

# Eötvös Loránd Tudományegyetem

## Természettudományi Kar

---

### A Richardson - extrapoláció és általánosításai

Szakdolgozat

Készítette:

Juhász Szabolcs

Matematika BSc

Matematikai elemző szakirány

Témavezető:

Dr. Havasi Ágnes

egyetemi adjunktus

Alkalmazott Analízis és  
Számításmatematikai Tanszék



Budapest, 2020

# NYILATKOZAT

Név: Juhász Szabolcs

**ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc**

**NEPTUN azonosító: S0S3EQ**

**Szakedolgozat címe:**

A Richardson-extrapoláció és általánosításai

A **szakedolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2020.12.23.

  
a hallgató aláírása

# Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás.....	4
1. Bevezetés.....	5
2. Numerikus módszerek.....	6
3. Explicit Euler-módszer.....	9
4. Richardson-extrapoláció.....	11
4.1 Passzív Richardson-extrapoláció.....	12
4.2 Aktív Richardson-extrapoláció.....	15
5. A Richardson-extrapoláció általánosításai.....	18
5.1 Ismételt Richardson-extrapoláció.....	18
5.2 Numerikus módszerek vizsgálata különböző lépésközökre.....	20
5.2.1 Az IRE módszer $h$ , $h/2$ és $h/3$ lépésközre.....	20
5.2.2 Az IRE módszer három tetszőleges lépésközre.....	24
5.2.3 Az IRE módszer négy lépésközzel.....	25
5.2.4 Az IRE módszerek összehasonlítása egy konkrét feladatra.....	29
5.2.5 Az általános IRE módszer.....	32
5.3 Többszörös Richardson-extrapoláció.....	33
6. Összegzés.....	35
Irodalomjegyzék.....	36

# Köszönetnyilvánítás

*Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Havasi Ágnesnek, hogy segített a téma kiválasztásától kezdve egészen a dolgozat végső formába öntéséig. Szakértelmével és hozzáértésével a konzultációk során sikerült a numerikus matematika világát megszerettetnie velem. Fáradhatatlan és lelkes segítségével folyamatosan motivált, hogy ez a dolgozat ilyen formában elkészülhessen. Továbbá szeretném megköszönni a családomnak a rengeteg lelki támogatást, illetve a barátaimnak, szaktársaimnak, hogy az egyetemi éveim alatt kitartóan mellettem álltak és hittek bennem.*

# 1. Bevezetés

Sokszor fordul elő természettudományos, mérnöki és gazdasági területeken, hogy közönséges és parciális differenciálegyenleteket, illetve egyenletrendszereket kell megoldanunk. Gyakran a keresett pontos megoldás előállítása lehetetlen, vagy nagyon időigényes és költséges lenne, így alternatív megoldásra van szükségünk. Erre szolgálnak az úgynevezett numerikus módszerek, amelyekkel nagy pontossággal közelíthetjük a kitűzött feladat megoldását.

Szakedolgozatom elején szó lesz a legelterjedtebb módszerek, az úgynevezett véges különbséges, egylépéses módszerek alapjairól, azon belül is az explicit Euler-formuláról. Bemutatjuk ezek működését és definiáljuk a jellemzésükhöz szükséges alapfogalmakat. Az explicit Euler-módszernek az az egyik hátránya, hogy csak elsőrendű pontosságot biztosít, és ez sok esetben nem elegendő. Ha adott lépésközzel dolgozva nem elég pontos a megoldás, akkor ezen úgy lehet javítani, hogy a kapott eredményt elvetjük, és kisebb lépésközzel előlről kezdjük a számolást. Ez azonban plusz idővel és költséggel jár.

A pontosság hatékony javítására szolgál a dolgozat fő témája, a Richardson-extrapolációnak nevezett konvergenciagyorsító eljárás. Eredeti változatának lényege az, hogy a feladatot ugyanazzal a numerikus módszerrel kisebb, pl. feleakkora lépésközzel is megoldjuk, és a két numerikus megoldást lineárisan kombináljuk. Ez az eljárás eggyel magasabb rendben pontos megoldást szolgáltat, mint az alapmódszer. Így tehát a korábban kiszámolt eredményünket is felhasználjuk, így az nem vész kárba.

A 4. fejezetben bemutatjuk a Richardson extrapoláció alapelvét, majd szót ejtünk két létező változatról: a passzív (4.1 fejezet) és az aktív (4.2 fejezet) Richardson-extrapolációról. Az 5. fejezetben áttekintjük a módszer lehetséges általánosításait, amelyekkel tovább növelhetjük a numerikus megoldás pontosságát. Részletesebben lesz szó az ismételt Richardson-extrapolációról, amelynek során kettőnél több numerikus megoldást kombinálunk (5.1 fejezet). Megvizsgáljuk a módszert különböző hosszúságú lépésközök, valamint többszöri ismétlés esetén. A többszörös Richardson-extrapolációról is említést teszünk. Végezetül az elméleti pontosságot tesztfeladaton numerikusan is ellenőrizzük.

# 2. Numerikus módszerek

Ebben a fejezetben néhány általános definíciót ismertetünk a közönséges differenciálegyenletek numerikus módszereivel kapcsolatban. Definiáljuk, mit jelent az, hogy a numerikus módszer egy- vagy többlépéses, mit nevezünk lépésköznek, mitől lesz egy módszer explicit vagy implicit, illetve, azt, hogy mit nevezünk a módszer pontosságának/konzisztenciájának. Ezekhez a Faragó István és Horváth Róbert által írt Numerikus módszerek jegyzet 2011-es kiadását fogom alapul felhasználni.

Megoldandó a

$$(1) \frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)), t \in (t_0, T]$$

$$(2) y(t_0) = \bar{y}_0$$

kezdetiérték-feladat, ahol az  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  jobb oldali függvény folytonos valamely  $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  tartományon, és  $\bar{y}_0 \in \mathbb{R}^d$  adott kezdeti érték. Keresünk olyan  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  függvényt, amely

- I. értelmezve van a  $[t_0, T]$  intervallumon,
- II. differenciálható a  $(t_0, T]$  intervallumon,
- III. kielégíti az (1) differenciálegyenletet ezen intervallum minden pontjában, és
- IV. eleget tesz a (2) kezdeti feltételnek.

Ismeretes, hogy a jobb oldali függvény Lipschitz-tulajdonsága biztosítja a megoldás egzisztenciáját és unicitását. A továbbiakban ezt végig feltesszük. Célunk a megoldás közelítése a  $[t_0, T]$  intervallumon. A gyakorlatban erre legtöbbször valamilyen véges különbséges módszert alkalmazunk. Ehhez a feladat  $[t_0, T]$  időintervallumát véges sok osztóponttal részekre daraboljuk. Legyen a felosztás-intervallumok száma  $N$ , ekkor ekvidisztáns felosztás esetén egy részintervallum hossza  $T/N$  lesz. Jelöljük ezt a hosszúságot (lépésközt) a továbbiakban  $h$ -val.

Definíció (2.1): A

$$\omega_h = \{t_n = nh; n = 0, 1, \dots, N; h = T/N\}$$

halmazt ekvidisztáns rácshálónak nevezzük.

Tehát miközben a pontos megoldás egy folytonos függvény, a numerikus megoldás eredménye egy rácspontfüggvény (vektor) lesz.

A véges különbséges módszerek között a legegyszerűbbek az egy lépéses módszerek. Ekkor egy rögzített időpontbeli közelítést a rácson azt megelőző időpontbeli közelítés felhasználásával határozzuk meg. Az egy lépéses módszerek közé tartozik például az explicit és az implicit Euler-módszer, valamint az ezeket magába foglaló Runge-Kutta-módszerek családja. A dolgozatban az explicit Euler-módszerrel foglalkozunk majd részletesebben. Az egy lépéses módszerek általános alakja

$$y_{n+1} = y_n + \Phi(h, t_n, y_n, y_{n+1})$$

ahol  $\Phi$  valamilyen függvény.

Definíció (2.2): Azokat a módszereket, amelyekre  $\Phi = \Phi(h, t_n, y_n)$ , explicit módszereknek nevezzük.

Definíció (2.3): Amennyiben  $\Phi = \Phi(h, t_n, y_n, y_{n+1})$  (azaz a  $\Phi$  függvényben szerepel  $y_{n+1}$  is), a módszert implicitnek nevezzük.

Definíció (2.4): Amennyiben adott pontbeli közelítést  $i$  darab ( $i \geq 1$ ) megelőző pontbeli érték segítségével határozzuk meg, többlépéses vagy  $i$ -lépéses módszerről beszélünk. Speciálisan az  $i = 1$  választás esetén éppen az egy lépéses módszert kapjuk vissza.

Erre egy példa az úgynevezett Adams-típusú módszerek.

Egy numerikus módszertől számos tulajdonságot elvárunk. Az egyik legalapvetőbb a konvergencia, azaz a numerikus megoldás és a pontos megoldás eltérésének (a globális hibának) a nullához tartása a lépésköz nullához tartásával. Ehhez fontos a konzisztencia biztosítása. Egy lépéses módszerre ezt a következőképpen definiáljuk.

