaz a síknak valóban

$$n(n+1)+1 = n^2+n+1$$

pontja van. Az állítás duálisa szerint a projetív sík egyeneseinek száma is n^2+n+1.

■

2.1.8. Definíció. *A Π projektív sík rendje n, ha Π-nek van olyan egyenese, amelyen $n+1$ pont van.*

Például a **2.1.4**-es *Fano-sík* rendje 2. A P3 és P4 axiómák következménye, hogy ennél kisebb rendű projektív sík nem is létezik.

Véges projektív és affin síkok minden egyenesére ugyanannyi pont illeszkedik. A projektív síkok rendje definíció szerint eggyel kisebb, mint az egy egyenesen lévő pontok száma, de az affin síkok rendje megegyezik ezzel a számmal.

Abból az eljárásból, ahogy a projektív síkból affin síkot kapunk az is látszik, hogy q rendű affin síknak q^2 pontja illetve egyenese van.

2.2. Kártyázzunk véges geomteriával

2.2.1. Példa. (Dobble)

A Dobble egy 55 lapos kártyapakli, melynek minden lapján 8 szimbólum látható. A lapokon összesen 57 különböző szimbólum található, és bármelyik két lapon pontosan egy szimbólum azonos.
A társas 5-féle mini-játékot tartalmaz, melyek mindegyikénél az a lényeg, hogy minél gyorsabban találjunk kártyapárokat azonos szimbólumokkal. Tekintsük ezek közül az egyik verzióját:

Tegyünk egy lapot képpel felfelé az asztal közepére, a maradék paklit osszuk szét egyenlően a játékosok között. Kiosztott lapjaikat a játékosok képpel lefordítva tartják maguk előtt, ez lesz a játékosok saját paklija. A játékosok egyszerre képpel felfelé fordítják a saját paklijukat, és elkezdik keresni azt a szimbólumot, ami egyszerre szerepel az asztal közepén lévő húzópakli felső lapján és saját kártyájukon. Az első játékos, aki kimondja a közös szimbólum nevét, saját paklija legfelső lapját a középen lévő lap tetejére teszi. Innen kezdve ez lesz az a lap, amellyel a játékosoknak össze kell hasonlítaniuk saját felső lapjukat. A játék ugyanígy folytatódik egészen addig, amíg valaki meg nem szabadul összes lapjától és ebben az esetben ő lesz a nyertes.

Tekintsük a kártyáinkat a Π projektív sík egyeneseinek és szimbólumait Π pontjainak. Bármely két kártyán pontosan egy közös ábra van (P2 axióma). Bármely két különböző ábra pontosan egy kártyán szerepel egyszerre (P1 axióma). A **2.1.7** alapján ki tudjuk számolni, hogy a Dobble beágyazható a 7-edrendű projektív síkba, de akkor miért van csak 55 lapunk az 57 helyett? A válasz a játék gyártásában rejlik, mert olyan szabványos kártyakészítő gépek állítják elő, amelyek 52 plusz 3 joker kártyát tudnak egyszerre legyártani.
A társas matematikai modelljéről *Rajta László szakdolgozatában*[4] olvashatunk részletesebben.

Hogyan tudnánk módosítani a szimbólumok és kártyák számát, ha a játékot egyszerűsíteni, vagy bonyolítani szeretnénk?
Jelen ismereteink szerint az eddig ismert projektív síkok és a belőlük származtatott affin síkok rendje prímhatvány. Minden q prímhatványhoz létezik q-adrendű véges projektív sík. Ez azt jelenti, hogy minden q prímhatványhoz tudunk olyan Dobble társashoz hasonló játékot konstruálni, amelyek a q-adrendű véges projektív síkot modellezik. Így biztosan

készíthetünk 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12 ... ábrát tartalmazó kártyákat.
A 10-ről már gépi támogatással belátták, hogy nem lehet projektív sík rendje, azaz 11 ábrát nem fogunk tudni ebben a játékban egy kártyára pakolni.

2.2.2. Példa. (SET)

A véges geometria gyakorlati alkalmazására egy másik érdekes példa a SET játék. Egy izgalmas, pörgős, koncentrációs kártyajáték, melyben a cél, hogy a lent lévő lapok között színben, formában vagy belső kitöltésben a játékosok egyezőséget, vagy teljes különbségeket találjanak.
Minden kártyalapon 4 tulajdonság van, minden tulajdonságból pontosan 3:

- Szimbólumok száma (1, 2, 3)
- Szín (lila, vörös, zöld)
- Alak (hullám, ovális, trapéz)
- Minta (üres, csíkos, teli)

Három kártya akkor alkot SET-et, ha a fenti négy tulajdonság mindegyikénél igaz a következő feltétel: Az adott tulajdonság mindegyik kártyán egyforma, vagy mindegyik kártyán különböző, de sosem lehet két egyforma és egy harmadik eltérő, mert az biztos nem SET!
A játék során a résztvevők 12 lapot raknak ki a kártyákból az asztalra képpel felfelé, egy 3x4-es téglalap alakban. Ha valamelyik játékos a 12 lap között talál SET-et, leveszi és a helyére újabb 3 kártya kerül. Az nyer, aki a játék során a legtöbb SET-et gyűjti össze.
A konstrukció, az előző példához hasonlóan, könnyen le tudjuk fordítani a matematika nyelvére, melyről bővebben *Csapláros Dóra szakdolgozatában*[1] lehet olvasni.

2.3. Ciklikus modell

2.3.1. Példa. (Véges test feletti projektív síkok ciklikus megadása)

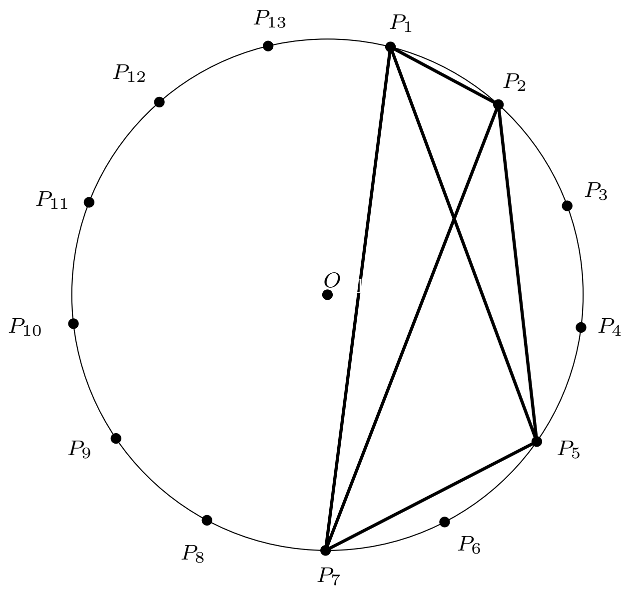
Tekintsük az euklideszi síkon egy $\mathcal{S}$ szabályos n^2+n+1 szöget, amelynek a köré írható kör középpontja O. Legyenek a sokszög csúcsai - ebben a sorrendben $P_1, \ldots, P_{n^2+n+1}$. Nevezzük a P_i és P_j távolságának $\mathbb{Z}_{n^2+n+1}$-ben számolva $i-j$ és $j-i$ közül a kisebbik számot k-nak. Tegyük fel, hogy van olyan $\mathcal{R}$ $(n+1)$-szög, amelyre teljesül, hogy bármely két csúcsának távolsága különböző. Legyen:

- $\mathcal{P}$ az $\mathcal{S}$ szabályos sokszög csúcsainak halmaza
- $\mathcal{E}$ az $\mathcal{R}$ sokszög O körüli $\dfrac{k \cdot 360^\circ}{(n^2+n+1)}$ $(k \in 0, 1, \ldots, n^2+n)$ szögű elforgatottjainak halmaza;
- az I illeszkedési reláció a tartalmazás.

