Szakdolgozat

Focibajnokságok és véges geometriák

Készítette: **Mahler Attila** (Matematika BSc)
Témavezető: **Kiss György** (Egyetemi docens)

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Geometriai Tanszék

Budapest, 2009.

Tartalomjegyzék

1. Bevezető

A legtöbb labdarúgó-bajnokságot oda-visszavágós körmérkőzéses rendszerben bonyolítják le. A sportot kedvelő nézők megszokhatták, hogy egy ilyen n csapatos bajnokságot $2(n-1)$ forduló alatt rendeznek meg évről-évre, hiszen minden csapat kétszer csap össze az $(n-1)$ másik csapattal. Azonban egy ilyen szervezés megkonstruálása nem könnyű (és csak páros n esetén lehetséges). Ha el szeretnénk készíteni egy lehetséges lebonyolítást, már viszonylag kisebb létszámnál is beleszaladhatunk olyan helyzetbe, hogy az elkezdett beosztást nem lehet befejezni ennyi forduló alatt, mert az egyik együttesnek kettő másikkal is játszania kellene egy fordulóban. Nagyobb nemzeti bajnokságok esetében, ahol 16, 18 vagy 20 csapat szerepel, szinte lehetetlen „próbálgatással” jó szervezést találni. Emellett a valós bajnokságoknál meg van különböztetve a két csapat, aszerint, hogy melyik a hazai és melyik a vendég, sőt rendszerint figyelembe kell venni különböző egyéb igényeket is a stadionnal kapcsolatban. Ezek a kitételek tovább nehezítik az amúgy sem könnyű feladatot.

A szakdolgozat célja, hogy ennek a mindenki számára ismert és könnyen érthető problémának a megoldási lehetőségeit bemutassa a matematika különböző ágainak segítségével. Elsősorban a véges geometria eszközeivel létrehozható párosításokat mutatom be, de szerepel gráfelméleti megoldása is a problémának. Ezenkívül a szervezés gyakorlati oldalát is bemutatom, köszönhetően a Magyar Labdarúgó Szövetség segítőkész munkatársainak, ugyanis rendelkezésemre bocsátották a magyar bajnokságok szervezési rendjét, illetve személyes tájékoztatást adtak a sorsolásról is.

A leírtakat kiegészítendő készítettem egy programot (lásd: CD melléklet), amely segítségével generálható egy tetszőleges n csapatos bajnokság egy lehetséges optimális szervezése.

2. A körmérkőzéses bajnokság

Ahhoz, hogy a kérdést matematikailag meg tudjuk közelíteni, a feladatot át kell fogalmazni a matematika nyelvére. Ehhez pontosan rögzíteni kell a fogalmakat és azt, hogy mit várunk el egy szervezéstől.

Körmérkőzéses bajnokságnak olyan versenysorozatot nevezünk, ahol egy mérkőzésen két csapat találkozik és minden csapat mindegyik másikkal pontosan egy mérkőzést játszik. Egy ilyen bajnokság fordulókból áll össze, méghozzá úgy, hogy minden fordulóban minden csapat pontosan egy mérkőzést játszik. Ez lehetővé teszi, hogy egy forduló összes mérkőzését egyidőben rendezzék. Ha a bajnokságban n csapat szerepel, akkor értelemszerűen legalább $n-1$ fordulóra szükség van a bajnokság lebonyolításához, mivel egy adott csapat $n-1$ másikkal találkozik, és egy fordulóban csak egy mérkőzést játszhat. Páros n esetén elég is az $n-1$ forduló, de páratlan n-nél többre van szükség, hiszen egy fordulóban páros sok csapat játszik, azaz legalább egy csapatnak pihennie kell. Ezt a problémát úgy oldhatjuk meg, hogy a valódi csapatokhoz felveszünk egy „Pihenőnap” nevű képzeletbeli csapatot, és aki vele játszana egy adott fordulóban, az a csapat pihen. Így már $n+1$ csapatos a bajnokság, ahol $n+1$ páros, tehát $(n+1)-1=n$ forduló elegendő a bajnokság lebonyolításához. Ezért a továbbiakban csak a páros n-ekkel foglalkozunk.

A valóságban megszokott oda-visszavágós rendszer is ugyanígy működik. Ekkor mindenki mindenkivel kétszer játszik, egyszer hazai pályán, egyszer pedig vendégként. Tulajdonképpen ősszel és tavasszal is megrendezik ugyanazt a körmérkőzéses bajnokságot, de közben minden mérkőzésen felcserélik a pályaválasztói jogot. Tehát ha megvan egy szervezése egy körmérkőzéses bajnokságnak, akkor abból rögtön elkészíthető az oda-visszavágós bajnokságé is.

Már megfogalmaztuk, hogy mik az elvárások egy körmérkőzéses bajnoksággal szemben, most nézzük meg, hogyan tudunk készíteni ilyen szervezéseket.

3. Véges geometriai megközelítés

3.1. Véges testek

3.1.1. Definíció: Adott egy H halmaz, amin értelmezve van két művelet: $\oplus$ és $\otimes$. Ezt a struktúrát *testnek* nevezzük, ha igaz rá a következő kilenc tulajdonság ($\forall a, b, c \in H$-ra):

– A műveletek *kommutatívak*, azaz:

$$(1)\ a \oplus b = b \oplus a \qquad \text{és} \qquad (2)\ a \otimes b = b \otimes a$$

– A műveletek *asszociatívak*, azaz:

$$(3)\ (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) \qquad \text{és} \qquad (4)\ (a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$$

– A műveleteknek van *egységelemük*, azaz létezik egy-egy olyan 0-val, illetve 1-gyel jelölt elem, melyekre:

$$(5)\ a \oplus 0 = 0 \oplus a = a \qquad \text{és} \qquad (6)\ a \otimes 1 = 1 \otimes a = a$$

– Minden elemnek egyértelműen létezik egy $(-a)$-val jelölt *additív inverze*, melyre:

$$(7)\ a \oplus (-a) = 0$$

– Minden 0-tól különböző elemnek egyértelműen létezik egy a^{-1}-nel jelölt *multiplikatív inverze*, melyre:

$$(8)\ a \otimes a^{-1} = 1$$

– Az összeadás a szorzásra nézve *disztributív*, azaz:

$$(9)\ a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$$

Például a valós számok halmaza a szokásos összeadás és szorzás műveletére nézve testet alkot. De nem minden számhalmaz elégíti ki ezeket a feltételeket, a természetes számok esetén például a 0-n kívül egyetlen számnak sincs additív inverze. Azaz – a szokásos szóhasználattal – a szám ellentettje nem eleme a számkörnek. Az előbbi esetekben az alaphalmaz elemszáma mindkétszer végtelen volt, nézzük meg hogyan tudunk véges alaphalmazon testet definiálni.

