EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Bukus Bernadett

Az amerikai opciók árazása Longstaff-Schwarz módszerrel

BSc Elemző Matematikus Szakdolgozat

Témavezető:
Molnár-Sáska Gábor

Budapest, 2021

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Dolgozatom témájául egy nagyon összetett és aktuális témát választottam. Az opciók árazására mára már többféle módszert és modellt megalkottak. Ezeket a modelleket szeretném most bemutatni kifejezetten az amerikai opciókra vonatkozólag, kifejezetten a Longstaff-Schwarz módszerre.

A pénzügyi világ nagymértékben meghatározza mindennapjainkat. Külföldi utazásaink során is figyelemmel követjük a valuták napi árfolyamát, azaz érdemes-e most venni vagy eladni vagy sem. A tőzsdén, ami a legnagyobb gazdaságelméleti terület is hasonló kérdések merülnek fel, viszont bonyolultabb elemzésekkel.

A származtatott termékek értéke bizonyos változóktól függ. A származtatott termékek egyik fajtája az opciók, melyek nagy mennyiségben cserélnek gazdát a tőzsdén és a tőzsdén kívüli (OTC) piacokon is. De mit is jelent, hogy az opció egy származtatott termék? A származtatott termék azt jelenti, hogy értéke egy másik mögöttes termék árától függ. A különböző értékpapírok árfolyamának elemzésére sztochasztikus folyamatokat és differenciálegyenleteket alkalmaznak, amiknek egy részét a későbbiekben részletesebben szeretnék bemutatni.

2. Opciók

2.1 Alapfogalmak

Mielőtt az opciók árazásáról kezdenék el beszélni, először a kapcsolódó fogalmakat vezetném be. Az opciók a határidős ügyletek egyik fajtája, amivel 1973-ban kezdtek el kereskedni. Opciókkal a tőzsdei és tőzsdén kívüli (OTC) piacon is lehet kereskedni. Opciókkal tőzsdén csak a meghatározott, szabványosított tulajdonságok szerint lehet kereskedni. A tőzsdén leggyakrabban tőzsdeindexekre szóló opciókkal kereskednek. Ezzel szemben az OTC piacon leggyakrabban devizákra és kamatlábakra szóló opciókkal kereskednek.

Az opció nem más, mint egy lehetőség. Aki opciót vásárol az egy választási lehetőséget vásárol arra, hogy egy távolabbi időpontban az adott terméket (*alaptermék*) egy adott mennyiségen megvásárolja vagy eladja. Tehát az opció nem más, mint *derivatív termék*, azaz értékének nagy rész egy mögöttes alaptermék (pl.: kötvény, részvény stb.) alapján eredeztethető.

2.1.1. Definíció: Az opció egy olyan származtatott termék, amely az egyik félnek az opciós díj megfizetése ellenében jogot biztosít arra, hogy a jövőben valamit megvegyen vagy eladjon, anélkül, hogy erre kötelezné.

A definícióból látható, hogy egy opciós ügyletnek mindig két szereplője van:

- a vevő vagy jogosult, aki megvásárolta a jogot,
- az eladó vagy kötelezett, aki eladta a jogot, vagyis számára egy kötelezettség alakult ki.

„Az opció tehát *aszimmetrikus ügylet*, hiszen az egyik szereplőnek csak joga, a másiknak csak kötelezettsége van.”[1] A vevőnek az opciós jogáért egy *opciós díjat* kell megfizetnie az eladónak.

[1] Fazakas, Gergely: Vállalati pénzügyek 2. Budapesti Corvinus Egyetem, Pénzügyi és Számviteli Intézet; Tanszék Pénzügyi Tanácsadó és Szolgáltató Kft., Budapest, 2017, 139-157. o.

2.1.2. Definíció: Az opciós díj vagy prémium, a vételi vagy eladási jogért fizetett összeg.

Az opciós díjat mindenképp ki kell fizetnie a vevőnek attól függetlenül, hogy él-e a jövőben az opciós jogával vagy sem. A vevő az opciós jogával való élését az *opció lehívásának* nevezzük.

A *lejárati időpont* (maturity, exercise date vagy expiration date) az a nap, amikor az opció lehívásra vagy kifuttatásra kerülhet a piaci árfolyamtól függően, amit T-vel jelölünk.

Az opció lejárati időpontjában kétféle dolog történhet:

- a vevő gyakorolja a jogát,
- az opció lejár, a vevő nem él a jogával és nem is adja el.

2.2 Az opciók típusai

Az opciókat típus szerint többféleképpen tudjuk csoportosítani. Ezek közül az egyik típus, hogy megadjuk milyen tevékenységre vonatkozó jogot biztosít.

2.2.1. Definíció: A vételi (*call*) opció arra ad jogot a tulajdonosának, hogy az alapterméket egy adott kötési árfolyamon, egy adott jövőbeli időpontban (lejárat) megvásárolja egy bizonyos opciós díj ellenében.

2.2.1.1. Lejáratkori értéke: $c_T = max(S_T - K, 0)$, ahol c_T a vételi opció értéke, S_T a lejáratkori árfolyam és K a kötési árfolyam (*exercise price, strike price*).

2.2.1.2. Nyeresége: $c_T - opciós\ díj(+kamat)$

2.2.2. Definíció: Az eladási (*put*) opció arra ad jogot a tulajdonosának, hogy az alapterméket egy adott kötési árfolyamon, egy adott jövőbeli időpontban (lejárat) eladja egy bizonyos opciós díj ellenében.

2.2.2.1. Lejáratkori értéke: $p_T = max(K - S_T, 0)$, ahol p_T a vételi opció értéke, S_T a lejáratkori árfolyam és K a kötési árfolyam.

2.2.2.2. Nyeresége: $p_T - opciós\ díj(+kamat)$

Az opciós ügyleteknek két oldala van. Az egyik oldalon a befektető áll, aki hosszú (long) pozícióban van, vagyis megvette az adott opciót. A másik oldalon pedig egy másik befektető áll, aki rövid (short) pozícióban van, vagyis eladta az adott opciót.

A kifizetéseknek négy alapvető pozíciója lehetséges[2]:

1. Hosszú pozíció egy vételi opcióban (*long call* – LC):

Legyen K a kötési árfolyam és S_T a lejáratkori árfolyam, ekkor a kifizetés értékét úgy kapjuk meg, hogy:

$$max(S_T - K, 0).$$

2. Rövid pozíció egy vételi opcióban (*short call* – SC):

A pozíció akkor kerül lehívásra, ha az alaptermék lejáratkori árfolyama nagyobb, mint a kötési árfolyam $(S_T > K)$. A kifizetés értékét úgy kapjuk meg, hogy:

$$-max(S_T - K, 0) = min(K - S_T, 0).$$

3. Hosszú pozíció egy eladási opcióban (*long put* – LP):

A kifizetés értékét úgy kapjuk meg, hogy:

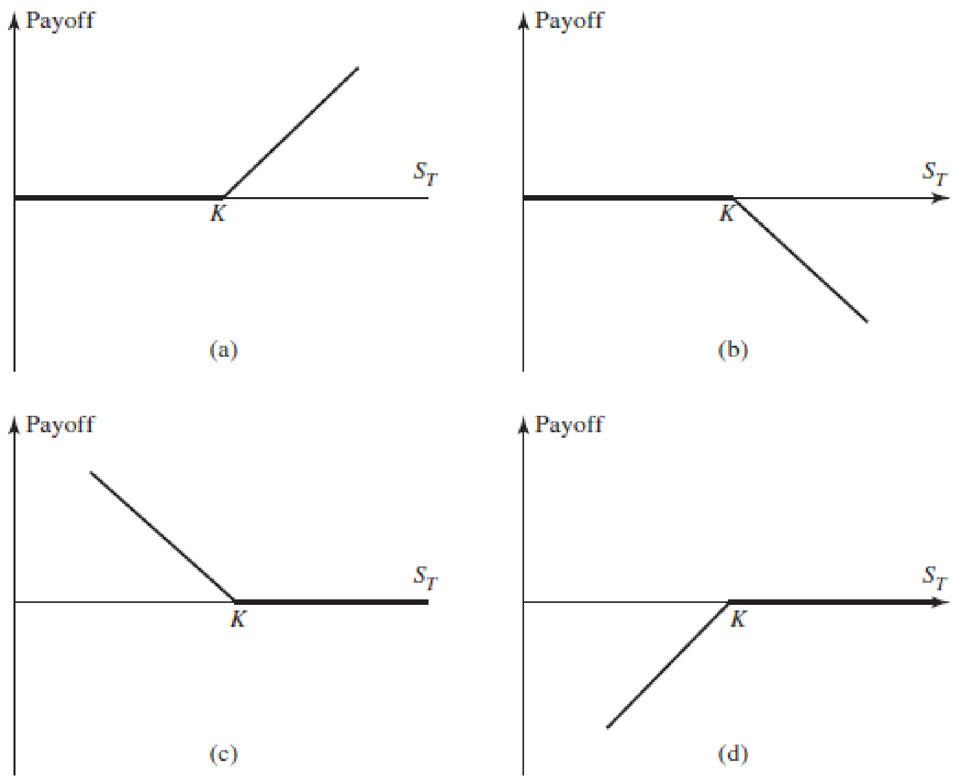
$$max(K - S_T, 0).$$

4. Rövid pozíció egy eladási opcióban (*short put* – SP):

A kifizetés értékét úgy kapjuk meg, hogy:

$$-max(K - S_T, 0) = min(S_T - K, 0).$$

[2] Hull, John C.: Options, futures, and other derivatives – Ninth Edition, Pearson Education Inc., 2015. alapján



1. ábra Opciós pozíciók lehetséges fajtái: (a) Long call; (b) Short call; (c) Long put; (d) Short put.
(Forrás: Hull, John C.: Options, futures, and other derivatives – Ninth Edition, Pearson Education Inc., 2015.)

