EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

AZ EULER-FÉLE POLIÉDERTÉTEL

Szakdolgozat

Gábriel Anna Vera

Matematika BSc

Matematikai elemző szakirány

Témavezető:

Moussong Gábor

egyetemi adjunktus

Geometriai tanszék

Budapest

2021

N Y I L A T K O Z A T

Név: Gábriel Anna Vera

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

NEPTUN azonosító: UMN80S

Szakdolgozat címe: Az Euler-féle poliédertétel

A szakdolgozat szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2021.05.15.

GAV

____

a hallgató aláírása

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Először is szeretném köszönettel illetni nagymamámat, aki talán a legnagyobb szerepet játszotta abban, hogy megszerettem a matematikát és szakomnak választottam. A sok közös, matekozással töltött perc nélkül ez a dolgozat nem készült volna el.

Köszönöm továbbá szüleimnek és testvéremnek, amiért tanulmányaim során mindig feltétel nélkül támogattak, folyamatosan ösztönözték munkámat, bíztattak céljaim elérésében. Köszönöm barátaimnak, hogy mindig mellettem álltak, lelkileg támogattak, illetve köszönöm szaktársaimnak, hogy végig lelkesítettük egymást, és segítettünk egymásnak a felmerülő kisebb-nagyobb problémák megoldásában.

Köszönet illeti témavezetőmet, Moussong Gábort, aki szakértelmével és fáradhatatlan munkájával hatalmas segítséget nyújtott dolgozatom elkészítésében.

Végül szeretném megköszönni az ELTE valamennyi oktatójának, akik tudásukkal és szakértelmükkel segítettek idáig eljutnom és hozzájárultak, hogy a diplomámhoz szükséges tudást elsajátítsam.

Tartalom

1. Bevezetés

Szakdolgozatom célja az Euler-féle poliéderformula bemutatása, valamint számos, a matematika különböző ágaiból származó bizonyítás ismertetése. Az Euler-féle poliéderformula a konvex vagy az egyszerű poliéderek, illetve még általánosabban a síkba rajzolható gráfok egy alaptulajdonságáról szóló egyenlőség, melyet elsőként Euler (1707-1783) sejtett meg, később pedig számos matematikus bizonyított be. Euler eredményeit egy, Christian Goldbachnak címzett levelében ismertette 1750-ben. Később két publikációja is megjelent, melyekben részletesebben számolt be felfedezéséről, illetve bizonyítani is megpróbálta azt. Vitatott tény azonban az, hogy Euler volt az első, aki rábukkant a formulára: Descartes (1595-1650) felismerései a háromdimenziós poliéderről lehetővé tették volna számára az általános formula megalkotását, azonban ezen utolsó lépés megtétele Eulerre maradt. Bár maga a formula viszonylag egyszerű, mégis a legtöbb poliéderekkel foglalkozó matematikus számára rejtve maradt, hiszen nem tekintettek úgy a poliéderekre, mint olyan struktúrákra, melyek csúcsok, élek és lapok együttesei. Ez a látásmód magának Eulernek sem volt meg, pedig mint a híres gráfelméleti probléma, a Königsbergi hidak megoldójának, kézenfekvőnek tűnhetne. Elsőként Cauchy (1789-1857) ismerte fel ezt a fontos összefüggést, miszerint a poliéderek helyett az ő élgráfjukat is vizsgálhatjuk, neki köszönhetjük a formula egyik legkorábbi, kombinatorikus bizonyítását. A konvex poliéderekre vonatkozó legkorábbi, matematikailag teljesen hiánytalan bizonyítás Legendre (1752-1833) nevéhez fűződik, aki egy nagyon okos és átlátható, metrikus megoldását adta meg a problémának. [1]

A szakdolgozatban jónéhány bizonyítást fogunk végignézni, ezek között vannak egyszerűbbek és bonyolultabbak is. Látni fogjuk, hogy a tétel mennyi, a matematika más-más ágához tartozó területtel áll kapcsolatban, milyen érdekes következtetéseket vonhatunk le egyik-másikat felhasználva a poliéderformulára és fordítva, illetve, hogy milyen érdekes matematikai jelenségek övezik magát az Euler-féle poliédertételt.

2. Konvex poliéderek

Mielőtt megvizsgáljuk részletesen mit is mond az Euler-féle formula, vizsgáljuk meg magukat a poliédereket részletesebben.

Magát a poliédert igen nehéz pontosan definiálni, a konvex poliéder fogalma azonban könnyebben megfogalmazható. Konvex poliédernek nevezzük véges sok, nem egy síkban fekvő pont konvex burkát a térben. A konvex poliéder csúcsai eközül a véges sok pont közül kerülnek ki (nem feltétlenül az összes), a poliéder élei a csúcsok közül bizonyos párokat összekötő egyenes szakaszok, míg a lapjai a csúcsok bizonyos részhalmazai által kifeszített konvex sokszögek. A poliéder határának ezen lapok egyesítése felel meg. Egy poliéder minden csúcsából legalább három él indul ki, azaz rá legalább három lap illeszkedik. Egy konvex poliéder minden élszöge és minden lapszöge konvex szög.

Fontos kiemelni a poliéderek néhány alapvető tulajdonságát:

1. egy élben pontosan két lap csatlakozik
2. élben csatlakozó lapokon végighaladva bármely lapról eljuthatunk bármely lapra
3. egymáshoz csatlakozó éleken végighaladva bármely csúcsból eljuthatunk bármely csúcsba
4. tetszőleges csatlakozó élekből álló egyszerű, zárt töröttvonal a poliédert két részre osztja

Néhány, a későbbiekben ismertetett bizonyítás csupán ezeket az alaptulajdonságokat használja fel, ennek következtében pedig általánosabb esetekre is alkalmazható a formula, például egyszerű poliéderekre, melyeket pontosan ezzel a négy tulajdonsággal definiálunk, illetve bizonyos síkgráfokra.

3. Az Euler-féle poliéderformula

Az Euler-féle poliédertétel a konvex poliéderek kombinatorikus tulajdonságaira vonatkozó tételek közül az egyik legismertebb. A tétel nem csak a konvex, de az egyszerű poliéderekre is teljesül.

Érdemes a következő jelöléseket bevezetnünk az egyszerűbb követhetőség érdekében:

- c: a poliéder csúcsainak száma
- e: a poliéder éleinek száma
- l: a poliéder lapjainak száma

Az Euler-féle poliédertétel: Legyen adott egy konvex poliéder, mely csúcsainak, éleinek és lapjainak száma rendre c, e és l. Ekkor a konvex poliéderre fennáll, hogy

$$c + l = e + 2$$

azaz a csúcsok és lapok számának összege pontosan kettővel több, mint az élek száma.

A tételnek magának számos fontos következménye is van, ezek közül ízelítőül nézzük meg a következőket (bizonyítás nélkül) [4]:

1. Minden konvex poliéder tartalmaz legalább egy három-, négy- vagy ötoldalú lapot.
2. Minden konvex poliéder tartalmaz legalább egy harmad-, negyed- vagy ötödfokú csúcsot.
3. Nincs olyan konvex poliéder, melynek 7 éle van.
4. Bármely konvex poliéderben a lapok átlagos oldalszáma kisebb, mint 6.
5. Bármely konvex poliéderben a csúcsok átlagos fokszáma kisebb, mint 6.
6. Bármely konvex poliéderben $\frac{1}{2} < \frac{l}{c} < 2$

4. Bizonyítások

4.1. Legendre bizonyítása

A következőkben bemutatott bizonyítás nagy jelentőségű, hiszen történetileg az első ismert bizonyítása a tételnek. A bizonyítás gömbi geometriát használ, így fontos pár alapfogalmat tisztázni a geometria ezen területéről.

Főkörnek nevezzük azokat a köröket egy gömbfelületen, melyek síkja tartalmazza a gömb középpontját. Gömbfelületen a szó hétköznapi értelmében nem találunk egyeneseket, ezek szerepét a gömb főkörei töltik be.

Girard-formula: Egy egységnyi sugarú gömbön az α, β, γ szögű gömbháromszög felszíne:

$$A = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

A Girard-formula általánosítása gömbi sokszögekre: Ha egy gömbi sokszög szögei α_1, $\alpha_2, \dots, \alpha_k$, akkor a felszíne

$$A = \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right) - (k-2)\cdot\pi$$

A fenti fogalmak tisztázása után rátérhetünk magára a bizonyításra. Konvex poliéderekre bizonyítjuk a formulát, a szokásos jelölésekkel. Válasszunk a poliéder belsejében egy O pontot, majd O-ból mint középpontból a poliéder élhálózatát vetítsük rá egy O körüli gömbfelületre (az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy ezen gömb sugara egységnyi). A vetítés eredményeképp feldaraboltuk a gömbfelületet gömbi sokszögekre, melyek oldalszámait jelölje $k_1, k_2, \dots, k_l$.