Megmutatjuk, hogy ekkor $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, I)$ projektív sík. Ezt a projektív síkot *ciklikus sík*nak hívjuk. $\mathcal{R}$ csúcsainak távolságai között az $\mathcal{S}$ csúcsai közötti lehetséges távolságok mindegyike pontosan egyszer fordul elő. Mivel $\mathcal{S}$ egy kiválasztott csúcsát n^2+n további csúccsal köthetjük össze, így $\mathcal{S}$ csúcsai közötti lehetséges távolságok mindegyike kétszer fordul elő. Az $\mathcal{S}$ csúcsai közötti lehetséges távolságok száma $\dfrac{n^2+n}{2}$. $\mathcal{R}$-nek $n+1$ csúcsa van és bármely két csúcsának távolsága különböző, így $\mathcal{R}$ csúcsai annyi lehetséges távolságot határoznak meg, ahány csúcspárt kiválaszthatunk, azaz $\dbinom{n+1}{2}$. Mivel

$$\binom{n+1}{2} = \frac{n^2+n}{2},$$

ezek pontosan az $\mathcal{S}$ csúcsai közötti lehetséges távolságok.



Harmadrendű ciklikus sík pontjai és egy egyenese

Láthatjuk, hogy P1 axióma teljesül, mert ha P_i és P_j két különböző pont, melyek távolsága k, akkor $\mathcal{R}$ csúcsai közt pontosan kettő van, melyek távolsága k, ezért $\mathcal{R}$-nek pontosan egy olyan elforgatottja van, amelyek P_i-t is és P_j-t is tartalmazza. Ez az elforgatott a P_i és P_j pontok által meghatározott egyértelmű projektív egyenes.
Tekintsük az $\mathcal{R}$ sokszög $\mathcal{R}_1$ és $\mathcal{R}_2$ elforgatottjait (két különböző egyenes), és tegyük fel, hogy a pozitív irányú, $k \cdot 360°/(n^2+n+1)$ szögű O körüli elforgatás az egyik egyenest ($\mathcal{R}_1$-et) a másikba viszi ($\mathcal{R}_2$-be). Egy $\mathcal{R}_1$-hez tartozó C pont pontosan akkor tartozik $\mathcal{R}_2$-höz is, ha van $\mathcal{R}_1$-nek olyan D csúcsa, hogy a $DOC\angle$ (modulo 360°) irányított szög $+k \cdot 360°/(n^2+n+1)$. Ilyen pont pontosan egy van, mert $\mathcal{R}$, és így $\mathcal{R}_1$ csúcsai közt is minden ilyen k távolság pontosan egyszer fordul elő.
Ha $n \geq 2$, akkor P3 és P4 axiómákat nyilván kielégíti a modell.
Adott $\mathcal{S}$ esetén az $\mathcal{R}$ sokszög nem mindig létezik, azaz nem minden n esetén tudunk n-edrendű síkot készíteni ezzel a módszerrel.

2.3.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy $\mathbb{Z}_k$ egy* **H** *részhalmaza differenciahalmaz, ha $\mathbb{Z}_k$ tetszőleges, nullától különböző eleme egyértelműen áll elő két* **H***-beli elem különbségeként.*

Ha $\mathcal{S}$ csúcsait $\mathbb{Z}_{n^2+n+1}$ elemeinek feleltetjük meg, akkor az $\mathcal{R}$-hez tartozó csúcsok differenciahalmazt alkotnak $\mathbb{Z}_{n^2+n+1}$-ben. Azaz egy ciklikus sík megadásához egy differenciahalmazt kell ismernünk. Az alábbi táblázatban $n < 10$ esetén láthatunk egy-egy differenciahalmazt.

n	n^2+n+1	
2	7	1,2,4
3	13	1,2,5,7
4	21	1,2,5,16,17
5	31	1,2,4,9,13,19
6	43	nem létezik
7	57	1,2,4,14,33,37,44,53
8	73	1,2,4,8,16,32,37,55,64
9	91	1,2,4,10,28,50,57,62,78,82

2.4. Magasabb dimenziós projektív terek

A projektív sík axiómáihoz hasonlóan magasabb dimenziós projektív tereket is tudunk definálni.

2.4.1. Definíció. *Legyen $\mathcal{S}$ véges halmaz amelynek adott néhány kitüntetett részhalmaza, melynek mindegyikéhez hozzá van rendelve egy $-1 \leq d \leq n$ egész szám. Az $\mathcal{S}$ halmazt n-dimenziós véges projektív térnek, a kitüntetett részhalmazokat pedig $\mathcal{S}$ d-dimenziós altereinek nevezzük, ha ezek a részhalmazok kielégítik a következő axiómákat:*

T1 Minden $-1 \leq d \leq n$ egész szám esetén létezik legalább egy d-dimenziós altér, továbbá:

- *egyértelműen létezik (-1)-dimenziós altér, az $\emptyset$;*
- *egyértelműen létezik n-dimenziós altér, $\mathcal{S}$;*
- *a 0-dimenziós alterek megegyeznek $\mathcal{S}$ egyelemű részhalmazaival.*

T2 Ha egy r-dimenziós altér része egy s-dimenziós altérnek, akkor $r \leq s$, és ha $r = s$, akkor a két altér megegyezik.

T3 Alterek metszete altér.

T4 Ha valamely r-dimenziós altér és egy s-dimenziós altér metszete m-dimenziós altér, a mindkettőt tartalmazó összes altér metszete pedig t-dimenziós altér, akkor $r + s = m + t$.

T5 Az 1-dimenziós alterek mindegyike $q + 1 \geq 3$ elemből áll.

Könnyű meggondolni, hogy az $n = 2$ eset éppen a **2.1.2**-ben definiált projektív síkot adja.

A 0-, 1-, 2-,$\ldots$, $(n-1)$-dimenziós alteret rendre *pont*nak, *egyenes*nek, *sík*oknak és *hipersík*oknak nevezzük.

A legkisebb háromdimenziós projektív tér a kételemű test fölötti projektív tér. 15 pontot, 35 egyenest és 15 síkot tartalmaz. Minden sík 7 pontból áll, 7 egyenest tartalmaz, és izomorfak a *Fano-sík*kal. Minden pont 7 egyenesre illeszkedik, és minden egyenes három pontot tartalmaz. Bármelyik pontpárhoz egyértelműen van rajta átmenő egyenes, és bármely síkpár egy egyenesben metszi egymást. Gino Fano 1892-ben fedezte fel ezt a geometriát.

A sík esetében látottakhoz hasonlóan értelmezhetők magasabb dimenziós affin terek is, amelyeket megkaphatunk magasabb dimenziós projektív terekből és az eljárás ugyanúgy fordítva is működik.
Jelölje $\mathrm{GF}(q)$ a q elemű véges testet. Ismert, hogy ilyenkor $q = p^k$, ahol p prím és k pozitív egész szám.

2.4.2. Példa. (Galois-tér)

Jelölje V_{n+1} a $\mathrm{GF}(q)^{n+1}$ vektorteret. Legyen S a V_{n+1} egydimenziós altereinek halmaza, a kitüntetett részhalmazok pedig legyenek V_{n+1} alterei és az $\emptyset$. A V_{n+1} egy $(k+1)$-dimenziós alterének megfelelő S-beli részhalmaz dimenziója legyen k, az $\emptyset$ dimenziója legyen -1, az illeszkedés pedi a tartalmazás.
Ezt a teret *n-dimenziós Galois-tér*nek nevezzük. $n = 2$ esetén *Galois-sík*ról beszélünk. Jelölése: $PG(n, q)$

2.4.3. Tétel. *Legyen* $\Theta(R) = (q^{r+1} - 1)/(q - 1)$ *és* $r \leq s$ *esetén* $[r, s] = \prod_{i=r}^{s} (q^i - 1)$*. A* $PG(n, q)$ *projektív tér altereire igazak az alábbiak:*

1. *a tér pontjainak száma* $\Theta(n)$
2. *a tér m-dimenziós altereinek száma* $[n - m + 1, n + 1]/[1, m + 1]$*, ha* $0 \leq m \leq n - 1$
3. *a tér egy adott k-dimenziós alteret tartalmazó m-dimenziós altereinek száma* $[m - k + 1, n - k]/[1, n - m]$*, ha* $0 \leq k \leq m \leq n - 1$

Bizonyítás.