Az opciókat lehívhatóságuk alapján két fő típusba sorolhatjuk. Az egyik a *plain vanilla*, vagy más néven az egyszerű opció, ahova az *európai opciókat* tudjuk sorolni. A másik fő típusa pedig az *egzotikus opciók*. Ezeken a típusokon belül még megkülönböztethetünk *bermudai*, *ázsiai* és más opciókat is.

Az *európai opciónál* az opciós joggal csak a lejárat napján lehet élni, vagyis csakis ebben az időpontban kerülhet lehívásra. A lejáratkori értéke megegyezik a jegyzési ár és az alaptermék árának különbségével, vagy nullával.

Az *amerikai opció* abban tér el az európai opciótól, hogy az opció a lejárati időpontjáig bármikor lehívható. Értéke megegyezik a jegyzési ár és az alaptermék árának különbségével, vagy nullával.

Az *egzotikus opciók* már bonyolultabb opciók, melynek több fajtája is van (például: az ázsiai opciók, a bináris opciók, a visszatekintő opciók, a limitáras opciók és a választható opciók). Ázsiai típusú opció esetében az értéke megegyezik az alaptermék lejáratkori árának és az opció élettartama alatti átlagárának a különbségével, vagy nullával.

2.3 Az opció értéke[3]

Ebben a részben szeretném bemutatni, hogy egy amerikai opció esetében, milyen tényezők befolyásolják az opció díját.

Az opció díját hat tényező befolyásolja:

1. a jelenlegi részvényárfolyam nagysága (S_t),
2. a kötési árfolyam nagysága (K),
3. a lejáratáig hátralévő idő (T),
4. az alaptermék volatilitása (σ),
5. a kockázatmentes kamatláb (r),
6. a futamidő alatt esedékes osztalék.

Vizsgáljuk meg a fentebb említett tényezőket. Ha egy vételi opció értéke annál nagyobb, minél jobban meghaladja a jelenlegi árfolyam a kötési árfolyamot. Viszont, ha a kötési árfolyam értéke a magasabb, akkor az opció értéktelen. Eladási opciók esetében ellentétesen viselkednek. Ebből látható, hogy ha nő a részvényárfolyam, akkor a vételi opció értéke is növekszik, míg az eladási opció értéke csökken.

Vételi amerikai opció esetében az opció értéke annál többet ér, minél nagyobb a lejáratig hátralévő idő, viszont az eladási amerikai opció esetére ez nem feltétlenül igaz. Ez abból következik, hogy minél nagyobb a hátralévő idő, annál jobban kiszámíthatatlan, hogy hogyan változik az árfolyam. Az európai opciók esetében a hátralévő idő nem befolyásoló tényező, ugyanis csak a lejáratkor lehet lehívni az opciót.

2.3.1. Definíció: A *volatilitás* egy adott deviza árfolyamának változékonyságát leíró érték.

A volatilitás esetében az figyelhető meg, hogy ahogyan nő a volatilitás értéke, úgy nő annak az esélye is, hogy a részvény vagy nagyon jól vagy nagyon rosszul teljesít.

A kockázatmentes kamatláb esetében már nem egyszerű bemutatni a hatását az opció értékére. Azt tudjuk, hogy ha a kamatláb növekszik, akkor az elvárt növekedési ütem is növekszik, viszont a jövőbeli pénzáramlások jelenértéke csökken. Tehát egy eladási opció

[3] Hull, John C.: Options, futures, and other derivatives – Ninth Edition, Pearson Education Inc., 2015. alapján

értéke csökken és a vételi opció értéke nő.

Az osztalék esetében az látható, hogy a részvények árfolyama csökken az osztalékfizetési napot követően, ami egy vételi opció tulajdonosának rossz hír, de egy eladási opció tulajdonosának jó.

Változók	**Európai vételi opció**	**Európai eladási opció**	**Amerikai vételi opció**	**Amerikai eladási opció**
Részvényárfolyam	+	-	+	-
Kötési árfolyam	-	+	-	+
Lejáratig hátralévő idő	?	?	+	+
Volatilitás	+	+	+	+
Kockázatmentes kamatláb	+	-	+	-
Osztalékok	-	+	-	+

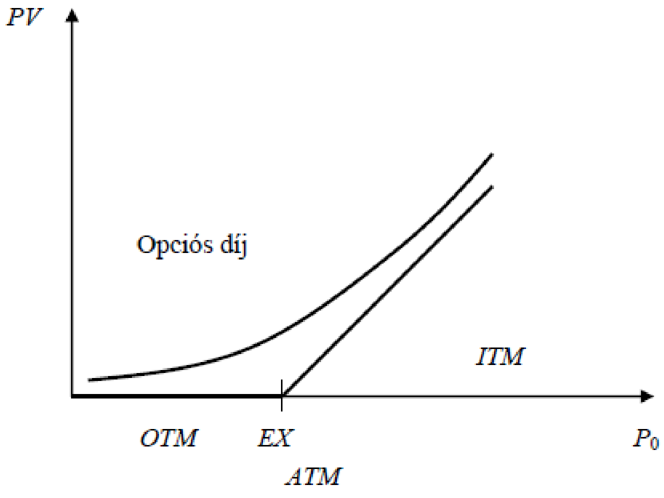
1. táblázat Különböző tényezők hatása az opció árára
(Hull, John C.: Options, futures, and other derivatives – Ninth Edition, Pearson Education Inc., 2015.)

Ezeket a tényezőket két részre bonthatjuk. Az egyik az *opció belső értéke*, a másik az *időértéke*, melyek összegéből megkapjuk az opció díját.

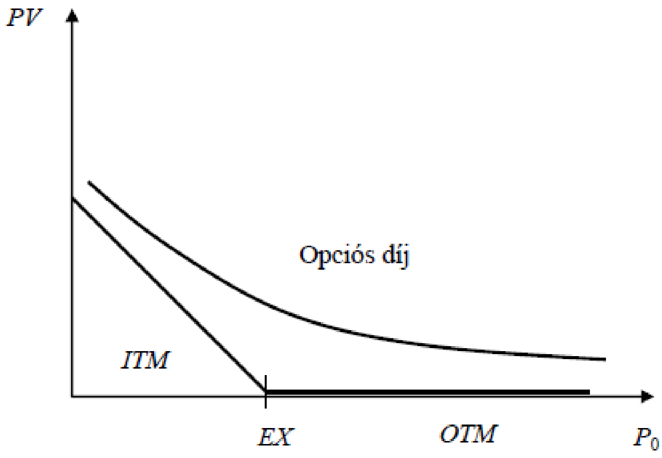
2.3.1. Definíció: Amerikai opció esetében az *opció belső értéke* az a nyereség, amelyet az opció jogosultja elérhet az opció azonnali lehívásával. Az opció belső értéke a jogosult számára legalább nulla – ha nem adna nyereséget az opció azonnali lehívása, akkor nem hívja le.

Belső értéknek háromféle típusát különböztetjük meg:

1. In the money (ITM): Az opció értéke pozitív, tehát ez opció esetében azt jelenti, hogy az alaptermék ára nagyobb, mint a kötési árfolyam.
2. Out of the money (OTM): Az opció belső értéke negatív, tehát ez vételi opció esetében azt jeleni, hogy a kötési árfolyam nagyobb, mint az alaptermék ára.
3. At the money (ATM): Az opció belső értéke zérus, vagyis az alaptermék ára megegyezik a kötési árfolyammal.