Definíció (2.5): Jelölje  $\tilde{y}_n$  a pontos  $y(t_{n-1})$  értékből a  $t_n$  rácspontban egy lépés után kapott numerikus megoldást, azaz  $\tilde{y}_n := y(t_{n-1}) + h\Phi(h, t_{n-1}, y(t_{n-1}))$ . Ekkor a  $g_n = y(t_n) - \tilde{y}_n$  értéket a módszer  $t_n \in \omega_h$  pontbeli lokális hibájának nevezzük. Azt mondjuk, hogy a  $\Phi$  numerikus módszer  $p$ -ed rendben konzisztens (vagy  $p$ -ed rendben pontos) a  $t_n \in \omega_h$  rácspontban, ha  $g_n(h) = \vartheta(h^{p+1})$  valamely  $p > 0$  állandóval.

Ha a módszer  $p$ -ed rendben konzisztens, és még null-stabil is, akkor megfelelő simasági feltételek teljesülése esetén a globális hiba  $h$   $p$ -edik hatványa szerint tart nullához.



# 3. Explicit Euler-módszer

Ebben a fejezetben bemutatjuk az explicit Euler (EE) módszert, majd egy konkrét Cauchy-feladatra megvizsgáljuk a módszer hibáját.

Definíció (3.1): Az

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), n = 0, 1, \dots, N - 1, y_0 = \bar{y}_0$$

képlettel definiált módszert explicit Euler-módszernek nevezzük.

Ahogy a 3.1-es definícióban láthatjuk, az egyenlet jobb oldalán nem szerepel  $y_{n+1}$ , ezért a módszer az explicit módszerek közé tartozik. Ahogy az előző fejezetben említésre került a véges különbségek módszerek között, az explicit Euler-módszer az egylépéses módszerek közé tartozik, azaz rögzített időpontbeli közelítést a rácson csak az azt megelőző időpontbeli közelítés felhasználásával határozzunk meg.

Az explicit Euler-módszer ekvidisztáns rácshálón véve egy elsőrendben konvergens numerikus módszer. Tehát p-ed rendben konzisztens.

Tekintsük az alábbi kezdetiérték-feladatot!

1. feladat:

$$y' = 1 + \frac{2y}{t}$$

$$y(1) = 1$$

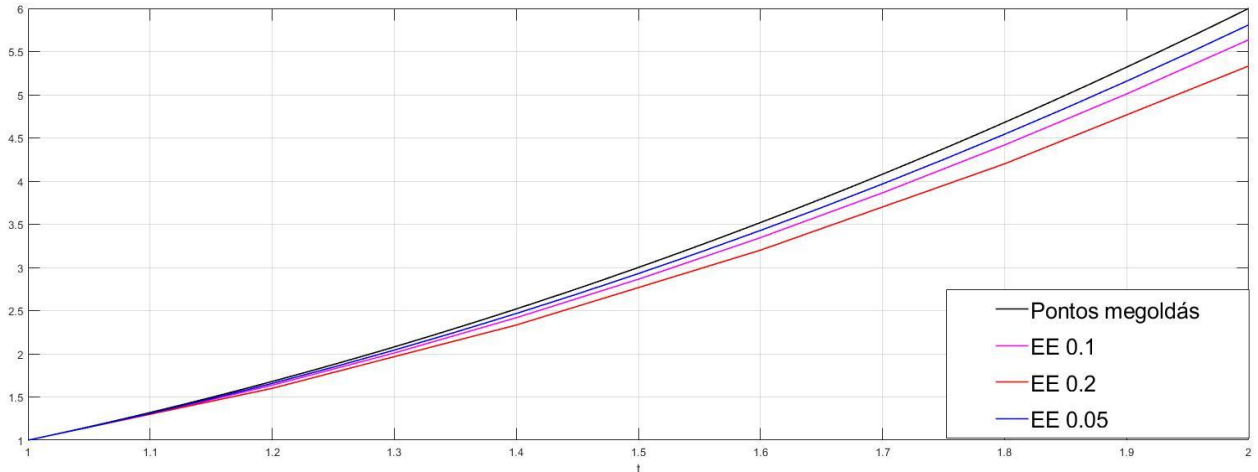
Ennek fogjuk a megvizsgálni a pontos megoldását, illetve az explicit Euler-módszerrel kapott numerikus megoldását az  $[1,2]$  zárt intervallumon.

A kezdetiérték-feladat pontos megoldása az

$$y = 2t^2 - t$$

függvény.

Matlab segítségével feketével ábrázoltuk a megadott intervallumon a pontos megoldást, továbbá rózsaszínnel a 0,1, pirossal a 0,2, kékkel pedig a 0,05 hosszúságú lépésközzel kapott numerikus megoldást.



**1. ábra** Az 1. feladat pontos megoldása, valamint az explicit Euler-módszerrel 0,1, 0,2 és 0,05 hosszúságú lépésközzel nyert numerikus megoldások

Az 1. táblázatban feltüntettük az [1,2] intervallum végpontjában kapott pontos megoldás és a különböző (felére csökkenő) lépésközökkel kapott numerikus megoldás hibáját.

**1. táblázat.** Az 1. feladat pontos és numerikus megoldása, valamint a numerikus megoldás abszolút hibája a  $T = 2$  pontban, 15 tizedesjegyre kerekítve

Lépésköz	Pontos megoldás	Numerikus megoldás	Hibája
0,2	6	5,333333333333332	0,666666666666668
0,1	6	5,636363636363642	0,363636363636358
0,05	6	5,809523809523816	0,190476190476184
0,025	6	5,902439024390215	0,097560975609785
0,0125	6	5,950617283950585	0,049382716049415
0,00625	6	5,975155279503233	0,024844720496767
0,003125	6	5,987538940810097	0,012461059189903

Látható, hogy a lépésközt a felére csökkentve a hiba is körülbelül a felére csökken, ahogyan azt egy elsőrendű módszertől elvárjuk.

# 4. Richardson-extrapoláció

Az extrapolációs módszerek elvét a következőképpen határozhatjuk meg. Tegyük fel, hogy egy kezdetiérték-feladatra  $p$ -ed rendben konvergens numerikus módszert alkalmazunk. Az extrapolációs módszerek lényege, hogy a globális hiba vezető tagját vagy tagjait kiejtve  $p$ -ed rendűnél gyorsabb konvergenciát érünk el (*Elowitz, 2009, Brajnovits, 2011*).

Ezek után pedig térjünk rá a Richardson-extrapolációra (RE). A módszer kidolgozása Lewis Fry Richardson (1881-1953) [1] nevéhez fűződik, aki a 20. század elején fejlesztette ki ezt a módszert, hogy deriváltakat közelítsen vele adott pontokban. Napjainkban elsősorban közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldása során használjuk. A módszernek több ismert változata is létezik: megkülönböztetjük a passzív (4.1) és aktív (4.2) Richardson-extrapolációt [3].

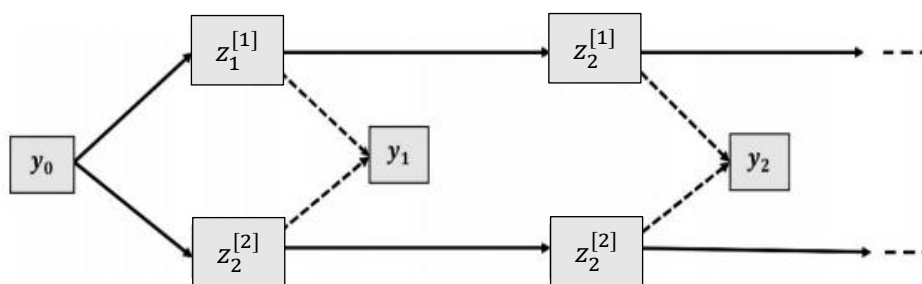
A közönséges differenciálegyenletek megoldásában alkalmazott Richardson-extrapolációs eljárás lényege az, hogy két különböző időközzel (például  $h$  és  $h/2$ ), de ugyanazon  $p$ -ed rendben konvergens módszerrel nyert numerikus megoldásokat kombinálunk. Ezzel egy  $p$ -ed rendben konvergens módszer konvergenciarendje  $p+1$ -re növelhető.

A módszernek több általánosítása is fellelhető, amelyek lényege, hogy még magasabb rendben konvergens eljárást kapjuk. Az egyik lehetséges módszer, melyről a későbbiekben (5.1 fejezetben) részletesebben szó lesz, az úgynevezett ismételt Richardson-extrapoláció. Ennek lényege, hogy kettőnél több különböző hosszúságú lépésközzel nyert numerikus megoldást kombinálunk lineárisan. Egy másik általánosítása pedig az ún. többszörös Richardson-extrapoláció, amelynek az elvéről csak említés szintjén lesz szó az 5.3 fejezetben.

