Matematikai kompetenciák fejlesztése középiskolában

Skatulya-elv és Valószínűségszámítás

Szakdolgozat

Írta: Kovács Ibolya

Matematika B.Sc.

Matematika - Angol tanári szakirány

Témavezető:

dr. Vancsó Ödön, egyetemi adjunktus

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2009

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A tavaszi félév elején, a szakdolgozati témám kiválasztása után, azt a nagyszerű lehetőséget kaptam, hogy a volt középiskolámban a végzős fakultációs csoportnak matematikaórákat tarthattam minden héten. Ez a csoport 8 főből állt, mindegyikük az emelt szintű érettségire készült, feladatom tulajdonképpen az érettségi írásbeli részére való felkészítést jelentette. Ezt a lehetőséget kihasználva olyan feladatokkal, folyamatokkal, gondolkodásmódokkal találkoztam, melyek mind arra ösztönöztek, hogy ezek egyes elemeit jelöljem meg szakdolgozatom témájának.

A félév során különböző féle feladatsorokat állítottam össze a diákoknak, lehetőleg a legtöbb témakört érintve. Sokféle matematikai terület érdekelt, szakdolgozatomban ezek közül kettőt emelnék ki, a bizonyítási módszerek egy specifikus fajtáját, a skatulya-elvet, és a valószínűségszámítást, melyen belül két nagyobb területtel foglalkoznék, ez a kombinatorikus valószínűség, és a geometriai valószínűség. Azért emelem ki a valószínűségszámítást, mert ehhez a témakörhöz friss emlékeim kapcsolódnak az egyetemi tanulmányaim miatt, másrészről pedig, mert ezt a témakört igazán problémásnak, nehéznek ítélem meg a középiskolások körében, pontosan ezért szerettem volna, ha ezeket a problémás részeket kiküszöbölhetném, és nagyobb önbizalmat önthetnék a diákokba a témakörrel kapcsolatban. Céljaim között szerepelt az is, hogy a diákok az emelt szintű érettségi írásbeli második részében ne legyenek arra kötelezve, hogy valószínűségszámítással megoldható feladatot hagyjanak ki. A skatulya-elvet pedig azért mutatom be dolgozatomban, mert ezt egy olyan résznek tartom a matematika oktatás során, melyre kevés hangsúlyt fektetnek, és leginkább csak alapvető feladatokkal foglalkoznak. Ezért szeretném változatos feladatokkal bemutatni, hogy nemcsak alapvető feladatokkal lehet próbára tenni a diákokat. Ezen felül pedig azért is fontosnak tartom, mivel bizonyítási módszerről lévén szó, több témakört is érint, magába foglal, ezzel ismételve, rendszerezve a meglévő tudást.

Dolgozatom első fejezetében e három részterülethez tartozó, általam összeállított feladatsort, a feladatok nehézségi szintjét, és az azokkal elérendő céljaimat sorakoztatom fel. A második fejezetben a feladatok saját elgondolásom szerinti megoldása szerepel, míg a harmadik fejezet a diákok munkájáról, gondolatmeneteiről, legfőképpen pedig hibáikról szól.

2. Feladatsorok és céljaik

Minél összetettebb egy feladat, minél több ismeretet feltételez és igényel, annál inkább tartottam fontosnak egy feladatsorban való szereplését, hiszen a diákjaim az emelt szintű érettségire készülnek fel, ahol gyakran szerepelnek nem egy témakörhöz kapcsolódó, komplexebb feladatok. Az efféle példák erőteljesebben strukturálják a diákok matematikai tudását, direkt módon kötelezik őket egyes matematikai részek logikai összekapcsolására, a matematika egységes rendszerként való felfogására. Ezen kívül mindegyik feladatsornál figyelembe vettem, hogy az adott témakörhöz tartozó, az Oktatási Minisztérium által előírt emelt szintű érettségi követelményeket az általam összeállított feladatok lefedjék. A feladatok általam megítélt nehézségének megállapításához bevezetnék egy öt fokozatú skálát a közép- illetve emelt szintű érettségi követelményeket figyelembe véve, melynek szintjeit az alábbi módon értelmezem:

1-es nehézségi szint (nagyon könnyű): alapvető feladatok, melyek gyakran fogalmak megértését mérik; középszintű feladatok tartoznak ebbe a kategóriába, ezért az emelt szinten érettségizőktől elvárható a hibátlan feladatmegoldás

2-es nehézségi szint (könnyű): még középszintű feladatok, melyek már nem nevezhetőek egy adott témakör bevezető feladatának, azonban nem igényel mélyebb ismereteket a témakörrel kapcsolatban

3-as nehézségi szint (közepes): olyan feladatokat ölelnek fel, melyek mind a közép-, mind az emelt szintű érettségiben előfordulhatnak; összetettebb feladatok, melyek mélyebb ismereteket igényelnek egy adott témakörben, mint a 2-es nehézségi szintűek

4-es nehézségi szint (közepesen nehéz): emelt szintű feladatok, melyek túlmutathatnak a középiskolai középszintű matematikai ismereteken vagy tartalmi szempontból, vagy pedig szellemi szempontból olyan értelemben, hogy gyakran igényelhetnek kreatív kiinduló ötleteket

5-ös nehézségi szint (nehéz): emelt szintű, komplex, gondolkodást igénylő feladatok, melyek emelt szinten érettségiző diákoknak igazi kihívást jelenthetnek

Az egyes feladatoknál levő szögletes zárójelben megadott első szám a feladat forrására utal, lásd az irodalomjegyzéket, a második pedig a könyv vagy feladatgyűjteménybeli (esetleg interneten lévő) sorszáma.

2.1. Skatulya-elv

Bevezetés

Diákjaim tisztában voltak a skatulya-elv mibenlétével, azonban elmondásuk szerint kevés ehhez a témakörhöz kapcsolódó feladatot oldottak meg.

Ezért olyan feladatsort szándékoztam összeállítani nekik, melyben találkoznak olyan feladatokkal, melyek tipikusnak nevezhetőek, és olyanokkal is, melyekről nem feltétlenül jut a diák eszébe a skatulya-elv. Ezen felül fontos szempontnak tartottam, hogy többféle témakörhöz kapcsolódó, ezzel az elvvel megoldható feladatot sorakoztassak fel, ezért találkozunk számelméleti, geometriai, kombinatorikai és számtani sorozatos feladatokkal is. Ezáltal a diákok nemcsak a skatulya-elv használatát gyakorolják, hanem már megtanult fogalmak, összefüggések alkalmazását is ismétlik, mely igen fontos a gimnázium utolsó évében. A feladatok között nem található két megoldásában megegyező feladat.

Feladatsor

1. Legalább hány fős az az osztály, amelyben legalább 4 tanuló biztosan ugyanabban a hónapban született? [1, 0802]

2. (Egy korábbi nyári nyereményjáték nyomán.) A gyártó cég a joghurtok fedőfóliáira nyolcféle állat képét teszi, s a nyeréshez beküldendő vagy nyolc egyforma, vagy nyolc különböző állat képe. Legalább hány joghurtot kell vennünk, hogy egy jó sorozat biztosan kijöjjön? [2, 252]

3. Igazoljuk, hogy 5 db 10–nél nagyobb prím között lenni kell 2–nek, amik különbsége osztható 10–zel! [1, 0803]

4. A 8×8-as sakktábla minden négyzetébe a $-1, 0, 1$ számokat írjuk. Ki tudjuk–e tölteni úgy a mezőket, hogy a tábla minden sorában, oszlopában, és az átlókban szereplő számokat összeadva különböző eredményeket kapjunk. [1, 0805]

5. 100 majom között kiosztottunk 1600 kókuszdiót (lehet, hogy néhány

egyet sem kapott). Bizonyítsuk be, hogy a kiosztástól függetlenül mindig lesz 4 majom, akik ugyanannyi kókuszdiót kaptak. [3, K5.1]

6. Egy 70 cm oldalhosszúságú négyzet alakú céltáblára 50 lövést adunk le. Jól célzunk, egyetlen lövésünk sem kerüli el a táblát. Igazoljuk, hogy a találati pontok között van két olyan, amelynek a távolsága kisebb, mint 15 cm. [4, 44.oldal]

7. Adott 33 természetes szám, amelynek prímosztói a $2, 3, 5, 7, 11$ számok közül kerülnek ki. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható közülük két olyan szám, amelyek szorzata négyzetszám! [5, K3.3.]

Feladatok értékelése

1. feladat:

Az első feladatot bemelegítő jellegűnek szántam, 1-es nehézségű, célja a skatulya-elv legalapvetőbb alkalmazásának gyakorlása.

2. feladat:

A második feladatot azért találtam jelentősnek, mert életből vett példa az alapja, amivel akármelyikünk találkozhat, és jogosan felmerülhet benne a feladatban szereplő kérdés. Ez sem igényel különösebb készségeket, ezért ezt is 1-es nehézségűnek ítélem meg.