3.1.2. Definíció: Egy H halmaz és rajta értelmezett két művelet *véges testet* alkot, ha H elemszáma véges és a műveletekre igazak az előbbi testaxiómák.

Vegyünk egy p prímszámot és minden egész számot feleltessünk meg a p-vel vett osztási maradékának. (A maradékról feltehetjük, hogy $0 \le m \le p-1$.) Így p darab különböző osztályt kapunk aszerint, hogy a maradék 0, 1, … vagy p-1. Legyen tehát $\boldsymbol{Z}_p = \{0, 1, ..., p-1\}$. Ekkor minden egész számot egyértelműen besorolhatunk egy osztályba. A $\oplus$ és $\otimes$ művelet pedig legyen a valós számoknál is értelmezett összeadás, illetve szorzás, azzal a megkötéssel, hogy amennyiben az eredmény nem halmazbeli elem, akkor nézzük a p-vel vett osztási maradékát és máris halmazbeli elemet kapunk. Ez a struktúra véges test. Ehhez ellenőrizni kell, hogy igazak a testaxiómák, valamint, hogy jól vannak definiálva a műveletek, azaz az eredmény csak az osztályoktól függ és nem az abból kiválasztott elemektől.

Ezek alapján belátható, hogy bármely p prímszám esetén létezik p elemű véges test. Ennél azonban több is igaz: F halmazon akkor és csak akkor értelmezhető két művelet úgy, hogy véges testet alkosson, ha F elemszáma prímhatvány. Viszont ha F elemszáma valódi prímhatvány, akkor nem ilyen könnyű definiálni a műveleteket. Például ha $\boldsymbol{Z}_4$-en hasonlóképp értelmezzük a műveleteket, akkor $2 \otimes 2 = 0$ lenne ($2 \cdot 2 = 4$, aminek a 4-gyel vett osztási maradéka 0). Ez viszont ellentmond az axiómáknak, amelyekből levezethető, hogy egy test *nullosztómentes*, azaz ha $a \otimes b = 0$ akkor vagy $a = 0$ vagy $b = 0$. Ennek, és az algebrai háttérnek a [1]-es hivatkozásban lehet utánanézni.

3.2. Véges affin síkok

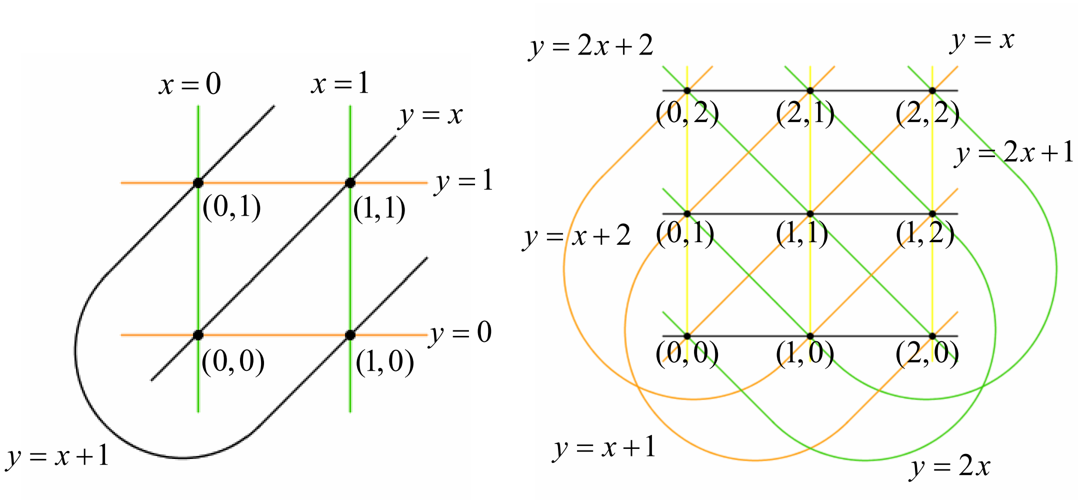
Az euklideszi síkon koordinátarendszerben helyeztük el az alakzatokat, így a valós számok műveleti tulajdonságaival oldottunk meg geometriai feladatokat. Mint korábban láttuk a valós számok testet alkotnak, ezt kihasználva épül fel a koordinátageometria. Próbáljunk meg egy véges test fölötti koordinátageometriát létrehozni!

Legyen F_q egy q elemű véges test. A *q-adrendű affin sík* megadásához definiálni kell a pontot, az egyenest és az illeszkedés relációját. Nevezzük *pontnak*, az összes (a,b) rendezett párt, ahol $a, b \in F_q$. Az egyeneseknek két típusát különböztetjük meg: vagy $[m,k]$ típusú rendezett pár, vagy $[c]$ típusú, ahol $m, k, c \in F_q$. Az (a,b) pont akkor és csak akkor illeszkedik egy $[m,k]$ egyenesre, ha teljesül, hogy $b = ma + k$, egy $[c]$ típusú egyenesre pedig, ha $a = c$.