## 4.1 Passzív Richardson-extrapoláció

Mint említettük, ezzel a módszerrel  $p$ -ed rendben pontos alapszemből  $p+1$ -ed rendben pontos módszert gyárthatunk. Először nézzük meg a működési elvét, majd utána konkrétan a kezdetiérték-feladaton való alkalmazását tekintjük.

Ismét vegyünk egy  $h$  és egy  $h/2$  lépésközű rácsot a feladat időintervallumán. Itt is kombináljuk a durvább és a finomabb rácson kapott numerikus megoldást a durva rács pontjaiban, de nem a kombinált eredményből lépünk tovább, hanem a két rácson egymástól függetlenül oldjuk meg a feladatot. Ez látható a 2. ábrán.



2. ábra A passzív Richardson-extrapoláció ábrázolása

Nézzük most konkrétan kezdeti érték (Cauchy) feladatra:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad t \in [t_0, T] \quad y(0) = y_0, \text{ ahol az } f(t, y) \text{ folytonos függvény}$$

Jelölje  $y(t_n)$  az előbbieken felvázolt feladat pontos megoldását valamely  $t_n$  rácspontban. Oldjuk meg ezt  $h$  és  $h/2$  lépésközzel is egy adott numerikus módszerrel. Az így kapott két közelítést a 2. ábrához hasonlóan  $z_n^{[1]}$  és  $z_n^{[2]}$  jelölje. Ekkor

$$y(t_n) = z_n^{[1]} + K_1 \cdot h^p + \vartheta(h^{p+1})$$

$$y(t_n) = z_n^{[2]} + K_1 \cdot (h/2)^p + \vartheta(h^{p+1})$$

$K_1$  a  $z_n^{[1]}$  és  $z_n^{[2]}$  számítás során alkalmazott numerikus módszertől függő mennyiség.  $K_1$  függ a feladattól és az időrétegtől, de nem függ a  $h$  lépésköztől. Keresünk olyan  $c_1$  és  $c_2$  együtthatókat, amelyek mellett fennáll az alábbi összefüggés:

$$y(t_n) - (c_1 \cdot z_n^{[1]} + c_2 \cdot z_n^{[2]}) = \vartheta(h^{p+1})$$

Helyettesítsünk be:

$$\begin{aligned} y(t_n) - c_1(y(t_n) - K_1 \cdot h^p) \\ - c_2(y(t_n) - K_1 \cdot (h/2)^p) = \vartheta(h^{p+1}) \end{aligned}$$

Most az ismeretlenek meghatározására felállítunk két egyenletet.

- Egyenlővé tesszük nullával a bal oldali konstans tagot:

$$y(t_n) - (c_1 + c_2) y(t_n) = 0$$

Ebből az alábbi egyenletet kapjuk:

$$c_1 + c_2 = 1$$

- A  $h^p$ -es tagnak is nullának kell lennie:

$$c_1 \cdot K_1 \cdot h^p + c_2 \cdot K_1 \cdot (h/2)^p = 0$$

Itt a  $K_1 \cdot h^p$  tényezővel egyszerűsítve megkapjuk a második egyenletet:

$$c_1 + \frac{c_2}{2^p} = 0$$

Ilyen módon az

$$c_1 + c_2 = 1$$

$$c_1 + \frac{c_2}{2^p} = 0$$

lineáris algebrai egyenletrendszert nyertük az ismeretlen  $c_1$  és  $c_2$  együtthatókra, amelyek mátrixos alakja

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2^p} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ennek megoldása  $c_1 = \frac{-1}{2^p-1}$ ,  $c_2 = \frac{2^p}{2^p-1}$ , azaz a Richardson-extrapolációval nyert numerikus megoldás alakja a következő:

$$\frac{-z_n^{[1]} + 2^p \cdot z_n^{[2]}}{2^p - 1}$$

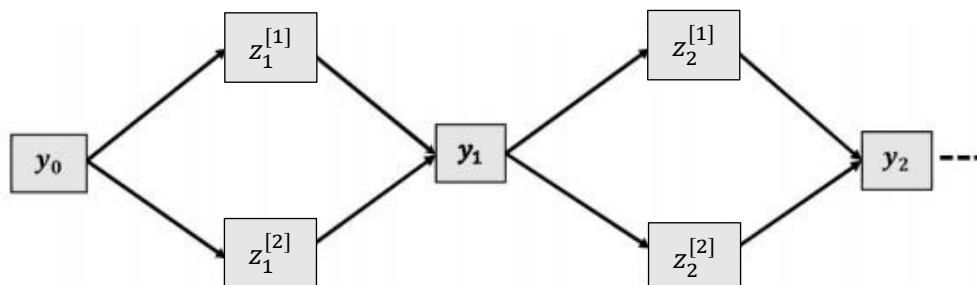
A 2. táblázatban feltüntettük, hogy néhány konkrét  $p$  rend (1,2 ill. 3) esetén milyen súlyokkal kell kombinálnunk a két numerikus megoldást.

*2. táblázat. A  $c_1$  és  $c_2$  súlyok értéke első-, másod- illetve harmadrendű alapmódszer esetén.*

	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$
$c_1$	-1	-1/3	-1/7
$c_2$	2	4/3	8/7

## 4.2 Aktív Richardson-extrapoláció

Tegyük fel, hogy ismét  $h$  és  $h/2$  lépésközzel oldjuk meg a Cauchy-feladatot. Az aktív RE úgy működik, hogy a hosszabb (jelen esetben  $h$ ) lépésközű rács minden pontjában kombináljuk a hosszabb és rövidebb lépésközzel nyert numerikus megoldást, (a rövidebbnél minden esetben két lépést teszünk meg), majd a következő időpillanatban már ezzel a kombinált eredménnyel számolunk tovább (lásd 3. ábra).



3. ábra Az aktív Richardson-extrapoláció ábrázolása

Megmutatható, hogy itt is a 4.1 fejezetben látott  $c_1$  és  $c_2$  súlyokkal kell kombinálni a két numerikus megoldást ahhoz, hogy  $p+1$ -ed rendű módszert nyerjünk. Vizsgáljuk meg ezt a módszert egy konkrét Cauchy-feladatra.

2. feladat:

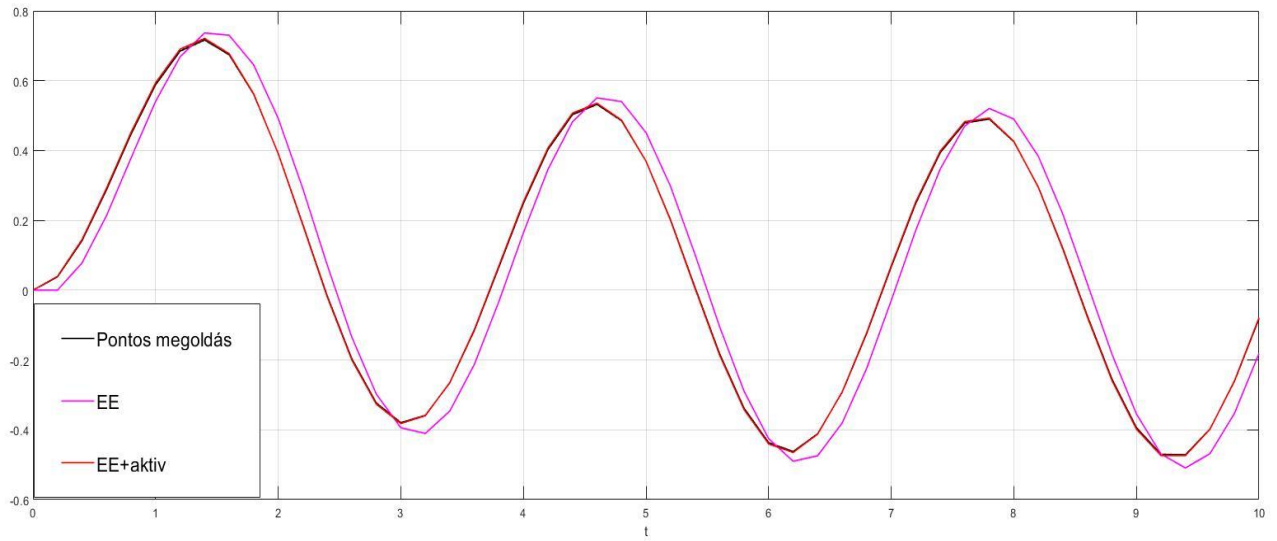
$$y' = \sin(2t) - y/2 \quad t \in [0,10]$$