3. feladat:

Ezzel a feladattal célom volt az oszthatóság, prímek átismétlése, alkalmazása egy olyan feladatnál, melyet, ha a diákok nem témakörhöz kapcsolódva kaptak volna, nagy valószínűséggel nem alkalmazták volna a skatulya-elvet.

Kitűnő példa arra az esetre, hogy ezt a bizonyítási módszert a legkülönfélébb feladatoknál alkalmazzuk. Nehézsége szempontjából 3-ra értékelném.

4. feladat:

Ez a feladat is 3-as nehézségű; azért tartottam fontosnak a feladatsorban való szereplését, mert meg szerettem volna vizsgálni, hogy vajon a diákok hány százaléka kezdi el megpróbálni kombinativitásával kitölteni a sakktábla mezőit, és hány százalék az, aki először gondolkodik, és megnézi, hogy ezekből a számokból hányféle összeg képezhető. Ezzel a feladattal arra taníthatók a diákok, hogy először gondolkozzanak, mielőtt vad számolgatásokba, és kombinálásokba kezdenek.

5. feladat:

Ezt a példát már 4-es nehézségűnek gondolom, amiatt a csavar miatt, hogy itt a skatulyák meghatározása jelenthet nehézséget.

6. feladat:

Ez a feladat 5-ös nehézségű, melynek oka abban rejlik, hogy, ha a diákok azelőtt nem találkoztak még hasonló feladattal, akkor igen nehéz lehet pontos, precíz megoldást adni, de legalább ugyanilyen nehéz lehet a diákokat rávezetni az általam ismert gondolatmenetre. Fontos feladatnak tartom a megoldás szépsége, és egyszerűsége miatt is.

7. feladat:

Szintén 5-ös nehézségű feladat, melynek meghatározásához nagy szerepet játszott a tény, hogy Matematikai Olimpiai feladat. Céljaim között szerepelt a diákok elgondolkodtatása, problémamegoldó képességük fejlesztése.

2.2. Valószínűségszámítás

Bevezetés

A valószínűségszámítás egy olyan témakör, mely alapvetően hétköznapi eseményekre épít, ezáltal még az olyan diákokban is érdeklődést kelt, kételyeket fogalmaz meg, akik nem kifejezetten érdeklődnek a matematika iránt. Ez egy hatalmas előnye a témakörnek, hiszen egyes feladatokkal nagymértékben fel lehet kelteni a diákok érdeklődését. Habár amennyire emberközelinek, hétköznapinak tűnik a témakör, legalább annyira bonyolult és absztrakt elemeket is tartalmaz. Mind a középiskolai diákoknak, mind a tanároknak fejtörést okozhat. Nem jelenthetjük ki, hogy van egy analitikus eljárás, mint első-, másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségeknél. Itt minden egyes feladat más, ráadásul a megoldáshoz gyakran nemcsak egyetlen egy út vezet. Sokféleképp lehet gondolkodni, és a legszebb, és egyben legnehezebb benne, hogy megpróbáljuk megérteni mások gondolatát, észjárását. A tanárnak pontosan ezért van nehéz dolga, mert nem elég elmondania a ”jó megoldást”, meg kell értenie mások érvelését, ráadásul téves következtetések esetén rá kell jönnie, hogy a diák hol rontotta el, és ezt el is kell neki magyaráznia; rá kell vezetnie arra, hogy melyik volt az a pont, ahol elrontotta.

2.2.1. Kombinatorikus valószínűség

Feladatsor

1. Egyszerre feldobunk hat szabályos dobókockát, amelyek különböző színűek. Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindegyik kockával más számot dobunk? [6, 4/a]

2. A könyvespolc alsó polcáról a kétéves Pisti leszedte a könyveket, majd "saját ízlése szerint" visszarakta mind a 25-öt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a köztük levő három idegen nyelvű könyv egymás mellé került? [7, 4. rész/36]

3. Egy 8 fős klub megalakulásakor sorsolással dönti el, hogy ki milyen pozíciót kapjon a társaságban. Két elnököt, 2 alelnököt, 1 titkárt és 3 tagot sorsolnak ki úgy, hogy betesznek egy urnába 8 papírt, kettőt elnök, kettőt alelnök, egyet titkár és hármat tag felirattal, majd ezeket sorban kihúzzák. A klub 5 férfiból és 3 nőből áll, akik között két házaspár van, a többiek egyedülállóak (nőtlenek illetve hajadonok).

   a) Dávid és Gábor jó barátok, szeretnének együtt elnökölni. Mi a valószínűsége annak, hogy ezt megtehetik?

   b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a tagok mindegyike egyedülálló?

   c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a két házaspár tölti be az elnöki és az alelnöki posztokat?

   d) Hány különböző módon ülhet le a társaság egy kerek asztal köré vacsorázni? (Két ültetést azonosnak tekintünk, ha mindenkinek ugyanaz a jobb és bal szomszédja.) Hányféleképpen tehetik meg ezt, ha a házaspárok egymás mellet akarnak ülni?

   e) Mennyi a valószínűsége az alábbi eseménynek? A: Nő lesz a titkár

   [8, 6. feladatsor/9.]

4. Négy gyerek között nyolc almát osztottunk szét, úgy hogy az almákat nem daraboltuk fel. Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindenkinek legalább egy alma jutott? [saját feladat]

5. Két csoportra osztunk egy öt házaspárból álló társaságot úgy, hogy az egyik csoportba hat személy kerül. Mennyi a valószínűsége, hogy a hat személy között legalább két házaspár van?

[Gordiusz 9.osztály 26., (2009) egyéni változat]

Feladatok értékelése

1. feladat:

A feladattal való célom két kombinatorikus fogalom ismétlése volt, méghozzá a permutáció és az ismétléses variáció ismétlése. 1-es nehézségű feladat.

2. feladat:

Ez a feladat is könnyűnek nevezhető, egy kicsivel nehezebb, mint az előző példa a három idegen nyelvű könyv permutációinak figyelembevétele miatt, ezért 2-es nehézségűnek ítélem meg. Célja a valószínűségszámítás elemi gyakorlása.

3. feladat:

Ez a feladat egy választás különböző megvalósulásairól szól, kitűnő példa arra, hogy ezeket a különböző eseteket meg lehessen különböztetni, megvizsgálni, elemezni. Összetettebb, de életből vett gyakori eset az alapja, mely mindenképp jó szolgálatot tesz a valószínűségszámítás hétköznapi alkalmazásának prezentálására. Az a) rész a kombinatorikai kombinációt gyakoroltatja, alapozó feladat, 1-es nehézségű. A b), c), e) feladatok 2-es nehézségűek, mindegyik kombinációval kiszámítható, egyes részeknél kisebb-nagyobb csavarral. A d) részt pedig azért találtam fontosnak, hogy szerepeljen a feladatsorban, hogy a diákok kiszámolják hányféleképp ülhetnek le a tagok egy kerekasztal köré vacsorázni. Emellett azért volt igazán szimpatikus a feladat, mert nehezítésképp a házaspárok egymáshoz való viszonyát is figyelembe kellett venni a példa második kérdésénél. Ezek alapján 3-as nehézséget ítélek neki.

4. feladat:
Ezt a feladatot azért találtam ki, mert fontosnak tartottam, hogy a diákok az ismétléses kombinációval is találkozzanak, fel tudják használni a valószínűségszámítást tartalmazó feladatoknál, felismerjék, mikor kell használni. Ennél a kombinatorikus fogalomnál viszont azt is fontosnak tartottam, hogy meg is magyarázzuk, miért is a hozzá tartozó képlet alapján számoljuk, mit jelent a képlet. Mivel ez a fogalom túlmutat a középiskolai középszintű ismereteken, ezért 4-es szintű feladatnak tartom.

5. feladat:
Ez egy igen nehéznek nevezhető, összetettebb feladat, ezért 5-ös nehézségű. Célja a diákok kombinatorikus készségeinek erőteljes fejlesztése, a diákok motiválása a körültekintőség felé.