2. ábra Vételi opció belső értéke és opciós díja
(Forrás: Fazakas, Gergely: Vállalati pénzügyek 2. Budapesti Corvinus Egyetem, Pénzügyi és Számviteli Intézet; Tanszék Pénzügyi Tanácsadó és Szolgáltató Kft., Budapest, 2017)

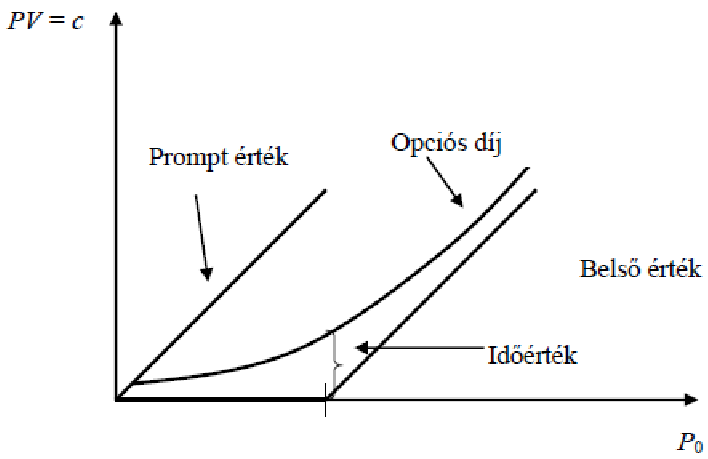


3. ábra Eladási opció belső értéke és opciós díja

(Forrás: Fazakas, Gergely: Vállalati pénzügyek 2. Budapesti Corvinus Egyetem, Pénzügyi és Számviteli Intézet; Tanszék Pénzügyi Tanácsadó és Szolgáltató Kft., Budapest, 2017)

2.3.2. Definíció: Az *opció külső értéke* vagy más néven az *időértéke* a prémium és az opció belső értékének a különbözete.

Az opció időértéke annál nagyobb, minél nagyobb a lejáratig hátralévő idő: Tehát minél nagyobb még a lejáratig hátralévő idő, annál nagyobb esély van arra, hogy az alaptermék ára változni fog, ami pedig ahhoz vezet, hogy az opció egyre értékesebb lesz.



4. ábra Vételi opció belső értéke, időértéke és opciós díja
(Forrás: Fazakas, Gergely: Vállalati pénzügyek 2. Budapesti Corvinus Egyetem, Pénzügyi és Számviteli Intézet; Tanszék Pénzügyi Tanácsadó és Szolgáltató Kft., Budapest, 2017)

2.4 Az opciós díj alsó és felső korlátai[4]

Az opciós díj lehetséges minimum és maximum értékét különböző feltételek alapján határozták meg. Ezek a feltételek attól függtek, hogy éppen európai vagy amerikai opciókról volt szó.

Az opciós díj alsó és felső korlátai az *r* kockázatmentes kamatlábon kívül nem függenek a 2.3 alfejezetben bemutatott tényezőktől. Amennyiben az opció díja a felső korlát felett vagy az alsó korlát alatt van, nyereségszerzési lehetőség van az arbitrázsőrök számára.

Egy vételi opció, mint azt már korábban is bemutattam, jogot biztosít a vevő számára arra, hogy az alapterméket egy adott áron megvásároljon. Ebből következik, hogy attól függetlenül, hogy hogyan változnak az árfolyamok a lejárat végén az opció *nem érhet többet, mint az alaptermék meghatározott ára*. Tehát a felső korlát európai és amerikai opciók esetében:

$$c \leq S_0 \text{ és } C \leq S_0.$$

Az eladási opció esetében a tulajdonos eladási jogot vásárol magának, ami azt jelenti, hogy a lejáratkor egy meghatározott *K* kötési árfolyamon eladhatja az alapterméket. Hasonlóan, mint a vételi opció esetében, legyen bármilyen alacsony az alaptermék ára, az nem lehet magasabb, mint a kötési árfolyam. Tehát amerikai opció esetében:

$$P \leq K.$$

Európai opció esetében tudjuk, hogy a lejáratkor az opció nem érhet többet a K kötési

[4] Hull, John C.: Options, futures, and other derivatives – Ninth Edition, Pearson Education Inc., 2015. alapján

árfolyamnál, tehát jelenérték számítással megkapjuk, hogy az alsó korlát:

$$p \leq Ke^{-r(T-t)}.$$

Amerikai vételi opció esetén nem érdemes idő előtt lehívni egy ITM amerikai típusú vételi opciót, ugyanis az opció tulajdonosa lehívás esetén elesne a felhalmozható kamatoktól. Tehát elvesztjük azt a biztosítást, amit az opció jelent, illetve a kötési ár adott időre vonatkozó kamatát. Mivel, ha korábban hívjuk le, akkor mivel ki kell fizetnünk a kötési ár összegét. Ebből következik, hogy egy osztalékot nem fizető részvényre szóló amerikai vételi jog mindig ugyanannyit ér, mint egy ugyanarra a részvényre vonatkozó európai vételi jog. A vételi opció díja pedig mindig a belső értéke felett lesz.

Amerikai eladási opció esetén már érdemes lehívni a lejárati idő előtt. Az eladási opció lehívása egyre vonzóbbá válik, minél inkább csökken az S és a volatilitás, valamint minél inkább nő az r értéke.

2.5 Paritások

Egy alapterméket többféle módon lehet megvásárolni. A vásárlás történhet az azonnali piacon, ahol a jelenben, a határidős piacon, ahol a jövőben és az opciós piacon, ahol mind a két időpontban történik fizetés.

Ha a különböző piacokon nem áll fent a kifizetések egyenlősége, akkor arbitrázsra van lehetőség.

3.5.1. Definíció: Az *arbitrázs* olyan kockázatmentes nyereség, ami egy adott pénzügyi termék két piacon történő vételével és eladásával realizálható.

A piacok között az alábbi egyenlőségeknek kell fennállnia:

1. Határidős árfolyam: Az azonnali és a határidős piaci árak közötti eltérésnél nincs lehetőség arbitrázsra, amit a *kamatparitás elve* fogalmaz meg.

4.5.2. Definíció: (*kamatparitás elve*) Legyen A és B két valuta, ekkor A és B határidős árfolyama a prompt árfolyamuktól a két valuta kamatlábainak arányában tér el egymástól.

2. Put-Call paritás: A határidős és az opciós piac között.

3. Konverzió: Az azonnali és az opciós piac között.
4. Box ügylet: Opciós piacok között.

2.6 Put-Call paritás[5]

A Put-Call paritás segítségével kiszámítható egy put opció díja egy call opció díjából, illetve fordítva is igaz. Ahhoz, hogy megértsük miről is szól és hogyan működik a Put-Call paritás vegyünk alapul két portfóliót.

Az első portfólió legyen egy put portfólió, ami egy S_t értékű részvény vásárlásából és egy erre a részvényre szóló K kötési árfolyamú eladási opció vásárlásából áll. A portfólió értékét az alábbi táblázat szerint írhatjuk le:

Első portfólió	$\boldsymbol{S_T \leq K}$	$\boldsymbol{S_T > K}$
Részvény értéke (R)	S_T	S_T
Eladási opció értéke (LP)	$K - S_T$	0
Portfólió értéke $(R + LP)$	K	S_T

2. táblázat Első portfólió értéke
(Forrás: Tamás, N.; & Emil, K., 2002)

A második portfólióval egy K kötési árfolyamú vételi opciót és az opció kötési árfolyamával megegyező névértékű és az opció lejáratával megegyező lejáratú kincstárjegyet.

2.6.1. Definíció: (*Kincstárjegy*) Olyan hitelviszonyt megtestesítő értékpapír, melyet kizárólag az állam adhat ki (hazánkban az Államadósság Kezelő Központ). Futamideje egy év, állami garancia szavatolja a befektetők biztonságát.

A portfólió értékét az alábbi táblázat szerint írhatjuk le:

Második portfólió	$\boldsymbol{S_T \leq K}$	$\boldsymbol{S_T > K}$
Kötvény értéke (K)	K	K
Vételi opció értéke (LC)	0	$S_T - K$

[5] Tamás, N., & Emil, K. (2002). Sztochasztikus jelenségek. (1). 3.3. fejezete alapján

Portfólió értéke $(K + LC)$	K	S_T

3. *táblázat Második portfólió értéke*
(Forrás: Tamás, N.; & Emil, K., 2002)

Legyen C_T az eladási opció és P_T a vételi opció lejáratkori értéke, és a kockázatmentes kamatláb 0. Ha a kötési árfolyam magasabb, mint a részvény árfolyama, akkor az eladási (put) opció esetében a kifizetés értéke $(K - S_T)$, mint ahogy az 2. táblázat Első portfólió értéke látható, illetve vételi (call) opció értéke pedig 0, ami a 3. táblázat Második portfólió értéke található.