$$y(0) = 0$$

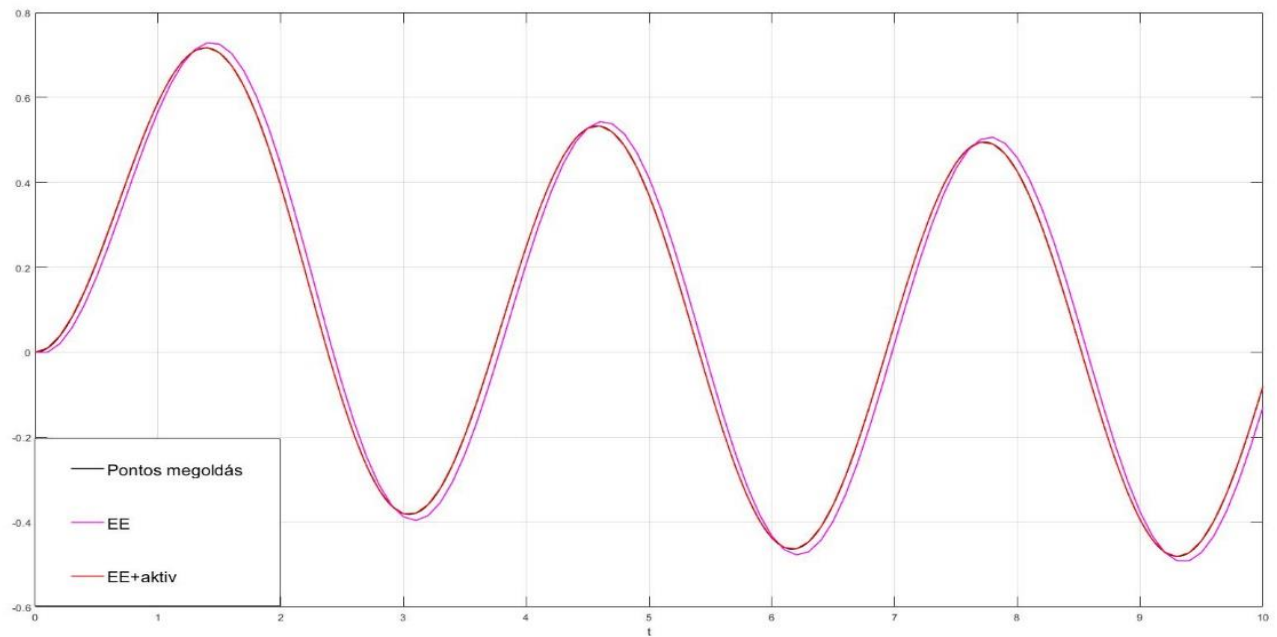
Ennek fogjuk a megvizsgálni a pontos megoldását, összehasonlítani az explicit Euler-módszerrel, valamint annak aktív Richardson-extrapolált változatával kapott numerikus megoldással.

A feladat pontos megoldása:

$$y(t) = \frac{8}{17} \cdot \exp(-0,5t) + \frac{2}{17} \cdot \sin(2t) - \frac{8}{17} \cdot \exp(2t)$$



**4. ábra** A 2. feladat pontos megoldása, valamint az EE és EE+aktiv RE módszerrel, 0,2 lépésközzel nyert numerikus megoldások



**5. ábra** A 2. feladat pontos megoldása, valamint az EE és EE+aktiv RE módszerrel, 0,1 lépésközzel nyert numerikus megoldások



Az összehasonlítást számszerű értékekkel a 3. táblázat mutatja:

**3. táblázat** A 2. feladat numerikus megoldása és hibája  $T = 10$ -ben az EE és EE + aktív RE módszerrel, egyre kisebb lépésközökkel

Lépésköz	EE		EE + aktív RE	
	Numerikus megoldás	Hiba	Numerikus megoldás	Hiba
0,2	-0,181050614986148	0,099588119865018	-0,078721155565381	0,002741339555748
0,1	-0,129907043916938	0,048444548795809	-0,080793353915596	6,691412055331997e-04
0,05	-0,105365727276643	0,023903232155514	-0,081297446483985	1,650486371446436e-04
0,025	-0,093336575378252	0,011874080257122	-0,081421524136325	4,097098480379535e-05
0,0125	-0,087380425202106	0,005917930080976	-0,081452289448090	1,020567303891551e-05
0,00625	-0,084416716628464	0,002954221507335	-0,081459948377855	2,546743273823537e-06

Itt is megfigyelhető az explicit Euler-módszernél, hogy a lépésközt a felére csökkentve a hiba is körülbelül a felére csökken. Illetve az is megfigyelhető, hogy a Richardson-extrapolációval kapott megoldás valóban egy renddel pontosabb, mint az explicit Euler-módszerrel kapott numerikus megoldás.

Az aktív Richardson-extrapolációnak van egy hátulütője, mégpedig az, hogy az alaplódszer jó stabilitási tulajdonságai nem öröklődnek automatikusan át a kombinált megoldásra. Ilyen helyzet fordul elő például, ha az aktív Richardson-extrapolációt az ismert trapézsabállyal ötvözzük [2 és 3].

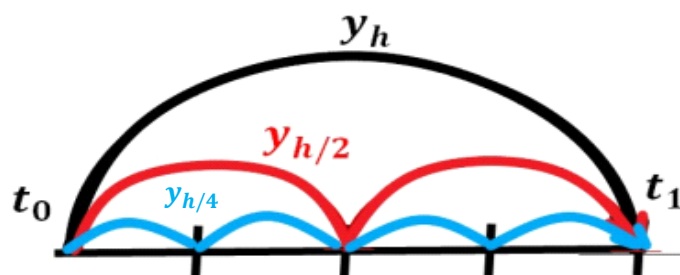
Azonban a passzív Richardson-extrapolációnál, amelyet a 4.1 fejezetben mutattunk be, a fenti stabilitási probléma nem léphet fel, amennyiben az alaplódszer stabil.

# 5. A Richardson-extrapoláció általánosításai

A 4. fejezetben a klasszikus Richardson-extrapolációról volt részletesebben szó, ahol bemutattuk, hogyan tudunk legalább  $p+1$  rendben pontos eljárást létrehozni. A most következő fejezetben a módszer lehetséges általánosításai kerülnek bemutatásra, ami számunkra azért lehet izgalmas, mert választ kaphatunk arra a kérdésre, hogy nyerhetünk-e magasabb rendben konvergens eljárásokat a RE felhasználásával.

## 5.1 Ismételt Richardson-extrapoláció (IRE)

Az egyik lehetséges ötlet a rend további növelésére az ismételt Richardson-extrapoláció elve [4 és 5]. (Az angol nyelvű szakirodalomban a módszer elnevezése Repeated Richardson extrapolation, rövidítve RRE.) Alkalmazzunk egy tetszőleges numerikus módszert, például a korábbiakban bemutatott Explicit Euler-módszert három különböző lépésközzel, pl.  $h$ ,  $h/2$  és  $h/4$ . Ezután képezzük a lineáris kombinációjukat a legdurvább rácsháló pontjaiban az alábbi ábra alapján:



6. ábra Az Ismételt Richardson-extrapoláció ábrázolása

A három numerikus megoldás hibájára az alábbi összefüggések érvényesek:

$$y(t_n) - z_n^{[1]} = K_1 \cdot h^p + K_2 \cdot h^{p+1} + \vartheta(h^{p+2})$$

$$y(t_n) - z_n^{[2]} = K_1 \cdot (h/2)^p + K_2 \cdot (h/2)^{p+1} + \vartheta(h^{p+2})$$

$$y(t_n) - z_n^{[3]} = K_1 \cdot (h/4)^p + K_2 \cdot (h/4)^{p+1} + \vartheta(h^{p+2})$$

Szeretnénk  $z_n^{[1]}$ ,  $z_n^{[2]}$  és  $z_n^{[3]}$  értékét úgy kombinálni lineárisan, hogy a hiba  $h^{p+2}$ -edik hatványával legyen arányos. Könnyen megmutatható, hogy a keresett kombináció a következő lesz:

$$y_n^{IRE} = \frac{z_n^{[1]} - 3 \cdot 2^p \cdot z_n^{[2]} + 2^{(2p+1)} \cdot z_n^{[3]}}{1 - 3 \cdot 2^p + 2^{(2p+1)}}$$

A 4. táblázatban feltüntetjük, hogy különböző  $p$  értékekre a fenti képlet szerint milyen  $c_1, c_2, c_3$  súlyokat kell használnunk.

**4. táblázat.** A  $c_1, c_2$ , és  $c_3$  súlyok értéke első-, másod-ill. harmadrendű alaplómódszerre  $h, h/2$  és  $h/4$  lépésközű rácsok esetén.