2.2.2. Geometriai valószínűség

Feladatsor

1. Egy 15 cm oldalú négyzetlap pontjai közül egyet véletlenszerűen kiválasztva, mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott pontnak a négyzet mindegyik oldalától mért távolsága legalább 5 cm? [2, 2955]

2. Adott a $K(t) = t^2 + 6t + 5$ polinom. Jelölje H a koordinátasíkon $P(x; y)$ pontjainak halmazát, amelyekre $K(x) + K(y) \leq 0$. A H halmaz pontjai közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott pont a $C(-3; 3)$ ponttól 2 egységnél nem nagyobb távolságra van? [9, 7/a]

3. Egy 1 egység oldalú ABCD négyzet belsejében vegyünk fel véletlenszerűen egy P pontot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az így keletkező ABP háromszög tompaszögű lesz? [7, 7. rész/74]

4. Válassz véletlenszerűen egy Q pontot egy $ABCD$ egységnégyzet belsejében. Tükrözd az AC átlóra, a kapott pontot jelöld R–rel. Legyen S a QR szakasz felezőpontja! Mennyi a valószínűsége annak, hogy az AS távolság kisebb, mint 1? [7, 6. rész/69]

5. Egy áruház teherportájához dél és este hat óra között kettő teherautó érkezik áruval. Az egyik autónak 90 percre van szüksége az áru kipakolásához, a másiknak pedig 1 órára. Azonban az áruháznak csak egy rakodórámpája van, ha egyik teherautó rakodik, akkor a másiknak várakoznia kell. Amennyiben feltételezzük, hogy véletlenszerűen érkeznek az adott határokon belül, mekkora valószínűséggel nem kell várakozniuk egymásra? (A bolt dolgozói a rakodás végéig az üzletben maradnak.) [1, 0115]

6. Reggelente 6:30 és 7:30 között férj és feleség együtt használja a fürdőt, de nem közösen. Mindkettejüknek nagyjából ugyanannyi időre van szüksége a reggeli készülődéshez. Azt szeretnénk (a veszekedések elkerülése végett, az esélyegyenlőség nevében), hogy körülbelül ugyanannyiszor várakozzanak egymásra, mint ahányszor elsőre bemehetnek mind a ketten. Mennyi időt tartózkodhatnak a fürdőben, hogy ez teljesüljön?

Feltételezzük, hogy a házastársak véletlenszerűen rohanják meg a fürdőszobát. [1, 0116]

Feladatok értékelése

1. feladat:

Első feladatnak mindenképp olyan feladatot szerettem volna választani, mellyel érthetővé, szemléletessé, könnyen befogadhatóvá válik a geometriai valószínűség fogalma. Ezért ezt az igen egyszerű példát találtam, 1-es nehézségűt.

2. feladat:

Ez a feladat pedig azért nyerte el igazán tetszésemet, mert nem egyszerűen csak a geometriai valószínűség fogalmát gyakoroltatja, hanem koordinátageometriai egyenletek ismeretét is megköveteli, ezzel a kis nehezítéssel tökéletesen megfelelő 2. feladatnak. 2-es nehézségű.

3. feladat:

Ezt a feladatot is még a könnyebbek közé sorolnám, szintén 2-es nehézségű. Célja egyes geometriai fogalmak (szögek, látókörök) átismétlése, alkalmazása.

4. feladat:

Ez a feladat nehézségét tekintve egy nehézségi szinttel feljebb áll (3-as), mivel igaz, hogy komolyabb geometriai tudást nem igényel, azonban a megoldáshoz vezető út időigényesebb, és számolást tekintve összetettebb, mint az előző példa. A feladatsorban való szereplését a geometriai megfogalmazása miatt preferáltam.

5. feladat:

Ez, és az utolsó feladat egy olyan problémát old meg, melyekkel jószerivel találkozhatunk a mindennapi életben, az általam összeállított esetekben például árupakolással, illetve fürdőszoba használattal. Pontosan az előbb leírt ok miatt a diákokat még inkább érdekelheti a feladat megoldása, hogyan lehet az ilyenfajta feladatokat geometriai valószínűséggel ábrázolni, megoldani. Nehézségét tekintve 4-es szintű feladat.

6. feladat:

Igaz, hogy ez a feladat nagymértékben hasonlít az előzőhöz, azonban azzal a csavarral szerepel, hogy itt nem valószínűséget kérdez, hanem geometriai valószínűség alkalmazásával kell meghatározni, hogy mennyi időt tartózkodhat a fürdőben a házaspár egy-egy tagja, ha körülbelül ugyanannyiszor szeretnének egymásra várakozni, mint ahányszor elsőre bemehetnek mind a ketten. Ezért a csavar miatt 5-ös szintűre értékelem.

3. A feladatok megoldása saját elgondolásom szerint

3.1. Skatulya-elv - megoldások

1. feladat:

Vegyük a "legrosszabb" esetet, amikor minden skatulyában (ebben az esetben ezek a hónapok) elhelyezünk 3 tanulót, azaz összesen $3 \cdot 12 = 36$ tanulót, így még nem teljesül az osztályra vonatkozó feltétel. Azonban eggyel több tanuló esetén már igen, hiszen, azt valamelyik skatulyába bele kell, hogy tegyem.

2. feladat:

Ennél a feladatnál is vegyük a "legrosszabb" esetet, amikor 7 féle állatfajból fajonként 7 képünk már van, tehát összesen 49. Az 50. kép már biztosan teljesíteni fogja egy jó sorozat megvalósulását, hiszen az vagy már egy meglévő állatfaj lesz, amivel teljesül a 8 db egyforma kép, vagy egy új állatfaj képét vesszük meg, amivel be tudunk küldeni 8 különböző állatfajt ábrázoló fedőfóliát.

3. feladat:

A 10–nél nagyobb prímek mind páratlanok, ezért 1, 3, 7, illetve 9–re végződhetnek. (5–re nem, hiszen akkor az osztható lenne 5–tel.) Ez legyen a 4 skatulyánk, és mivel 5 számunk van, ezért egy skatulyába biztosan bekerül kettő, melyek a skatulya tulajdonsága miatt ugyanarra a számjegyre végződnek, tehát különbségük 0-ra fog végződni, így osztható lesz 10–zel.

4. feladat:

Meg kell vizsgálnunk, hogy hányfajta különböző, nyolctagú összeg képezhető a $-1, 0, 1$ számok felhasználásával. Szisztematikusan is végig lehet vizsgálni az egyes eseteket, leírni, hogy mely értékek állhatnak elő, azonban elegánsabb módon is hozzá lehet jutni az eredményhez. A legkisebb érték a -8, a legnagyobb a 8, és ezek között minden értéket elő tudok állítani, hiszen ha egyel növelni szeretném az összeget, akkor valamely -1 tagot 0–ra, vagy valamely 0 tagot 1–re cserélek, ha pedig csökkenteni szeretném az összeget, akkor valamely 1–est 0–ra, vagy valamely 0–st -1–re cserélem. Így 17 féle összeget képeztem. Viszont a tábla minden sorában, oszlopában, és az átlókban szereplő számokat összeadva különböző eredményeket kell, hogy kapjak, tehát összesen $8 + 8 + 2 = 18$ féle különböző összeget, amely az előző számolás miatt lehetetlen.

5. feladat:

Legyenek a skatulyák címkéi, hogy mennyi kókuszdiót kap egy majom (akár semennyit se), és így pakoljuk a skatulyákba a majmokat. Ez a feladat abban hasonlít az első feladathoz, hogy itt is minden egyes skatulyába 3 elemet (majmot) teszek bele, hiszen ez a "legrosszabb eset", amikor még nincs 4 majom, akik ugyanannyi kókuszdiót kaptak. A kérdés itt viszont az, hogy hány skatulyát tudok képezni? 33 a válasz, hiszen mindegyikbe teszek 3 elemet, ekkor már 99–et elhelyeztem, és az utolsó elemet pedig megvizsgáljuk hova tehetjük, alkothatunk–e neki egy másik skatulyát.Itt jön szóba a számtani sorozat, annak összegképlete, amikor is ki szeretnénk számolni, hogy így összesen hány kókuszdiót osztottunk ki. Eszerint $\frac{0+32}{2} \cdot 33 \cdot 3 = 1584$–et, tehát az utolsó majomnak nem oszthatunk ki 33–at, hogy így új skatulyába kerüljön, mert csak 16 diónk van, ezért kénytelenek vagyunk egy már meglévő skatulyába helyezni, ahol immáron már 4 majom lesz.

6. feladat:

A feladat megoldásának kulcsötlete az, hogy felosztjuk a $4900\,\mathrm{cm}^2$ területű táblát 49 db $100\,\mathrm{cm}^2$ területű négyzetre. Így a skatulya–elv értelmében kell lennie egy olyan négyzetnek, amelyben két találati pont van. E két találati pont távolsága azonban nem lehet nagyobb a négyzet átlójánál, amely $10 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{200} \approx 14,14$ cm, amely kevesebb, mint 15 cm. Ezzel beláttuk az állítást.

7. feladat:

Két szám szorzata akkor lesz négyzetszám, ha az adott számok szorzatában minden prímtényező páros hatványon szerepel (megjegyzendő: akár a 0.-on is). Így minden prímtényező esetében 2 lehetőségünk van a paritást figyelembe véve: vagy páros, vagy páratlan. Ez 2^5 lehetőséget eredményez. Így a 33. szám prímtényezős felbontásában a kitevők paritása megegyező lesz valamely már eddig szerepelt számmal, ezért ha egy prímszám kitevője páros volt, akkor az a hatványszorzás azonosságai miatt páros is marad (páros+páros=páros), ha pedig páratlan volt, akkor párossá változik (páratlan + páratlan = páros), így négyzetszámot kapunk.