1. $\mathrm{PG}(n, q)$ pontjainak száma a $\mathrm{GF}(q)$ feletti $(n + 1)$-dimenziós vektortér egydimenziós altereinek számával egyezik meg. A vektortérben q^{n+1} elem van, az egydimenziós altérben pedig q. Mivel a zérusvektortól különböző vektorok mindegyike egy és pontosan egy darab egydimenziós altérben van benne, és a különböző egydimenziós alterek csak az origóban metszik egymást, az összes egydimenziós alterek számát megkaphatjuk, ha a nemnulla vektorok számát elosztjuk az egydimenziós altérben szereplő nemnulla vektorok számával. Így $\mathrm{PG}(n, q)$ pontjainak száma valóban
$$\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = q^n + q^{n-1} + \cdots + q + 1 = \Theta(n)$$
2. Egy m-dimenziós projektív alteret $m + 1$ darab lineárisan független pont határoz meg. Ezért az m-dimenziós projektív alterek számát megkaphatjuk, ha $\mathrm{PG}(n, q)$ összes pontjából kiválasztható lineárisan független $m + 1$ elemű ponthalmazok számát elosztjuk az egy m-dimenziós altér összes pontjaiból kiválasztható lineárisan független $m + 1$ elemű ponthalmazok számával. Az első rész bizonyításához hasonlóan kapjuk, hogy egy m-dimenziós projektív altér $\Theta(m)$ pontot tartalmaz. k pont kiválasztása után már az általuk meghatározott k-dimenziós altér egytlen pontját sem választhatjuk, úgyhogy egy-egy lépésben $\Theta(m) - \Theta(k)$ darab új pontot választhatunk. Így egy m-dimenziós altérből kiválasztható független $m + 1$ elemű ponthalmazok száma
$$\frac{q^{m+1} - 1}{q - 1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{q^{m+1} - 1}{q - 1} - \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1} \right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{q^{m+1} - 1}{q - 1} - \frac{q^m - 1}{q - 1} \right) =$$
$$= \frac{(q^{m+1} - 1) \cdot \ldots \cdot (q^{m+1} - q^{k+1}) \cdot \ldots \cdot (q^{m+1} - q^m)}{q - 1}.$$

$m = n$ választással kapjuk az összes lehetséges lineárisan független $m+1$ elemű ponthalmazok számát. Így az m-dimenziós projektív alterek száma

$$\frac{\Theta(n)(\Theta(n)-\Theta(0))(\Theta(n)-\Theta(1))\cdot\ldots\cdot(\Theta(n)-\Theta(m-1))}{\Theta(m)(\Theta(m)-\Theta(0))(\Theta(m)-\Theta(1))\cdot\ldots\cdot(\Theta(m)-\Theta(m-1))} =$$

$$= \frac{[n-m+1, n+1]}{[1, m+1]}$$

3. A dualitás elvét felhasználva $\mathrm{PG}(n,q)$ egy adott k-dimenziós alterét tartalmazó m-dimenziós altereinek a száma megegyezik a tér egy $(n-k-1)$-dimenziós altere által tartalmazott $(n-m-1)$-dimenziós altereinek számával. Ez pedig nem más, mint $\mathrm{PG}(n-k-1,q)$ térben lévő $(n-m-1)$-dimenziós altereinek száma, ahol az előző pont alapján

$$\frac{[(n-k-1)-(n-m-1)+1, n-k]}{[1, n-m]} = \frac{[m-k+1, n-k]}{[1, n-m]}.$$

$\blacksquare$

3. fejezet

Ívek, oválisok, hiperoválisok

3.1. Ívek, oválisok és hiperoválisok definíciója

Az ív és ovális fogalma, mint a kúpszeletek kombinatorikus általánosítása a projektív síkon, az egyik legkorábbi fogalmak voltak, melyeket *Bose* már a negyvenes években bevezetett. Az alábbi fejezetben ezekről az ívekről és tulajdonságaikról fogok beszélni.

A továbbiakban Π_q egy tetszőleges q-rendű projektív síkot fog jelölni.

3.1.1. Definíció. (Ív) *Egy projektív sík olyan nemüres ponthalmazát, amelynek nincs három egy egyenesen fekvő pontja, ívnek nevezzük. Ha az ív k pontú, akkor k-ívről beszélünk. Az ívet teljesnek mondjuk, ha tartalmazásra nézve maximális, tehát nem részhalmaza egyetlen további ívnek sem.*

3.1.2. Definíció. (Szelő, érintő, külső egyenes) *A sík valamely egyenese az adott k-ívre nézve szelő, érintő, illetve külső egyenes, ha a k-ívvel rendre 2,1, illetve 0 közös pontja van.*

3.1.3. Definíció. (Lefogó ponthalmaz) *Azt mondjuk, hogy egy projektív sík pontjainak egy B halmaza lefogó ponthalmaz, ha a sík minden egyenesének van B-vel közös pontja. Az egyenesmentes lefogó halmazt blokkoló halmaznak hívjuk.*

3.1.4. Lemma. Π_q *bármely lefogó ponthalmaza legalább $q+1$ pontból áll. Egy lefogó ponthalmaz akkor és csak akkor áll éppen $q+1$ pontból, ha a ponthalmaz éppen egy egyenesre illeszkedő pontok halmaza.*

Bizonyítás. Tekintsünk a sík egy olyan pontját, amely nem eleme a tetszőlegesen választott lefogó halmaznak. Feltehetjük, hogy ilyen pont létezik, hiszen **2.1.7**-ből tudjuk, hogy egy projektív síkon $q^2 + q + 1$ pont van, tehát biztosan találunk egy olyat, ami nem eleme a $q + 1$ pontból álló lefogó ponthalmaznak. Erre a pontra $q + 1$ egyenes illeszkedik. Ezen egyenesek mindegyikének van a lefogó halmazba eső pontja, így valóban a lefogó halmaz legalább $q + 1$ elemű.

Tekintsünk most egy $q + 1$ elemű $\mathcal{B}$ lefogó halmazt, és legyen e egy olyan egyenes, mely két $\mathcal{B}$-beli pontot köt össze. Ha $\mathcal{B}$ nem egyezik meg az e egyenesre illeszkedő pontok halmazával, akkor választhatunk egy e-re illeszkedő $P \notin \mathcal{B}$ pontot. Mivel e-re legalább két $\mathcal{B}$-beli pont illeszkedik, a P-re illeszkedő, e-től különböző q darab egyenes "lefogására" legfeljebb $q - 1$ darab $\mathcal{B}$-beli pont marad, ami nem lehetséges.

■

A következő két tétellel becslést tudunk adni a legnagyobb és a legkisebb ívre egy q-adrendű síkon.

3.1.5. Tétel. (Bose) *Π_q bármely k-ívére $k \leq q+2$ teljesül. Ha q páratlan, akkor $k \leq q+1$ is igaz.*

Bizonyítás. Válasszunk egy tetszőleges P pontot az ívről. Erre a pontra $q + 1$ egyenes illeszkedik, amelyek mindegyikének az ívvel legfeljebb további egy metszéspontja lehet. Így a pontok száma összesen legfeljebb $1 + (q + 1) = q + 2$.
Ha $k = q + 2$ esetén bármelyik pontot választottuk P-nek, minden rajta átmenő egyenes pontosan további egy ponton megy át az ívünkről. Azaz minden egyenes, amely metszi az ívet, pontosan két pontban metszi azt. Ezt felhasználva be tudjuk bizonyítani, hogy páratlan q esetén nincsenek $(q + 2)$-ívek. Vegyünk egy R pontot, amely nem illeszkedik az ívre. Az R-en átmenő egyenesek vagy 0 vagy 2 pontban metszik az ívünket. Ha az ív pontjait összekötjük R-rel, akkor az így keletkező metszéspont-párok az ív pontjait párba állítják, azaz ívünk mérete páros szám kell, hogy legyen. Ha $q + 2$ páros, akkor q is páros.