A fentebb kimondott Girard-formula értelmében az i-edik sokszög felszíne:

$$A = \text{szögösszeg} - (k_i - 2)\cdot\pi$$

Vegyük most ezeknek a felszíneknek az összegét. Az egyenlet bal oldalán a teljes gömbfelület jelenik meg (hiszen ezt daraboltuk fel gömbi sokszögekre), melynek felszíne egységnyi sugár esetén 4π. Ekkor

$$4\pi = \text{összes szög összege} - \left(\sum_{i=1}^{l} k_i\right)\cdot\pi + l\cdot 2\pi$$

Itt az utolsó tagban megjelenő l-es szorzó a sokszögek számát jelöli, ez a fenti, egy sokszög felszínét megadó képletben 1 volt. Az összes szög összege $c\cdot 2\pi$, ahol c a jelöli a poliéder csúcsainak számát, minden csúcs körül pedig a szögösszeg 2π. Továbbá tudjuk, hogy $\left(\sum_{i=1}^{l} k_i\right) = 2e$, hiszen k_i az i-edik sokszög oldalszámát jelöli, és minden oldal két sokszöghöz tartozik, azaz ezek összege az élek számának kétszeresét adja meg. Ezek ismeretében az egyenlet a következő alakra hozható:

$$4\pi = c\cdot 2\pi - e\cdot 2\pi + l\cdot 2\pi$$

Ezt 2π-vel osztva pedig megkapjuk a poliéderformulát:

$$2 = c - e + l$$

4.2. Kiegészítő szögek és támaszsíkok

Egy, szintén gömbi geometriára támaszkodó bizonyítással folytatjuk a bizonyítások áttekintését.

Tételezzük fel, hogy a látóterünkben adott a P poliéder egyik sarka, azaz az egyik csúcsának egy környezete, az ide befutó élek számát jelölje k. Állítsunk a csúcsba k darab egységvektort úgy, hogy ezek közül mindegyik valamelyik, ide befutó lapnak a kifelé mutató normálvektora legyen. Ha a csúcs köré felveszünk egy egységnyi sugarú gömböt, melynek az adott csúcs a középpontja, akkor ezek a normálvektorok egy konvex sokszöget határoznak meg a gömbön, melynek oldalszáma a csúcs fokszámával azonos.

Vizsgáljuk meg, mekkorák lesznek ennek a sokszögnek a szögei. Mivel minden él két laphoz tartozik, így minden élhez két normálvektor fog tartozni, az ezek által kifeszített síkban helyezkedik el a sokszög egyik oldala. Ha két lap β szöget zár be, akkor az ő kifelé mutató normálvektoraik $\alpha = 180° - \beta$ szöget fognak bezárni.

A fenti metódust követve a poliéder minden csúcsa köré előállíthatunk egy gömbi sokszöget. A bizonyítás befejezéséhez azt fontos észrevennünk, hogy ezeket a sokszögeket össze tudjuk „tologatni” olyan módon, hogy pontosan egy teljes gömbfelszínt töltsenek ki. Ehhez a támaszsíkok fogalmával kell megismerkednünk, támaszsík alatt értjük azokat a síkokat, melyek „rátámaszkodnak” a poliéderre, azaz olyan sík amelynek egyik félterében van a poliéder és van közös pontja a poliéderrel. Ez történhet egy pontban, de támaszkodhat egy sík egy poliéderre egy élen vagy akár egy lapon is. A fent definiált gömbi sokszög pontosan azoknak a támaszsíkoknak a kifelé mutató normálvektoraiból áll, melyek a poliéder kiválasztott csúcsára illeszkednek. Ekkor az O középpontú, egységnyi sugarú gömbfelületet felfoghatjuk O kezdőpontú egységvektorok összességének (a gömbfelület minden pontja egy egységvektor végpontja), az egységvektorok és a támaszsíkok között pedig bijektív megfeleltetés van, hiszen bármely adott egységvektorhoz egyértelműen található olyan támaszsík, amelynek ez a vektor a kifelé mutató normálvektora és bármely támaszsík legalább egy csúcsra illeszkedik.

Egy támaszsíkot a poliéder egy csúcsa körül „billegtetve” a hozzá rendelt vektorok a csúcs körüli egységnyi sugarú gömbfelületen pontosan azt a sokszöget futják be, amelyet a fent ismertetett módszerrel létrehoztunk.

Na de hogy lesz ebből poliéderformula? Adjuk össze a gömbi sokszögek felszínét. Ehhez a Legendre-féle bizonyításban ismertetett Girard formulát fogjuk használni:

$$A = \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \right) - (k-2) \cdot \pi$$

Az egységnyi sugarú gömb felszíne: 4π

A jobb oldalt a következő alakra hozhatjuk:

$$\sum_{\substack{\text{minden} \\ \text{csúcsra}}} \big((\text{gömbi sokszög szögeinek az összege}) - (\text{oldalak száma} - 2) \cdot \pi \big) =$$

$$\sum_{\substack{\text{minden} \\ \text{csúcsra}}} \left(\left((\text{csúcs foka}) \cdot \pi - \sum \text{csúcs körüli élszögek} \right) - (\text{csúcs foka} - 2) \cdot \pi \right) =$$

$$2e \cdot \pi - \left(\sum \text{a poliéder összes élszöge} \right) - 2e \cdot \pi + 2c \cdot \pi =$$

A poliéder összes élszögének összege:

$$\sum_{\text{minden lapra}} (\text{a lap oldalszáma} - 2) \cdot \pi = 2e \cdot \pi - 2l \cdot \pi$$

Ezt visszahelyettesítve a fenti egyenletbe:

$$4 \cdot \pi = 2e \cdot \pi - 2e \cdot \pi + 2l \cdot \pi - 2e \cdot \pi + 2c\,\pi = 2c \cdot \pi - 2e \cdot \pi + 2l \cdot \pi$$

Az egyenletet 2π-vel végigosztva pedig adódik a formula:

$$2 = c - e + l$$

4.3. Noé bárkája

A következő bizonyítás, mely Maxwelltől (1831-1879) származik, szemléletes módon közelíti meg a problémát, tulajdonképpen egy, az egész földet elárasztó özönvíz segítségével figyeli meg, hogy az egyes száraz földfelületek milyen ütemben kerülnek víz alá.

A poliédert mint égitestet képzeljük el. Első lépésben definiáljunk hozzá egy magasságfüggvényt az égitest gravitációs középpontjától, mint alapponttól a következőképpen:

- Minden csúcshoz rendeljünk egy tetszőleges, pozitív magasságot
- Minden élhez válasszuk ki az ő egyik belső, magán az élen elhelyezkedő pontját, ennél a pontnál az élt megtörve adjunk a pontnak egy magasságot, mely legyen nagyobb, mint az él két végpontjának a magassága. Ezután az élt lineárisan interpoláljuk ehhez a ponthoz, ezzel tulajdonképpen elérve azt, hogy az általunk választott belső pont van a legmagasabban, innen pedig a két végpont felé lineárisan csökken az él pontjainak magassága.
- Minden lapon válasszunk ki egy belső pontot és ehhez adjunk meg egy magasságot úgy, hogy az nagyobb legyen, mint az őt határoló élek maximális magassága. Ezután lineárisan interpoláljuk a lap pontjait ebből a pontból, azaz ez a belső pont lesz a legmagasabban, az élek irányába haladva pedig a lappontok magassága lineárisan csökken.

Miért volt fontos ezeket a magasságfüggvényeket megadni? Azt akartuk elérni a magasságok ilyen fajta definiálásával, hogy minden „lejtős" legyen, ne legyenek vízszintes felületek. Az így kialakult folytonos függvény kritikus pontjai a csúcsok (c darab), ezek a lokális minimumok, az élek választott belső pontjai (e darab), ezek a nyeregpontok, illetve a lapok választott belső pontjai (l darab), ezek a lokális maximumok.