A fentiek alapján láthatjuk, hogy mind a két portfólió azonos kifizetést eredményez, vagyis részvényből és az eladási opcióból álló portfóliónak meg kell egyeznie a kötvényből és a vételi opcióból álló portfólióval. Ezek alapján az alábbi összefüggést tudjuk felírni a *T* lejáratkori időpontban:

$$C_T - P_T = 0 - (K - S_T).$$

A zárójel felbontás után pedig megkapjuk, hogy

$$C_T - P_T = S_T - K.$$

Az egyenlet átrendezésével pedig az alábbi egyenletet kapjuk:

$$S_T + P_T = K + C_T.$$

Ezt az egyenletet nevezzük Put-Call paritásnak, mivel megadja a vételi és az eladási opció ára közötti kapcsolatot. Ha nem áll fenn az egyenlőség, akkor van lehetőség arbitrázsra. A köztes időpontokban is egyenlőségnek kell fennállnia, mert különben az egyik félnek arbitrázsra lenne lehetősége.

2.6.1. Tétel: Legyen *C* egy vételi opció ára, amely lehetővé teszi, hogy tulajdonosa *K* kötési árfolyamon vásároljon a *T* lejárati időben egy részvényt és legyen *P* egy eladási opció ára, amely lehetővé teszi, hogy tulajdonosa *K* kötési árfolyamon eladjon a *T* lejárati időben egy részvényt. Legyen továbbá S_0 a részvény *0* kezdőidőben a részvény árfolyama. Ekkor az alábbi egyenlőség áll fenn

$$S_0 + P_0 = K\frac{1}{1+r} + C_0,$$

ellenkező esetben arbitrázsra van lehetőség.

3 Opciók árazása

Ebben a fejezetben azt szeretném ismertetni, hogy hogyan is kapjuk meg mennyit is ér valójában az opció. Az opció árának megállapítására többféle modell is ismeretes, melyek közül megemlítésre kerülnek a binomiális fák, a Black-Scholes formula és az empirikus módszerek is, mint például a Monte Carlo szimuláció.

Mielőtt elkezdeném bemutatni a fentebb említett modelleket, először a kapcsolódó fogalmakat szeretném bevezetni.

3.1. Definíció: A *binomiális fa* egy olyan fa, amely a származtatott termék futamideje alatt az alaptermék árfolyama által követhető lehetséges utakat jeleníti meg. Időben diszkrét, vagyis 2 állapot felé lehet haladni, vagyis az árfolyam csökken vagy nő az előző időszakhoz képest.

3.2. Definíció: A *delta* a származtatott termék ár változását mutatja meg az alaptermék ár változásának hatására.

3.1 Jelölések

A továbbiakban az alábbi jelöléseket fogom használni:

S: a jelenlegi részvényárfolyam

K: kötési árfolyam

T: az opció lejárati ideje

t: a jelenlegi időpont

S_T: a részvény árfolyama a T időpontban

r: a T időpontig érvényes kockázatmentes kamatláb

c: egy részvény megvásárlására szóló európai opció értéke

C: egy részvény megvásárlására szóló amerikai opció értéke

p: egy részvény eladására szóló európai opció értéke

P: egy részvény eladására szóló amerikai opció értéke

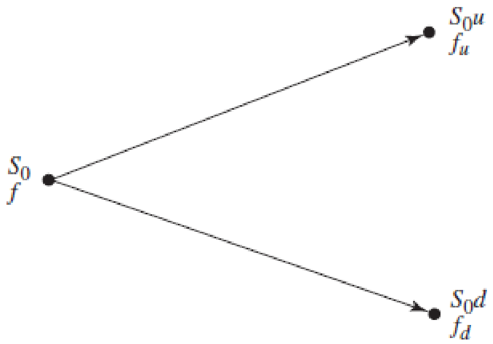
σ: a részvény árfolyamának a volatilitása

3.2 Egyperiódusú binomiális fák[6]

Az opciók árazási modellek alapja a binomiális fák, melyek megmutatják a vizsgált opció mögött lévő alaptermék árfolyamának jövőbeli lehetséges alakulásait egy fa gráf formájában.

3.2.1 Általánosítása

Vegyünk alapul egy osztalékot nem fizető részvényt, melynek árfolyama a kiindulási pontban S_0, és egy erre a részvényre vonatkozó származtatott terméket, melynek jelenlegi ára f. A T időpontban a részvény árfolyamának növekedése esetén a részvény árfolyama S_0-ról vagy S_u-ra növekszik és az opció ára f_u viszont, ha a részvény árfolyama S_d-re csökken, akkor az opció ára f_d lesz.



5. ábra A részvényárfolyam és a származtatott termék ára
(Forrás: John Hull. Options, Futures and Other Derivatives. Prentice Hall, 2015. 276. o.)

Vegyünk egy portfóliót, amely Δ mennyiségű részvényből és egy származtatott termékből áll. Nézzük meg, hogy milyen Δ értékeknél lesz a portfólió kockázatmentes:

- Ha a részvényárfolyama növekszik, akkor a portfólió értéke: $S_u\Delta - f_u$
- Ha a részvény árfolyama csökken, akkor a portfólió értéke: $S_d\Delta - f_d$

A portfólió akkor lesz kockázatmentes, ha a portfólió értéke mindkét lehetséges esetben ugyanakkora (*kockázatsemleges értékelés*). A kockázatsemleges értékelés nevét arról kapta, hogy a várható érték alapján áraz és a kockázatot nem vesszük számításba. Ezáltal a

[6] Hull, John C.: Options, futures, and other derivatives – Ninth Edition, Pearson Education Inc., 2015. alapján

két fenti egyenletet egyenlővé tesszük:

$$S_u\Delta - f_u = S_d\Delta - f_d,$$

akkor az egyenlet átrendezésével megkapjuk a delta értékét, azaz

$$\Delta \ = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d}.$$

A képletben szereplő *delta* fogalma a 3.2-es definícióban olvasható. Ekkor azt kapjuk, hogy a kapott Δ esetén a portfólió kockázatmentes.

3.2.2 Kockázatsemleges értékelés

Úgy kell megválasztanunk a Δ -t, hogy a portfólió kockázatmentes legyen és az értéke ugyanakkora legyen mindkét lehetséges részvényárfolyam esetén. Jelöljük a részvényárfolyam növekedésének valószínűségét p-vel és a csökkenést $(1-p)$-vel.

A származtatott termék várható kifizetése: $pf_u + (1-p)f_d$.

Az előző alfejezet végén található egyenletből látható, hogy a Δ kiszámítható a származtatott termék és a részvény árváltozásának hányadosaként.

Ha a kockázatmentes kamatláb r, akkor a portfólió jelenértéke a folytonos időben: $(S_u\Delta - f_u)^{e^{-rT}}$.

A portfólió létrehozásának költsége: $S\Delta - f$.

A fentiekből következik, hogy

$$S\Delta - f \ = \ (S_u\Delta - f_u)e^{-rT}.$$

A Δ helyére való behelyettesítés és egyszerűsítést követően, az alábbi formulát kapjuk eredményül:

$$f \ = \ e^{-rT}[pf_u + (1-p)f_d],$$

ahol,

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}.$$

3.2.3 Példa egyperiódusú binomiális fára

A vizsgált termékünk legyen egy európai vételi opció, amelynek a kötési árfolyama 4200 dollár és három hónap múlva jár le. Legyen a részvény jelenlegi árfolyama 4000 dollár, ami a harmadik hónap végére növekedhet 4400 dollárra vagy csökkenhet 3600 dollárra.