Észrevehetjük, hogy ez a definíció teljesen analóg a klasszikus koordinátageometriáéval. Ott ponton olyan rendezett párt értünk, amelynek elemei valós számok, azaz a testből valók. Egyenesből kétféle van: a nem függőleges, amely megadható a meredekségével és az y tengelymetszetével ($y = mx + k$), illetve a függőleges, amelyet az x tengellyel vett metszete határoz meg ($x = c$). Ez a két egyenes egyenlet a véges affin síkon is ugyanúgy érvényes.

Jelölés: A q elemű véges testtel koordinátázott affin síkot $\mathrm{AG}(2,q)$-val jelöljük. (Arra utalva, hogy q elemű test fölötti 2-dimenziós affin geometria.)

Ezek ismeretében már megpróbálhatjuk ténylegesen derékszögű koordinátarendszerbe helyezni $\mathrm{AG}(2,q)$-t. Vegyük az euklideszi síknál megszokott koordinátarendszert és szűkítsük le úgy, hogy $\mathrm{AG}(2,q)$ pontjain csak azokat a pontokat értjük, melynek mindkét koordinátája egész, és eleme a $\{0, 1, \ldots, q-1\}$ halmaznak. Ekkor persze az egyenesek nem lesznek valódi, euklideszi értelemben vett egyenesek, de ábrázolhatóak egy folytonos vonallal. Kis q esetén még könnyen lerajzolható a sík és az egyenesei, ez látható a 3.2.1. ábrán.



3.2.1. ábra: AG(2,2) és AG(2,3) egyeneseinek párhuzamossági osztályai

A sík pontjai csak a megjelölt pontok, ezért az egyenesre is csak ezek illeszkedhetnek. Ha két egyenes a „síkon kívül" metszi egymást, az csupán az ábrázolásmód miatt látszik metszéspontnak. Például az $y = x+1$ és az $y = x+2$ egyeneseknek az ábrán van egy közös pontjuk, de ez nem $\mathrm{AG}(2,3)$-beli pont, ezért a két egyenesnek nincs közös pontja. Az euklideszi síkon megszokott elnevezéssel mondhatjuk, hogy ez a két egyenes *párhuzamos*. A 3.2.1. ábrán az azonos színű egyenesek egy-egy párhuzamossági osztályt alkotnak.

Megjegyzés: A további ábrákon is csak a megjelölt pontok elemei az adott síknak.

3.3. Projektív geometria

3.3.1. Definíció: Legyen P és E két diszjunkt halmaz, $I \subset P \times E$ pedig egy illeszkedési reláció. Ez a hármas *projektív sík*, ha teljesül rá a következő négy axióma:

P1: P bármely két különböző eleméhez pontosan egy olyan eleme van E-nek, amely mindkettővel relációban áll.

P2: E bármely két különböző eleméhez pontosan egy olyan eleme van P-nek, amely mindkettővel relációban áll.

P3: E minden eleme legalább három különböző P-beli elemmel áll relációban.

P4: P minden eleme legalább három különböző E-beli elemmel áll relációban.

A szokásos elnevezésekkel a P a pontok halmaza, E pedig az egyeneseké. Így az axiómák a következőket követelik meg:

- Bármely két különböző ponton át egy egyenes halad.
- Bármely két különböző egyenesnek egy közös pontja van.
- Minden egyenesen legalább három különböző pont van.
- Minden ponton át legalább három különböző egyenes halad.

Az euklideszi sík nem projektív sík, mert nem teljesül rá a második axióma, nem igaz, hogy bármely két különböző egyenesnek egy közös pontja van, hiszen a párhuzamos egyeneseknek nincs közös pontjuk. Viszont ki lehet bővíteni *ideális* térelemekkel, amelyek segítségével teljesül P2, sőt könnyebben tudunk bizonyos állításokat megfogalmazni vagy bizonyítani. Ezek az ideális térelemek nem térbeli pontok vagy alakzatok, hanem absztrakt, képzeletbeli fogalmak, amelyek rendelkeznek bizonyos tulajdonságokkal.

A kibővített sík első ilyen téreleme az *ideális pont*. Minden egyeneshez hozzácsatolunk egy ideális pontot úgy, hogy két egyeneshez akkor és csak akkor csatoljuk ugyanazt az ideális pontot, ha azok párhuzamosak. Ezzel végtelen sok ideális pontot vezettünk be, mivel végtelen sok páronként nem párhuzamos egyenes van a síkon. Ezek az ideális pontok egy *ideális egyenessé* állnak össze úgy, hogy az ideális egyenes tartalmazza az összes ideális pontot, de nem tartalmaz egyetlen közönséges pontot sem. Tehát az euklideszi síkot kibővítettük végtelen sok ideális ponttal és egy ideális egyenessel és így már igaz rá a négy axióma.

3.3.2. Állítás: A kibővített sík projektív sík.

Bizonyítás: Ehhez azt kell megmutatni, hogy teljesül rá a négy axióma.

P1: Bármely két különböző pontnak egyértelműen létezik összekötő egyenese. Ha két közönséges pontot veszünk, akkor azoknak egyértelműen létezik összekötő közönséges egyenesük, és az ideális egyenesre nem illeszkednek, tehát valóban egyértelműen létezik összekötő egyenesük. Egy közönséges és egy ideális pont esetén szintén nem lesz jó az ideális egyenes, mivel az nem tartalmaz közönséges pontot. De az ideális pont által meghatározott párhuzamossági osztályból pontosan egy egyenes halad át a közönséges ponton. Utolsó eset, ha mindkét pont ideális. Ekkor közönséges egyenes nem lehet az összekötő, mivel azokon csak egy ideális pont van. Az ideális egyenes viszont jó lesz, mert az tartalmazza az összes ideális pontot.