Most már rátérhetünk magára a bizonyításra. A kezdeti felületünk az égitest, melyet kiinduláskor teljesen száraznak tekintünk, ez fog az özönvíz után teljesen víz alá kerülni úgy, hogy még a legmagasabb hegycsúcs sem látszik ki. Magát a formulát úgy fogjuk megkapni, hogy összeszámoljuk a vízfelületeket és az egybefüggő szárazföldeket, melyek keletkeztek, illetve eltűntek az özönvíz során. Kezdetben egyetlen száraz földfelületből indulunk, a végeredmény pedig egyetlen nagy vízfelület.

Nézzük meg akkor, hogyan keletkezhetnek, illetve tűnhetnek el földfelületek. Akkor következhetnek be ilyen változások, mikor a vízszint elér egy kritikus pontot, méghozzá a következőképpen:

- Minden lokális minimumban (c alkalommal), mikor őt eléri az árvíz, keletkezik egy vízfelület és megszűnik egy völgy.
- Egy nyeregpontban (e), mikor ő víz alá kerül, kétféle dolog történhet:
    - két különböző vízfelület összecsatlakozik, ekkor a két tóból egy lesz, azaz a vízfelületek száma csökken, a szárazföldek száma pedig nem változik. Ezen esetek számát jelölje J.

- egy korábban létrejött vízfelület saját magával összecsatlakozik, ezzel leválasztva egy földfelületet, azaz egy szigetet létrehozva. Ekkor a vízfelületek száma nem változik, azonban a szárazföldek száma nő. Ezen esetek számát jelölje D.

- Minden lokális maximumban (l), egy szárazfölddarab eltűnik.

A fentiek ismeretében a következő egyenlőségeket írhatjuk fel:

kezdeti állapot: $1 + D - l = 0$

özönvíz utáni állapot: $0 + c - J = 1$

Vagyis kezdetben adott volt 1 szárazföld és 0 vízfelület, a szárazföldek száma pedig az áradás során D szigettel nőtt és l hegycsúccsal csökkent. Az özönvíz utáni állapotban pedig előállt 0 szárazföld és 1 vízfelület, a vízfelületek száma c-vel nőtt a völgyek elárasztása során és J-vel csökkent mikor egy hágó (nyeregpont) elárasztásakor két tó egyesült.

Az első egyenletből kivonva a másodikat a következőt kapjuk:

$$1 + D - l - 0 - c + J = -1$$

Ide behelyettesítve $E = J + D$-t, hiszen a nyeregpontokat erre a két eseményre bontottuk, megkapjuk a poliéderformulát:

$$1 - l - 0 - c + e = -1$$
$$c - e + l = 2$$

4.4. Gátrobbantás

Hajós György Bevezetés a Geometriába című klasszikus tankönyvében, mely évtizedek óta tanárszakos hallgatók egyik alapkönyve, ismertette a következő bizonyítást, mely a Noé bárkájához hasonlóan nagyon szemléletes módon közelíti meg a problémát, a poliédert egy égitestként értelmezve, melyet gátak medencékre osztanak, s a gátrendszer minden elágazásában őrtornyok találhatók.

Kezdetben az égitesten e gát, l medence és c őrtorony található. Egy medencét feltöltünk vízzel, majd egyesével felrobbantjuk az égitesten található gátakat, mindaddig, míg minden medence vízzel telített nem lesz (ha egy üres és egy vízzel teli medence közötti gát felrobban, a víz átfolyik és feltölti az üres medencét is). Célunkat a lehető legkevesebb robbantással szeretnénk elérni, azaz olyan gátat nem fogunk felrobbantani, ami két olyan medencét választ el, melyek már eleve vízzel teliek, mint ahogy olyan gátat sem, mely két száraz medence között fut.

Nézzük meg, hogy hogyan változik a robbantások során a felrobbantott és az ép gátak száma:

1. Minden robbantás során egy medence kerül víz alá. Mivel összesen l darab medence van, és kezdetben egy volt vízzel teli, így összesen $l-1$ gátat kell felrobbantanunk, hogy az égitest összes medencéje víz alá kerüljön.

Mostantól feltételezzük azt, hogy a robbantássorozat végére értünk, és az összes medence víz alá került.

2. Vizsgáljuk most meg az épen maradt gátakat. A konvex poliéderek harmadik alaptulajdonsága alapján tudjuk, hogy kezdetben gátak sorozatán végighaladva bármely őrtoronyból eljuthatunk bármelyik másik őrtoronyba. Nézzük meg, változik-e ez a tulajdonság a robbantások miatt. Amikor felrobbantunk egy gátat, annak az egyik oldalán száraz, a másikon pedig vízzel teli medence volt. Tudjuk, hogy a száraz medence körül minden gát ép volt a robbantás előtt, hiszen máskülönben már vízzel teli kellett volna, hogy legyen. Azaz a felrobbantott gát két végpontja között vezet egy út a medencét határoló többi él mentén, tehát a robbantás után is igaz marad, hogy bármely két őrtorony között vezet út, csak esetleg több gáton kell végighaladnunk.
3. Következő lépésként vegyük észre, hogy a robbantások befejeztével egyik őrtoronyból a másikba csakis egy úton tudunk eljutni. Bizonyítsuk ezen állításunkat indirekt módon, vagyis feltételezzük, hogy két őrtorony között két út is vezet. Ekkor a két út egymást körsétává egészíti ki, ami azonban a poliéderek negyedik alaptulajdonsága alapján az égitestet (poliédert) két részre osztania, azaz a medencék egy részét elválasztja a másik részétől. Ekkor csak az egyik rész lehet vízzel telített, vagyis még nem értük el, hogy minden medence víz alatt legyen, nem érhettünk a robbantás sorozat végére, vagyis hibás volt az eredeti felvetés, ellentmondásra jutottunk, az állítást pedig ezzel beláttuk.
4. Tegyük fel, hogy minden őrtoronyban egy őr tartózkodik, az egyikben pedig maga a parancsnok, aki jelt ad, ezzel tudatva az őrökkel, hogy magához hívatja őket. Minden őr el is indul az őrtornyából, kilép az egyetlen gátra, melyen elindulva a parancsnok felé vezet az útja, majd egy újabb jelzés hallatára meg is áll.

a) Most vizsgáljunk meg egy választott gátat és a két végpontjában lévő két őrtoronyból induló őr mozgását. Tudjuk, hogy egyikük erre a köztes gátra kellett, hogy lépjen, míg a másik egy ettől különböző gát irányába indult. Ugyanis ha egyikőjük sem lép erre a gátra, akkor az ellentmond a 3. pontnak, az egyik őr két úton is eljuthatna a parancsnokhoz: a „saját" útján, vagy áthaladva a köztes gáton és követve a másik őr útját. Ha mindketten erre a gátra lépnek, ugyanez a helyzet, hiszen a gáton való áthaladás után bármelyikük visszafordulhat és követheti a másik őr útját. Tehát valóban egyikőjüknek a köztes gátra kellett lépnie, míg a másik őr másmerre indult.

5. Vizsgáljuk meg a parancsnoki őrtoronyhoz vezető gátakat. Ezeken csakis egy-egy őr állhat, hiszen csak az az őr léphetett rájuk, aki a gát másik végében lévő őrtoronyban tartózkodott, s neki nem is volt más választása, ez az egy összeköttetés létezett közte és a parancsnok között.
6. Ekkor minden ép gáton egy őr áll és minden őr egy (ép) gáton áll, azaz az őrök száma megegyezik a gátak számával, vagyis az ép gátak száma $c-1$ (a parancsnok nem mozdult).

Végezetül most számoljuk össze az ép és a felrobbantott gátakat, a kettő együtt megadja az összes gát számát, azaz e-t.

Az ép gátak száma: $c-1$

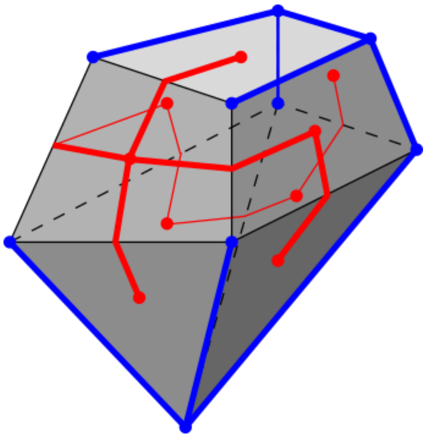
A felrobbantott gátak száma: $l-1$

Tehát $e=c-1+l-1$, ezt átrendezve pedig megkapjuk a tételt, azaz $c-e+l=2$.