■

3.1.6. Állítás. *Ha Π_q-nak van k pontból álló teljes íve, akkor*

$$\frac{k(k-1)}{2} \geq q + 1.$$

Bizonyítás. Ha létezik a síknak olyan P pontja, amelyen át nincs szelő a k-ívhez, akkor a P-re illeszkedő egyenesek mindegyie vagy 0, vagy 1 pontban metszi az ívet. Így ezen P pont hozzávételével ki lehet egészíteni az ívet és $(k+1)$-ívet kapunk, ezért a teljesség miatt a szelők fedik a sík pontjait. Így **3.1.4** duálisa miatt legalább $q+1$ pontból áll. Egy k pontból álló ívnek $k(k-1)/2$ szelője van, hiszen az ívre illeszkedő k pont mindegyikét $k-1$ féle ponttal köthetjük össze, hogy szelőt kapjunk, ekkor azoban minden egyenest kétszer számoltunk. Így a szelők számára vonatkozó fenti becslés éppen állításunkat adja ■

3.1.7. Definíció. *Egy projektív sík egy olyan ívét, amelynek minden pontjára egy és csak egy érintő illeszkedik, oválisnak nevezzük. Azokat az íveket, amelynek nincsen érintő egyenesük, hiperoválisoknak hívjuk.*

3.1.8. Állítás. Π_q *k pontból álló íve esetén az ív minden pontjára $q-k+2$ darab érintőegyenes illeszkedik. Az oválisok pontosan a $q+1$ pontú ívek, a hiperoválisok pontosan a $q+2$ pontú ívek.*

Bizonyítás. Ha egy ívnek k pontja van, akkor minden pontra $k-1$ szelő illeszkedik, mivel egy rögzített pontot az ív összes többi pontjával összekötve megkapjuk az arra illeszkedő szelőket. Ez az jelenti, hogy a rögzített pontra illeszkedő maradék $q+1-(k-1)=q-k+2$ egyenes érintő. Oválisok esetén tudjuk, hogy ez a szám 1, így $q-k+2=1$ miatt $k=q+1$ adódik. Hiperoválisok esetén pedig $q-k+2=0$, így ebben az esetben valóban $k=q+2$ ■

A **3.1.5** Bose-tételnél láttuk, hogy $q+2$ pontú ívek csak páros rendű projektív síkokban lehetnek, ebből adódik az alábbi következmény:

3.1.9. Következmény. *Páratlan rendű projektív síkon nincsenek hiperoválisok.*

A következőkben megmutatjuk, hogy páros rendű projektív síkon létezik hiperovális, sőt minden ovális kiegészíthető azzá.

3.1.10. Állítás. *Páros rendű projektív sík tetszőleges oválisának érintői egy pontra illeszkednek.*

Bizonyítás. Tekintsük egy páros q rendű projektív sík egy oválisát, és legyen P a sík egy egy olyan pontja, amely nem illeszkedik erre az oválisra. Mivel az oválisra páratlan számú pont illeszkedik, a P-re illeszkedő egyenesek nem állíthatják párba az ovális pontjait, azaz biztosan van közöttük érintő. Tehát a sík minden pontjára illeszkedik az oválisnak érintője. Ez azt jelenti, hogy az ovális érintői olyan egyeneshalmazt alkotnak, amelynek a sík összes pontjára illeszkedik eleme. Mivel az ovális minden pontjára egy és csak egy érintő illeszkedik, ezért ez az egyeneshalmaz $q+1$ elemű. A **3.1.4** lemma második felének duálisából már következik az állítás.

∎

Az előzőállításból értelmet nyer a következő definíció:

3.1.11. Definíció. (Magpont) *Legyen Π_q egy oválisa $\mathcal{O}$, ahol q páros. $\mathcal{O}$ érintőinek metszéspontját az $\mathcal{O}$ magpontjának nevezzük.*

3.1.12. Következmény. *Páros rendű projektív sík tetszőleges oválisát a magpontjával kiegészítve hiperoválist kapunk. Tetszőleges hiperoválisból annak tetszőleges pontját elhagyva oválist kapunk.*

Páratlan rendű esetben a helyzet az euklideszi síkhoz hasonló.

3.1.13. Lemma. *Legyen $\mathcal{O}$ ovális a Π_q-n, ahol q páratlan. A sík $\mathcal{O}$-hoz nem tartozó bármely pontján vagy 0 vagy 2 érintő megy át.*

Bizonyítás. Tekintsük $\mathcal{O}$ egy tetszőleges t érintőjét. Jelöljük T-vel $\mathcal{O}$ és t érintési pontját. Megmutatjuk, hogy $t\setminus\{T\}$ pontjain pontosan egy további érintő megy át. Mivel $\mathcal{O}$ minden pontján pontosan egy érintő megy át, így a t-től különböző érintők száma pontosan q a **3.1.8** állítás szerint. Ugyanennyi a $t\setminus\{T\}$ pontok száma, így elég azt megmutatni, hogy $t\setminus\{T\}$ minden pontján megy át t-től különböző érintő. Tekintsük egy ilyen $R \in t$, $R \neq T$ pontot, és kössük össze $\mathcal{O}\setminus\{T\}$ pontjaival. Mivel $\mathcal{O}\setminus\{T\}$ pontjainak száma páratlan, lesz olyan pont, amelyet R-rel összekötve érintőt kapunk.

∎

3.2. Oválisok néhány kombinatorikus tulajdonságai

3.2.1. Állítás. *Egy q-adrendű projektív sík tetszőleges oválisa esetén:*

- *a szelők száma* $\frac{q(q+1)}{2}$,
- *az érintők száma* $q+1$,
- *a külső egyenesek száma* $\frac{q(q-1)}{2}$.

Bizonyítás. Már korábban beláttuk, hogy egy k pontú ív szelőinek száma $k(k-1)/2$, ez $k=q+1$ esetén adja az állítás első részét.
Mivel egy ovális minden pontjára illeszkedik egy és csak egy érintő, és az ovális pontjainak száma $q+1$, az éritők száma is $q+1$.
A sík összes többi egyenese külső egyenes, így azok száma

$$q^2+q+1-\frac{q(q+1)}{2}-(q+1)=\frac{q(q-1)}{2}$$

■

3.2.2. Definíció. (Külső és belső pontok) *A páratlan rendű* Π_q *projektív sík olyan pontját, amelyen az* $\mathcal{O}$ *oválisnak 2 érintője megy át,* $\mathcal{O}$*-ra nézve külső, amelyeken 0 érintő megy át, belső pontnak nevezzük.*

3.2.3. Állítás. *Ha q páratlan szám, akkor a q-adrendű projektív sík tetszőleges oválisának* $\frac{q(q+1)}{2}$ *külső pontja és* $\frac{q(q-1)}{2}$ *belső pontja van.*