P2: Ha két közönséges egyenes metsző, akkor egy közös közönséges pontjuk van, az ideális pontjaik pedig különbözők. Ha párhuzamos, akkor nincs közös közönséges pontjuk, de az ideális pontjuk ugyanaz, tehát azt tekintjük metszéspontnak. Ha pedig az ideális és egy közönséges egyenest nézünk, akkor azoknak csak ideális pontjuk lehet közös, mivel az ideális egyenes nem tartalmaz közönséges pontokat. És van is közös ideális pontjuk, mert a közönséges egyenesnek van ideális pontja, az ideális egyenes pedig tartalmazza a sík összes ideális pontját. Tehát a kibővített síkon bármely két különböző egyenesnek pontosan egy közös pontja van.

P3-P4: Triviális, hiszen minden egyenes végtelen sok pontot tartalmaz, és minden ponton át végtelen sok egyenes halad. ■

A kibővített síkot is szeretnénk koordinátarendszerben elhelyezni, ezt a homogén koordinátázás segítségével tehetjük meg. A klasszikus tér Descartes-féle koordinátarendszerében vesszük az origót és az $x_3 = 1$ egyenletű (1 magasan lévő vízszintes) síkot. Ennek a síknak egy tetszőleges (közönséges vagy ideális) P pontjának a *meghatározó vektora*, az O és P által meghatározott egyenes egy irányvektora. Így ha P közönséges pont és Descartes-koordinátái $(x_0, y_0, 1)$, akkor meghatározó vektora lesz minden $[\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda]$ vektor bármely $\lambda \neq 0$ valós számra. Ha P ideális pont, akkor pedig az OP egyenes párhuzamos a síkkal és irányvektora $(x_0, y_0, 0)$ alakú, így meghatározó vektora lesz bármely $[\lambda x_0, \lambda y_0, 0]$ vektor, ahol $\lambda \neq 0$ tetszőleges valós szám.

A sík egy (közönséges vagy ideális) egyenesét pedig az egyenes és az origó által meghatározott sík egy normálvektorával adhatjuk meg. Ez a sík egyértelmű, hiszen egy egyenes és egy rá nem illeszkedő pont egyértelműen meghatároz egy síkot. Kiszámolhatjuk például az ideális egyenes (e_∞) meghatározó vektorát. Ehhez szükség van az e_∞ és az O által meghatározott síkra. Hasonlóan az euklideszi sík kibővítéséhez az euklideszi tér is kibővíthető. Ekkor a tér minden síkját kibővítjük, azaz minden síkhoz hozzácsatolunk egy-egy ideális egyenest, úgy hogy két sík ideális egyenese pontosan akkor egyezik meg, ha párhuzamosak. Emiatt az e_∞ és az O által kifeszített síknak párhuzamosnak kell lennie az $x_3 = 1$ síkkal, mivel a két sík ugyanazt az ideális egyenest tartalmazza (és minden sík pontosan egy ideális egyenest tartalmaz). Tehát ez az $x_3 = 0$ egyenletű sík lesz, melynek normálvektora a $[0, 0, \lambda]$, minden $\lambda \neq 0$-ra.

Az előzőekből láthatjuk, hogy egy pont akkor és csak akkor ideális, ha a meghatározó vektorának harmadik koordinátája 0, illetve egy egyenes pontosan akkor az ideális egyenes, ha a meghatározó vektorának első két koordinátája 0. Észre kell venni, hogy a meghatározó vektoroknak csak az iránya számít, ezért lehet megszorozni tetszőleges $\lambda \neq 0$ valós számmal (akár negatívval is). 0-val viszont nem lehet, hiszen akkor a nullvektort kapnánk, amely nem lehet sem irányvektor, sem normálvektor, így nem határoz meg egyetlen pontot és egyenest sem. Minden más vektor viszont meghatároz egy pontot és egy egyenest is, de egy ponthoz, illetve egyeneshez több meghatározó vektor is tartozik (ezek persze egymás skalárszorosai).

Az ilyen felírásnál ügyelni kell arra, hogy csak olyan egyenlettel adhatunk meg görbéket, melyek teljesülése csak a ponttól függ és nem a választott meghatározó vektortól. Tehát ha az egyenletnek megoldása az $[x_1, x_2, x_3]$ számhármas, akkor megoldása kell legyen a $[\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3]$ is. Ezt a feltételt a homogén egyenletek elégítik ki, azaz az olyan egyenletek, amelyekben minden tag azonos fokú.

Ahhoz, hogy ezt kezelni tudjuk, szükségünk lesz az egyenletek homogenizálására. Adott egy tetszőleges (nem feltétlen homogén) egyenlet a Descartes koordinátarendszerben. Ha az egyenletet kielégíti egy (x_0, y_0) számpár, akkor kielégíti annak a homogén koordinátás megfelelője, az $[x_0, y_0, 1]$ is. És egy tetszőleges $[x_1, x_2, x_3]$ meghatározó vektor akkor határozza meg ugyanazt a pontot, ha a $[x_0, y_0, 1]$ számszorosa, azaz $\lambda[x_0, y_0, 1] = [x_1, x_2, x_3]$. Ekkor viszont $\lambda = x_3$, amivel leosztva mindkét vektort azt kapjuk, hogy: $\left[x_0, y_0, 1\right] = \left[\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, 1\right]$. Tehát egy homogén koordinátákkal megadott közönséges pont akkor és csak akkor megoldása az egyenletnek, ha az $\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right)$ pont megoldása. Ezt felhasználva tudjuk homogenizálni az egyenleteket. Vegyük például az $y = mx + b$ egyenes egyenletet. Ez az egyenlet nem homogén, hiszen x és y elsőfokú tagok, de szerepel benne konstans tag is, ami nulladfokú. Az $\left[x_1, x_2, x_3\right]$ pont éppen akkor elégíti ki az egyenletet, amikor az $\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right)$ is, vagyis ha $\frac{x_2}{x_3} = m\frac{x_1}{x_3} + b$, azaz $x_2 = mx_1 + bx_3$. Ha $x_3 \neq 0$, akkor ugyanazok a pontok elégítik ki, amelyek a Descartes koordinátarendszerben is kielégítették. Ha viszont $x_3 = 0$, akkor az $x_2 = mx_1$ egyenletet kapjuk. Ennek megoldása a $\left[\lambda, \lambda m, 0\right]$, ahol a homogenitás miatt a λ-t választhatjuk 1-nek. Azaz az $\left[1, m, 0\right]$ pont is megoldása az egyenletnek, mely az m meredekségű egyenes ideális pontja, ami a kibővített síkon valóban az egyenes pontja.