4.5. Összefonódó fák

Tekintsük a P poliéder csúcsai és élei által meghatározott G gráfot. Legyen ebben F egy feszítőfa, azaz egy olyan összefüggő, körmentes részgráf, mely G összes csúcsát tartalmazza. Ekkor F-ről tudjuk. hogy c csúcsa és $c-1$ éle van, ahol c a G gráf csúcsainak száma.

Legyen F^* az F duális gráfja, melyet a következőképpen készítsünk el. F^* csúcsai a P poliéder lapjainak feleljenek meg, és F^*-ban azok között a csúcsok között fusson él, ahol az eredeti két lap szomszédos és az az él, mely mentén szomszédosak, nem tartozik F-hez.



Illusztráció IV. (forrás: Moussong Gábor – Geometria 1 diasor, 10. előadás)

Az F^* gráfról belátható, hogy ő maga is fa:

- Összefüggő, mert F körmentes (ahhoz, hogy ne legyen összefüggő, F-ben kéne, hogy legyen egy kör, mely egy tartományt, azaz egy F^*-beli csúcsot elszigetel)
- Körmentes, mert F összefüggő (ahhoz, hogy F^*-ban kör legyen, F-ben kéne, hogy legyen egy elszigetelt csúcs)

F^*-ban a csúcsok száma l (P poliéder lapjainak a száma), ekkor pedig, tekintve, hogy F^* fa, az éleinek száma $l-1$.

Tudjuk, hogy a P poliéder minden éléről elmondható, hogy vagy F-hez, vagy F^*-beli éllel összekötött két lapot választ el (P egy nem F-beli élét metszi). Mivel F-nek $c-1$, F^*-nak pedig $l-1$ éle van, így a P poliéderre a következőt írhatjuk fel:

$$e = (c-1) + (l-1)$$

amit átrendezve megkapjuk a poliéderformulát.

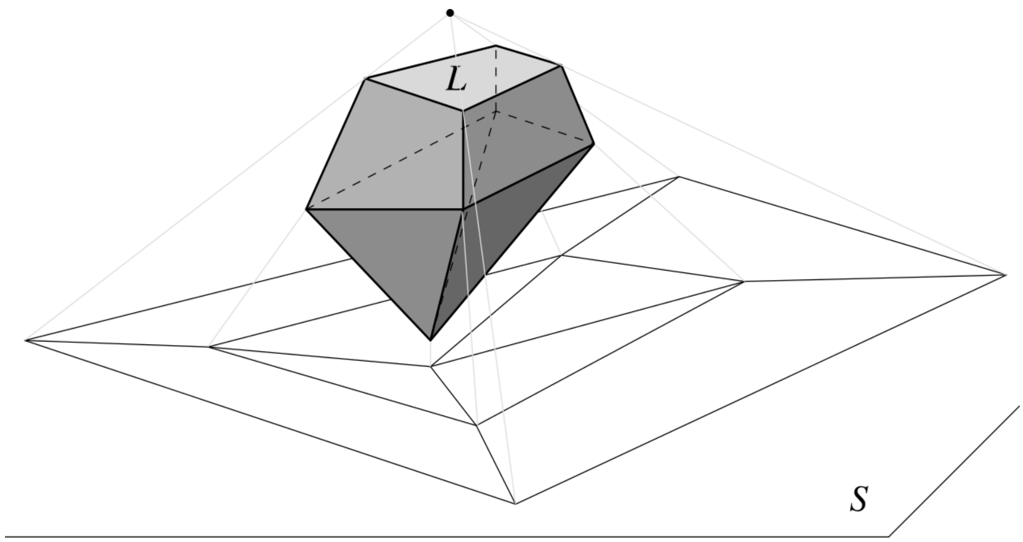
$$c - e + l = 2$$

Ez a bizonyítás tulajdonképpen a gátrobbantós bizonyítás megfelelője, ahol a gátak a poliéder éleinek, a medencék a poliéder lapjainak, az őrtornyok pedig a poliéder csúcsainak felelnek meg. A bizonyítás során a fel nem robbantott gátak képzik a feszítőfát, míg a vízzel telt medencék rendszere a duális fát, ezen felül megfigyelhetjük, hogy a 4.4-es bizonyítás 2. pontja a maradék gátrendszer összefüggőségét, a 3. pontja pedig a körmentességét bizonyítja, míg a 4., 5., 6. pontok arra mutatnak rá, hogy az csúcsok száma 1-gyel nagyobb az élek számánál.

4.6. Steiner bizonyítása

Továbbra is a geometriai bizonyítások között haladva a következő Steiner nevéhez fűződik, aki a poliédereknek azt a tulajdonságát használta ki, hogy azok megfeleltethetőek egy síkbeli gráfnak úgy, hogy minden élük egy egyenes szakasz.

Vegyünk egy P konvex poliédert és válasszuk ki ennek egy L lapját, vegyünk egy tetszőleges, L-lel párhuzamos, de őt nem tartalmazó S síkot, majd a tér egy alkalmas F pontjából mint vetítési középpontból vetítsük a poliéder összes lapját az S síkra.



Illusztráció I. (forrás: https://moussong.web.elte.hu/okt/jegyzet/bevg_vazlat.pdf)

Amennyiben F vetítési középpontot megfelelően választottuk meg, azaz úgy, hogy az L lap síkjának a külső oldalán, míg az L-től különböző lapok síkjának ugyanazon az oldalán legyen, mint amelyen maga a poliéder van, akkor a vetületként kapott alakzatról a következőket állapíthatjuk meg:

- P minden lapjának vetülete konvex sokszög a síkban
- L vetülete tartalmazza az összes többi lapnak a vetületét
- Az L-től különböző lapok vetülete átfedés nélkül kitöltik L vetületét

Mindezek után számoljuk össze a lapok vetületeként kapott sokszögek összes szögét. Ezt kétféleképpen tehetjük meg.

1. Tudjuk, hogy a vetületként kapott sokszög belsejében lévő csúcsok körül 2π a szögek összege (teljesszög). A sokszög széleinél levő szögek összege pedig L szögeinek összegének kétszeresével lesz egyenlő, hiszen ezeket egyrészt lefedi maga az L lap vetülete, másrészt lefedik az L vetületétet kitöltő sokszögek

megfelelő szögei. Jelölje L oldalainak számát k, ekkor a „szélső” szögek száma is k, a „belső” szögek száma pedig $c - k$ (ahol c a P poliéder csúcsainak száma). Ezek alapján keresett szögösszeg:

$$(c - k) \cdot 2\pi + 2 \cdot (k - 2) \cdot \pi = 2\pi \cdot c - 4\pi$$

mert $(k - 2) \cdot \pi$ az L lap vetületének szögösszege (a sokszög belső szögeinek összegére vonatkozó tételt felhasználva).

2. Most közelítsük meg a feladatot egy másik irányból, méghozzá úgy, hogy az egyes lapok vetületeként kapott sokszögek szögeit vizsgáljuk meg egyesével. Ezek összegeként ugyanúgy a $2\pi \cdot c - 4\pi$ értéket kell megkapnunk. Legyen egy tetszőleges lap oldalszáma m, ekkor az ismert képlet alapján ennek a lapnak a szögösszege $(m - 2) \cdot \pi$. Ha az így kapott értékeket az összes lapra összeadjuk, felhasználva azt, hogy a lapok oldalszámainak az összege éppen a P poliéder éleinek a kétszerese (hiszen egy élt két lap vetületének az esetében is számításba vettünk), a következőket kapjuk:

- egy lapon a szögek összege: $(m - 2) \cdot \pi = m\pi - 2\pi$
- a lapok oldalainak összege: $\sum m = 2e$
- minden lapra: $\sum m \cdot \pi - 2\pi = 2e \cdot \pi - l \cdot 2\pi = (2e - 2l) \cdot \pi$

A levonandó 2π értéket minden lap esetében le kell vonnunk, ezért jelent meg az l szorzó.

Mindezek után az 1. és a 2. pontban kapott értékeket egyenlővé téve és mindkét oldalt 2π-vel osztva megkapjuk a poliéderformulát, azaz a tételt bebizonyítottuk:

$$2\pi \cdot c - 4\pi = 2\pi \cdot e - 2\pi \cdot l$$
$$c - e + l = 2$$

4.7. A Pick-tételen alapuló bizonyítás

A poliéderformula következő bizonyítása, mely Pick tételén alapul, rácsgeometriai megközelítést használ.