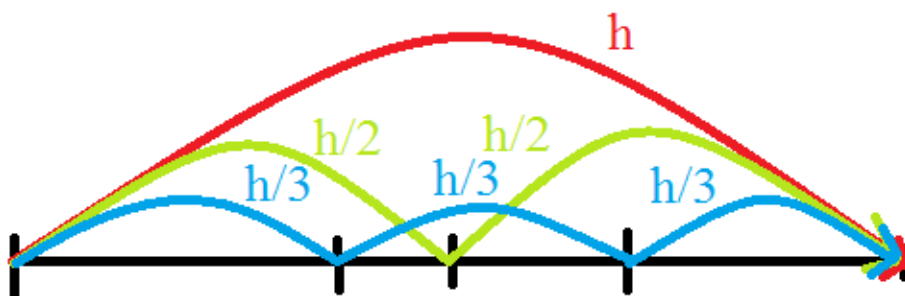
	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$
$c_1$	1/3	1/21	1/105
$c_2$	-2	-4/7	-8/35
$c_3$	8/3	32/21	128/105

## 5.2 Numerikus módszerek vizsgálata különböző lépésközökre

A szakirodalomban csak arra találtunk példát, ahol ismétléses Richardson-extrapolációval [4,5] az előbb bemutatott módon, azaz  $h$ ,  $h/2$  és  $h/4$ -es lépésközzel dolgoznak, amit feltehetően az indokol, hogy ekkor a finomabb rács mindig tartalmazza a durvábbat. Ez azonban, mint látni fogjuk, nem szükséges ahhoz, hogy magasabb rendben pontos módszert nyerjünk. Ebben a fejezetben több lehetséges lépésköz-megválasztáshoz is meghatározzuk a módszer képletét, majd felírjuk a módszer együtthatóit meghatározó lineáris algebrai egyenletrendszert arra az általános esetre, amikor tetszőleges számú és hosszúságú lépésközzel nyert numerikus megoldásokat kombinálunk.

### 5.2.1 Az IRE módszer $h$ , $h/2$ és $h/3$ lépésközre

Szeretnénk belátni, hogy kétszer magasabb rendben pontos megoldás  $h$ ,  $h/2$  és  $h/3$  lépésközű rács segítségével is nyerhető, ami azért lehet érdekes, mert a klasszikus IRE módszernél némileg kisebb számításigénye lenne. Mivel az előző szakaszban ismertetett eredeti IRE módszer a durva rács egy részintervallumán összesen 7 kis lépést végez el, míg ebben az esetben ez a szám csak 6, így számításigénye az eredeti IRE módszer számításigényének  $6/7$ -szerese lenne. Megvizsgáljuk, hogy milyen súlyokkal kombinálva kapunk két renddel pontosabb módszert.



7. ábra Az ismételt Richardson-extrapoláció ábrázolása az új lépésközökre

Ebben az esetben a három numerikus megoldás hibájára az alábbi összefüggések érvényesek:

$$y(t_n) - z_n^{[1]} = K_1 \cdot h^p + K_2 \cdot h^{p+1} + \vartheta(h^{p+2})$$

$$y(t_n) - z_n^{[2]} = K_1 \cdot (h/2)^p + K_2 \cdot (h/2)^{p+1} + \vartheta(h^{p+2})$$

$$y(t_n) - z_n^{[3]} = K_1 \cdot (h/3)^p + K_2 \cdot (h/3)^{p+1} + \vartheta(h^{p+2})$$

Keresünk olyan  $c_1, c_2, c_3$  együtthatókat, amelyekre fennáll az alábbi összefüggés:

$$y(t_n) - (c_1 \cdot z_n^{[1]} + c_2 \cdot z_n^{[2]} + c_3 \cdot z_n^{[3]}) = \vartheta(h^{p+2})$$

Helyettesítsünk be:

$$\begin{aligned} y(t_n) - c_1(y(t_n) - K_1 \cdot h^p - K_2 \cdot h^{p+1}) \\ - c_2(y(t_n) - K_1 \cdot (h/2)^p - K_2 \cdot (h/2)^{p+1}) \\ - c_3(y(t_n) - K_1 \cdot (h/3)^p - K_2 \cdot (h/3)^{p+1}) = \vartheta(h^{p+2}) \end{aligned}$$

- Egyenlővé tesszük nullával a bal oldali konstans tagot:

$$y(t_n) - (c_1 + c_2 + c_3) y(t_n) = 0$$

Ebből az alábbi egyenletet kapjuk:

$$c_1 + c_2 + c_3 = 1$$

- A  $h^p$ -es tagnak is nullának kell lennie:

$$c_1 \cdot K_1 \cdot h^p + c_2 \cdot K_1 \cdot (h/2)^p + c_3 \cdot K_1 \cdot (h/3)^p = 0$$

Itt a  $K_1 \cdot h^p$  tényezővel egyszerűsítve, a

$$c_1 + \frac{c_2}{2^p} + \frac{c_3}{3^p} = 0$$

egyenletre jutunk.

- A  $h^{p+1}$ -es tagnak is nullának kell lennie:

$$c_1 \cdot K_2 \cdot h^{p+1} + c_2 \cdot K_2 \cdot (h/2)^{p+1} + c_3 \cdot K_2 \cdot (h/3)^{p+1} = 0$$

Ebből a közös  $K_2 \cdot h^{p+1}$  tényezővel egyszerűsítve megkapjuk a harmadik egyenletet:

$$c_1 + \frac{c_2}{2^{p+1}} + \frac{c_3}{3^{p+1}} = 0$$

Ily módon az alábbi lineáris algebrai egyenletrendszerre jutottunk:

$$c_1 + c_2 + c_3 = 1$$

$$c_1 + \frac{c_2}{2^p} + \frac{c_3}{3^p} = 0$$

$$c_1 + \frac{c_2}{2^{p+1}} + \frac{c_3}{3^{p+1}} = 0$$

amely mátrixos alakban:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2^p} & \frac{1}{3^p} \\ 1 & \frac{1}{2^{p+1}} & \frac{1}{3^{p+1}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A Matlab szimbolikus eszköztára segítségével a fenti lineáris egyenletrendszer paraméteresen megoldható, és az IRE módszer alábbi formuláját szolgáltatja:

$$y_n^{IRE} := \frac{z_n^{[1]} - 2^{(p+2)} \cdot z_n^{[2]} + 3^{(p+1)} \cdot z_n^{[3]}}{1 - 2^{(p+2)} + 3^{(p+1)}}$$

Ismét megfigyelhetjük, hogy a lineáris kombinációban szereplő súlyok az alpmódszer  $p$  rendjétől függenek.

Az 5. táblázatban közöljük ezek konkrét értékét  $p = 1, 2$  és  $3$  esetére.

**5. táblázat.** A  $c_1, c_2,$  és  $c_3$  súlyok értéke első-, másod-ill. harmadrendű alpmódszerre  $h, h/2$  és  $h/3$  lépközű rácsok esetén.

	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$
$c_1$	$1/2$	$1/12$	$1/50$
$c_2$	$-4$	$-4/3$	$-16/25$
$c_3$	$9/2$	$9/4$	$81/50$

## 5.2.2 Az IRE módszer három tetszőleges lépésközzel

Hasznos lehet a három rácstra támaszkodó IRE módszert még általánosabb megközelítésben megvizsgálni, nevezetesen, ha  $h$ ,  $h/k$  és  $h/m$  lépésközt használunk, ahol  $k$  és  $m$  nem egyenlő, illetve mindkettő pozitív egész szám.

A levezetés az 5.2.1-es szakasz mintájára könnyen elvégezhető, és így a következő lineáris egyenletrendszert kapjuk a keresett  $c_1$ ,  $c_2$  és  $c_3$  súlyokra:

$$c_1 + c_2 + c_3 = 1$$

$$c_1 + \frac{c_2}{m^p} + \frac{c_3}{k^p} = 0$$

$$c_1 + \frac{c_2}{m^{p+1}} + \frac{c_3}{k^{p+1}} = 0$$

Az egyenletrendszer mátrixos alakja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{m^p} & \frac{1}{k^p} \\ 1 & \frac{1}{m^{p+1}} & \frac{1}{k^{p+1}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A Matlab szimbolikus eszköztára segítségével a  $p$  renddel mint paraméterrel számolva a  $h$ ,  $h/k$  és  $h/m$  lépésközű IRE módszer képlete:

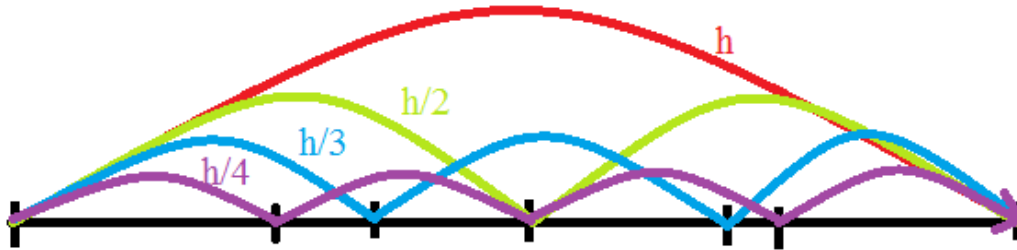
$$y_n^{IRE} := \frac{(k-m)z_n^{[1]} + (m^{p(m-k\cdot m)}) \cdot z_n^{[2]} + k^{pm-p+1} \cdot z_n^{[3]}}{(k-m) - k^{p+1} + m^{p+1} + k^{p\cdot m+1} - k \cdot m^{p+1}}$$

Ellenőrzésképpen, ha  $m$ -t éppen 2-nek,  $k$ -t pedig 3-nak választjuk, akkor az előző képletet kell kapnunk, és erről Matlab-teszttel meg is győződünk.