Vegyünk alapul egy kockázatmentes világot, melyben a részvényárfolyam növekedésének valószínűségét jelöljük p-vel. Ekkor a részvény várható hozamának meg kell egyeznie a 12%-os kockázatmentes kamatlábbal, vagyis a p-nek ki kell elégítenie az alábbi egyenletet:

$$4400p + 3600(1-p) = 4000e^{0,12\times 0,25},$$

tehát,

$$800p = 4000e^{0,12\times 0,25} - 3600.$$

Vagyis $p = 0,6522$. Ebből következik, hogy a harmadik hónap végével az opció értéke 0,6522 valószínűséggel ér 200-at, és 0,3478 valószínűséggel ér nullát. Ezáltal az opció várható értékét az alábbi egyenlettel kapjuk meg:

$$0,6522 \times 200 + 0,3478 \times 0 = 130,44 \text{ \$}.$$

Az opció értéke a kockázatmenetes kamatlábban diszkontálva:

$$e^{-0,12\times 0,25} \times 130,44 = 126,5849 \text{ \$}.$$

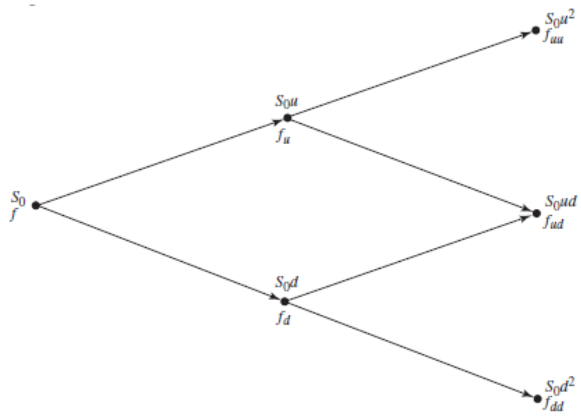
3.3 Kétperiódusú binomiális fák[7]

A kétperiódusú binomiális fáknál az egyperiódusú binomiális fákhoz hasonlóan továbbra is a részvény árfolyamának lehetséges változásait vizsgáljuk. A két típus között az a különbség, hogy több időszakot vizsgálunk és a változásokat egymásra építjük.

3.3.1 Általánosítása

Ahogyan azt az egyperiódusú binomiális fáknál is bevezettük, a kétperiódusú binomiális fánál is, a részvény árfolyama vagy a kezdeti árfolyam *u*-szeresére nő, vagy *d*-szeresére csökken.

[7] Hull, John C.: Opciók, határidős ügyletek és egyéb származtatott termékek Panem, Budapest 2009. alapján



6. ábra A részvényárfolyam és a származtatott termék ára kétperiódusú binomiális fa esetén (Forrás: John Hull. Options, Futures and Other Derivatives. Prentice Hall, 2015. 283. o.)

Ahogy az egyperiódusú binomiális fánál, itt is feltesszük, hogy a kockázatmentes kamatláb r, és az időintervallumok hossza Δt év.

Az egyenlet ismételt alkalmazásából adódik, hogy:

- $f_u = e^{-r\Delta t}[pf_{uu} + (1-p)f_{ud}]$
- $f_d = e^{-r\Delta t}[pf_{ud} + (1-p)f_{dd}]$
- $f = e^{-r\Delta t}[pf_u + (1-p)f_d]$.

Az egyenletbe való behelyettesítés után az alábbi egyenletet kapjuk eredményül:

$$f = e^{-2r\Delta t}[p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}].$$

Az egyenletben látható p^2, $2p(1-p)$ és $(1-p)^2$ adja meg a binomiális fa alsó, középső és felső végpontjainak a valószínűségét.

Egy kockázatsemleges világban megvizsgálva az opció ára megegyezik a várható értéknek a kockázatmentes kamatlábbal diszkontált jelenértékével.

3.3.2 Példa kétperiódusú binomiális fára amerikai opció esetén

A vizsgált származtatott termék egy kétéves amerikai opció, melynek a kötési árfolyama legyen 10400 dollár, jelenlegi árfolyama 10000 dollár. Feltesszük, hogy a két év alatt két egyéves periódus van, ahol mind a két időszak alatt a részvény árfolyama vagy növekszik 20%-kal vagy csökken 20%-kal. A kockázatmentes kamatláb pedig 5%.

Számítsuk ki a kockázatmentes valószínűség értékét:

$$p = \frac{e^{0,05\times 1} - 0,8}{1,2 - 0,8} = 0,6282.$$

A jelenlegi árfolyamból kiszámítva megkapjuk a lehetséges részvényárfolyamokat:

- $S_u = 12000$,
- $S_d = 8000$,
- $S_{u^2} = 14400$,
- $S_{ud} = 9600$,
- $S_{d^2} = 6400$.

Ezekből az adatokból pedig már ki tudjuk számítani az alábbi értékeket is, ha tudjuk, hogy $\Delta t = 1$:

- Ha kétszer is emelkedne az árfolyam, akkor $10000 \times 1{,}2^2 = 14400$. Ezután, ha a 14400-at kivonom a kötési árfolyamból a 10400 dollárból, akkor a kapott érték negatív lenne és így $f_{uu} = 0$.
- Ha az árfolyam egyszer növekedne és egyszer csökkenne, akkor $10000 \times 1{,}2 \times 0{,}8 = 9600$. Ezután a kötési árfolyamból kivonva megkapom, hogy $10400 - 9600 = 800$ és így $f_{ud} = 800$.
- Ha az árfolyam kétszer is csökken, akkor $10000 \times 0{,}8^2 = 6400$. Ezt kivonva a 10400 dollár kötési árfolyamból eredményül 4000-et kapok, vagyis $f_{dd} = 4000$.

Az S_u csúcspontban az opció értéke az $f_u = e^{-r\Delta t}[pf_{uu} + (1-p)f_{ud}]$ egyenletbe valló behelyettesítést követően $f_u = e^{-0{,}05\times 1}[0{,}6282 \times 0 + (1 - 0{,}6282)800] = 282{,}9337$ és a várható kifizetés értéke $10400 - 12000 = -1600$, tehát az opció lejárata előtt a lehívás nem optimális. Az S_d csúcspontban az opció értéke az $f_d = e^{-r\Delta t}[pf_{ud} + (1-p)f_{dd}]$ egyenletbe való behelyettesítés alapján $f_d = e^{-0{,}05\times 1}[0{,}6282 \times 800 + (1 - 0{,}6282)4000] = 1892{,}7183$ és a várható kifizetés értéke $10400 - 8000 = 2400$, tehát az opció lejárat előtt a lehívás optimális. Az $f = e^{-rT}[pf_u + (1-p)f_d]$ egyenletbe való beillesztést követően a kiindulópontban a következő eredményt kapjuk:

$$e^{-0{,}05\times 1}(0{,}6282 \times 282{,}9337 + 0{,}3718 \times 2400) = 1017{,}8716 \text{ \$},$$

míg a várható kifizetés értéke 400, így a lejárat előtti lehívás nem optimális. Ebből következik, hogy az opció értéke 1017,8716 dollár.

A binomiális fák, amiket bemutattam egyszerűek voltak, viszont a gyakorlatban az opciós ügylet élettartamát nem csak egy- vagy két binomiális elmozdulásra, hanem általában harminc vagy több időszakra bontják. Az *u* és *d* értékeket pedig a részvényárfolyam volatilitásából (σ-ból) határozzák meg. Ha Δt-t egy időperiódus hosszaként definiáljuk, akkor az alábbi képleteket kapjuk u és d, valamint a kockázatmentes valószínűség (p) meghatározására:

- $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$,
- $d = \frac{1}{u} = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$,
- $p = \frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - d}{u - d}$.

3.4 Delta

A delta fontos paraméter az opciók árazása és a kockázatuk fedezése szempontjából. A részvényopció deltája, az opció árváltozásának és az alaptermék árfolyamváltozásának hányadosa. Jelölés: Δ

$$\Delta = \frac{opció\ árának\ változása}{alaptermék\ árfolyamának\ változása} = \frac{\delta f}{\delta s}$$

A delta definícióját korábban a 3.2-es definícióban már kifejtettem.

3.3.1. Definíció: A kockázatmentes fedezést delta fedezésnek vagy *delta hedging*-nek nevezzük.

Deltához hasonlóan más szenzitivitásokat is lehet vizsgálni.

A delta előjele lehet pozitív és negatív is. Előjele pozitív, ha megvásárolunk egy vételi opciót vagy eladunk egy eladási opciót, ugyanis ilyen esetekben a piaci árfolyam növekedésére számítunk. Ha egy eladási opciót vásárolunk vagy egy vételi opciót adunk el, akkor pedig az árfolyam csökkenését várjuk.

A deltának az abszolút értéke vételi opció esetén 0 és 1, míg eladási opció esetében -1 és 0 közé tehető. A vételi opció pozícióját tekintve, ha out of the money pozícióban vagyunk, akkor a delta értéke a 0-hoz közelít, ha at the money pozícióban vagyunk, akkor 0,5 és ha in the money-ban vagyunk, akkor pedig az 1-hez közelít az értéke. Ez azt jelenti, hogy minél nagyobb a mögöttes alaptermék árfolyama, annál nagyobb az opció értéke. Az eladási opció pontosan ellentétesen viselkedik.

3.5 Sztochasztikus folyamatok[8]

Azokat a folyamatokat, melyet valószínűségi változók jellemeznek sztochasztikus folyamatoknak nevezzük. A valószínűségi változók értéke időben bizonytalanul változik.