Mielőtt magára a bizonyításra rátérnénk, pár alapfogalmat elevenítsünk fel. Ebben a szakaszban sokszögön mindig egyszerű sokszöget értünk, azaz megköveteljük, hogy a sokszöget egy összefüggő, önmagát nem metsző zárt töröttvonal határolja. Rácsnak nevezzük az egész koordinátájú pontok rendszerét az $\mathbb{R}^2$ síkon. Rácssokszögeknek nevezzük azokat a sokszögeket, melyeknek minden csúcsa rácspont. Egy rácssokszöget üresnek nevezünk, ha a csúcsain kívül nem tartalmaz rácspontot.

Lemma: Minden üres rácsháromszög területe $\frac{1}{2}$.

Bizonyítás: Legyen adott egy tetszőleges üres rácsháromszög, ezt rácsparalelogrammává egészítjük, melynek területe nyilvánvalóan kétszerese lesz a rácsháromszög területének. A fenti lemma bizonyításához elég belátnunk tehát, hogy ezen üres rácsparalelogramma területe 1. Ehhez vegyük két vektort, $\vec{a} = (a_1, a_2)$ és $\vec{b} = (b_1, b_2)$ vektorokat, ezekről tegyük fel, hogy egy üres rácsparalelogrammát feszítenek ki, ezt jelölje *P*. Ekkor *P* a csúcsain kívül nem tartalmaz egyéb rácspontot.

P területe ekkor (vektoriális szorzattal kiszámolva) $T = \left| det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \right|$, hiszen két vektor vektoriális szorzatának abszolút értéke a két vektor által kifeszített paralelogramma területének mérőszámával egyenlő.

A *P* paralelogramma eltolt példányaiból létrehozhatjuk az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ által generált paralelogrammarácsot. Azt állítjuk, hogy ezen paralelogrammarács csúcspontjai között a sík összes rácspontja elő fog fordulni. Ezt indirekt módon könnyen beláthatjuk, ugyanis ha feltételeznénk, hogy létezik olyan rácspont, ami nem a paralelogrammarács egyik csúcspontja, azaz valamelyik paralelogramma belsejében vagy oldalán található, akkor azt a paralelogrammát *P*-be visszatolva kapnánk egy *P*-beli kimaradó rácspontot, ez azonban nem lehetséges, hiszen *P*-ről feltettük, hogy üres.

Ekkor tehát a sík minden rácspontja megtalálható a paralelogrammarács csúcspontjai között, azaz a (0,1) és az (1,0) is, vagyis tudjuk, hogy ezek a rácspontok előállnak $\vec{a}$ és $\vec{b}$ egész együtthatós lineáris kombinációjaként. Legyenek ezek az egészek *k, l, m* és *n*, ekkor pedig $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = k\vec{a} + l\vec{b}$ és $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

Ez azt jelenti, hogy $\begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, emiatt pedig $det \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} \cdot det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = 1$. Mivel a szorzat mindkét tényezőjéről tudjuk, hogy egész szám, így egyedül $det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \pm 1$ lehet, ezzel pedig a lemmát beláttuk.

Pick tétele: Bármely rácssokszög területe kiszámítható annak határán és belsejében elhelyezkedő rácspontok számának ismeretében, a következő formula alkalmazásával:

$$T = B + \frac{H}{2} - 1$$

ahol B a poligon belsejében lévő rácspontok számát, míg H a poligont határoló töröttvonalra illeszkedő rácspontok számát jelöli.

Bizonyítás (Pick tétele): A tételt két lépésben fogjuk bizonyítani a fenti lemma felhasználásával. Először belátjuk, hogy bármely rácsháromszögre teljesül, majd ezt kiterjesztjük tetszőleges rácssokszögre.

Kezdjük a rácsháromszögekkel, építsünk fel egy indukciót a háromszögben lévő rácspontok száma (melyet jelöljön r) szerint. Tudjuk, hogy r legkisebb értéke 3, ez pontosan az üres rácsháromszög esetének felel meg. Ilyenkor $B = 0$ és $H = 3$, tehát $T = \frac{1}{2}$, amit a lemma bizonyításánál már beláttunk.

Legyen most $r > 3$, és tegyük fel, hogy a formula egyenlősége fennáll minden r-nél kevesebb rácspontot tartalmazó háromszög esetén. Ha egy H rácsháromszögben r rácspont van, az azt jelenti, hogy van benne a csúcsoktól különböző rácspont is, ez kétféle módon lehetséges: vagy a háromszög egyik oldalán található rácspont, vagy a háromszög belsejében. Daraboljuk fel a háromszöget ezt a rácspontot használva kettő (ha az oldalán található) vagy három (ha a belsejében) kisebb háromszögre. Mindkét esetben ezekben már r-nél kevesebb rácspont található, azaz teljesül rájuk az indukciós feltevés.

A fenti érvelés helyességéhez szükséges feltétel ugyanis az, hogy ha két rácssokszöget, melyekről tudjuk, hogy teljesül rájuk a formula, összeragasztunk, akkor a formula továbbra is fennálljon. Legyen adott P_1 és P_2 egyszerű rácssokszög, valamint $P = P_1 \cup P_2$ úgy, hogy a két rácssokszög metszete egy él vagy csatlakozó élek egy sorozata. A bizonyításhoz először feltesszük, hogy a tétel állítása igaz P_1-re és P_2-re, majd ebből levezetjük, hogy P-re is teljesül. P_1 belső pontjainak számát jelölje B_1 valamint határpontjainak a számát H_1, hasonlóan P_2 belső pontjainak számát jelölje B_2, határpontjainak a számát pedig H_2, ezen felül közös határpontjaiknak száma legyen K.

Ekkor felírható a következő egyenlőség P területére:

$$\mathrm{T(P)} = \mathrm{T}(P_1) + \mathrm{T}(P_2) = \left(B_1 + \frac{H_1}{2} - 1\right) + \left(B_2 + \frac{H_2}{2} - 1\right)$$

Ezután nézzük meg hány belső és hány határpontja van magának P-nek. Neki belső pontja P_1 és P_2 minden belső pontja, valamint a közös élen vagy csatlakozó élek sorozatán lévő $K-2$ pont is, azaz $B = B_1 + B_2 + K - 2$. A határpontok vizsgálatakor $H = H_1 + H_2 - 2K + 2$-t kapunk, hiszen P-nek határpontja P_1 és P_2 minden határpontja, melyből a közös határpontok kivonandók (K pont mind a két poligon határpontjainál figyelembe vétetik, illetve a közös él vagy élsorozat két végpontját visszatesszük).

Ekkor a formulába való behelyettesítéssel megkapjuk, hogy

$$B + \frac{H}{2} - 1 = (B_1 + B_2 + K - 2) + \frac{H_1 + H_2 - 2K + 2}{2} - 1 =$$
$$= \left(B_1 + \frac{H_1}{2} - 1\right) + \left(B_2 + \frac{H_2}{2} - 1\right) = \mathrm{T}(P_1) + T(P_2) = T$$

vagyis, ha P_1 –re és P_2 –re teljesül a formula, akkor a P rácssokszögre is teljesülni fog, ezzel pedig a Pick-tételt bebizonyítottuk.

Hasonló módon belátható a formula fennállása, ha nem kettő, hanem három darab rácssokszöget ragasztunk össze. Ebben az esetben a képlet a következőképpen néz ki:

$$T(P) = T(P_1) + T(P_2) + T(P_3) =$$
$$= \left(B_1 + \frac{H_1}{2} - 1\right) + \left(B_2 + \frac{H_2}{2} - 1\right) + \left(B_3 + \frac{H_3}{2} - 1\right)$$

P-nek ebben az esetben P_1, P_2 és P_3 minden belső pontja, valamint a közös éleken lévő $K-3$ pont is belső pontja lesz. A határpontok száma a fentiekhez hasonlóan ebben az esetben $H = H_1 + H_2 + H_3 - 2K + 3 - 1$, ahol a -1-es tag a mindhárom háromszög által lefedett középső csúcs miatt jelenik meg, hiszen ezt a $2K$-s tagban csak kétszer vettük ki három helyett. Ezeket felhasználva a formula a következő:

$$B + \frac{H}{2} - 1 = (B_1 + B_2 + B_3 + K - 3) + \frac{H_1 + H_2 + H_3 - 2K + 2}{2} - 1 =$$
$$= \left(B_1 + \frac{H_1}{2} - 1\right) + \left(B_2 + \frac{H_2}{2} - 1\right) + \left(B_3 + \frac{H_3}{2} - 1\right) =$$
$$= \mathrm{T}(P_1) + T(P_2) + T(P_3) = T$$

vagyis a formula fennáll abban az esetben is, ha három rácssokszöget illesztünk össze.