Bizonyítás. Az ovális tetszőleges külső pontjára két érintő illeszkedik. Így a külső pontok megszámolásához vegyük az ovális $q+1$ darab érintőjét. Mindegyik érintőn q darab külső pont van, ezzel a külső pontokat kétszer számoltuk meg. Így a külső pontok száma valóban $\frac{q(q+1)}{2}$.
Minden olyan pont, amely nem illeszkedik az oválisra és nem külső pont, az belső pont. Így a belső pontok száma

$$q^2+q+1-\frac{q(q+1)}{2}-(q+1)=\frac{q(q-1)}{2}$$

■

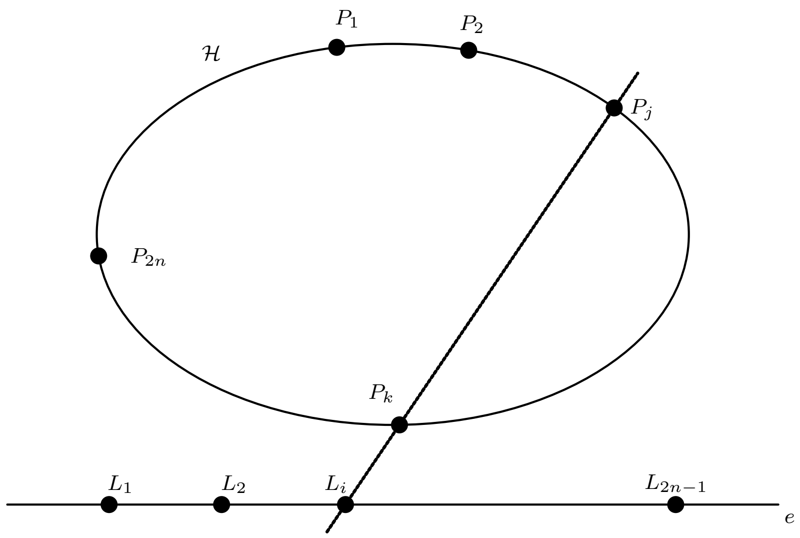
3.3. Körmérkőzéses bajnokság

Az alábbi példánkhoz bevezetünk néhány gráfelméleti alapfogalmat és jelölést.

3.3.1. Definíció. *Legyen $V(G)$ a G gráf csúcsainak halmaza, $E(g)$ a G gráf éleinek a halmaza és K_n az n pontú teljes gráf. A G gráf $1-$faktorának nevezzük az $F \subset E(G)$ élhalmazt, ha minden $x \in V(G)$ csúcs pontosan egy F-beli élen van rajta.*
A G gráf $1-$faktorainak $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_k\}$ halmazát G $1-$faktorizációjának nevezzük, ha minen $e \in E(G)$ él pontosan egy F-beli $1 - faktor$ban van benne.

3.3.2. Példa.

Képzeljük el, hogy szeretnénk egy körmérkőzéses sport bajnokságot rendezni. A bajnokság több fordulóból áll, és minden fordulóban minden csapat egy meccset játszik. A fordulók végén pedig minden csapat minden másikkal pontosan egyszer játszott. Ez azt jelenti, hogy a bajnokságot csak páros számú csapattal tudjuk megrendezni.
A rengeteg kérdésből, ami ezzel kapcsolatban felmerülhet, én kettőt szeretnék kiemelni, amire itt választ is adhatunk. Hány csapat tud egy ilyen jellegű bajnokságon részt venni? Hogyan tudom esetleg ezt a számot bővíteni, vagy csökkenteni?
2 és 4 csapat esetén lényegében egyféleképpen tudjuk lebonyolítani, de 6 csapattal már könnyen el lehet rontani a szervezést. Feltehető, hogy $2n$ darab csapat vesz részt, ekkor a csapatokat fel tudjuk rajzolni egy K_{2n} teljes gráf csúcsaiként. Tetszőleges két csúcs közti élt pedig a két csúcs által jelölt csapatok mérkőzésének feleltetem meg. Ekkor az egyes fordulókban lévő mérkőzések megfeleltethetőek a teljes gráf egy-egy faktorának, mivel minden csúcs pontosan egy élen van rajta. A bajnokság teljes menetrendje felrajzolható K_{2n} 1-faktorizációjával.
De hogyan kaphatjuk meg K_{2n} 1-faktorizációját?
Tekintsük valamely páros q-ra a $\mathrm{PG}(2, q)$ Galois-síkot. Ha $q = 2n-2$, akkor létezik a síkon $\mathcal{H} = \{P_1, P_2, \ldots, P_{2n}\}$ hiperovális. Legyenek $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}$ a K_{2n} gráf csúcsai. Legyen e egy külső egyenese $\mathcal{H}$-nak és legyenek $L_1, L_2, \ldots, L_{2n-1}$ az e egyenes pontjai. Ezek az L_i pontok lesznek az egyes fordulói a bajnokságnak. Minden egyes L_i ponthoz hozzárendelünk egy 1-faktort a következő képpen: L_i ponthoz tartozó faktorban benne van egy P_kP_j él akkor és csak akkor, ha L_i, P_k és P_j pontok kollineárisak.



Az így készített fordulók mindegyike valóban 1-faktor, hiszen P_i a sík összes pontjával össze van kötve, illetve a P_i-n átmenő egyenesek mindig pontosan két pontban metszik $\mathcal{H}$-t. A fordulók pedig valóban kiadják K_{2n} 1-faktorizációját, mert minden szelő, amely $\mathcal{H}$-t metszi két pontban, az pontosan egy pontban metszi az e egyenest. Ez azt jelenti, hogy minden egyes párosítás pontosan 1-faktorban van benne. Azaz teljesítettük azt a feltételt, hogy minden csapat minden másikkal játszik és egy fordulóban egyszer lép pályára.

Ezzel a modellel olyan bajnokságokat tudunk szervezni, ahol a csapatok létszáma felírható egy kettő hatvány plusz kettő alakban, azaz $2n = 2^m + 2$, hiszen $GF(q)$ elemszáma mindig prímhatvány.

Természetesen ilyen jellegű bajnokságokat nem csak ennyire kötött szigorú szabályok mellett lehet szervezni, de egy kis trükkel fel tudjuk használni a módszert továbbra is. Például eggyel kevesebb csapat esetén létrehozunk egy plusz csapatot, ezzel ismét páros számú pontunk van. Minden fordulóban az a csapat, akik a fantom csapattal lettek összepárosítva, pihenő kört tartanak.

A témakörről bővebben *Dávid Péter szakdolgozatában*[2] lehet olvasni.

3.4. Ívek és ovoidok magasabb dimenzióban

A harmadik fejezetben eddig megismert fogalmakat és tételeket, ha szeretnénk magasabb dimenzióra kiterjeszteni, két lehetőségünk van. Vagy megtartjuk szó szerint az eredeti definíciókat, vagy példuál három dimenzió esetén a „nincs három pontja egy egyenesen” feltételt kicseréljük arra, hogy „nincs négy pont egy síkon”. Így a süveg, illetve az ív fogalmához jutunk.

3.4.1. Definíció. (Süveg) *A* $\mathrm{PG}(n,q)$ *olyan ponthalmazát, amelynek nincs három egy egyenesen fekvő pontja, süvegnek nevezzük. A síkbeli esethez hasonlóan* k*-süvegről beszélünk, ha a ponthalmaz* k *pontú. A süveg teljes, ha nem része nagyobb süvegnek. A legnagyobb* $\mathrm{PG}(n,q)$*-beli süveg méretét* $m_2(n,q)$*-val, a második lenagyobb teljes süveg méretét* $m_2'(n,q)$*-val jelöljük.*

A síkbeli esethez hasonlóan az olyan egyenest, amely 2 pontban metszi a süveget, szelőnek, amely 1 pontban, azt érintőnek nevezzük.
Vegyük észre, hogy a süveg metszete altérrel altérbeli süveg (speciálisan süveg és sík metszete síkbeli ív). Ez azt jelenti, hogy $n+1$ dimenzióban a legnagyobb süveg legfeljebb $(q+1)$-szer akkora lehet, mint a legnagyobb süveg n dimenzióban. Ezt a triviális megjegyzést fogjuk pontosítani később, de előtte még szükségünk lesz a következő definíciókra:

3.4.2. Definíció. *Legyen*

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}x_ix_j$$

kvadratikus alak. A $\mathrm{PG}(n,q)$ *térben azon pontok halmazát, melyek koordinátái kielégítik a* $Q(x)=0$ *egyenletet, a* Q*-hoz tartozó másodrendű varietásnak nevezzük.*

Egy varietás *szinguláris*, ha a koordináta-rendszer változtatásával elérhető, hogy a hozzá tartozó alak eggyel kevesebb változót tartalmazzon. Ha ez nem tehető meg, akkor a varietás *nemszinguláris*.