## 5.2.3 Az IRE módszer négy lépésközzel

Van, amikor szükségünk van a pontosság további növelésére, ekkor egy lehetséges módszer lehet számunkra, hogyha még egy újabb lépésközzel megoldjuk a feladatot, és így már négy megoldást kombinálunk lineárisan. Ebben a fejezetben konkrétan a  $h$ ,  $h/2$ ,  $h/3$  és  $h/4$ -es lépésközt fogjuk alapul venni.



8. ábra Az ismételt Richardson-extrapoláció ábrázolása 4 különböző lépésközzre

Az előbbieken látott  $p+2$ -ed rendben pontos módszer helyett most  $p+3$ -ad rendű módszert szeretnénk kapni. Ez esetben az  $n$ -edik időrétegen elkövetett hibákat az alábbi módon tudjuk felírni:

$$y(t_n) - z_n^{[1]} = K_1 \cdot h^p + K_2 \cdot h^{p+1} + K_2 \cdot h^{p+1} + \vartheta(h^{p+3})$$

$$y(t_n) - z_n^{[2]} = K_1 \cdot (h/2)^p + K_2 \cdot (h/2)^{p+1} + K_3 \cdot (h/2)^{p+1} + \vartheta(h^{p+3})$$

$$y(t_n) - z_n^{[3]} = K_1 \cdot (h/3)^p + K_2 \cdot (h/3)^{p+1} + K_3 \cdot (h/3)^{p+1} + \vartheta(h^{p+3})$$

$$y(t_n) - z_n^{[4]} = K_1 \cdot (h/4)^p + K_2 \cdot (h/4)^{p+1} + K_3 \cdot (h/4)^{p+1} + \vartheta(h^{p+3})$$

Keresünk olyan  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  és  $c_4$  együtthatókat, amelyek mellett fennáll az

$$y(t_n) - (c_1 \cdot z_n^{[1]} + c_2 \cdot z_n^{[2]} + c_3 \cdot z_n^{[3]} + c_4 \cdot z_n^{[4]}) = \vartheta(h^{p+3})$$

összefüggés.

Helyettesítsünk be:

$$\begin{aligned}
 y(t_n) & -c_1(y(t_n) - K_1 \cdot h^p - K_2 \cdot h^{p+1} - K_3 \cdot h^{p+2}) \\
 & -c_2(y(t_n) - K_1 \cdot (h/2)^p + K_2 \cdot (h/2)^{p+1} - K_3 \cdot (h/2)^{p+2}) \\
 & -c_3(y(t_n) - K_1 \cdot (h/3)^p + K_2 \cdot (h/3)^{p+1} - K_3 \cdot (h/3)^{p+2}) \\
 & -c_4(y(t_n) - K_1 \cdot (h/4)^p - K_2 \cdot (h/4)^{p+1} - K_3 \cdot (h/4)^{p+2}) = \vartheta(h^{p+3})
 \end{aligned}$$

Célunk az ismeretlen együtthatók  $c_1, c_2, c_3$  és  $c_4$  meghatározása. Ezt az 5.2.1. szakaszban bemutatottakhoz hasonlóan végezhetjük el, de ez esetben négy egyenletre lesz szükségünk.

- Egyenlővé tesszük nullával a bal oldali konstans tagot:

$$y(t_n) - (c_1 + c_2 + c_3 + c_4) y(t_n) = 0$$

Ebből az alábbi egyenletet kapjuk:

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 1$$

- A  $h^p$ -es tagnak is nullának kell lennie:

$$c_1 \cdot K_1 \cdot h^p + c_2 \cdot K_1 \cdot (h/2)^p + c_3 \cdot K_1 \cdot (h/3)^p + c_4 \cdot K_1 \cdot (h/4)^p = 0$$

Itt a  $K_1 \cdot h^p$  tényezővel egyszerűsítve megkapjuk a második egyenletet:

$$c_1 + \frac{c_2}{2^p} + \frac{c_3}{3^p} + \frac{c_4}{4^p} = 0$$

- A  $h^{p+1}$ -es tagnak is nullának kell lennie:

$$c_1 \cdot K_1 \cdot h^{p+1} + c_2 \cdot K_1 \cdot (h/2)^{p+1} + c_3 \cdot K_1 \cdot (h/3)^{p+1} + c_4 \cdot K_1 \cdot (h/4)^{p+1} = 0$$

Itt a  $K_1 \cdot h^{p+1}$  tényezővel egyszerűsítve megkapjuk a harmadik egyenletet:

$$c_1 + \frac{c_2}{2^{p+1}} + \frac{c_3}{3^{p+1}} + \frac{c_4}{4^{p+1}} = 0$$

- A  $h^{p+2}$  -es tagnak is nullának kell lennie:

$$c_1 \cdot K_1 \cdot h^{p+1} + c_2 \cdot K_1 \cdot (h/2)^{p+1} + c_3 \cdot K_1 \cdot (h/3)^{p+1} + c_4 \cdot K_1 \cdot (h/4)^{p+1} = 0$$

Itt a  $K_3 \cdot h^{p+2}$  tényezővel egyszerűsítve megkapjuk a negyedik egyenletet:

$$c_1 + \frac{c_2}{2^{p+2}} + \frac{c_3}{3^{p+2}} + \frac{c_4}{4^{p+2}} = 0$$

Ilyen módon az alábbi lineáris algebrai egyenletrendszerre jutottunk:

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 1$$

$$c_1 + \frac{c_2}{2^p} + \frac{c_3}{3^p} + \frac{c_4}{4^p} = 0$$

$$c_1 + \frac{c_2}{2^{p+1}} + \frac{c_3}{3^{p+1}} + \frac{c_4}{4^{p+1}} = 0$$

$$c_1 + \frac{c_2}{2^{p+2}} + \frac{c_3}{3^{p+2}} + \frac{c_4}{4^{p+2}} = 0$$

Ebben az esetben is érdemes az egyenletrendszert mátrixos alakba rendezni:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2^p} & \frac{1}{3^p} & \frac{1}{4^p} \\ 1 & \frac{1}{3^{p+1}} & \frac{1}{3^{p+1}} & \frac{1}{3^{p+1}} \\ 1 & \frac{1}{3^{p+1}} & \frac{1}{3^{p+1}} & \frac{1}{3^{p+1}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A Matlab szimbolikus eszköztára segítségével a  $p$  renddel mint paraméterrel számolva a következő lesz a módszer képlete:

$$y_n^{IRE} := \frac{-1 \cdot z_n^{[1]} + 12 \cdot 2^p \cdot z_n^{[2]} - 27 \cdot 3^{(p+1)} \cdot z_n^{[3]} + 16 \cdot 4^p \cdot z_n^{[4]}}{-1 + 12 \cdot 2^p - 27 \cdot 3^p + 16 \cdot 4^p}$$

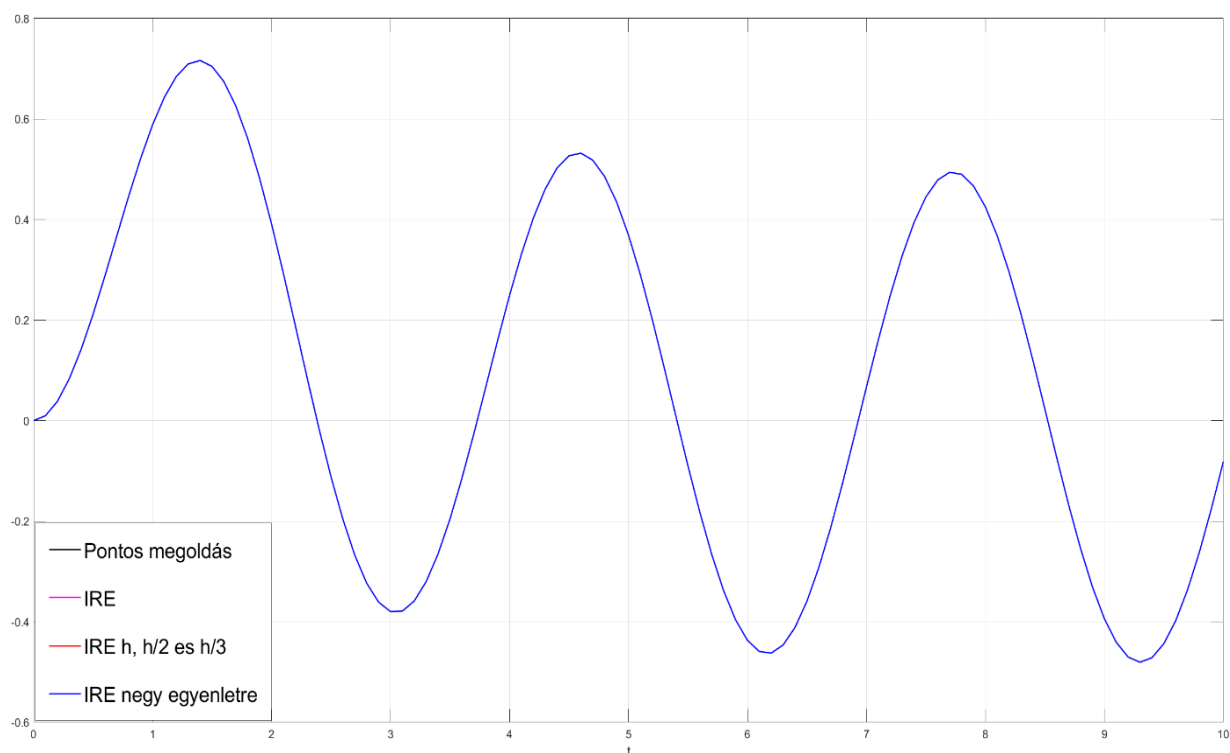
**6. táblázat.** A  $c_1, c_2, c_3$  és  $c_4$  súlyok értéke első-, másod-ill. harmadrendű alapmódszerre  $h, h/2, h/3$  és  $h/4$  lépésközű rácsok esetén.