Végül térjünk rá az általános esetre, vagyis a tetszőleges rácssokszög esetére. Ezt egy, a sokszög oldalainak számára (n) felépített indukcióval bizonyítjuk. Mivel a legkisebb oldalszámú sokszög a háromszög, így n legkisebb értéke 3, erre pedig az előző részben már beláttuk a formula fennállását. Legyen $n > 3$, és tegyük fel, hogy minden n-nél kevesebb oldalú rácssokszögről tudjuk, hogy teljesül rá a formula. Vágjuk ketté a sokszöget az egyik átlója mentén. Ezt megtehetjük az ismert lemma értelmében, miszerint bármely egyszerű sokszögnek van olyan átlója, amely (a végpontjaitól eltekintve) a sokszög belsejében halad. Ekkor két n-nél kisebb oldalszámú rácssokszöget kapunk, melyekre az indukciós feltevés értelmében tudjuk, hogy fennáll a formula.

Most térjünk rá a poliéderformula bizonyítására a Pick-tételt felhasználva. Vegyük a P poliéder síkbarajzolt élgráfját, melynek minden éle egyenes szakasz. Létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy ha az összes csúcsot ε-nál kisebb mértékben mozdítjuk el, akkor nem keletkeznek meg nem engedett átmetszések. Ilyen mozgatásokkal el tudjuk érni, hogy a gráf összes csúcsa racionális pontba kerüljön, hiszen minden csúcs tetszőlegesen kicsi környezetében találunk egy racionális koordinátájú pontot, ilyenekbe mozgatva a csúcsokat, majd a koordinátákat közös nevezőre hozva és felszorozva elérjük, hogy minden csúcs koordinátája egész legyen. Ezen apró torzítást majd nagyítást követően a létrejött rácsgráf továbbra is síkbeli marad, illetve tudjuk, hogy mindegyik lap ekkor egy egyszerű rácssokszög, amelyre alkalmazhatjuk Pick tételét.

Legyen S az a sokszög, melyet a gráf összes éle és csúcsa kifeszít, ekkor tehát S lefedi mindegyik korlátos sokszögtartományt, amelyet a gráf létesít. S területe legyen t, a többi sokszöget pedig jelölje S_i $(i = 1,2, \dots, l-1)$ valamint területüket rendre t_i. Értelemszerűen $t = \sum_i t_i$, a Pick formulával felírva pedig

$$b + \frac{h}{2} - 1 = \sum_i \left(b_i + \frac{h_i}{2} - 1 \right)$$

A jobb oldal $l - 1$ tagból áll, hiszen a bal oldalon található egy lap kivételével az összes lap vetületeként előálló sokszögekre összegzünk. Ha átrendezzük az egyenlőséget úgy, hogy a konstansok egy oldalon legyenek, a következőt kapjuk:

$$l - 2 = \sum_i b_i - b + \frac{1}{2} \sum_i h_i - h$$

A jobb oldali összeg első tagját jelölje A, a másodikat (az $\frac{1}{2}$-es szorzó nélkül) B, és vizsgáljuk meg ezek értékét.

Kezdjük A-val:

Az S belsejébe eső b darab rácspont közül nincs mind beleszámolva $\sum_i b_i$-be, kimaradnak

- egyrészt azok, amelyek a gráfnak S belsejében lévő csúcsai, ezeket számát jelölje c_b.
- másrészt azok, amelyek a gráf S belsejében futó éleinek belső pontjai. Ezek számát jelölje r.

A fentiek alapján tehát $A = -c_b - r$.

Nézzük most B-t:

Vannak olyan rácspontok, melyeket $\sum_i h_i$-ben és h-ban is egyszer számolunk: ezek pontosan az S határán lévő, csúcsoktól különböző rácspontok. Ezek a pontok ki fognak esni a $\sum_i h_i - h$ számításakor.

Vannak olyan rácspontok, melyek h-ban egyszer, de $\sum_i h_i$-ben többször is számolva vannak: ezek pontosan S csúcsai lesznek, melyeket 1-gyel kevesebbszer számoljuk $\sum_i h_i$-ben, mint ami a fokuk az élgráfban. Mit jelent ez? Ezek a csúcsok a B-be pontosan fokszám $-$ 2-t adnak, ezek összegével növelik a tagot.

Végül vannak olyan rácspontok, melyek $\sum_i h_i$-be beleszámítanak, de h-ba nem, ezek

- egyrészt a gráfnak az S belsejébe eső élein lévő, csúcstól különböző rácspontok (ezeknek száma, mint ahogy A esetében is, ugyanúgy r).
- másrészt a gráfnak az S belsejébe eső csúcsai, melyek közül mindegyiket annyiszor számoltuk $\sum_i h_i$-ben, amennyi az ő foka az élgráfban.

Ekkor tehát

$$B = (S \text{ minden csúcsára a (fok} - 2) \text{ számok összege}) +$$
$$+ 2r + (S \text{ belsejében lévő csúcsokra a fokok összege})$$

Itt a két zárójeles tag a következőképpen írható át ismert tételeket felhasználva:

$$(\text{az élgráf összes csúcsára a fokok összege}) - 2(S \text{ csúcsainak a száma}) =$$
$$= 2e - 2(c - c_b)$$

Tehát $B = 2e - 2(c - c_b) + 2r$.

Most visszahelyettesítve A-t és B-t az eredeti képletbe:

$$l-2=A+\frac{1}{2}B=-c_b-r+\frac{1}{2}\ (2e-2(c-c_b)+2r)=e-c$$

Ezt pedig átrendezve megkapjuk a formulát:

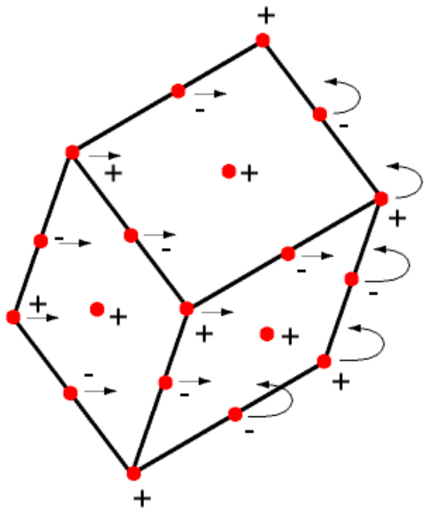
$$c-e+l=2$$

4.8. Thurston bizonyítása

A következő bizonyítás egy William Thurston (1946-2012) nevű matematikustól származik.

A bizonyítás megkezdéséhez forgassuk a poliédert egy olyan helyzetbe, hogy semelyik éle ne legyen vízszintes helyzetben. Ekkor ki tudunk jelölni egy U legfelső és egy L legalsó csúcsot. Mindig létezik ilyen forgatás? A válasz igen, hiszen ehhez csupán egy olyan irányt (vektort) kell meghatároznunk, amely semelyik élre sem merőleges – ezt függőlegesnek véve biztosan nem lesz egy vízszintes él sem. Ilyen irány mindig létezik: rendeljük a poliéder mindegyik (véges sok) éléhez azt a síkot, amely az adott élre merőleges, ezek a síkok nem tartalmazhatják a választott irányt. Toljuk ezeket a síkokat az origóba. Mivel véges sok síkról van szó, együtt nem tölthetik ki az egész teret, így biztosan lesz olyan egyenes az origón át, amely egyikben sem fekszik benne. Ha egy ilyen egyenesnek az irányát tekintjük függőlegesnek, akkor a poliéder a kívánt helyzetben fog állni: egyik éle sem lesz vízszintes.

Ezek után a poliéder minden csúcsába helyezzünk pozitív (+), minden élre negatív (-), majd minden lapközéppontba ismét pozitív (+) előjelet. Úgy tekintjük, hogy egy pozitív és egy negatív előjel semlegesíti egymást, ha találkoznak, az ilyen „összeütközések” számát fogjuk vizsgálni. A szabály a következő: tekintsük a poliédert elölnézetből, ekkor a csúcsok és az élek előjeleit mozdítjuk el vízszintesen, az óramutató járásával ellenkező irányba úgy, hogy rákerüljenek a (velük ilyen irányban) szomszédos lapra. U-t és L-et nem mozgatjuk, hiszen tőlük vízszintes irányba haladva nem találunk lapot. Ezután az egyes lapokon lévő előjeleket vizsgáljuk meg alaposan.