A sztochasztikus folyamatok típusai:

- ***időben diszkrét (discrete time):*** olyan folyamatok, melyek esetében a változó értéke csak meghatározott időpontokban változhat
- ***időben folytonos (continuous time):*** olyan folyamatok, melyek esetében a változó értéke bármikor változhat
- ***diszkrét változójú (discrete variable):*** az alap változó csak meghatározott értéket vehet fel
- ***folytonos változójú (continuous variable):*** az alap változó bármilyen értéket felvehet

A sztochasztikus kalkulus célja, hogy a differenciálszámítást kiterjessze a sztochasztikus folyamatokra. A számítások során olyan Riemann integrálokat alkalmazunk, ahol az integrandusban egy sztochasztikus folyamat (Wiener-folyamat) szerepel. A sztochasztikus folyamaton vagy más néven véletlenszerű folyamaton mindig egy kétváltozós függvényt értünk, ahol az egyik változó az idő, amit általában a *t* jelöl, a másik pedig egy véletlen paraméter, amit az ω jelöl. Az ω lehetséges értékeit egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőből kapjuk.

4.1. Definíció: Azokat a folyamatokat, amelyeknél egy változó értéke időben bizonytalanul változik *sztochasztikus folyamatoknak* nevezzük.

A folyamatokat úgy tudjuk elképzeli, hogy egy $t = 0$ időpillanatban kiválasztunk egy véletlen értéket ω-nak, melyet, ha rögzítünk, megfigyelhetjük a $t \longmapsto \xi(t, \omega)$ *trajektóriát,* vagy más néven a folyamat *realizációját*. A trajektóriáknak a nehézségei, hogy szélsőséges matematikai tulajdonságokkal rendelkeznek, például nem folytonosak és tele vannak szakadásokkal, ugrásokkal.

4.2. Definíció: A *folytonosságon* azt értjük, hogy feltesszük, hogy a trajektóriák

[8] Hull, John C.: Options, futures, and other derivatives – Ninth Edition, Pearson Education Inc., 2015. alapján

folytonos függvények.

3.5.1 Markov-tulajdonság

A folyamat Andrej Markov orosz matematikus nevéhez fűződik. A *Markov-folyamat* (Markov process) olyan speciális sztochasztikus folyamat, ahol csak a változó mostani értéke releváns a jövő előrejelzése szempontjából, és nem függ a múltbeli állapotától. Ez azt jelenti, hogy az adott időpillanatban a részvény árfolyama tartalmazza az összes szükséges információt.

3.5.2 Wiener-folyamatok

A sztochasztikus folyamatok egyik leghíresebb fajtája a *Wiener-folyamatok* családja, melyet Norbert Weiner amerikai matematikusról neveztek el. Más néven Brown-mozgásnak is szokták nevezni. A Wiener-folyamatok speciális Markov folyamatok. A pénzügyi folyamatokon kívül több területen is alkalmazzák, például a közgazdaságtanban, a matematikában és a fizikában is.

Vegyünk egy Δt időintervallumot, és egy z változóban bekövetkezett változásokat, melyet Δz-vel jelölünk. Ha Δz-re teljesülnek az alábbi tulajdonságok, akkor z Wiener-folyamat:

1. tulajdonság: $\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$, ahol ε egy standard normális eloszlású valószínűségi változó,
2. tulajdonság: Δz értékei függetlenek az időintervallumra.

Ezekből az állításokból látható, hogy a Δz normális eloszlású, 0 várható értékkel, $\sigma = \sqrt{\Delta t}$ szórással.

Vegyünk alapul egy T időszakot, ahol vizsgáljuk meg a z növekedését:

- A z növekedését jelöljük: $z(T) - z(0)$
- A z növekedése N számú Δt időintervallum alatt: $N = \frac{T}{\Delta t}$
- Így: $z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\sqrt{\Delta t}$, ahol ε_i (i = 1, 2, …, N) standard normális eloszlású valószínűségi változók.

A kapott egyenletből megállapítható, hogy $z(T) - z(0)$ várható értéke 0, szórása $\sqrt{T}$ és varianciája $N\Delta T = T$.

Egy x változóra a dz függvényében az alábbi módon írható fel az általánosított folyamat képlete, ahol a a növekedési ráta és b a változékonyság értéke:

$$dx = a\ dt + b\ dz.$$

Egy kis Δt időintervallumon vizsgálva, az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\Delta x = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t},$$

ahol ε továbbra is egy standard eloszlású valószínűségi változó.

Így Δx is normális eloszlású, $a\Delta t$ várható értékkel, $b\sqrt{\Delta t}$ szórással és $b^2\Delta t$ varianciával. Továbbá az x változásról is megállapítható, hogy normál eloszlású a T időintervallumban, aT várható értékkel, $b\sqrt{T}$ szórással és b^2T varianciával.

Tehát ebből következik, hogy egy általánosított Wiener-folyamat várható növekedési rátája a, és varianciája b^2.

3.5.3 Ito-folyamat

Az Ito-folyamat (Ito process) egy általánosított Wiener-folyamat, ahol az a és b paraméterek az alapul szolgáló x változó és az idő függvényei.

Legyen x egy eszköz árfolyama, ami Ito-folyamatot követ, ahol dz egy Wiener-folyamat, és legyen a és b az x és t függvényei:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz,$$

ahol az x változónak a növekedési rátája a és a varianciája b^2.

3.4.3.1. Lemma: Ha az $f(x,t)$ függvény x-nek és t-nek olyan függvénye, ahol x a $dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$ egyenlettel meghatározott Ito-folyamat, akkor

$$df = \left(\frac{\delta f}{\delta x}a + \frac{\delta f}{\delta t} + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}b^2\right)dt + \frac{\delta f}{\delta x}b\ dz,$$

ahol a az egységnyi idő alatt bekövetkező változás (drift) és b a szórás (volatilitás). Az Ito-lemma képletében a dz ugyanaz a Wiener-folyamat, mint az Ito-folyamatban lévő dz. A képletben szereplő $\frac{\delta f}{\delta x}$ hányadost szokás még Δ-val, a $\frac{\delta f}{\delta t}$ hányadost pedig θ-val is jelölni.

Tehát az f függvény is Ito-folyamat, aminek a növekedési rátája $\frac{\delta f}{\delta x}a + \frac{\delta f}{\delta t} + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}b^2$ és a szórása $\frac{\delta f}{\delta x} b$.

Továbbá az Ito-lemmából következik, hogy az f függvény függ a részvény árfolyamától (S) és az időtől (t), ami az alábbi Ito-folyamatot követi:

$$df = \left(\frac{\delta f}{\delta S}\mu S + \frac{\delta f}{\delta t} + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 f}{\delta S^2}\sigma^2 S^2\right) dt + \frac{\delta f}{\delta S}\sigma S\, dz.$$

3.5.4 Log-normális eloszlás

3.5.4.1. Definíció: A *log-normális eloszlás* egy folytonos valószínűség eloszlás, melyre az jellemző, hogy a valószínűségi változó logaritmusa normális eloszlású.

Vegyünk alapul egy Wiener folyamatot és az Ito-folyamat segítségével fejezzük ki a log-normális eloszlást. Azt mondjuk, hogy a folyamat log-normális eloszlást követ, ha felírható az alábbi képlet segítségével:

$$d\, ln\, S = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dz,$$

ahol μ a részvény átlagos évi növekedése és σ az árfolyamok éves volatilitása. Tehát a $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)$ a növekedési paraméter, σ pedig a volatilitási paraméter.

A T időintervallum adott, így S_T értékét megkapjuk egy $\varepsilon \sim N(0{,}1)$ standard normális véletlen változó generálásával:

$$S_T = S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\varepsilon\sqrt{T}}.$$

3.6 A Black-Scholes modell[9]

Az opcióárazás egy másik módszere Fischer Black, Myron Scholes és Robert C. Merton nevéhez fűződik, amit Black-Scholes modellnek neveztek el és a sztochasztikus kalkuluson alapszik. Levezettek egy olyan differenciálegyenletet, amelyet ki kell elégítenie bármely, osztalékot nem fizető részvénytől függő származtatott termék árfolyamának.[10]

---

[9] Hull, John C.: Options, futures, and other derivatives – Ninth Edition, Pearson Education Inc., 2015. alapján
[10] F. Black-Scholes, M.: The Pricing of Options and Corporate Liabilities. Journal of Political Economy, 81 (1973.május-június), 637-654. o. alapján

A Black-Scholes modell szerint három féle terméket lehet elkülöníteni:

- derivatív
- alaptermék (kockázatos eszköz)
- kockázatmentes termék (betét)

3.6.1 A Black-Scholes féle árazási képletek

A folytonos eset hasonlóképpen írható fel, mint a diszkrét esetben. A diszkrét esetben való levezetés a binomiális fák részben található.