	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$
$c_1$	-1/6	-1/60	-1/390
$c_2$	4	4/5	16/65
$c_3$	-27/2	-81/20	-243/130
$c_4$	32/3	64/15	512/195

## 5.2.4 Az IRE módszerek összehasonlítása egy konkrét feladatra

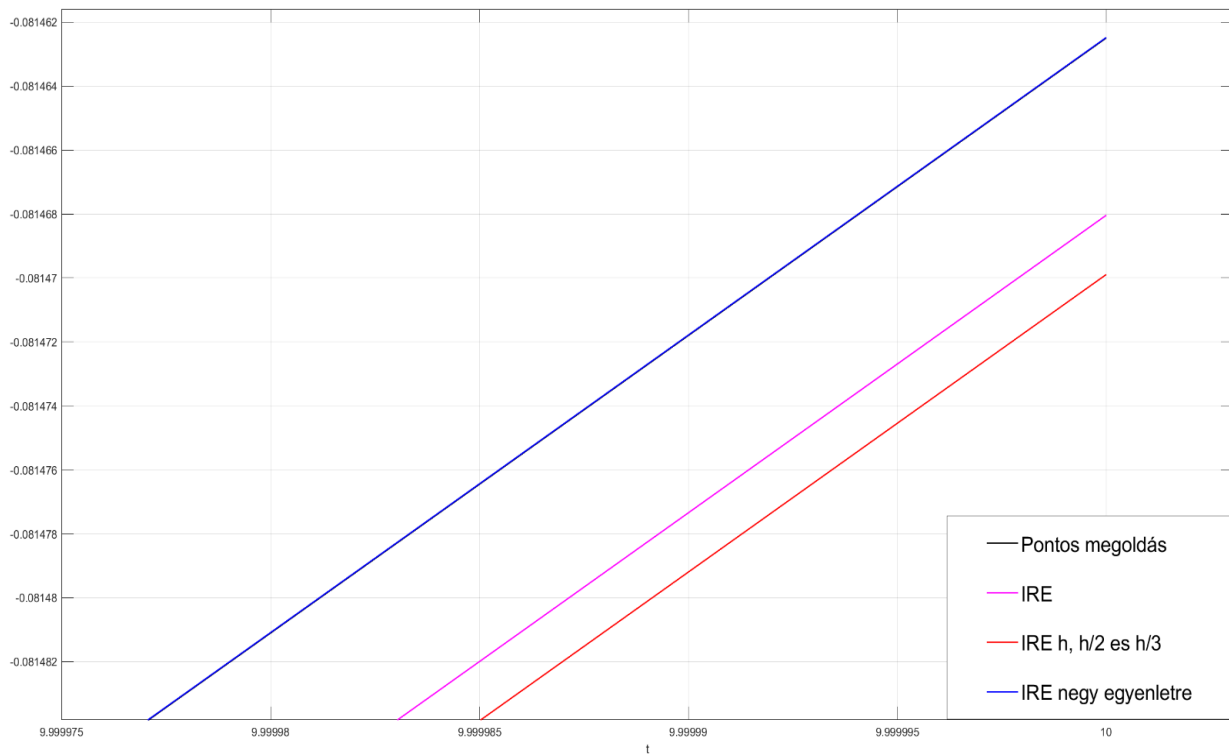
Ebben a részben a 4.1 fejezetben bemutatott 2. feladatot oldjuk meg az IRE módszer különböző változataival dolgozva, különböző számú és hosszúságú lépésközökre. Elsődleges várakozásunk, hogy a legpontosabb eredményt, mivel  $p+3$ -ad rendben pontos, a négy lépésközzel kombinált IRE módszer fogja adni, míg a legnagyobb hibája a  $h$ ,  $h/2$  és  $h/3$  kombinált IRE módszernek lesz, hiszen a klasszikus IRE módszernél a harmadik lépésköz finomabb, mint ebben az esetben.

A 9. ábrán megismerhetjük a kapott numerikus megoldások grafikonjait a pontos megoldással összehasonlítva.



**9. ábra** A 2. feladat pontos megoldása, illetve a három különböző IRE módszerrel kapott numerikus megoldások  $[0,10]$  intervallumon

Mivel nagyon közel vannak egymáshoz az értékek, ezért az ábra egy kis részletére, a  $[9,999975,10]$  intervallumra jobban ránközelítünk, hogy szabad szemmel láthatóbbak legyenek a hibák:



**10. ábra** A 2. feladat pontos megoldása, illetve a három különböző IRE megoldás kinagyítva a  $[9,999975,10]$  intervallumon

A 10. ábrán szabad szemmel a pontos megoldás és az IRE módszer négy különböző lépésközzel gyakorlatilag alig különül el, ezért érdekesebb inkább a kapott hibák számszerű értékeit vizsgálni, amelyeket a 7. táblázatban mutatunk be.

7. táblázat. A különböző IRE módszerek hibái  $T = 10$ -ben

Lépésköz	IRE módszer h, h/2 és h/4 lépésközzel (EE alapmódszerrel)	IRE módszer h, h/2 és h/3 lépésközzel (EE alapmódszerrel)	IRE módszer h, h/2, h/3 és h/4 lépésközzel (EE alapmódszerrel)
	hiba	hiba	hiba
0,2	4.294229525850235e-05	5.729915744437375e-05	1.274880715163018e-07
0,1	5.543941231367366e-06	7.396997554226514e-06	1.521760825684559e-08
0,05	7.019039493516566e-07	9.362541212032394e-07	1.146429479126354e-09
0,025	8.823602093421812e-08	1.176738001762434e-07	7.730535656058635e-11
0,0125	1.105887628694013e-08	1.474683700153356e-08	5.014738624353754e-12
0,00625	1.384138331728124e-09	1.845633396113655e-09	3.580191698659974e-13

Ahogy előzetesen vártuk, a klasszikus IRE módszer egy kicsivel kisebb hibát eredményez, mint az IRE h, h/2 és h/3 lépésközökkel, de ne felejtsük el, hogy az utóbbinak a számításigénye is valamivel kisebb. Szintén látható a 7. táblázat alapján, hogy az IRE módszer négy lépésközre magasabb rendben pontos megoldást biztosított számunkra, a 2. feladat esetén. A hibák ugyanis az első két módszer esetén körülbelül a nyolcadára, a harmadiknál viszont már a tizenhatodára csökkentek.

## 5.2.5 Az általános IRE módszer

Viszonylag ritkán van gyakorlati alkalmazásokban szükség 10-12 rendben konzisztens módszerre, de elméleti vonatkozásban izgalmas lehet számunkra a vizsgálata. Az ismételt Richardson-extrapolációval többszöri ismétlésekkel tetszőleges pontosság elérhető.

A korábbiakban a mátrixos alakokban megfigyelhetünk egyfajta sémát, amelynek segítségével most tetszőleges méretre általánosítjuk az IRE módszert. Az ötlet a következő: vegyünk  $w$  darab különböző rácsot, amelyek lépésköze rendre  $h, h/m_1, h/m_2, \dots, h/m_{w-1}$  ahol  $m_1, m_2, \dots, m_{w-1}$  különböző pozitív egész számok.

Ezek mindegyikén oldjuk meg a Cauchy-feladatot, és a megoldásokat  $c_1, \dots, c_{w-1}$  súlyokkal kombináljuk úgy, hogy a kombinált módszer rendje  $p+w-1$  legyen.