Illusztráció II. (forrás: https://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/charges.html)

Az egyes lapokra kerülő előjelek sorozata minden esetben egy adott él-csúcs sorozatnak felel meg, ahol a sorozat első és utolsó tagja is él, ennek következtében mindig 1-gyel több él előjele kerül a lapra, mit csúcsé. Mivel az éleknek negatív, a csúcsoknak pozitív az előjele, így ez a sorozat végeredményben egy negatív (-) előjelet ad tovább a lapnak. Mivel a lapközéppontok eredeti előjele pozitív (+) volt, így ezzel a művelettel ezeket az előjeleket is semlegesítettük. Maradt csupán az *U* és az *L* csúcs két darab pozitív előjele.

Mit tudtunk meg tehát? A pozitív előjelek száma kettővel több, mint a negatív előjelek száma, vagyis, ha baloldalra gyűjtjük a pozitív előjeleket (csúcsok és lapok), jobb oldalra pedig a negatívakat (élek), akkor a jobb oldal kettővel kisebb lesz, mint a bal. Ez képlettel felírva:

$$c + l = e + 2$$

$$c - e + l = 2$$

Ezzel a tételt beláttuk.

4.9. Oszd meg és uralkodj!

A most következő bizonyítás a lapok száma alapján egyszerű indukciós lépések mentén mutatja be a formula helytállóságát poliéderekre.

Tudjuk, hogy egy konvex poliéder felületét bármely, élekből kialakított egyszerű zárt töröttvonal két összefüggő részre osztja. Nevezzük a poliéder felületének ilyen módon előállítható részeit nyitott poliéderfelületeknek. Ezekhez hozzáértjük a határvonalukat is, vagyis azt a töröttvonalat, amelyet a kettévágáshoz használtunk. A nyitott poliéderfelület esetében is a c, e, l jelölést használjuk a hozzá tartozó csúcsok, élek, illetve lapok számára. Az Euler-féle poliédertétel nyitott poliéderfelületekre vonatkozó változatának tekintjük a $c - e + l = 1$ formulát, amelyet az alábbiakban a lapok száma szerinti indukcióval bizonyítunk be.

Ebből a formulából rögtön következni fog az Euler-tétel. Távolítsuk el ugyanis a c csúcsú, e élű, l lapú poliéder egyik lapját, ekkor az így kapott nyitott poliéderfelületnek c csúcsa, e éle és $l - 1$ lapja lesz, ezért $\mathrm{c} - \mathrm{e} + (\mathrm{l} - 1) = 1$, azaz valóban $\mathrm{c} - \mathrm{e} + \mathrm{l} = 2$.

Az indukciós bizonyítás első lépéseként könnyen beláthatjuk, hogy 1 lap esetén az állítás nyilvánvalóan igaz, ekkor a csúcsok és az élek száma megegyezik, ezek kiejtik egymást, az $1 = 1$ triviális egyenlőség marad.

Az indukciós lépésében tegyük fel, hogy l-nél kevesebb lap esetén fennáll az egyenlőség.

Vizsgáljuk meg, mi történik l lap esetén. Jelöljünk ki két csúcsot az eltávolított lap csúcsai közül, majd keressünk utat közöttük a poliéder élein haladva: ilyen út a poliéderek harmadik alaptulajdonsága miatt biztosan létezik. Ezt az utat egészítsük ki az őket összekötő éllel, így egy zárt sétát kapunk, melynek mentén a poliéderek negyedik alaptulajdonságát felhasználva két különálló részre tudjuk osztani a poliédert. A séta élszámát jelölje k, csúcsszámát pedig ekkor $k + 1$.

Erről a két részről tudjuk, hogy rájuk külön-külön teljesül a formula, hiszen lapszámuk l-nél kisebb.

A formula az első részben legyen: $c_1 - e_1 + l_1 = 1$

A formula az második részben legyen: $c_2 - e_2 + l_2 = 1$

A fenti két egyenlőséget összevetve a következőket állíthatjuk az l lapú nyitott poliéderről:

- éleinek száma: $e_1 + e_2 = e + k$
- csúcsainak száma: $c_1 + c_2 = c + (k + 1)$
- lapjainak száma: $l_1 + l_2 = l$

Ezeket összeadva pedig megkapjuk, hogy $c - e + l = 1$, ezzel pedig az állítást beláttuk.

A most következő bizonyítások esetén már nem poliéderekre, hanem síkgráfokra fogjuk vizsgálni a poliéderformula fennállását. A gráfelméleti megközelítések esetében nem követeljük meg, hogy a csúcsok foka minimum 3 legyen, illetve engedélyezünk többszörös és hurokéleket is, egyedül azt fontos kikötnünk, hogy a gráfunk véges és összefüggő legyen. Egy poliéderből mindig tudunk készíteni egy ilyen síkgráfot, például a Steiner-féle bizonyításnál ismertetett vetítéses módszert felhasználva, azonban ez olyan tetszőleges síkgráfokra is működni fog, melyek nem poliéder élgráfjaiból állnak elő.

A poliéder csúcsainak a síkgráf csúcsait (V), éleinek a gráf éleit (E), lapjainak pedig a gráf tartományait (F) feleltetjük meg. Ezeket a jelöléseket használva a poliéderformula gráfelméleti alakja $V - E + F = 2$.

4.10. Euler-körök

A következő bizonyítás viszonylag fiatalnak számít a formula bizonyításainak körében, meglepő módon a kapcsolatot az Euler-féle poliéder tétel és az Euler-körök között sokáig nem fedezték fel.

Sétának nevezzük a szomszédos csúcsok és élek váltakozó sorozatát egy gráfban. Körsétának nevezzük az olyan sétákat, melyek kezdő és végpontja ugyanaz a csúcs. Euler-körsétáról beszélünk egy olyan körséta esetén, mely a gráf minden élét pontosan egyszer tartalmazza. Ismert tétel, hogy egy G gráfban pontosan akkor létezik Euler-körséta, ha a gráf minden csúcsának a fokszáma páros. Azokat a gráfokat, melyekben létezik Euler-körséta Euler-gráfoknak nevezzük.

Tételezzük most fel, hogy a G gráf Euler-gráf, azaz létezik benne Euler körséta. A bizonyításhoz vezessünk be egy R változót, amely azt számlálja, hogy a körséta során hányszor érintünk olyan csúcson, melyen már korábban is áthaladtunk. Azaz R értékét minden olyan alkalommal növeljük eggyel, amikor egy már korábban érintett csúcson át vezet az utunk.

Az alábbi két megfigyelést kell megvizsgálnunk:

1. $F = R + 1$

   Ennek az igazolásához rajzoljuk fel a gráf éleit a körsétában meghatározott sorrendben. Ekkor egy lap mentén indulunk el, és amikor egy csúcsismétlődéshez jutunk, akkor fejezzük be az adott lap körbejárását és kezdünk el egy új lap mentén haladni. Tehát minden lap „bezárásánál” növeljük R értékét 1-gyel, és ezt az utolsó előtti lapig folytatjuk, hiszen ekkor már az utolsó lap kivételével az összes lap éleit körbejártuk, ami valójában azt jelenti, hogy magáét az utolsóét is (a vele szomszédos lapok körbejárásakor). Tehát $R = F - 1$, azaz $F = R + 1$.

2. $R = E - V + 1$

   Tudjuk, hogy egy E élt tartalmazó séta során $E + 1$ csúcsot látogatunk meg, ekkor a gráf csúcsainak számát úgy kapjuk meg, hogy a meglátogatottak számából levonjuk az ismétlődések számát. Eszerint $V = E + 1 - R$, azaz $R = E - V + 1$.

A két fenti megfigyelést R-re rendezve és egyenlővé téve pedig megkapjuk magát a poliéderformulát Euler-gráfokra:

$$F - 1 = E - V + 1$$
$$V - E + F = 2$$

Mi a helyzet akkor, ha nem Euler-gráfról beszélünk, hanem egy tetszőleges összefüggő G síkgráfra szeretnénk a poliéderformula fennállását vizsgálni. Az ilyen gráfokat könnyedén Euler-gráfokká tudjuk alakítani a következő módszerrel: duplázzuk meg a G gráf összes élét (egy él megduplázása egy vele párhuzamos élt hoz létre, mely ugyanazt a két csúcsot köti össze, mint az eredeti él). Ekkor az így kapott G^* gráf csúcsainak száma ugyanúgy V, az élek száma az eredeti kétszerese, azaz $2E$ lesz, valamint minden élduplázás egy új tartományt hoz létre a két párhuzamos él között, ezzel a tartományok száma élszámnyival (E) növekszik, azaz $F + E$ lesz.