3.2. Kombinatorikus valószínűség - megoldások

1. feladat:

Két kombinatorikus fogalom felírásával megkapjuk a keresett valószínűséget: permutációval a kedvező esetek számát, amely 6!, és ismétléses variációval az összes esetek számát, mely 6^6. Így, a valószínűség e két szám hányadosa:

$$P = \frac{6!}{6^6} \approx 0,0154$$

2. feladat:

A 3 idegen nyelvű könyvet, melyeknek egymás mellé kell, hogy kerüljenek, egy könyvnek kell vennünk. Így a kedvező esetek száma a könyvek lehetséges permutációi, szorozva a 3 idegen nyelvű könyv lehetséges permutációival ($23! \cdot 3!$). Az összes lehetséges eset száma $25!$, így a keresett valószínűség: $\frac{23! \cdot 3!}{25!} \approx 0,01$

3. feladat:

Az a) rész kombinációval számítható ki. Egy esetben teljesül a feltétel, miszerint Dávid és Gábor elnököl, az összes esetek száma pedig $\binom{8}{2}$.

Így

$$P = \frac{1}{\binom{8}{2}} = \frac{1}{28} \approx 0,0357$$

A b) feladatot szűkítsük le a tagválasztás kérdésére! Így kedvező esetnek $\binom{4}{3}$-at tudunk felírni (a 4 egyedülállóból hányféleképp választhatunk ki 3-at), összes esetnek pedig $\binom{8}{3}$-at (ahányféleképp a tagokat ki tudjuk választani 8 fő esetén). Így

$$P = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{4}{56} \approx 0,071$$

A c) esetnél a valósszínűség a következő:

$$P = \frac{2}{\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2}} = \frac{2}{420} \approx 0,0048$$

ahol a számlálóban a 2 pár permutációja szerepel, a nevezőben pedig az elnöki és alelnöki posztok lehetséges kiosztásának esetei.

A d) példában a tagok permutációit el kell osztanunk a tagok számával, hiszen egy kerekasztal köré ülnek le vacsorázni, így minden egyes permutáció esetén van nyolc azonos ültetés, nevezetesen azok, melyek az adott permutációból úgy képződnek, hogy a társaság minden tagja egy hellyel arrébb ül. Így $P = \frac{8!}{8} = 7! = 5040$. Emellett nehezítésképp a házaspárok egymáshoz való viszonyát is figyelembe kellett venni a példa második kérdésénél. Ez a feladat nagyban hasonlít a feladatsoron szereplő 2. feladathoz. Ez alapján a házaspárokat egy személynek tekintjük, vesszük így a leülések összes lehetőségét, majd ezt a számot megszorozzuk a 2 házaspár páron belüli permutációival, így:

$$P = 5! \cdot 2! \cdot 2! = 480$$

Az e) résznél az eredmény a következőképp alakul:

$$P = \frac{\binom{3}{1}}{\binom{8}{1}} = \frac{3}{8} \approx 0,375$$

ahol kedvező esetnek a három nő személye közül választunk egyet, az összes lehetőség pedig a társaság összes tagja közüli egy személy kiválasztása.

4. feladat:

A kedvező esetek meghatározásához vonjuk ki az összes lehetséges kiválasztás számából a pontosan egy párt tartalmazó esetek számát! Az összes eset száma $\binom{10}{6}$, a pontosan 1 párt tartalmazó esetek száma pedig $\binom{5}{1} \cdot 2^4$,

amire úgy jöhetünk rá, hogy ha már kiválasztottuk azt az egy párt - $\binom{5}{1}$ - akkor melléjük még a maradék 8 főből kell 4 főt kiválasztanom, de úgy, hogy azok között ne legyen egy pár sem. Ezt úgy tehetjük meg, hogy minden egyes párosból vagy az egyiket, vagy a másikat választhatjuk, tehát erre 2^4 lehetőségünk adódik. A kedvező esetek száma:
$\binom{10}{5} - \binom{5}{1} \cdot 2^4 = 210 - 80 = 130$ így a valószínűségre a következőt kapjuk:

$$P = \frac{130}{\binom{10}{6}} = \frac{130}{210} \approx 0,619$$

5. feladat:

Az ismétléses kombináció felhasználásával tudjuk kiszámítani mind a kedvező, mind az összes esetek számát: $\dfrac{\binom{4+4-1}{4}}{\binom{8+4-1}{8}} = \dfrac{35}{165} \approx 0,\dot{2}\dot{1}$. A kedvező eseteket úgy számolhatjuk ki, hogy először kiosztunk minden gyereknek egy almát, majd megvizsgáljuk, hogy a maradék 4 almát hányféleképpen oszthatjuk ki a 4 gyerek között. Erre pedig tudjuk alkalmazni az ismétléses kombináció képletét.

3.3. Geometriai valószínűség - megoldások

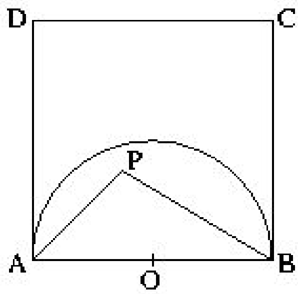
1. feladat:

A megoldást a belső négyzet területének és a külső négyzet területének hányadosaként kapjuk. Tehát $P = \dfrac{5^2}{25^2} = \dfrac{25}{225} = \dfrac{2}{9} \approx 0,\dot{1}$

2. feladat:

A H halmaz pontjait könnyedén meghatározhatjuk, ha algebrai átalakításokkal (teljes négyzetté alakítással) az alábbi alakra hozzuk a meghatározását: $(x+3)^2+(y+3)^2 \leq 8$. Ez egy $(-3;-3)$ kötéppontú, $\sqrt{8}$ sugarú zárt körlap. A $C(-3;-3)$ ponttól 2 egységnél nem nagyobb távolságra lévő pontok halmaza szintén egy zárt körlapot határoz meg, melynek középpontja megegyezik a H halmaz középpontjával, tehát az alakzatok koncentrikus körlapok. A kérdezett valószínűséget a két alakzat területének hányadosával tudjuk kifejezni, mely így: $P = \dfrac{T_{belső\ kör}}{T_{külső\ kör}} = \dfrac{4\pi}{8\pi} = \dfrac{1}{2}$

3. feladat:

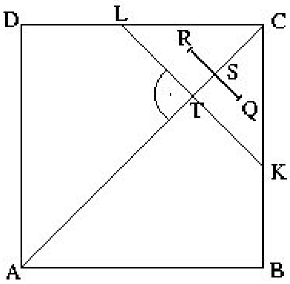


Itt két fontos dologra kell rájönnünk. Először is, hogy A-ban és B-ben nem lehet tompaszög, legfeljebb 90°-os szög keletkezhet, mivel a pontot a négyzeten belül választom, így a tompaszögünk P-nél lesz. Másodszor pedig, hogy akkor kapok P-ben tompaszöget, ha a P az AB fölé emelt Thalész körön belül helyezkedik el. Így felírva a geometriai valószínűség modelljét, az alábbi arányt kapjuk:

$$P = \frac{T_{félkör}}{T_{négyzet}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\pi}{1} = \frac{\frac{\pi}{8}}{1} = \frac{\pi}{8} \approx 0,3927$$

4. feladat:

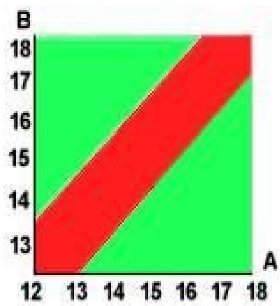
Az S pont az AC átlóra esik, mivel a QR szimmetrikus erre. AT szakasz hossza legyen egységnyi, így akkor lesz AS távolság kisebb, mint 1, ha S az AT szakaszon belül helyezkedik el. Tehát kedvező esetet akkor kapunk, ha Q-t az $LKBAD$ ötszögön belül választjuk, tehát ki kell számolnunk ennek a területét, mely meghatározásához az LKC háromszög területét számoljuk ki, majd kivonjuk az egységnégyzet területéből. Mivel ez a háromszög derékszögű, és egyenlő szárú (a tükrözés miatt), ezért két olyan háromszögre bontható, melyek szintén ugyanazzal a tulajdonsággal rendelkeznek, mint amiből képeztük, nevezetesen, hogy derékszögűek, és egyenlő szárúak. Így $CT = LT = TK$. De tudjuk, hogy $CT = \sqrt{2} - 1$, tehát $T_{LKC} = \frac{2 \cdot (\sqrt{2}-1) \cdot (\sqrt{2}-1)}{2} = (\sqrt{2}-1)^2 = 3 - 2 \cdot \sqrt{2}$. Így $T_{LKBAD} = 1 - (3 - 2 \cdot \sqrt{2}) = 2 \cdot \sqrt{2} - 1$. A keresett valószínűség tehát:



$$P = \frac{2 \cdot \sqrt{2} - 1}{1} = 2 \cdot \sqrt{2} - 1 \approx 0,8284$$

5. feladat:

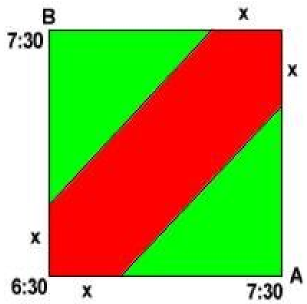
Legyen A teherautó az, amelyik 90 percig pakol, és B, amelyik 60 percig. Ha Descartes-féle koordináta-rendszerben az érkezési időpontokat ábrázoljuk, úgy, hogy az x tengelyen mérjük A, és az y tengelyen B érkezési időpontját, origónak választva déli 12 órát, akkor láthatjuk, hogy az így kapott 6×6-os négyzeten belül egy pont mindkét teherautó érkezési időpontját meghatározza. Most már csak azt kell meghatározni, hogy ezen pontok közül, melyek azok a pontok, melyek szerint a két autó közül egyiknek sem kell várakoznia a másikra. Ha A érkezik előbb, akkor az alábbi egyenletet írhatjuk fel: $B - A > 1,5$, tehát $B > A + 1,5$. Ha B érkezik előbb, akkor pedig: $A - B > 1$, tehát $B < A - 1$. Ezen egyenlőtlenségek a megadott intervallumon két háromszöget határoznak meg, melyeket az ábrán zöld színnel jelöltünk. Ezek a kedvező



esetek, míg a 6×6-os négyzet egésze az összes lehetséges eset. Ezek szerint:

$$P = \frac{T_{kedvez\H{o}}}{T_{\ddot{o}sszes}} = \frac{\frac{4,5^2}{2} + \frac{5^2}{2}}{6^2} = \frac{\frac{81}{8} + \frac{100}{8}}{36} = \frac{181}{288} \approx 0,6284$$

6. feladat:



Hasonlóan az előző feladathoz megkonstruálhatjuk az alábbi ábrát, melyen x-szel jelöltük azt az időtartamot percben kifejezve, amennyit a férj és feleség a fürdőszobában tölthet ($0 < x < 60$), origónak választva reggel 6 óra 30 percet. Itt két egybevágó háromszög területe lesz a kedvező esetek mérőszáma, és a négyzet területe ($60 \cdot 60 = 3600$) az összes esetek mérőszáma. Így: $P = \frac{\frac{(60-x)^2}{2} \cdot 2}{3600}$, ahol $P = \frac{1}{2}$, mivel a feladat szövege szerint ugyanannyiszor kell, hogy várakozzanak egymásra, mint ahányszor elsőre bemehetnek. Így rendezve az $x^2 - 120x + 1800 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, melynek gyökei: $x_1 \approx 102,42$ és $x_2 = 17.57$, melyek közül a második lehet csak megfelelő az x-re vonatkozó feltétel miatt. Tehát ahhoz, hogy a házaspár ugyanannyiszor várakozzon egymásra, mint ahányszor elsőre bemehetnek körülbelül 17,5 percet tölthetnek a fürdőszobában.

4. A diákok munkája

4.1. Skatulya-elv

1.,2. feladatok:

A besorolásom, miszerint ezek a feladatok 1-es nehézségűek, a diákok által igazolást nyert, mindenki hibátlanul meg tudta őket oldani.

4. feladat:

A diákok nagy része hamar rájött arra, hogy csak 17 féle szám képezhető a -1, 0, és 1 felhasználásával. Akik nem, azok az elején megpróbálgatták kitölteni a sakktábla négyzeteit a megadott 3 szám többszöri felhasználásával. Azonban ez a módszer túl bonyolultnak tűnt nekik, nem tudtak szabályt mutatni arra, hogyan töltsék ki a négyzeteket. Ezek után már ők is megtalálták a helyes megoldást, egy fő kivételével, akinek egy olyan gondolata volt, hogy megnézi, hogy az összes lehetséges 8 hosszú számsorozatból melyek azok, amelyek összegük szempontjából megegyeznek. Vagyis le akarta szűkíteni az egyes eseteket. Azonban ezt a procedúrát igen hosszúnak tartotta, miután kiszámolta, hogy, ha figyelembe veszi a számok sorrendjét, akkor összesen $6561 (= 3^8)$ db 8 hosszú számsorozatot fog kapni. (Ezeket kellene leszűkítenie az összeadás kommutativitása, és a az összegek figyelembevételével.) Kis gondolkodás után azonban ő is rájött a helyes megoldásra, mégpedig annak az adatnak a felhasználásával, melyből következtetett, hogy a kérdés tulajdonképpen az, hogy képezhető-e 18 féle összeg a megadott számokból.

5. feladat:

Ennél a feladatnál 3 diák is figyelmen kívül hagyta azt a fontos adatot, hogy lehet, hogy néhány majom egy kókuszdiót sem kapott. Jó gondolatmenettel még jó megoldást is kaptak, hiszen megpróbálták elosztani a kókuszdiókat úgy, hogy legfeljebb 3 majomnak jusson ugyanannyi kókuszdió, de ők minden majomnak osztottak diót. Így $1+1+1+2+2+2+3+3+3+4+4+4+5+5+5+\ldots+33+33+33+34=1717$-et kaptak, mely nagyobb, mint 1600, tehát jól is következtettek, hogy a skatulya-elv miatt mindig lesz 4 majom, akik ugyanannyi kókuszdiót kaptak, viszont egészében véve, mivel figyelmen kívül hagytak adatokat, feladatmegoldásuk hibás volt.

6. feladat:

Ezzel a feladattal kapcsolatban az a negatívum, hogy ha a diákok azelőtt nem találkoztak még hasonló feladattal, akkor tapasztalataim alapján igen nehéz őket rávezetni erre a gondolatmenetre. Leginkább a skatulyák megalkotása okozta nekik a nehézséget. A csoportban mindenki rájött arra, hogy valamilyen homogén módon kellene elrendezni a pontokat, egyenlő távolságra egymástól, így először a pontok köré többen köröket rajzoltak. Azonban útközben feladták ennek megvalósítását, mert nem tudták a körök helyzetét (vagyis a pontokat) úgy meghatározni, hogy azok a "legrosszabb esetet" tükrözzék. Voltak olyanok is, akik egyenlő szárú háromszögekkel próbálkoztak, amiknek oldalai 15 cm hosszúak voltak, és a háromszögek csúcsai jelentették a találati pontokat. Azonban itt is hasonló akadályokba ütköztek, mint a körök eseténél. Ekkor tértek át a négyzetekre, és csakis az vezethetett egyeseket a megoldásra, hogy figyelmeztettem őket az oldalak pontosan 70 cm-es voltára, és a nem véletlenül 50 db lövésre. Mert ekkor már rájöttek, hogy nekik valahogyan 49 skatulyát kellene meghatározniuk, hogy az 50. lövés már egy meglévő skatulyába kerüljön. A körökkel illetve a háromszögekkel való lefedés kapcsán a diákok gyakorlatilag egy teljesen új feladatot készítettek maguknak, mely érdekes kutatási irányba is mutathat.

Nevezetesen egy diszkrét geometriai problémát vet fel, miszerint lefedhetünk-e teljesen egy adott területű négyzetet a legkevesebb kör felhasználásával, ha a körök középpontjainak egymástól való minimális távolsága is adott? És mennyi ezeknek a köröknek a száma?

7. feladat:

A legtöbb diák úgy értelmezte ezt a feladatot, hogy a prímszámok legfeljebb 1 kitevőjű hatványként jelenhetnek meg mind a 33 számnál. Ebben az esetben úgy gondolkodtak, hogy megszámolták, hány szám képezhető ezzel a feltétellel, amit a kombinatorika felhasználásával az alábbi módon számoltak ki: $\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 32$. Így, a 33. szám biztos már egy meglévő számmal lesz azonos, így azok szorzata négyzetszám lesz, érveltek a diákok. Ez a gondolatmenet több érdekes és hasznos kiegészítést von maga után. Először is azt, hogy az általuk felírt kombinatorikus kifejezés nem véletlenül 2^5, hiszen ez egy 5 elemű halmaz részhalmazai számának megfelelője. Ez a formula pedig a binominális tételnek $\big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k = (a+b)^n\big)$ egy speciális esete, mégpedig, amikor a és b értéke egyaránt 1. Második fontos kiegészítésem az volt, hogy az osztók számát hogyan számolhatjuk ki egyszerűen (hiszen ők gyakorlatilag ezt tették az $n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ számra nézve) egy formula segítségével: ha $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$, ahol $p_1, p_2, \ldots, p_n$ különböző prímek, és $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z}^+$, akkor az osztók száma: $d(n) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_n + 1)$, hiszen minden p_i összesen $(\alpha_i + 1)$ féle hatványon szerepelhet az osztó prímtényezős felbontásában (+1, mert 0 is lehet a kitevője). Ennél a feladatnál is félig-meddig jó megoldást kaptak, de feladatmegoldásuk itt is hibás szövegértési okok miatt. Ez a példa kifejezetten hasznosnak tűnt a diákok számára, hiszen több matematikai fogalmat is érintett (igaz, hogy a diákok hibája miatt); nemcsak meglévő ismeretek ismétlésére, hanem eddig még nem hallott formula, nevezetesen az osztók számának kiszámítási módjának bevezetésére is jól szolgált.