A korábban látottak természetes általánosításával az alábbi lineáris egyenletrendszert állíthatjuk fel az ismeretlen  $c_1, \dots, c_{w-1}$  együtthatókra:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_{w-1} &= 1 \\ c_1 + \frac{c_2}{m_1^p} + \frac{c_3}{m_2^p} + \dots + \frac{c_{w-1}}{m_{w-1}^p} &= 0 \\ c_1 + \frac{c_2}{m_1^{p+1}} + \frac{c_3}{m_2^{p+1}} + \dots + \frac{c_{w-1}}{m_{w-1}^{p+1}} &= 0 \\ &\dots \\ c_1 + \frac{c_2}{m_1^{p+w-1}} + \frac{c_3}{m_2^{p+w-1}} + \dots + \frac{c_{w-1}}{m_{w-1}^{p+w-1}} &= 0 \end{aligned}$$

Mátrixos alakban felírva kicsivel könnyebben áttekinthető a szabályszerűség:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ & 1 & \frac{1}{m_1^p} & \frac{1}{m_2^p} & \dots & \frac{1}{m_{w-2}^p} & \frac{1}{m_{w-1}^p} \\ & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & \frac{1}{m_1^{p+w-2}} & \frac{1}{m_2^{p+w-2}} & \dots & \frac{1}{m_{w-2}^{p+w-2}} & \frac{1}{m_{w-1}^{p+w-2}} \\ 1 & \frac{1}{m_1^{p+w-1}} & \frac{1}{m_2^{p+w-1}} & \dots & \frac{1}{m_{w-2}^{p+w-1}} & \frac{1}{m_{w-1}^{p+w-1}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{w-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

(megjegyzés: az egyenlet jobb oldalán  $w-1$  darab 0 szerepel)

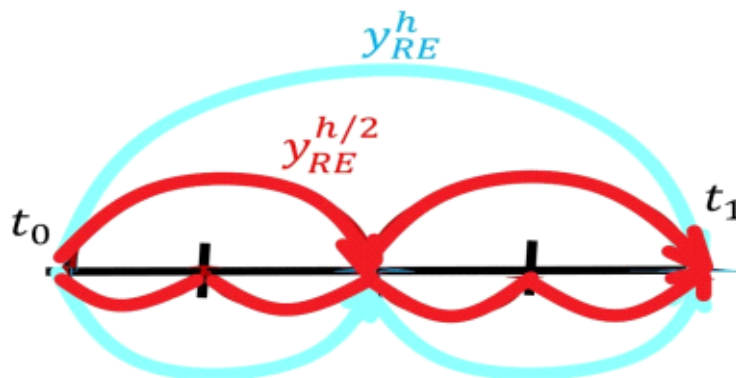


## 5.3 Többszörös Richardson-extrapoláció (TRE)

Létezik a Richardson-extrapolációnak egy másik általánosítása, amelyet többszörös Richardson-extrapolációnak neveznek [4 és 5]. (Az angol nyelvű szakirodalomban a módszer elnevezése Multiple Richardson extrapolation, rövidítve MRE.)

A módszer az ismételt Richardson-extrapolációhoz hasonlóan  $p$ -ed rendben pontos alaplómódszerből konstruál  $p+2$ -ed rendben pontos eljárást. A módszer lényege az, hogy valamely  $p$ -ed rendű alaplómódszert a klasszikus Richardson-extrapolációval (KRE) kombinálva egy  $p+1$ -ed rendben pontos módszerünk van, és ezen kombinált módszert kombináljuk újból a klasszikus RE-val.

Vagyis először megoldjuk a feladatot az alaplómódszer és a klasszikus RE kombinációjával  $h$  lépésközön (azaz  $h$  és  $h/2$  lépésközzel dolgozva), a kapott megoldást jelölje  $z_{KRE}$ , majd az alaplómódszer és a KRE módszer kombinációjával kettőt lépünk  $h/2$  lépésközzel (mindkét lépésben  $h/2$  a hosszabb és  $h/4$  a rövidebb lépés). Így a  $w_{KRE}$ -vel jelölt numerikus megoldást kapjuk. A két numerikus megoldást az időlépcső végén lineárisan kombináljuk.



11. ábra A többszörös Richardson-extrapoláció ábrázolása

Külön-külön a zKRE és a wKRE is a 4. fejezetben bemutatott okok miatt  $p+1$  rendű pontosságot biztosít számunkra. Ezért az alábbi képlettel megadott módon kell lineárisan kombinálnunk a zKRE-t és wKRE értékét [4 és 5]:

$$y_n^{TRE} = \frac{2^{p+1} \cdot wKRE - zKRE}{2^{p+1} - 1}$$

Ekkor a módszerünk  $p+2$ -ed rendben lesz pontos. Tehát az IRE módszerhez hasonlóan itt is sikerült elérnünk a pontosság javítását.

A többszörös Richardson-extrapolációnál is felmerül az a kérdés, mint az ismételt esetén, hogy tudunk-e tovább javítani a pontosságon. A válasz az, hogy igen, méghozzá hasonló elven, mint az IRE módszernél. Ott eggyel több rács hozzávételével tudunk pontosabb megoldást előállítani, itt pedig a KRE elvét alkalmazhatjuk akár tetszőlegesen sokszor a kombinált megoldásra. Így pl.  $p+3$ -ad rendben pontos módszert úgy nyerhetünk, hogy a többszörös RE-val kapott  $p+2$ -ed rendű módszert alkalmazzuk  $h$  és  $h/2$  távolságon, majd kombináljuk lineárisan. A súlyok felírásánál ekkor már  $p+2$  helyettesítendő az eredeti KRE képletében szereplő  $p$  helyébe.

# 6. Összegzés

A szakdolgozatban közönséges differenciálegyenletek numerikus módszereivel foglalkoztunk. Bemutattunk egy konkrét véges különbséges módszert, az explicit Euler-módszert. Utána a pontosság javítása céljából bevezettük a Richardson-extrapoláció módszerét. Megvizsgáltuk a módszer pontosságát, és egy konkrét feladaton összehasonlítottuk a hibáját az explicit Euler-módszerével. Ezek után a Richardson-extrapoláció általánosításaival foglalkoztunk. Egy konkrét feladaton összehasonlítottuk az ismételt Richardson-extrapoláció különböző változatait, ahol láthattuk, hogy minél több különböző lépésközzel kapott numerikus megoldást kombinálunk, annál pontosabb lesz a kombinált megoldás. Majd megkonstruáltuk az ismételt Richardson-extrapoláció általános módszerét, amellyel a rend tetszőleges nagyságúra növelhető. Végezetül szó volt egy másik lehetséges általánosításról, a többszörös Richardson-extrapolációról.

A dolgozatban bemutatottak számtalan bővítési lehetőséget rejtenek magukban. Részletesebben is ki lehetne fejteni a numerikus módszereket, bemutatathatnánk közülük több különbözőt is, például az implicit Euler, a Runge-Kutta vagy éppen az Adams-típusú módszereket. Összehasonlíthatnánk ezek hibáit különböző feladatokon, a lépésközök változtatásával. Megvizsgálhatnánk, hogy ezek a módszerek, hogyan is működnek a Richardson-extrapoláció különböző fajtáira. Végezhetnénk különböző stabilitásvizsgálatokat.

Összességében a szakdolgozatban betekintést nyerhettem a numerikus matematika világába. Lehetőségem nyílt jobban megérteni, hogyan működnek a differenciálegyenletek numerikus módszerei, valamint, hogy milyen területeken és milyen feladatok megoldására lehet őket felhasználni. Elmélyíthettem a tudásomat a programozás területén, és átfogó képet kaphattam a Richardson-extrapoláció módszeréről. Remélem, hogy az itt elsajátított hasznos tudást a későbbi tanulmányaim, illetve jövőbeli munkám során is sikeresen fel tudom majd használni.

# Irodalomjegyzék

- [1] [https://en.wikipedia.org/wiki/Lewis\\_Fry\\_Richardson](https://en.wikipedia.org/wiki/Lewis_Fry_Richardson)
- [2] Brajnovits Brigitta: A Richardson-extrapoláció alkalmazása és matematikai vizsgálata egyszerűsített környezeti modellekben, diplomamunka, ELTE (2011).
- [3] Faragó, I., Havasi, Á. és Zlatev, Z.: Efficient implementation of stable Richardson Extrapolation algorithms, *Computers and Mathematics with Applications*, 60 (2010), pp. 2309-2325.
- [4] Zlatev, Z., Dimov, I., Faragó, I., Georgiev, K., Havasi, Á.: Absolute Stability and Implementation of the Two-times Repeated Richardson Extrapolation together with Explicit Runge-Kutta Methods, *Lecture Notes in Computer Science*. Vol. 11386 (2019), pp. 673-686 ([https://doi.org/10.1007/978-3-030-11539-5\\_80](https://doi.org/10.1007/978-3-030-11539-5_80)).
- [5] Zlatev, Z. et al: Stability of Different Versions of the Richardson Extrapolation Combined with Implicit Runge-Kutta Methods, előkészületben.
- [6] Havasi, Á.: A Richardson-extrapoláció elméleti vizsgálata és alkalmazásai, habilitációs dolgozat, ELTE, 2018.
- [7] Faragó, I., Horváth, R.: Numerikus módszerek, Typotex Kiadó, 2011.
- [8] Elowitz, J.: Numerical solutions to partial differential equations and extrapolation techniques, 2009, személyes közlés.