3.4.3. Definíció. *Nemszinguláris másodrendű varietáshoz tartozó kvadratikus alak a* $\mathrm{PG}(n,q)$ *térben az alábbi kanonikus alakok egyikére hozható:*

- *Ha* n *páros, akkor* $Q_n(x) = x_1^2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_{n+1}$.

- *Ha n páratlan, akkor vagy*

  1. $Q_n(x) = x_1x_2 + x_3x_4 + \ldots + x_nx_{n+1}$, *ezt hiperbolikus kvádrikának nevezzük, vagy*
  2. $Q_n(x) = f(x_1, x_2)+x_3x_4+\ldots+x_nx_{n+1}$, *ahol f irreducibilis homogén másodfokú polinom, elliptikus kvádrikának nevezzük.*

3.4.4. Állítás.

1. PG$(3, q)$ *minden elliptikus kvádrikára $q^2 + 1$ pont illeszkedik.*
2. PG$(3, q)$ *minden hiperbolikus kvádrikára $(q + 1)^2$ pont illeszkedik.*

Most már tovább tudjuk vizsgálni a süvegek tulajdonságait először páratlan q-ra nézve.

3.4.5. Állítás. *Ha q páratlan, akkor* PG$(3, q)$ *egy süvege legfeljebb $q^2 + 1$ pontú, azaz*

$$m_2(3, q) = q^2 + 1$$

Bizonyítás. Tekintsünk egy K süveget PG$(3, q)$-ban, valamint legyen A és B a süveg két pontja. Mivel egy páratlan rendű síkbeli ív legfeljebb $q+1$ pontú, minden A, B-n átmenő síkban legfeljebb $q-1$ további pont van. Az A és B pontokat összekötő egyenesre $q+1$ sík illeszkedik, ezt **2.4.3** tétel felhasználásával ellenőrizhetjük. Így a $q + 1$ sík mindegyikére a süvegnek legfeljebb $q - 1$ további pontja illeszkedik, az A és B pontokkal ez a süveg pontjainak maximális számára valóban

$$(q + 1)(q - 1) + 2 = q^2 + 1.$$

Az elliptikus kvádrikák esetén ez egyenlőséggel teljesül a **3.4.4** állítás következtébben.

■

3.4.6. Definíció. PG$(3, q)$*-ban a $q^2 + 1$ pontú süvegeket ovoidoknak nevezzük.*

Azaz páratlan rendű test feletti projektív térben az ovoidoknál több pontból álló süvegek nem léteznek. Az ovoidok definíciója tehát az elliptikus kvádrikák egy fontos kombinatorikus tulajdonságát általánosítja.

3.4.7. Állítás. *Legyen q páratlan.* $\mathrm{PG}(3,q)$*-beli ovoid minden pontján át pontosan egy érintősík megy. Minden sík metszi az ovoidot.*

Bizonyítás. **3.4.5** bizonyítása alapján minden sík, amely legalább két pontban metszi $\mathcal{O}$ ovoidot, az pontosan $q+1$ pontban metszi $\mathcal{O}$-t. Vegyünk egy t érintő egyeneset, ilyen $\mathcal{O}$ minden pontján $(q^2+q+1)-(q^2+1-1)=q+1$ megy át, és tekintsük a t-n átmenő síkokat. Ezek mindegyike 1, vagy $q+1$ pontban metszi $\mathcal{O}$-t. Mivel az érintési pontot nem számítva q^2 pontja van $\mathcal{O}$-nak, ez csak úgy lehet, hogy pontosan q tartalmaz q további pontot. A fennmaradó sík az érintősík. Megszámolva az $\mathcal{O}$-t metsző síkokat, q^2+1 érintősík van, a metsző síkok száma pedig $\binom{q^2+1}{3}/\binom{q+1}{3}=q(q^2+1)$. Ehhez q^2+1-et adva épp $\mathrm{PG}(3,q)$ síkjainak számát kapjuk.

■

3.4.8. Tétel. (Barlotti, Panella) *Páratlan q-ra* $\mathrm{PG}(3,q)$ *minden ovoidja elliptikus kvádrika.*

Páros q esetén már nehezebb dolgunk van. Nem tudjuk az előző **3.4.8** tételt páros rendű projektív terekre általánosítani, ugyanis ismert egy példa páros rendű test feletti projektív térben olyan ovoidra, amely nem elliptikus másodrendű felület:

3.4.9. Tétel. (Suzuki, Tits) *Legyen $q=2^h$, h páratlan, $\sigma=2^s$ az a testautomorfizmusa* $\mathrm{GF}(q)$*-nak, amelyre $s=(h+1)/2$, azaz $x\mapsto x^\sigma$ négyzete a négyzetreemelés. Az*

$$\mathcal{S}=\{(t^\sigma+st+s^{\sigma+2},1,s,t):s,t\in\mathrm{GF}(q)\}\cup\{(1,0,0,0)\}$$

ponthalmaz ovoid.

$\mathrm{PG}(3,q)$-ban az a sejtés, hogy kétféle ovoid létezik. A **3.4.4** és **3.4.8** tételek szerint páratlan q esetén az ovoidok pontosan az elliptikus kvádrikák. Páros q esetén az egyetlen ettől eltérő ismert konstrukció a **3.4.9** tételben ismertetett Suzuki–Tits-ovoid.

3.4.10. Definíció. $\mathrm{PG}(n,q)$ *olyan legalább $n+1$ pontú ponthalazát, amelynek nincs $n+1$ pontja egy hipersíkban, ívnek nevezzük.*

3.4.11. Definíció. *A q elemű véges test fölötti n-dimenziós projektív térben momentumgörbének nevezzük a*

$$C_{n,q} = \{(1, t, t^2, \ldots, t^n) : t \in \mathrm{GF}(q)\} \cup \{(0, 0, \ldots, 0, 1)\}$$

ponthalmazzal projektíve ekvivalens halmazt.

3.4.12. Állítás. *A $C_{n,q}$ momentumgörbe egy $(q+1)$-ív, ha $q \geq n$.*

Bizonyítás. Azt kell belátnom, hogy a momentumgörbe bármely $n+1$ pontja lineárisan független. Ez pontosan akkor teljesül, ha a determinánsuk nem nulla.
Két esetem van, ha a vizsgált $n+1$ pont nem tartalmazza a $(0, 0, \ldots, 0, 1)$ pontot, akkor a determináns így néz ki:

$$\begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \ldots & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \ldots & t_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_{n+1} & t_{n+1}^2 & \ldots & t_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

Ellenkező esetben, ha a vizsgált $n+1$ pont tartalmazza a $(0, 0, \ldots, 0, 1)$ pontot, akkor a determináns ilyen alakú:

$$\begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \ldots & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \ldots & t_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \ldots & t_n^n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Mindkét eset lényegében egy Vandermonde-determinánst ad, melyet olyan szorzattá tudunk alakítani amelynek egyik tényezője sem nulla.

A **Vandermonde-determináns** alakja:
Legyen $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ tetszőleges

$$V(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \ldots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_i - x_j)$$

Speciálisan $V(x_1, \dots, x_{n+1}) \neq 0$, ha $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ különbözőek.

Az első esetben ez már eleve egy Vandermonde-determináns, ahol az eredmény biztosan nem nulla.
A második esetben ha kifejtem a $(0, 0, \dots, 0, 1)$ sor szerint a determinánst, akkor egy eggyel kisebb rendű Vandermonde-determinást kapok, ami megintcsak nem lehet nulla:

$$(\pm 1) \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

■

A következő tételek megmutatják, hogy a momentumgörbék egy jó konstrukció a teljes ívekre alacsony dimenziós Galois terekben:

3.4.13. Tétel. (Segre) PG$(3, q)$, *q páratlan, $(q + 1)$-ívei projektíve ekvivalensek a momentumgörbével, ha $q \geq 9$.*

3.4.14. Tétel. (Casse) PG$(3, q)$ *ívei legfeljebb $q + 1$ pontúak.*

3.4.15. Tétel. (Casse, Glynn) PG$(4, q)$*-ban, $q \geq 8$, a legnagyobb ív mérete $(q + 1)$, és minden $(q + 1)$-ív momentumgörbe.*

Ellenben 5 dimenzióban ezek már nem igazak.