4.2. Kombinatorikus valószínűség

1. feladat:

Diákjaimnak nem okozott problémát a feladat megoldása, azonban felmerült bennük a kérdés, hogy mi lenne, ha nem lennének beszínezve a kockák. Akkor mennyivel lenne kisebb a valószínűsége, hogy 6 különböző számot dobunk ki. Egyáltalán kisebb lenne a valószínűsége? Mivel ez az új feladat heves vitákat váltott ki, javasoltam, hogy mindenki gondolkozzon el rajta, és a következő órán, a feladatsor megbeszélése után került sor a feladat megvitatására. Akadtak olyanok, akik egyértelműen kijelentették, hogy a színezés elvetése nem változtat a végeredményen, ugyanannyi lesz a valószínűség. Az egyik diák ezt azzal magyarázta, hogy ő nem érti, hogy miért változnának az esélyek egy ilyen kockajátéknál, ha színes, vagy egyforma kockákkal játsszák őket. Nem tudja elképzelni, hogy ha épp dobjuk fel a 6 színes kockát, és azok esés közben elvesztik színüket, akkor, hogy változna meg az esély arra, hogy hogyan esnek le? És ebben teljesen igaza volt, nagyon jól elmondta, hogy a valóságban a valószínűség ugyanaz marad, mert nincs 2 egyforma kocka, a természet nem tudja nem megkülönböztetni őket, tehát mindig "beszínezi". Azonban, ha a diákok matematika órán azt a feladatot kapják, hogy számoljuk ki, hogy mennyi a valószínűsége annak, hogy 6 teljesen egyforma kockát egyszerre feldobva 6 különböző számot dobunk, akkor nem ezt a magyarázatot kell adniuk. Itt egy matematikai modellt kell alkotniuk, melyben a kockák identikusak. Az már egy érdekes része a feladatnak, hogy ilyen a valóságban nem létezik, ez a matematikai modell nem tükrözi a valóságot. Amikor ezt a matematikai modellt a diákok meg akarták alkotni, születtek olyan rossz megoldások, mint például $\frac{1}{\frac{6^6}{6!}}$, melynél a diák úgy okoskodott, hogy 1 kedvező eset van, amikor kidobjuk az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok mindegyikét, és mivel a kockák azonosak, ezért nem számolhatok a sorrendjükkel. Eddig teljesen igaza volt a diáknak. Azonban az összes eset melletti érvelésében kiszámolta, hányféle dobás lenne, ha számítana a sorrend (6^6), majd leosztott ezek permutációival, sajnálatos módon tévesen. Hiszen, igen, jó a gondolatmenete, hogy valamilyen módon ki kell küszöbölni azokat az eseteket, amelyek csak sorrendileg különböznek, hiszen kikötöttük, hogy a kockák identikusak. Azonban nem minden esetben lehet 6!-sal leosztani, vegyük csak ellenpéldaként a 223444 dobást, ahol a permutációk miatt nem 6!-sal, hanem $2! \cdot 3!$-sal kell leosztani. Hasonló okok miatt nem helyes megoldás a következő: $\frac{1}{\frac{6^6-6}{6!}+6}$, ahol a diák ki akarta küszöbölni a rosszul leosztott permutációkat, így levonta az összes esetből azt a 6 esetet, amikor mindegyik kockával ugyanazt dobjuk (igaz, hogy ezekben az esetekben pont 6!-sal kellene osztanunk, ha vennénk a sorrendjüket), a megmaradt eseteknek leosztott a permutációival, majd visszaadta az összes esethez azt a 6 esetet. Érdekesség, hogy, ha megvizsgáljuk az így, vagy az előző "megoldásban" képzett összes esetet, akkor láthatjuk, hogy nem egész számot kapunk, tehát a diákoknak gondolniuk kellett volna arra, hogy ezek szerint valamit elrontottak, de ez egyedül 1 diáknak jutott eszébe. Jó megoldást egyetlen diák tudott produkálni, aki nem is az én gondolatmenetemmel megegyező megoldást adott, mégis úgy érzem, hogy az övé sokkal elegánsabb mód az ilyenfajta feladatok megoldására. Ő a következőképp gondolkodott az összes esetek összeszámlálásánál: mivel csak az számít, hogy egyes értékekből (1-6) hány darabot dobott ki, és az azonos értékek közti, sőt a különböző értékek közti sorrendek sem számítanak, ezért vegyük segítségül az ismétléses kombináció képletét (amit épp akkor beszéltünk meg, hiszen amint említettem, erre az új feladatra a feladatsor átbeszélése után került sor). Hasonló konstrukciót alkotunk, mint a fogalom megmagyarázásánál (lásd 4. feladat), most az 1-esek egymás után az egyes értékeket jelentse növekvő sorrendben, a 0-k pedig azt, hogy mennyit dobtunk ki egy adott értékből. Tehát a 101010010011 kódolt sorozat azt jelenti, hogy dobtunk 1db 1-est, 1db 2-est, 2db 3ast, és 2db 4-est. Ez a konstrukció megfelel a feladat modelljének, ezért a feladatunk már csak az, hogy megnézzük, hányféle ilyen sorozatot tudunk alkotni, mely a tanult kombinatorikai fogalom felhasználásával $\binom{6+6-1}{6} = 462$. Ez az összes eset, így a valószínűség: $P = \frac{1}{462} \approx 0,0022$. Az én megoldásmenetem a különböző esetek szisztematikus végigszámolásából állt. Megvizsgáltam azokat az eseteket, amikor 1, 2, 3, 4, 5, illetve 6 féle értékeket dobunk, mindegyik esetben különböző alesetekkel számolva, ahogy az értékek számossága változhat, majd ezeket összeadtam, és szintén 462-t kaptam összes esetnek. Ezt a megoldásmenetet akkor érdemes megmutatni a diákoknak, ha azokat nem teljes mértékben győzte meg az ismétléses kombináció felhasználásával készült megoldás, vagy ha a diákok középszinten érettségiznek, és ez a fajta kombinatorikus fogalom és magyarázata nem ismert számukra. Számomra azonban ennek a diáknak az elegáns megoldása annyira elnyerte tetszésemet, hogy a jövőben egy fakultációs csoportnak mindenképpen felvetném ezt a problémát, és összekapcsolnám az ismétléses kombinációval.

2. feladat:

Tipikus hibának nevezhető, bár csak egyetlen diák tévesztette el a nyolcból, hogy nem vette figyelembe a három idegen nyelvű könyvnek a permutációit.

3. feladat:

A feladat *b*) részét a diákok egyik csoportja úgy számolta ki, hogy meggondolták miként választhatunk a ki 4 egyedülálló személyből 3-at ($\binom{4}{3} = 4$), majd ezt megszorozták azzal a számmal, ahányféleképp lehetséges a többi klubtagot az egyes pozíciókba elhelyezni. Itt az ismétléses permutáció képletét alkalmazták, így $\frac{5!}{2! \cdot 2!} = 30$-at kaptak. Az összes esetek összeszámlálásánál szintén az ismétléses permutáció felhasználásával $\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = 1670$-ra jutottak. Így $P = \frac{120}{1680} \approx 0,071$. Tehát ők nem korlátozták le a feladatot a tagválasztás kérdésére, de így is hibátlan megoldást adtak. A diákok másik csoportja az általam már korábban leírt megoldás szerint oldották meg a feladatot.

A *c*) rész az, amely már gondot okozott két-három diáknak. Egy teljesen rossz megoldás a következőképpen nézett ki: $P = \frac{\binom{4}{4}}{\binom{8}{4}} = \frac{1}{70} \approx 0,014$. Ez a diák nem vette figyelembe, hogy nem 4 egyenrangú helyre választunk embereket, tehát a 2 pár elnöki illetve alelnöki pozíciói permutálódhatnak, és az összes esetnél pedig nem egyszerűen 4 embert választunk ki. Másik érdekes hibás megoldás: $P = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{3}}{1680} = \frac{24}{1680}$. Ebben az esetben a kedvező eseteknél található a hiba, ahol a diák nem a párokból választ 2-t ($\binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1}$), hanem a párok tagjaiból ($\binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2}$), ezáltal több esetet is számol, nevezetesen olyanokat, amikor nem is feltétlenül együtt elnökölnek illetve alelnökölnek a házaspárok összetartozó tagjai. És természetesen, akik az előző példánál figyelembe vették a többi pozíció kiosztását, azok folytatták gondolatmenetüket, tehát: $P = \frac{2 \cdot \frac{4!}{3!}}{1680} = \frac{8}{1680} \approx 0,0048$, ahol a számláló a 2 pár permutációját, és a többi pozíció kiosztásának lehetséges eseteit tükrözi, mely teljesen hibátlan megoldás.