Most már tudunk pontot és egyenest megadni a homogén koordinátáival, már csak az illeszkedést kell megvizsgálni.

3.3.3. Tétel: Egy *P* pont pontosan akkor illeszkedik egy *e* egyenesre, ha a meghatározó vektoraik skaláris szorzata nulla.

Bizonyítás: *P* pont akkor és csak akkor illeszkedik *e*-re, ha az *O* és *P* által meghatározott egyenes benne fekszik az *O* és *e* által meghatározott síkban, azaz, ha *P* meghatározó vektora merőleges *e* meghatározó vektorára, ami pontosan akkor teljesül, ha a két vektor skaláris szorzata nulla. ■

Könnyen felírhatjuk két pont összekötő egyenesének egyenletét is. Legyen *A* és *B* a két különböző pont, *e* pedig az összekötő egyenesük. *A* és *B* is illeszkedik *e*-re, azaz *OA* és *OB* is benne fekszik az *O* és *e* által meghatározott síkban, tehát *A* és *B* meghatározó vektora is merőleges *e* meghatározó vektorára. Azaz olyan vektort keresünk, amely merőleges *A*-ra is és *B*-re is. A két vektor vektoriális szorzata éppen ilyet ad eredményül.

3.3.4. Tétel: Ha $A=[a_1,a_2,a_3], B=[b_1,b_2,b_3]$ akkor az összekötő egyenesük meghatározó vektora:

$$A\times B=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=x_1(a_2b_3-a_3b_2)-x_2(a_1b_3-a_3b_1)+x_3(a_1b_2-a_2b_1)=$$

$$=[a_2b_3-a_3b_2,\ -a_1b_3+a_3b_1,\ a_1b_2-a_2b_1].$$

Ugyanígy meghatározhatjuk két egyenes metszéspontját is. Azt a pontot keressük, ami mindkét egyenesen rajta van. Tehát homogén koordinátarendszerbe helyezve azt az egyenest, ami mindkét síkban benne fekszik, ez pedig az egyértelműen létező metszésvonal. Ennek az irányvektora merőleges mindkét sík normálvektorára, azaz az egyenesek meghatározó vektorainak vektoriális szorzata a metszéspont egy meghatározó vektorát adja eredményül.

Azt is könnyen el tudjuk dönteni, hogy három különböző pont egy egyenesre illeszkedik-e. Felírjuk két pont összekötő egyenesét, azaz a vektoriális szorzatukat, majd megnézzük, hogy a harmadik illeszkedik-e rá, vagyis, hogy az eredményül kapott vektor és a harmadik pont meghatározó vektorának skaláris szorzata nulla-e. Tömörebben: a három meghatározó vektor vegyesszorzata pontosan akkor nulla, ha a három pont kollineáris. Három vektor vegyesszorzatának értékét pedig a belőlük képzett mátrix determinánsa adja meg.

3.3.5. Tétel: Az $A=[a_1,a_2,a_3], B=[b_1,b_2,b_3], C=[c_1,c_2,c_3]$ pontok akkor és csak akkor vannak egy egyenesen, ha $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$.

Ez a gondolatmenet ugyanígy működik az egyenesekkel is. Ha valamelyik kettő metszéspontján átmegy a harmadik, akkor a vegyesszorzatuk nulla. És fordítva is igaz: ha három vektor vegyesszorzata nulla, akkor az általuk meghatározott egyenesek egy ponton mennek át.

Észrevehetjük tehát, hogy teljesen mindegy, hogy pontokról vagy egyenesekről szól az állítás, utána csupán a meghatározó vektorokat felhasználva látjuk be. Ily módon, ha van egy igaz állítás melyben *pontok*, *egyenesek* és ezek *illeszkedései* szerepelnek, akkor felcserélve a „*pont*” és „*egyenes*” szavakat szintén igaz állítást kapunk. Ezt nevezzük a dualitás elvének. Például az előző tételek és duálisaik:

3.3.3. Tétel: *Egy pont akkor és csak akkor illeszkedik egy egyenesre, ha a meghatározó vektoraik skaláris szorzata nulla.*

Ennek az állításnak a duálisa:

Egy egyenes akkor és csak akkor illeszkedik egy pontra, ha a meghatározó vektoraik skaláris szorzata nulla.

Ebben az esetben a duális állítás megegyezik az eredeti állítással, de ez nem mindig van így. Nézzük meg a következő állításokat és duálisaikat:

3.3.4. Tétel: *Két pont meghatározó vektorának vektoriális szorzata a rájuk illeszkedő egyenes egy meghatározó vektorát adja meg.*

És a duálisa:

Két egyenes meghatározó vektorának vektoriális szorzata a rájuk illeszkedő pont egy meghatározó vektorát adja meg.

3.3.5. Tétel: *Három pont pontosan akkor illeszkedik egy egyenesre, ha meghatározó vektorainak vegyesszorzata nulla.*

Duális állítás:

Három egyenes pontosan akkor illeszkedik egy pontra, ha meghatározó vektorainak vegyesszorzata nulla.

Az előbb beláttuk az állításokat, majd rövid meggondolással igazoltuk a duálispárjaikat is. Elegendő lett volna bebizonyítani az egyik állítást, ugyanis a másik a dualitás elvéből azonnal következik.

Megjegyzés: A felállított axiómarendszer duális párokból áll (P1 és P2, valamint P3 és P4 egymás duálisai), ezért érvényes a dualitás elve.