4. fejezet

Általánosított sokszögek

Eddig főleg projektív terekkel és azon belül is Galois-terekkel foglalkoztunk, de az általánosított sokszögek fogalmát is a **2.1.1**-ben definiált illeszkedési geometriában vezetjük be. Az euklideszi síkon megsimert sokszögek is eleget tesznek az általánosított sokszögek definíciójának, így az általánosított sokszögeket valóban sokszögeknek nevezhetjük, de mutatunk rá más példát is.

4.0.1. Definíció. *Egy illeszkedési geometria rendje* (s, t), *ha minden egyenesre pontosan* $s + 1$ *pont, és minden pontra* $t + 1$ *egyenes illeszkedik.*

4.0.2. Definíció. *Tetszőleges* $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{I})$ *illeszkedési geometriában az* $x_0, x_1, x_2, \ldots x_h$ *sorozatot* h *hosszú láncnak nevezzük, ha minden* i *esetén* $c_i \in \mathcal{P} \cup \mathcal{E}$ *és* $x_i \mathcal{I} x_{i+1}$.

A továbbiakban feltesszük, hogy bármely $\mathcal{P} \cup \mathcal{E}$ elemei között létezik lánc.

4.0.3. Definíció. *Két elem távolsága* $d(x, y)$, *ahol* $x, y \in \mathcal{P} \cup \mathcal{E}$, *a legrövidebb lánc hossza, ami a két elemet összeköti.*

4.0.4. Definíció. *Legyen* $n > 1$ *pozitív egész szám. Az* $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{I})$ *hármast általánosított* n*-szögnek nevezzük, ha kielégíti a következő axiómákat.*

Gn1 $d(x, y) \leq n$ *minden* $x, y \in \mathcal{P} \cup \mathcal{E}$

Gn2 Ha $d(x, y) = h < n$, *akkor egyértelműen létezik* x*-et és* y*-t összekötő* h *hosszúságú lánc*

Gn3 Minden $x \in \mathcal{P} \cup \mathcal{E}$*-hoz létezik* $y \in \mathcal{P} \cup \mathcal{E}$ *úgy, hogy* $d(x, y) = n$

4.0.5. Definíció. *A **metrikus tér** egy olyan* (X, d) *rendezett pár, ahol* X *tetszőleges nemüres halmaz,* d *pedig* X*-beli metrika.* $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_0^+$, *melyre* $x, y, z \in X$ *esetén az alábbiak teljesülnek:*

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(egyenlőségi tulajdonság);*

2. $d(x, y) = d(y, x)$ *(szimmetria);*

3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(háromszög-egyenlőtlenség);*

4.0.6. Definíció. *Legyen* (X, d) *metrikus tér. Egy* $\emptyset \neq H \subset X$ *halmaz átmérője:* $\mathrm{diam}(H) = \sup\{d(x, y)\colon x, y \in H\}$

Ha H véges, akkor a fenti szuprémum helyett használhatunk maximum függvényt.

4.0.7. Példa. $G = (V(G); E(G))$ *összefüggő, irányítatlan, véges egyszerű gráf esetén könnyen láthatóan* $(V(G), d)$ *metrikus tér, ahol* $d(u, v) =$ *a legrövidebb* $u - v$ *út hossza.*

4.0.8. Példa. *A **4.0.3**-ban bevezetett* d *távolságfüggvénnyel* $(\mathcal{P} \cup \mathcal{E}, d)$ *egy metrikus tér. Ez valójában az előző példa egy speciális esete, ahol a* G *gráf minden csúcsa egy pontnak vagy egy egyenesnek felel meg, élei pedig a pontok és egyenesek közötti illeszkedésnek, azaz* $V(G) = \mathcal{P} \cup \mathcal{E}$, *és* $x, y \in V(G)$ *csúcsok esetén* $(x, y) \in E(G)$ *pontosan akkor, ha* $x\mathcal{I}y$.

4.0.9. Definíció. (Girth) *A gráfelméletben akkor mondjuk, hogy egy gráf girth-e* k*, ha a gráfban található legrövidebb kör* k *hosszú. Ha nincs kör, akkor* k*-t végtelennek definiáljuk.*

Visszatérve az általánosított sokszögekhez, nézzünk meg néhány alapvető megfigyelést:

- Gráfelméleti szempontból: Az általánosított n-szög egy összefüggő páros gráf a **4.0.8**-ban említett konstrukció szerint. Az ilyen gráfok átmérője n, girth-e $2n$.

- A legegyszerűbb példák: sokszögek az euklideszi síkon

- Egy általánosított sokszög duálisa is általánosított sokszög

- Két pont vagy két egyenes közti távolság páros. Egyenes és pont közti távolság páratlan.

Ha $n = 2$, akkor bármely két pont kollineáris és bármely két egyenes metszi egymást, ezért az általánosított 2-szögek triviális struktúrák.

Ha $n = 3$, akkor:

- Bármely két különálló pont távolsága 2 és a rájuk illeszkedő egyenes egyedülálló (Gn2). A két pont kollineáris.
- Bármely két különálló egyenes távolsága 2, a két egyenes metszi egymást és ez a közös pont egyedi (Gn2).

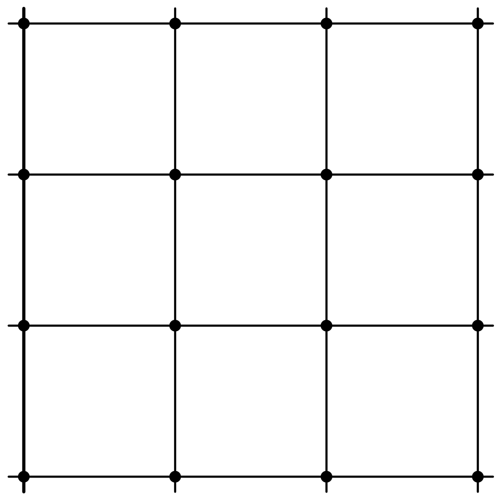
4.0.10. Definíció. (Vastag sokszögek) *Egy általánosított n-szöget vastagnak nevezünk, ha minden egyenesére legalább 3 pont, és minden pontjára legalább 3 egyenes illeszkedik.*

Ha visszanézzük a projektív sík definícióját (**2.1.2**), akkor láthatjuk, hogy az nem más mint egy vastag általánosított háromszög.

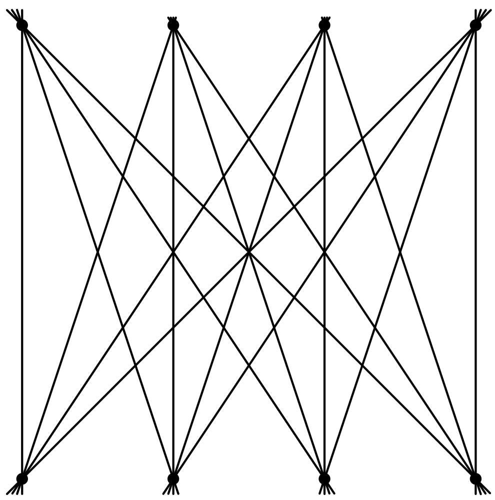
Ha $n = 4$, és felhasználva (**4.0.1**)-ben definiált s, t számokat:

- Bármely pontra $t + 1$ egyenes illeszkedik
- Bármely egyenesen $s + 1$ pont van
- Egyértelműen létezik adott ponton átmenő, a pontra nem illeszkedő egyenest metsző egyenes

4.0.11. Példa. *Tekintsünk a klasszikus euklideszi síkon egy derékszögű koordinátarendszert, valamint rögzítsünk egy s pozitív egész számot. A pontok legyenek azon* (x, y) *rácspontok, amelyek koordinátáira* $0 \leq x, y \leq s$ *teljesül, az egyenesek pedig legyenek az* $x = c$ *és* $y = d$ *egyenletű egyenesek, ahol* $0 \leq c, d \leq s$. *Az illeszkedés legyen az euklideszi síkbeli illeszkedés.*



4.0.12. Példa. *Legyenek a pontok a $K_{t+1,t+1}$ teljes páros gráf csúcsai, az egyenesek pedig a gráf élei. Egy pont akkor illeszkedjen egy egyenesre, ha a gráf megfelelő csúcsát tartalmazza a megfelelő él.*



$K_{4,4}$

A **4.0.11**-es példa általánosított négyszögének rendje $(s, 1)$, a **4.0.12**-esé $(1, t)$. Könnyen belátható, hogy ha egy általánosított négyszög valamelyik paramétere 1, akkor az izomorf e két példa egyikével. Ha $s = t$, akkor a két példa egymás duálisai.