Az e) rész esetében ezeknél a diákoknál az eredmény a következő volt: $P = \dfrac{3 \cdot \dfrac{7!}{2! \cdot 2! \cdot 3!}}{1680} = \dfrac{630}{1680} \approx 0,375$, ahol a számlálóban a 3-as jelzi a titkárnők személyét, a szorzat másik tagja pedig a többi pozíció összes lehetőségét. Míg másoknál az enyémmel azonos gondolatmenet volt megfigyelhető:

$$P = \frac{\binom{3}{1}}{\binom{8}{1}} = \frac{3}{8} \approx 0,375$$

A legegyszerűbb megoldást viszont alig a feladat elolvasása után kaptam az egyik diáktól, aki azzal érvelt, hogy egy adott pozícióra $\frac{3}{8}$-ad eséllyel választhatunk nőt. Ez tulajdonképpen az előbbi megoldások leegyszerűsített változata volt.

4. feladat:

A diákok tudták, hogy ezt a feladatot ismétléses kombinációval lehet megoldani, jól meg is oldották, azonban ennél a kombinatorikus fogalomnál fontosnak tartottam, hogy meg is magyarázzuk, miért is a hozzá tartozó képlet alapján számoljuk, mit jelent a képlet. Magyarázatomban a lehetséges elosztásokat 0-ból és 1-esekből álló 12 hosszú sorozatokra kódoltam át, ahol az 1-esek jelölik a gyermekek személyét, és a 0-k pedig az almákat. Ezekben a sorozatokban rögzítjük a gyerekek sorrendjét, és aszerint, hogy ki, mennyi almát kapott, annyi 0-st írunk az őt megtestesítő 1-es után. Tehát a következő sorozat pl. 100010010010 azt jelenti, hogy az első gyerek (nevezzük Annának) 3 almát, a második (Béla) 2-t, a harmadik (Csaba) szintén 2-t, és a negyedik (Dénes) 1 almát kapott. E konstrukció segítségével könnyebben fel tudjuk írni, hogy hány fajta ilyen sorozat létezik. Nézzük meg az összes lehetséges így előforduló esetet. Mivel az első helyen mindig egyes áll, ezért gyakorlatilag az a feladatunk, hogy hányféleképp lehet 11 helyre 8 db 0-st elhelyezni. Ez pedig $\binom{11}{8} = 165$. Másképpen: $\frac{11!}{8! \cdot 3!}$. A diákok közül voltak olyanok, akik nem értették, miért kell figyelmen kívül hagynunk a 11 hosszú sorozatban a 3 gyerek permutációját, hiszen ezek különböző gyerekek. A magyarázatot erre egy másik diák adta, méghozzá egy nagyon jó példa szemléltetésével: Tegyük fel, hogy megnevezzük a gyerekeket, és ezentúl 1-esek helyett a nevük kezdőbetűjét írjuk a sorozatban elfoglalt helyükre. Ha nem hagyjuk figyelmen kívül ezek permutációját, akkor egyes eseteket többször fogunk számolni, jó példa pl. az $A000B00C00D0$ és az $A000C00B00D0$ sorozatok, melyek láthatólag ugyanazt az esetet tükrözik. Ezzel a magyarázattal már elégedettek voltak a diákok, megértették, hogy az általunk kialakított konstrukció az, ami miatt figyelmen kívül kell, hogy hagyjuk a 3 gyermek permutációját. Mindezen konstrukciók megbeszélése után egy diákban felmerült az a kérdés, hogy mi történik akkor, ha a 8 alma mellett még például 2 körtét is ki szeretnénk osztani. Meg tudjuk-e hasonló módon konstruálni a helyzetet? Volt akik azt a választ adták, hogy természetesen folytatjuk az előző gondolatmenetet, és kódolást, azonban rá kellett ébreszteni őket, hogy ezt egy konstrukcióban nehéz ábrázolni, mivel itt is akadnak olyan esetek, amelyeket különbözőnek kell, hogy vegyünk a konstrukció miatt, pedig azok teljesen identikusak. Jelöljük a körtéket 2-es számmal! Pl. 10002100210010 és 12000120010010 ugyanazt az elosztást ábrázolják. Kis gondolkodás után az egyik diák azzal az ötlettel állt elő, hogy vegyük külön a két elosztást, nézzük meg, hogy hányféleképp oszthatjuk ki a 8 almát, és számoljuk ki azt is, hányféleképp oszthatjuk ki azt a 2 körtét, majd e két számot összeszorozhatjuk, hiszen a két esemény egymástól független. Így $\binom{11}{8} \cdot \binom{5}{2} = 1650$-t kaptunk. Tökéletes megoldást találtak a diákok, ráadásul nem is bonyolultat. Ez a feladat is jól tükrözi azt, hogy a diákok meglévő tudásukat kreatívan, jól tudják kamatoztatni.

5. feladat:

Ennél a feladatnál a kedvező esetek meghatározása igen nagy fejtörést okozott a diákoknak. Kijelenthetem, hogy első nekifutásra mindenki azt a hibás megoldást adta, hogy $\binom{5}{2}$ féleképp választanak ki 2 párt, és a maradék 6 főből kell még kiválasztanunk 2 embert, tehát a kedvező esetek száma $\binom{5}{2} \cdot \binom{6}{2} = 150$. Ezáltal, érveltek ők, a $\binom{6}{2}$ esetében akár egy párt is választhatunk, tehát teljesül a "legalább 2 pár" feltétele. Arra azonban nem gondoltak, hogy ezáltal vannak esetek, melyeket többször számoltak. Nevezetesen azok, amikor a hat fő éppen három pár. Ha ezeket a többször számolt eseteket kivonjuk, akkor jó megoldáshoz juthatunk. Szemléltetem a problémát A, B, C, D, E párokkal. Ha a kiválasztott három pár A, B és C, és követem az előző gondolatmenetet, akkor hamar rájöhetünk, hogy ezt az esetet háromszor számoltuk: egyszer akkor mikor a két kiválasztott A, B, és a harmadik C; egyszer amikor A, C, és a harmadik B; és akkor is, amikor B, C, és a harmadik A. Tehát egy ilyen esetet a 3 pár ismétléses permutációinak számával számoltunk, tehát 3-szor ($\frac{3!}{2!}$). 10 ilyen eset van, ahányféleképp ki tudunk választani 5 párból 3-at. Összefoglalva, 10 olyan eset van, amit 3-szor számoltunk, pedig 2-szer kellett volna, így, ha 20-at levonunk az eredetileg kiszámolt kedvező eseteknek feltételezett mennyiségből, akkor megkapjuk a tényleges kedvező esetek számát, azaz 130-at. Egy diák volt, aki nem a kiválasztott 6 fővel foglalkozott, hanem a nem kiválasztott 4-gyel. És így ő azt a feladatot akarta megoldani, hogy mennyi a valószínűsége, hogy ebből a 4 főből legalább 1 pár van. Viszont ő is elkövette ugyanazt a hibát, mint a többiek a 6 fő kiválasztásánál. Neki $P = \dfrac{\binom{5}{1} \cdot \binom{8}{2}}{\binom{10}{4}} = \dfrac{140}{210} = \dfrac{2}{3} \approx 0,\dot{6}$ lett. Ellenőrzésképp ő azonban kiszámolta azt is, hogy mennyi a valószínűsége, hogy e 4 fő között nincs pár, mely $\dfrac{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \dfrac{8}{21}$ lett. Ezt összeadva $\dfrac{2}{3}$-dal $\dfrac{22}{21}$ kapott, így rájött arra, hogy valamit elrontott (egyes eseteket többször számolt), mert az eredménynek pont egynek kellene lennie. Újra elkezdte a feladatot, és felírta az egyes esetek valószínűségét most már külön bontva az 1 illetve 2 pár valószínűségét az alábbi módon:

$$P(\textit{4 emberből 2 pár}) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{4}} = \frac{1}{21},$$

illetve

$$P(\textit{4 emberből pontosan 1 pár}) = \frac{\binom{5}{1} \cdot \frac{8 \cdot 6}{2}}{\binom{10}{4}} = \frac{12}{21}.$$

Így végeredményben $\dfrac{1}{21} + \dfrac{12}{21} = \dfrac{13}{21} \approx 0,619$-t kapott, mely helyes megoldás, hiszen ehhez hozzáadva a $P(\textit{4 ember közt nincs pár})$-t pontosan 1-et kapunk. Ennek a diáknak a feladat-megoldási mechanizmusa igazán figyelemreméltó; először is leegyszerűsítette magának a feladatot, hiszen csak 4 főre korlátozta azt. Másodszor észrevette, hogy hibázott, arra is, hogy hol, és gyönyörű megoldásmenettel, tisztán levezetve már egy helyes megoldással tudott előhozakodni.