3.4. Véges projektív geometria

Véges projektív síkot kaphatunk például úgy, hogy – az euklideszi sík kibővítéséhez hasonlóan – kibővítjük $\mathrm{AG}(2,q)$-t, azaz ugyanúgy hozzácsatolunk az egyenesekhez egy-egy ideális pontot, a síkhoz pedig egy ideális egyenest.

Jelölés: A q elemű véges testtel koordinátázott projektív síkot $\mathrm{PG}(2,q)$-val jelöljük. (Arra utalva, hogy q elemű test fölötti 2-dimenziós projektív geometria.)

3.4.1. Állítás: $\mathrm{PG}(2,q)$ valóban projektív sík.

Bizonyítás: Helyezzük homogén koordinátarendszerbe $\mathrm{PG}(2,q)$-t. Így a testaxiómák felhasználásával, számolással igazolhatjuk a projektív sík négy axiómáját.
P1: Bármely két különböző pontnak fel tudjuk írni egy-egy meghatározó vektorát. Ezek skalárszorzó erejéig egyértelműek és nem esnek egy egyenesbe, ezért a vektoriális szorzatuk szintén skalárszorzó erejéig egyértelmű. Azaz – a homogenitást figyelembe véve – egyértelműen meghatározza az összekötő egyenesüket.
P2: Bármely két különböző egyenesnek fel tudjuk írni egy-egy meghatározó vektorát. Ezek skalárszorzó erejéig egyértelműek és nem esnek egy egyenesbe, ezért a vektoriális szorzatuk szintén skalárszorzó erejéig egyértelmű. Azaz – a homogenitást figyelembe véve – egyértelműen meghatározza a metszéspontjukat.
P3-P4: Később megmutatjuk, hogy minden egyenesre $q+1$ pont, illetve minden pontra $q+1$ egyenes illeszkedik. Mivel q prímhatvány, ezért $q \geq 2$, azaz $q+1 \geq 3$, tehát valóban igaz ez a két axióma is minden $\mathrm{PG}(2,q)$-n. ■

3.4.2. Tétel: $\mathrm{PG}(2,q)$-n q^2+q+1 pont és ugyanennyi egyenes van.

Bizonyítás: Vizsgáljuk meg a pontok és egyenesek számát a kibővítés segítségével. A q-adrendű affin síkon pontként definiáltuk az (a,b) rendezett párokat, ahol a, b testbeli elemek, azaz mindegyik q darab különböző értéket vehet fel. Tehát összesen q^2 közönséges pont van a síkon. Ehhez hozzácsatoljuk minden párhuzamossági osztály ideális pontját: minden m meredekséghez tartozik egy, azokat, illetve a $[c]$ típusú egyenesekét. Így összesen $q+1$ ideális pontot, tehát a síkon összesen q^2+q+1 pont van. Ugyanígy megvizsgálhatjuk az egyenesek számát is. Egyenesből kétféle van:

$[m,k]$ és $[c]$ típusú, ahol m, k és c is q-féle lehet. Tehát $[m,k]$ típusú egyenesből q^2, $[c]$ típusúból q darab van. Így összesen q^2+q közönséges egyenes van, melyhez hozzácsatoljuk a sík ideális egyenesét, így $\mathrm{PG}(2,q)$-n összesen q^2+q+1 egyenes van. A pontok számának ismeretében ez persze a dualitás elvéből is azonnal következik. ■

3.4.3. Tétel: Minden egyenesre $q+1$ pont illeszkedik és minden ponton át $q+1$ egyenes halad.

Bizonyítás: Hasonlóan azt is megnézhetjük, hogy egy egyenesre hány pont illeszkedik. Egy közönséges pont akkor illeszkedik egy $[m,k]$ típusú egyenesre, ha $b=ma+k$, azaz tetszőleges a választása egyértelműen meghatározza b értékét. Tehát q közönséges és egy ideális pont illeszkedik az ilyen típusú egyenesre. Egy $[c]$ típusú egyenesre akkor illeszkedik egy (a,b) pont, ha $a=c$. Azaz b értékét tetszőlegesen, q-féleképp lehet megválasztani, amihez még hozzájön az ideális pont. Az előbb pedig már megvizsgáltuk, hogy az ideális egyenesen is $q+1$ van, tehát minden egyenesre $q+1$ pont illeszkedik.
Egy tetszőleges P ponton átmenő egyenesek számát jelöljük t-vel. Minden ilyen egyenesen $q+1$ pont van, azaz q olyan, ami P-től különböző. Ezek a pontok egymástól különböznek, hiszen bármely két pontnak egyértelműen létezik összekötő egyenese. Tehát a síkon összesen $1+t\cdot q$ pont van. Másrészt viszont tudjuk, hogy a síkon q^2+q+1 pont van, tehát:

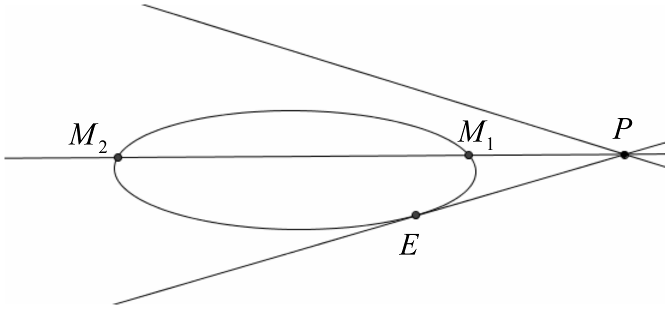
$$1+t\cdot q=q^2+q+1$$
$$t=q+1.$$

■

Megjegyzés: Nem csak testtel koordinátázható projektív síkok léteznek, ám azoknál is lehet rendet definiálni és a fenti összefüggések ott is igazak. A továbbiakban a q-adrendű projektív síkon tetszőleges síkot értek, az általánosan kimondott tételek ott is igazak. Testtel nem koordinátázható síkokról a [4]-es könyvben olvashatunk bővebben.