Az általánosított négyszögek rendje nem lehet tetszőleges. Adott rendű általánosított négyszögek létezésének kérdése már kis rendek esetén is nyitott probléma. Az összes eddig ismert általánosított négyszög rendje a következők egyike:

- $(s, 1)$ ahol $s \geq 1$;
- $(1, t)$ ahol $t \geq 1$;
- (q, q) ahol q prímhatvány;
- (q, q^2), (q^2, q) ahol q prímhatvány;
- (q^2, q^3), (q^3, q^2) ahol q prímhatvány;
- $(q-1, q+1)$, $(q+1, q-1)$ ahol q prímhatvány.

4.0.13. Tétel. *Véges vastag általánosított n-szög esetén minden egyenes ugyan annyi ponttal és minden pont ugyan annyi egyenessel áll relációban. Ha n páratlan, akkor ez a két szám megegyezik.*

Bizonyítás.
Legyen $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{I})$ egy véges vastag n-szög, és legyen minden $x \in (\mathcal{P} \cup \mathcal{E})$-re:

$$N(x) = \{y : y \in (\mathcal{P} \cup \mathcal{E}), d(x, y) = 1\}$$

x szomszédos elemeinek halmaza.
Először megmutatjuk, hogy $|N(x)| = |N(y)|$, ha $d(x, y) = n$, azaz x és y szomszédos elemeinek száma megegyezik, ha a távolságuk n.
Legyen $N(x) = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ és $N(y) = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$. Ekkor $d(x, y_i) < n$, mert a paritása különbözik $d(x, y)$ paritásától. Ugyanakkor $d(x, y_i) \geq n-1$, mert a **4.0.5**-ben ismertetett háromszög egyenlőtlenség miatt $d(x, y) \leq d(x, y_i) + d(y_i, y) = d(x, y_i) + 1$. Ezért $d(x, y_i) = n-1$ minden $i = 1, 2, \ldots, m$-re. Ennélfogva minden i-r létezik egy x-et és y_i-t összekötő, $n-1$ hosszú egyedi $\mathcal{C}_i : x\mathcal{I}x_{i_1}\mathcal{I} \ldots \mathcal{I}y_i$ lánc.

Azt állítjuk, hogy ha $i \neq j$, akkor $\mathcal{C}_i$-nek és $\mathcal{C}_j$-nek összesen egy közös eleme van, ami az x. Tegyük fel ennek az ellenkezőjét, hogy létezik egy másik közös z elem is, ami a két láncban a felsorolásban az utolsó közös elem. Ekkor $d(z, y_i) \leq n-2$ és $d(z, y_j) \leq n-2$, amiatt, mert a z egyaránt egy belső eleme a C_i és C_j $n-1$ hosszú láncoknak. Ebből az következik, hogy $z\mathcal{I}\dots\mathcal{I}y_i\mathcal{I}y\mathcal{I}y_j\mathcal{I}\dots\mathcal{I}z$ illeszkedési lánc egy jó k-szög, ahol $k \leq n-1$. De ekkor lenne 2 különböző z-t és y-t összekötő k hosszú lánc az n szögben, ami ellentmond $Gn2$-nek.

Mivel $i \neq j$, amiből következik, hogy $x_{i_1} \neq x_{j_1}$, ezért $|N(x)| \geq |N(y)|$.

Ugyan ezzel a módszerrel be tudjuk bizonyítani a másik irányt is, hogy $|N(x)| \leq |N(y)|$. Ebből következik $|N(x)| = |N(y)|$.

Eddig megmutattuk, hogy egymástól n távolságra lévő elem esetén az állítás teljesül, most megnézzük mi van akkor, ha ez a távolság kisebb, mint n.

Legyenek P_1 és P_2 tetszőleges pontok. Ha a távolságuk n, akkor az állítást már beláttuk. Tegyük fel, hogy $d(P_1, P_2) = 2r < n$, és legyen

$$P_1\mathcal{I}z_1\dots\mathcal{I}z_{r-1}\mathcal{I}z_r\mathcal{I}z_{r+1}\mathcal{I}\dots\mathcal{I}z_{2r-1}\mathcal{I}P_2$$

a két pontot összekötő $2r$ hosszú egyedi lánc. $\mathcal{S}$ vastagságából adódik, hogy létezik egy $w\mathcal{I}z_r$ illeszkedés, oly módon, hogy $z_{r-1} \neq w \neq z_{r+1}$. $\mathcal{S}$ vastagságából adódik az is, hogy van egy $z_r\mathcal{I}w\mathcal{I}\dots v$ lánc, ahol $d(z_r, v) = n - r$. Ez azt jelenti, hogy

$$P_1\mathcal{I}z_1\dots\mathcal{I}z_{r-1}\mathcal{I}z_r\mathcal{I}w\mathcal{I}\dots v$$

és

$$v\mathcal{I}\dots w\mathcal{I}z_r\mathcal{I}z_{r+1}\mathcal{I}\dots\mathcal{I}z_{2r-1}\mathcal{I}P_2$$

n hosszúságú láncok, melyek összekötik P_1-et és v-t, valamint P_2-t és v-t. Mivel $d(P_1, v) = d(P_2, v) = n$, mert ha lenne egy $h < n$ hosszúságú lánc P_i és v között, akkor $\mathcal{S}$ tartalmazna egy jó $(h+n)/2$-szöget, ami ellentmond **4.0.4**-es definíció Gn2-es axiómájának. Ezért $|N(P_1)| = |N(v)| = |N(P_2)|$.

Hasonló módon be tudjuk bizonyítani, hogy bármely két egyenes szomszédainak elemszáma is ugyan annyi.

Végül, ha n páratlan, akkor vegyük P pont és l egyenes távolságát $d(P, l) = n$. Így $|N(P)| = |N(l)|$, ami bizonyítja a tétel második felét.

$\blacksquare$

A következő tétel mutatja, hogy csak kevés n esetén beszélhetünk vastag n-szögekről.

4.0.14. Tétel. (Feit, Higman) *Véges vastag általánosított n-szögek akkor és csak akkor léteznek, ha $n = \{2, 3, 4, 6, 8\}$.*

Irodalomjegyzék

[1] Csapláros Dóra, *Véges geometriák és a SET játék*, BSc szakdolgozat, 2015 (https://web.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/bsc_mat/2015/csaplaros_dora.pdf)

[2] Dávid Péter, *Focibajnokságok és véges geometriák*, BSc szakdolgozat, 2012 (https://web.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/bsc_matelem/2012/david_peter.pdf)

[3] Kiss György–Szőnyi Tamás, *Véges Geometriák*, Polygon, 2001

[4] Rajta László, *Véges projektív síkok egy kártyajáték szemszögéből*, BSc szakdolgozat, 2018 (https://web.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/bsc_alkmat/2018/rajta_laszlo.pdf)

[5] Szilasi Zoltán, *Bevezetés a véges geometriába*, Egyetemi jegyzet, (http://riemann.math.unideb.hu/~szzoltan/veges.pdf)