4.3. Geometriai valószínűség

2. feladat:

Ez a feladat azért volt igen érdekes, mert 2 diák is volt, akik valamilyen oknál fogva nem jól értelmezték a feladatot. Az egyik diáknál $K(y) = y^2 + 6y + 5$ és $K(x) = x$ szerepelt, mely természetesen teljesen elvetendő. A diák elmondása szerint valamiért megzavarta őt az a tény, hogy x-nek a függvénye és az y függvénye is benne volt egy kifejezésben. Itt azt a következtetést vontam le, hogy a diák nem teljesen volt tisztában a helyettesítési érték fogalmával, melyet később tisztáztunk. A másik diák megoldása pedig azért érdekes, mert ő külön-külön megvizsgálta, hogy a $K(y) \leq 0$ és $K(x) \leq 0$, vette azok unióját, így neki egy kereszt alakú sáv jött ki összes esetnek, mely a végtelenbe nyúlik. Elgondolkodott rajta, hogy ez nem biztos, hogy jó megoldás, ezért aztán újra elölről kezdte a feladatot, és sikerült is helyesen megoldania.

4. feladat:

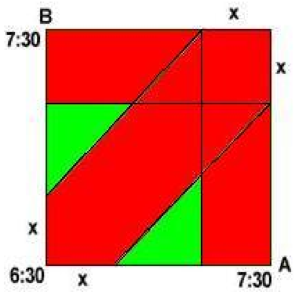
Ennél a feladatnál csak számolási hibákat ejtettek egyes diákok, módszertani szempontból semmilyen következetéseket nem tudtam levonni.

5. feladat:

Ez volt az a fajta feladat, mellyel a diákok korábbi tanulmányaik során nem találkoztak, ezért nehezükre esett, hogy hogyan is kezdjenek hozzá a feladathoz. A legtöbben elmondásuk szerint nem tudtak sehogy rájönni, hogy milyen módon van ez a feladat összefüggésben a geometriai valószínűséggel. Ezért ennek a feladattípusnak a megoldásmenetét én vázoltam fel nekik.

6. feladat:

A diákok közül egynéhányan felvetették azt az opciót, hogy mi történik akkor, ha a pár tagjai 7:30kor már nem mehetnek be a fürdőszobába, hiszen 6:30 és 7:30 között használják, tehát elvileg 7:30ra már végezniük kell. Ugyan ezt a feladat nem írta, de a hétköznapi életben ez így történik, állították jogosan a diákok, és bevallottam, hogy erre az esetre én egyáltalán nem gondoltam. Ez a fajta gondolkodás, hozzáállás erőteljesen mutatja azt, hogy diákjaim tudnak kapcsolatot létrehozni a matematika és a hétköznapi élet között, látják az összefüggéseket. Ezzel a megjegyzéssel majdhogynem egy új feladatot tűztek ki maguknak, ráadásul még egy nehezebbet is, hiszen, az ábrán fel kell tüntetniük még azokat a nem kedvező eseteket, amikor a pár valamely tagja (7:30-x) után szeretné használni a fürdőszobát. Így, az alábbi ábrát kapjuk, melyen szintén teljesülni kell annak a feltételnek, hogy a piros, és zöld területek egyenlő arányban szerepeljenek.



Ezért írjuk fel a zöld területek, és az egész négyzet arányát, mely $\frac{1}{2}$-del egyenlő.

$$P = \frac{1}{2} = \frac{\frac{(60-2x)\cdot(60-2x)}{2}\cdot 2}{3600} = \frac{4x^2 - 240x + 3600}{3600}$$

Így a következő egyenletet kapjuk: $x^2 - 60x + 450 = 0$ egyenletet kapjuk, melynek gyökei $x_1 \approx 51,21$; $x_2 \approx 8,78$. Itt viszont az első esetet az x-re vonatkozó feltétel miatt zárhatjuk ki, mely ebben az új esetben $0 < x < 30$. Tehát a férj és a feleség egyenként körülbelül $8,7$ percet tölthetnek a fürdőszobában, hogy teljesüljön a feladatban leírt feltétel. A diákoknak azonban volt még egy megjegyzésük a feladat megfogalmazásával kapcsolatban, mégpedig az, hogy az első sorban (Reggelente 6:30 és 7:30 között férj és feleség együtt használja a fürdőt, de nem közösen.) mit is jelent tulajdonképpen az, hogy együtt használják a fürdőt, de nem közösen. Ezen a ponton igazat adtam a diákoknak, sokkal inkább érthető, és egyértelmű lenne a feladat, ha az alábbi megfogalmazásban szerepelne: "Reggelente 6:30 és 7:30 között férj és feleség közös fürdőt használ, de nem egyszerre.”. Természetes e nélkül a változás nélkül is a legtöbben értik mire gondol a feladat készítője, azonban nagyon örültem neki, hogy a diákok megtalálják ezeket a hibaforrásokat, ami azt jelenti, hogy figyelmesen, körültekintően gondolkodnak, és megvan bennük az a fajta kritikus hozzáállás, mely elengedhetetlen az élet minden területén.

5. Konklúzió

A feladatok megoldása során volt olyan feladat, melynek megfogalmazásával kapcsolatban a diákok megjegyzést tettek, melyet már korábban is említettem. Ez a geometriai valószínűség feladatsorban található 6. feladat, melyet már a diákok átfogalmazásával adnék fel más diákoknak. Akad olyan feladat is, melyet már nem szerepeltetnék a feladatsorokban, ez a skatulya-elv 1. feladata, mely túlságosan egyszerűnek bizonyult a diákok körében. Voltak olyan feladatok is, melyek sokkal több időt vettek igénybe, mint amennyire én számítottam, de nem okozott különösebb gondot, mert, az órán kimaradt feladatokat a következő órán házi feladatként megbeszéltük.

A feladatok összeállítása előtt a tanári kar matematika szakos tanárai már figyelmeztettek engem, hogy a 8 fős csoport tagjai, akiket megkaptam, igazán okosak, motiváltak, érdeklődőek és nyitottak, ezért biztos nem lesz gondom velük, ők biztosan nem fogják elvenni a kedvemet a tanítástól, hiszen mondhatjuk, hogy ők az iskola krémjei. Ezen állításuk hamar be is bizonyosodott; nagyon jól éreztem magam velük, hamar oldott légkört lehetett velük teremteni, egyedül a kis korkülönbség okozhatott volna problémákat, de ezt is nagyon toleránsan és tisztességesen kezelték, így minden eddigiért szeretnék köszönetet mondani nekik. Úgy gondolom, az együtt töltött munka meghozta gyümölcsét, igaz, még nem tudunk hivatalos eredményeket a megírt emelt szintű érettségi eredményeikről, azonban beszámolóik alapján összegezném, hogy mind a 8 főnek sikerült ötösre megírnia a feladatsort. Ezek között 5 diák is 90% körüli teljesítményt produkált. A legtöbben nem valószínűséggel megoldható feladatot hagytak ki, mely bizonyítja, hogy valamilyen mértékben sikerült eloszlatni a kétségeket a valószínűségszámítási feladatok megoldhatósága kapcsán.

Irodalomjegyzék

[1] `http://www.sulinet.hu/matek/tremb_fel/t_index1.htm`

[2] Hortobágyi István, Marosvári Péter, Pálmay Lóránt, Pósfai Péter, Siposs András, Vancsó Ödön: *Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika I., II.*, Konsept–H Könyvkiadó

[3] `http://matek.fazekas.hu/portal/feladatbank/gyujtemenyek/Nem/KF5.htm`

[4] Lovász László, Pelikán József, Vesztergombi Katalin: *Diszkrét Matematika*, Typotex, Budapest, 2006

[5] `http://matek.fazekas.hu/portal/feladatbank/gyujtemenyek/Nem/KF3.htm`

[6] `http://www.oh.gov.hu/letolt/okev/doc/erettsegi_2007/oktober/e_mat_07okt_fl.pdf`

[7] `http://www.komal.hu/cikkek/valszam/valszam.h.shtml`

[8] Fröhlich Lajos, Ruff János, Tóth Julianna: *15 próbaérettségi matematikából, emelt szint - írásbeli*, Maxim Kiadó, Szeged, 2006

[9] `http://www.oh.gov.hu/letolt/okev/doc/erettsegi_2008/oktober/e_mat_08okt_fl.pdf`