Az árazási képletek levezetéséhez először fel kell írni, hogy mennyi a várható értéke egy európai vételi opciónak a lejárat időpontjában egy kockázatsemleges világban:

$$\hat{E}[max(S_T - X, 0)],$$

ahol $\hat{E}$ jelöli a várható értéket egy kockázatsemleges világban.

A vételi opció árát a kockázatmentes kamatlábbal való diszkontált értékből kapjuk:

$$C = e^{-r(T-t)}\hat{E}[max(S_T - X, 0)],$$

ahol C jelöli az opció árát.

A várható érték integrálásával kapjuk meg az árazási formulát:

$$C = SN(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2).$$

Az európai eladási opció árának meghatározására pedig az alábbi képletet kapjuk:

$$P = Xe^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1),$$

ahol

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = \frac{ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

és $N(x)$ a standard normális eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvénye.

A Black-Scholes modellt csak az európai típusú opciókra használják. Az amerikai opciók bármikor lehívhatóak, amire egy bonyolultabb árazási modellt alkalmaznak.

3.7 Monte Carlo-szimuláció

A Monte Carlo szimuláció egy olyan sztochasztikus módszer, melynek segítségével különböző, nagy számú bizonytalan feltétel mellett szimulálni lehet a döntések lehetséges kimeneteleit. Maga a modell a valószínűségi eloszlásból vett mintavételen alapuló szimulációs eszköz.

Egy kockázatsemleges világban az opció mögöttes termékének az árfolyama (S) a

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

folyamatot követi, ahol a dz egy Wiener-folyamat, a μ a várható kifizetés, a σ az árfolyam volatilitása és legyen a kamatláb (r) állandó. A t időt osszuk fel N darab Δt hosszúságú trajektóriára. Ekkor az árfolyam értéke egy ε véletlen változó generálásával a következő egyenlet segítségével írható fel:

$$dS = \mu S \Delta t + \sigma S \varepsilon \sqrt{\Delta t},$$

ahol dS a Δt idő alatt bekövetkező változás az ε a standard normális eloszlásból kapott véletlenek. A szimulációt a

$$S(t + \Delta t) - S(t) = \mu S \Delta t + \sigma S \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

rekurzív képlettel közelíthetjük, ahol $S(t)$ a mögöttes termék t-beli árfolyamát jelöli.

A Monte Carlo-szimuláció eredményeként ugyanazt az eredményt kell kapnunk, mint a Black-Scholes modellel. A szimuláció több ezer véletlen árfolyam generálását, majd az opcióhoz tartozó lehívási értékeket számolja ki a legenerált árfolyamokkal, majd ezeket átlagolja és végül egy kockázatmentes rátával diszkontáljuk.

4 Longstaff-Schwartz módszer[11]

Amerikai opciók árazásánál az legfontosabb, hogy meghatározzuk mi a legjobb stratégia a befektető számára. 2001-ben Longstaff és Schwartz a legkisebb négyzetek módszerének alkalmazásával próbálta meghatározni, hogy mikor is érdemes lehívni egy amerikai opciót.

7.1. Definíció: A *legkisebb négyzetek módszere* egy gyakran alkalmazott becslési módszer, ami minimalizálja a paraméter valódi és becsült értéke közötti eltérés négyzetösszegét.

A megközelítés egyszerűbb megértéséhez először nézzük meg, hogy Longstaff és Schwartz hogyan mutatta be egy példán keresztül a tanulmányukban.

Vegyünk alapul egy 3 éves osztalékot nem fizető put típusú amerikai opciót, amit az első év végén, a második év végén és a harmadik év végén lehet lehívni. A kockázatmentes kamatláb legyen 6%, a jelenlegi részvény árfolyam 1 és a kötési árfolyam 1,1. Vizsgáljuk meg a részvényárfolyam 8 lehetséges útvonalát, amit az alábbi táblázat mutat.

Út	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	1,00	1,09	1,08	1,34
2	1,00	1,16	1,26	1,54
3	1,00	1,22	1,07	1,03
4	1,00	0,93	0,97	0,92
5	1,00	1,11	1,56	1,52
6	1,00	0,76	0,77	0,90
7	1,00	0,92	0,84	1,01
8	1,00	0,88	1,22	1,34

4. táblázat A put opció lehetséges útjai
(F. A. Longstaff and E. S. Schwartz, ''Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach,'' Review of Financial Studies, 14, 1 (Spring 2001): 113–147)

[11] F. A. Longstaff and E. S. Schwartz, ''Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach,'' Review of Financial Studies, 14, 1 (Spring 2001): 113–147 alapján

A célunk egy olyan megállási szabály létrehozása, aminek segítségével maximalizálhatjuk az opció lehetséges értékét minden egyes pontban. Tegyük fel, hogy nem hívjuk le az opciót a 3. év előtt. Ekkor a cash-flow az alábbi módon alakul:

Út	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
1	-	-	-	0,00
2	-	-	-	0,00
3	-	-	-	0,07
4	-	-	-	0,18
5	-	-	-	0,00
6	-	-	-	0,20
7	-	-	-	0,09
8	-	-	-	0,00

5. táblázat Cash-flow mátrix a 3.évben
(F. A. Longstaff and E. S. Schwartz, ''Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach,'' Review of Financial Studies, 14, 1 (Spring 2001): 113–147)

Az értékeket úgy kapjuk meg, hogy azokon a helyeken, ahol az árfolyam magasabb, mint a kötési árfolyam ott az érték nulla lesz (azaz lehívom az opciót), ahol pedig az értékek alacsonyabbak ott a kötési árfolyam és a jelenlegi árfolyam különbségét kapom eredményül (tehát bent hagyom az opciót).

Ha a Put opció a 2. évben éppen in the money (későbbiekben: ITM-ként fogom jelölni) pozícióban van, vagyis az értéke pozitív, akkor a befektetőnek el kell döntenie, hogy le szeretné-e hívni az opciót vagy tovább bent akarja tartani. A 4. táblázat A put opció lehetséges útjaiszerint a 2. évben csak az 1-es, 3-as, 4-es, 6-os és 7-es úton van ITM. A V folytatási értéket az alábbi módon tudjuk kiszámítani:

$$V\ = a + bS + cS^2,$$

ahol S a részvény árfolyama.

A 2. évben. Az öt megfigyelés, ahol ITM pozícióban vagyunk a következőek: 1,08; 1,07; 0,97; 0,77 és 0,84 a 4. táblázat A put opció lehetséges útjaiszerint. Jelölje Y a diszkontált pénzáramlást, amit egy lineáris regresszióval kapunk meg az alábbi módon: $Y = S \times e^{-rT}$.

Az egyszerű lineáris regresszió modelljében szereplő Y tagot egy S konstanssal és az S^2 hibataggal magyarázzuk.

A kapott regressziós függvényünk a 2. évre vonatkozóan:

$$V\ = -1{,}070 + 2{,}983S - 1{,}813S^2.$$

Út	***Y***	***S***
1	$0{,}00 \times 0{,}94176$	1,08
2	-	-
3	$0{,}07 \times 0{,}94176$	1,07
4	$0{,}18 \times 0{,}94176$	0,97
5	-	-
6	$0{,}2 \times 0{,}94176$	0,77
7	$0{,}09 \times 0{,}94176$	0,84
8	-	-

6. táblázat Regresszió a 2. évben
(F. A. Longstaff and E. S. Schwartz, ''Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach,'' Review of Financial Studies, 14, 1 (Spring 2001): 113–147)

Az ITM pozícióban lévő eseteknél, ahol úgy dönt a befektető, hogy le kívánja hívni az opciót, ott a lehívási értéket megkapjuk az $1{,}10 - X$ képletből, ellenkező esetben a V folytatási értéket kapjuk. Ezek alapján az alábbi táblázatot kapjuk eredményül:

Út	***Lehívási érték***	***Folytatási érték***
1	0,02	0,0369
2	-	-
3	0,03	0,0461
4	0,13	0,1176
5	-	-
6	0,33	0,1520
7	0,26	0,1565
8	-	-

7. táblázat Lehívási és folytatási értékek a 2. évben
(F. A. Longstaff and E. S. Schwartz, ''Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach,'' Review of Financial Studies, 14, 1 (Spring 2001): 113–147)

A táblázat alapján látható, hogy a 4., 6. és 7. lehetőségeknél érdemes lehíni az opciót ugyanis a lehívási érték magasabb, mint a folytatási érték. Az adatok alapján fel tudjuk írni az új cash-flow mátrixot.