3.5. Ívek és oválisok a véges projektív síkon

3.5.1. Definíció: Egy projektív sík K ponthalmazát *k-ívnek* nevezzük, ha k darab pontot tartalmaz és ezek közül semelyik három nincs egy egyenesen. Egy k-ív *teljes*, ha nem része $(k+1)$-ívnek. A megszokott elnevezésekkel beszélhetünk egy ív és egy egyenes kölcsönös helyzetéről, a metszéspontok száma szerint (3.5.1. ábra). Két metszéspont esetén az egyenest *szelőnek*, egy esetén *érintőnek*, nulla esetén *elkerülőnek* nevezzük.

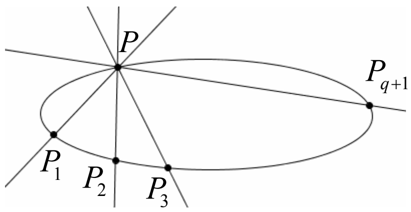


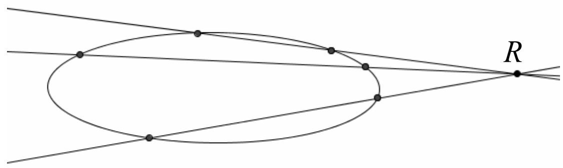
3.5.1. ábra: Ív és egyenes kölcsönös helyzete

3.5.2. Tétel (Bose): Ha K k-ív egy q-adrendű projektív síkon, akkor

$$k \le \begin{cases} q+2, \text{ ha } q \text{ páros} \\ q+1, \text{ ha } q \text{ páratlan} \end{cases}$$

Bizonyítás: Legyen P az ív egy tetszőleges pontja. P-n át pontosan $q+1$ egyenes megy és mindegyikről maximum még egy pont lehet az íven. Tehát az íven van a P és további maximum $q+1$ pont, azaz legfeljebb $q+2$ pont lehet rajta. Ha viszont valóban fennáll a $k=q+2$ egyenlőség az azt jelenti, hogy a P-n átmenő minden egyenes metszi az ívet. Ez az ív minden pontjára igaz, tehát az ívnek nincs érintője. Vegyünk egy R pontot, amely nincs az íven és nézzük a rajta átmenő egyeneseket. Ezeknek 0, 1 vagy 2 közös pontja lehetne az ívvel, de 1 nem lehet, mert érintő nem húzható. Vagyis az ív pontjait lefedik és párba állítják az R-en át húzott szelők. Tehát ebben az esetben páros sok pontja van az ívnek. Viszont ha q páratlan, akkor $q+2$ is az, így nem lehet $(q+2)$-ív, úgyhogy maximum $q+1$ pontja lehet az ívnek. ■





3.5.3. Definíció: q-adrendű projektív sík $(q+1)$-ívét *oválisnak* nevezzük.

3.5.4. Tétel: $\mathrm{PG}(2,q)$-n létezik ovális.

Bizonyítás: A klasszikus projektív síkon a legegyszerűbb alakzat, melynek semelyik három pontja nem esik egy egyenesbe az egy másodrendű görbe. Nézzük például az $y = x^2$ parabolát. Ezt az egyenletet homogenizálva kapjuk, hogy: $\frac{x_2}{x_3} = \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^2$, azaz $x_2 \cdot x_3 = x_1^2$. Ha $x_3 \neq 0$, akkor az egyenletet kielégíti minden $\left[t, t^2, 1\right]$ számhármas, ahol t testbeli elem. Ezek a megoldások adják a parabola közönséges pontjait. De ha $x_3 = 0$, akkor x_1-nek is nullának kell lennie, x_2 pedig tetszőleges. Viszont bármely t-re a $\left[0, t, 0\right]$ ugyanazt a pontot határozza meg, mint a $\left[0,1,0\right]$, ezért t-t választhatjuk 1-nek. Ez a pont pedig a parabola egyetlen ideális pontja. Így megadtunk $q+1$ pontot, már csak ellenőrizni kell, hogy semelyik három nincs egy egyenesen. Ehhez tetszőleges három pont meghatározó vektorának a vegyesszorzatát kell kiszámolni.

1. eset: az ideális pont és két közönséges pont:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ t_1 & t_1^2 & 1 \\ t_2 & t_2^2 & 1 \end{vmatrix} = t_1 - t_2$$

Ez pedig sohasem lehet nulla, ha a két közönséges pont különböző.

2. eset: három közönséges pont:

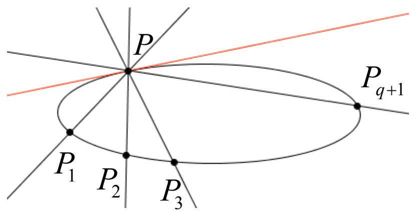
$$\begin{vmatrix} t_1 & t_1^2 & 1 \\ t_2 & t_2^2 & 1 \\ t_3 & t_3^2 & 1 \end{vmatrix} = \left(t_3 - t_1\right) \cdot \left(t_3 - t_2\right) \cdot \left(t_2 - t_1\right)$$

Ez a determináns az algebrából ismert Vandermonde-determináns, melynek értéke csak akkor nulla, ha van két sora, amelyek megegyeznek, tehát ez a szorzat sem lehet nulla, ha a három pont különböző.