Miért segített ez nekünk? Az élek megduplázásával elértük, hogy minden csúcs fokszáma páros legyen, azaz G^* gráf Euler-gráf. Emellett mivel az élek és a lapok száma azonosan változott, így a képletben ez a két érték kiejti egymást:

$$V - (E + E) + (F + E) = 2$$
$$V - E + F = 2$$

Tehát a tetszőleges G összefüggő síkgráfból a fenti módon Euler-gráfot csináltunk, melyre pedig már beláttuk az állítást.

4.11. Tartományok száma szerinti teljes indukció

A következő két bizonyítás viszonylag egyszerű indukciós lépéseket követve mutatja be a formula fennállását összefüggő síkgráfokra.

Legyen G összefüggő síkgráf. Kezdjük meg az indukciós bizonyítást a tartományok száma szerint:

1. $F = 1$: Ha G-nek egy tartománya van, akkor tudjuk róla, hogy összefüggő és körmentes (hiszen ha lenne benne kör, akkor az egy második tartományt kerítene el). Ekkor G egy fa, amiről tudjuk, hogy $E = V - 1$. Felhasználva, hogy egy lapból indultunk ki, adódik a formula:

$$V - E + F = 2.$$

2. Amennyiben G-nek nem egy tartománya van, válasszunk ki egy e élt, amely két tartományt választ el, és távolítsuk el e-t a gráfból. Ekkor a gráf továbbra is összefüggő marad, hiszen az e élt csakis egy körből távolíthattuk el, s így bármely két csúcs között marad út e-t a kör megmaradt éleivel helyettesítve. Az e él eltávolításával mind a tartományok, mind az élek száma 1-gyel csökkent.
3. Ekkor láthatjuk, hogy bármely két tartomány egyesíthető úgy, hogy mind az élek mind a tartományok száma 1-gyel csökken, azaz G-t ilyen egyesítésekkel fává tudjuk alakítani, amiről már beláttuk az 1-es pontban, hogy teljesül rá a formula. Mivel minden lépésben az élek és a tartományok száma azonosan változott, azaz a változások kiejtik egymást, így a poliéderformula az eredeti gráfra is fennáll.

4.12. Élek szerinti teljes indukció

Az előző bizonyításhoz hasonlóan a formulát egy, az élek számára felépített indukcióval is be tudjuk látni. Legyen G továbbra is összefüggő síkgráf. Ekkor erre az indukciós lépések a következők:

1. Első lépésben induljunk ki egy virágból, azaz egy olyan gráfból, melynek egyetlen csúcsa van, melybe hurokélek futnak be. Indukciós lépésekkel vizsgáljuk meg erre a formula fennállását. Amennyiben a gráfnak egyetlen szirma (hurokéle van), az 2 tartományt hoz létre, vagyis $V = 1$, $E = 1$ és $F = 2$, ekkor teljesül, hogy $V + F - E = 1 + 2 - 1 = 2$. Minden újabb szirom hozzávételével egy már létező tartományt osztunk ketté, azaz az élek és a tartományok száma azonosan változik, a formula így minden lépés után fennáll. Ezzel beláttuk, hogy virág gráfokra teljesül a formula.

2. Második lépésként tegyük fel, hogy a gráfnak vannak nem hurok élei is, válasszuk ki ezek közül egy e élt. Húzzuk össze e két végpontját és ezzel szüntessük meg e-t, majd folytassuk ezt a folyamatot a gráf többi élére is addig, míg virág gráfot nem kapunk. Minden egyes összehúzáskor az élek és a csúcsok számát is 1-gyel csökkentjük (az él megszűnik, a két végpontjából pedig egy pont lesz), mely a poliéderformula egyenlőségét nem borítja fel. Mivel G-ről nem tettük fel, hogy egyszerű, így ezek az összehúzások gond nélkül folytathatóak addig, míg G-nek csupán egy csúcsa és hurokélei nem maradnak. Az ilyen gráfokról pedig az 1-es pontban beláttuk, hogy teljesül rájuk a formula, ezzel pedig a tételt bizonyítottuk.

4.13. Fülfelbontás

Egy gráfot kétszeresen élösszefüggőnek mondunk, ha belőle bármely élt eltávolítva a gráf továbbra is összefüggő marad.

A G gráf fülfelbontásának nevezzük G éleinek egy partícióját fülekre (egyszerű utak és körök) úgy, hogy az első fül egy egyedülálló csúcs, ezután pedig minden további fül kezdő és végpontja olyan csúcs, ami már korábbi fül(ek)ben előfordult, azonban összes többi csúcsa új, korábbi fülekben nem megtalálható csúcs.

Legyen G a P poliéder gráfja. Erről tudjuk, hogy kétszeresen élösszefüggő, hiszen ha P egy élét eltávolítjuk, az él két végpontját továbbra is összeköti egy út az élre illeszkedő bármelyik lapot körülvevő élek mentén végighaladva.

Ha egy G gráf kétszeresen élösszefüggő, akkor létezik fülfelbontása.

G-ben a füleket egyesével találjuk meg a következőképpen: Ha G-nek egyetlen csúcsa van és nincsenek további élei, akkor készen vagyunk. Ha G-nek vannak élei, tegyük fel, hogy G fülfelbontását már részben elkészítettük, ezek a fülek G egy részgráfját alkotják, és egy következő fület szeretnénk megtalálni. Amennyiben G-nek van még fel nem használt éle, akkor olyan is van, amely az eddigi fülek uniójából indul ki, de nem tartozik hozzá (hiszen G összefüggő). Ennek az élnek az unióhoz tartozó végpontja az él túlsó végpontjával G kétszeres összefüggősége miatt egy út mentén összeköthető. Ezen az úton elindulva haladjunk az első olyan csúcsig, amely már a korábban megtalált fülek alkotta részgráfban található, ezzel elkészítve az új fület. Ha a gráfnak továbbra is van olyan éle, mely nem része a fülek alkotta részgráfnak, a fenti lépéssorozatot folytatjuk addig, míg nem marad ilyen él, ekkor pedig létrehoztuk G fülfelbontását.

A következőkben füleken haladó indukcióval fogjuk belátni a poliéderformula fennállását a G kétszeresen összefüggő síkgráfra. Készítsük tehát el G fülfelbontását.

1. Kezdetben 1 csúcsból indulunk ki, ekkor az élek száma 0, a tartományok száma pedig 1.

   Ezt behelyettesítve a poliéder formulába: $V - E + F = 1 - 0 + 1 = 2$

2. Minden új fül egy-egy utat formál már ismert csúcsok között. Egy út 1-gyel több élt tartalmaz, mint csúcsot (hiszen a kezdő- és végpontja már adott). A tartományok száma minden új fül megtalálásával 1-gyel növekszik, hiszen az új fül egy eddig ismeretlen tartományt kerít körül.

   Ekkor egy k élt tartalmazó fül az élek számát k-val, a csúcsok számát $k-1$-gyel, a lapok számát pedig 1-gyel növeli.

   Ezt behelyettesítve a formulába az továbbra is fenntartja az egyenlőséget, hiszen a változás a következőképpen írható fel (Δ jelöli a növekményeket, azaz ΔV a csúcsok, ΔE az élek, ΔF pedig a lapok számának változását):

$$\Delta V - \Delta E + \Delta F = (k-1) - k + 1 = 0$$

   Az indukciós lépéseket folytatva az összes fülre a tétel állítását.

5. Felhasznált irodalom

1. http://www.ams.org/publicoutreach/feature-column/fcarc-eulers-formula (2021.01.29)
2. http://www.jgypk.hu/tanszek/matematika/polieder/alap/fogalmak.htm (2021.01.29)
3. https://web.cs.elte.hu/geometry/kissgy/geobsc1-11.pdf (2021.01.29)
4. Peter R. Cromwell: Polyhedra, Cambridge University Press
5. Hajós György: Bevezetés a Geometriába, Nemzeti Tankönyvkiadó, 1999
6. Berec Aleksandra: Pick-tétel szakdolgozat (SZTE - 2015)
7. Moussong Gábor – Geometria 1 (előadásvázlat), 2020
8. https://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/ (2021.02.07)
9. https://hu.wikipedia.org/wiki/Gráfelméleti_fogalomtár