Út	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	-	-	0,00	0,00
2	-	-	0,00	0,00
3	-	-	0,00	0,07
4	-	-	0,13	0,00
5	-	-	0,00	0,00
6	-	-	0,33	0,00
7	-	-	0,26	0,00
8	-	-	0,00	0,00

8. táblázat Cash-flow mátrix a 2.évben

(F. A. Longstaff and E. S. Schwartz, ''Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach,'' Review of Financial Studies, 14, 1 (Spring 2001): 113–147)

Mint ahogy a 8. táblázat Cash-flow mátrix a 2.évben is látható, ahol a 2.évben úgy döntöttünk, hogy érdemesebb lehívni az opciót ott az utolsó $t = 3$-as időszakban 0 került beírásra. Ennek oka pedig igazán egyszerű, ugyanis, ha már egyszer lehívtuk a 2. évben az opciót, akkor a 3. évben már nem kerülhet lehívásra.

Utolsóként vizsgáljuk meg azt a lehetőséget, hogy az 1. évben lenne-e optimálisabb lehívni az opciót vagy sem. Ahogyan az előző esetben újra a regressziót alkalmazzuk az értékek meghatározására.

A kapott regressziós függvényünk a 2. évre vonatkozóan:

$$V = 2{,}038 - 3{,}335S + 1{,}356S^2.$$

Út	Y	S
1	$0{,}00 \times 0{,}94176$	1,09
2	-	-
3	$-$	-
4	$0{,}13 \times 0{,}94176$	0,93
5	-	-
6	$0{,}33 \times 0{,}94176$	0,76
7	$0{,}26 \times 0{,}94176$	0,92
8	$0{,}00 \times 0{,}94176$	0,88

9. táblázat Regresszió az 1.évben
(F. A. Longstaff and E. S. Schwartz, ''Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach,'' Review of Financial Studies, 14, 1 (Spring 2001): 113–147)

A kapott 9. táblázat Regresszió az 1.évbenalapján az 1. évre vonatkozólag is fel tudjuk írni, hogy milyen lehívási és folytatási értékeket kapunk.

Út	***Lehívási érték***	***Folytatási érték***
1	0,01	0,0139
2	-	-
3	-	-
4	0,17	0,1092
5	-	-
6	0,34	0,2866
7	0,18	0,1175
8	0,22	0,1533

10. táblázat Lehívási és folytatási értékek az 1. évben
(F. A. Longstaff and E. S. Schwartz, ''Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach,'' Review of Financial Studies, 14, 1 (Spring 2001): 113–147)

Ezek alapján látható, hogy a 4., 6., 7. és 8. úton az 1. évben érdemes lehívni az opciót. Mivel az összes adatunk meg van már, amire szükségünk van, így fel tudjuk írni a 3 évre vonatkozó cash-flow mátrixot.

Út	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	1,00	0,00	0,00	0,00
2	1,00	0,00	0,00	0,00
3	1,00	0,00	0,00	0,07
4	1,00	0,17	0,00	0,00
5	1,00	0,00	0,00	0,00
6	1,00	0,34	0,00	0,00
7	1,00	0,18	0,00	0,00
8	1,00	0,22	0,00	0,00

11. táblázat Az opció cash-flow mátrixa
(F. A. Longstaff and E. S. Schwartz, ''Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach,'' Review of Financial Studies, 14, 1 (Spring 2001): 113–147)

Mivel meghatározásra került az opcióra vonatkozó várható kifizetési értékek, így most már az értékeket diszkontálva majd a kapott értékek átlagolásával megkapjuk, hogy mennyi az opció értéke. Ezt a folyamatot az alábbi módon tehetjük meg:

$$\frac{1}{8}(0{,}07e^{-0{,}06\times 3} + 0{,}17e^{-0{,}06} + 0{,}34e^{-0{,}06} + 0{,}18e^{-0{,}06} + 0{,}22e^{-0{,}06}) = 0{,}1144.$$

Tehát az amerikai put opció értéke ezáltal 0,1144 lesz.

4.1 Az algoritmus[12]

Mint ahogy már a fejezet elején is említettem a módszer a legkisebb négyzetek módszerét alkalmazza. Vegyünk egy $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mezőt, ahol Ω az összes lehetséges realizálási halmaza a sztochasztikus részvényárfolyam folyamatának egy végtelen $[0, T]$ időintervallumon. Legyen $\mathcal{F}(t)$ egy különböző események által generált szűrő a t időpillanatig és P pedig egy valószínűségi érték.

Az algoritmus egy optimális megállási szabályt biztosít az amerikai opció értékének maximalizálására. Tehát ennek segítségével a befektető eldöntheti, hogy mikor szeretné lehívni az opciót, ha az éppen ITM pozícióban van vagy hagyja lejárni, ha out of the money (későbbiekben: OTM) pozícióban van.

Legyen ω a Monte Carlo szimuláció segítségével generált véletlen. Tegyük fel, hogy az opciót csak K darab diszkrét időben lehet lehívni, amiről tudjuk, hogy $0 < t_1 < t_2 <\ldots< t_K = T$. A t_k időpillanatban a folytatási értékeket nem tudjuk, viszont az alábbi egyenlet segítségével ki tudjuk fejezni:

$$V(\omega, t_k) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i B_i\,(x, z),$$

ahol α_i konstans, B_i különböző alapfüggvények, x és z az ω függvényei, amik az utaktól függően különböznek. Feltételezzük, hogy a mögöttes termék egy Wiener-folyamatot követ.

A t_k időpillanatban a befektetőnek el kell döntenie, hogy szeretné-e folytatni és bent hagyni az opciót vagy le szeretné hívni. Az adott t_k időpillanatban a befektető tudja, hogy az adott időpontban mi a várható kifizetési érték, viszont azt nem tudjuk, hogy mi lesz a várható cash flow, ha folytatja az opciót. Ennek meghatározásában segít a fent $V(\omega, t_k)$ képlet, ami megadja a folytatási értéket. Amint ez az érték meghatározásra került, a befektető el tudja dönteni, hogy le akarja-e hívni az opciót. Ezt a folyamatot egészen addig ismételjük míg egy optimális lehívási stratégiát nem kapunk eredményül.

Amint kész vagyunk a stratégiával, onnan már az amerikai opció árazása igazán egyszerűvé válik. Már csak annyi a dolgunk, hogy a kapott várható kifizetési értékeket diszkontáljuk majd végül az értékeket átlagoljuk és ezzel meg is kaptuk az amerikai opció árát.

[12] F. A. Longstaff and E. S. Schwartz, ‘‘Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach,’’ Review of Financial Studies, 14, 1 (Spring 2001): 113–147 alapján

5 Összefoglalás

Dolgozatomban összesen négyféle lehetséges modellt mutattam be az opciók árazására. Ezek a modellek nem másak voltak, mint a binomiális fák, a Black-Scholes modell, a Monte Carlo-szimuláció és végül a Longstaff-Schwartz módszer.

Összességében úgy vélem, hogy a binomiális fák módszere egyszerű és hatékony. A Black-Scholes modell egy pontos analitikus képlet, viszont az európai opciók árazására alkalmas és nem az amerikai opciókéra. A Monte Carlo szimulációban a véletlenek generálásával még hatékonyabb viszont, ha nagyobb számú esetet akarunk megvizsgálni, akkor a folyamat hosszadalmas. Végül pedig a Longstaff-Schwartz módszer szintén egy egyszerű, de még is nagyon jól megbecsüli az opció lehetséges értékét.

Napjainkban a Longstaff-Schwartz módszer a legoptimálisabb árazási módszer az amerikai opciók esetében. Viszont az optimális lehívási stratégia és ár meghatározása az amerikai opciók esetében még a mai napig egy fennálló probléma.

6 Hivatkozások

1. Francis A. Longstaff, E. S. (2001. Tavasz). Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach. *The Reiieib of Firiancial Studies Vol. 14*, old.: 113-147.

2. Gergely, F. (2017). *Vállalati pénzügyek 2.* Budapest: Tanszék Pénzügyi Szolgáltató és Tanácsadó Kft.

3. Hull, J. C. (2015). *Options, futures, and other derivatives.* Prentice Hall: Pearson Education Inc.

4. Nagy Tamás, K. E. (2002). *Sztochasztikus jelenségek.* Budapest: Aula Kiadó.

5. Scholes, F. B. (1973. Május-Június). The Pricing of Options and Corporate Liabilities . *Journal of Political Economy Vol. 81*, old.: 637-654.

7 Ábrajegyzék

8 Táblázatjegyzék

Figyelmeztetés! A kitöltött Nyilatkozat nem menthető el, csak kinyomtatható! **Nyomtatás**

NYILATKOZAT

Név: Bukus Bernadett

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika alapszak

NEPTUN azonosító: C3EX2L

Szakdolgozat címe:
Az amerikai opciók árazása Longstaff-Schwarz módszerrel

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2022.01.03

Bukus Bernadett

a hallgató aláírása