Ezzel beláttuk, hogy $\mathrm{PG}(2,q)$-n létezik $(q+1)$-ív, azaz ovális. ■

3.5.5. Tétel: Egy ovális minden pontjában egyértelműen állítható érintő.

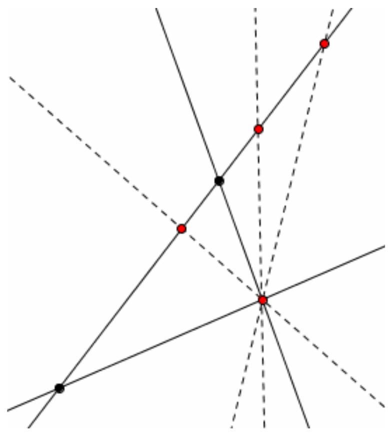
Bizonyítás: Az ovális egy tetszőleges pontját a többi pontjával összekötve q darab szelőt kapunk. De minden ponton át $q+1$ egyenes halad, ezért egyértelműen létezik az adott pontba állított érintő. ■



3.5.6. Következmény: Minden oválisnak $q+1$ érintője van összesen.

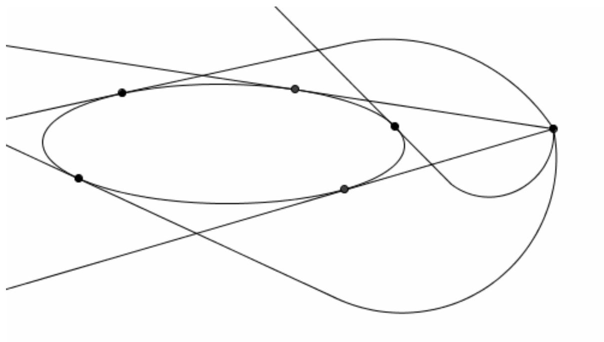
3.5.7. Tétel: Páros q esetén a q-adrendű projektív sík bármely oválisának érintői egy ponton mennek át.

Bizonyítás: Legyen P egy tetszőleges pont, amely nem illeszkedik az oválisra. A P-n átmenő egyenesek vagy szelők vagy érintők vagy elkerülők. Ezek darabszámát jelöljük rendre s-sel, t-vel és e-vel. Mivel a szelők két, az érintők egy és az elkerülők nulla pontja illeszkedik az oválisra, továbbá az ovális összes pontján pontosan egy ilyen egyenes megy, ezért: $q+1=2\cdot s+1\cdot t+0\cdot e$, azaz $q+1=2\cdot s+1\cdot t$. Ha q páros, akkor $q+1$ páratlan, így t is páratlan kell, hogy legyen. Tehát a sík minden olyan pontján, ami nincs az oválison, páratlan sok érintő megy át. Korábban pedig beláttuk, hogy az ovális pontjain egy érintő halad át. Tehát a sík minden pontján át megy legalább egy érintő. Az oválisnak összesen $q+1$ érintője van (minden pontjában egy), és a sík minden pontján áthalad közülük legalább egy. Ez csak úgy lehetséges, hogy az egyenesek egy sugársorhoz tartoznak. Ugyanis indirekt bizonyítással tegyük fel, hogy van három olyan egyenes, amelyek nem egy ponton mennek át (3.5.2. ábra).



3.5.2. ábra: Három nem egy sugársorhoz tartozó egyenes, és a lehetséges többi egyenes szaggatott vonallal

Ekkor a három egyenes által lefedett pontok száma $(q+1)+q+(q-1)=3q$. A $q-2$ darab többi érintő egyenként maximum $q-1$ új pontot tartalmazhat, hiszen összesen $q+1$ pontot tartalmaz és legalább két metszéspontja van az eddigi három egyenessel. Tehát ha van három egyenes, ami nem egy ponton megy át, akkor a maximálisan lefedett pontok száma $3q+(q-2)\cdot(q-1)=q^2+2$, de a síkon több, q^2+q+1 pont van. Azaz lehetetlen, hogy a sík összes pontját lefedje $q+1$ egyenes, ha van közöttük három olyan, amely nem egy ponton megy át. Tehát az összes egyenes egy sugársorhoz tartozik. Ezt szemlélteti a 3.5.3. ábra.

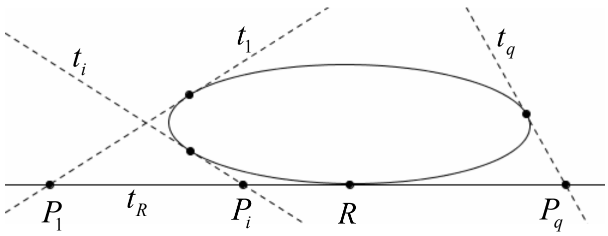


3.5.3. ábra: Ovális érintői páros *q* esetén ■

Beláttuk tehát, hogy az ovális érintői egy ponton mennek át. Ennek következménye, hogy páros q esetén az ovális nem teljes ív, hiszen ezt a pontot (melyen minden érintő áthalad) hozzávéve $(q+2)$-ívet kapunk. Ugyanis a ponton $q+1$ érintő megy át, tehát minden rajta áthaladó egyenes érintő, azaz nem húzható rajta keresztül szelő. Tehát nincs három pont, amely egy egyenesbe esne. Sőt az előző tételek (3.5.4. és 3.5.7.) azt is megmutatták, hogy a Bose-tétel becslései élesek, azaz előfordulhat az egyenlőség és létezik olyan q-adrendű projektív sík, amelyen van $(q+1)$-ív és ha q páros, akkor olyan is, amelyen van $(q+2)$-ív.

3.5.8. Tétel: Páratlan q esetén, a q-adrendű projektív síkon az oválison nem lévő pontokból 0 vagy 2 érintő húzható az oválishoz.

Bizonyítás: A korábbi módszerrel veszünk egy P pontot, amely nem illeszkedik az oválisra. Az ezen átmenő egyenesek mindegyike szelő (s), érintő (t) vagy elkerülő (e). Ezeknek 2, 1 vagy 0 közös pontja van az oválissal és lefedik az ovális mind a $q+1$ pontját, tehát felírható az $q+1=2\cdot s+1\cdot t+0\cdot e$ egyenlet. Ha q páratlan, akkor $q+1$ páros, vagyis t is páros kell, hogy legyen, azaz P-n át páros sok érintő halad. Ezért elegendő megmutatni, hogy ha $t > 0$, akkor $t = 2$. Vegyünk egy t_R érintőt, és nevezzük ennek az ívre nem illeszkedő pontjait $P_1, P_2, \ldots, P_q$-nak. Ilyen pont valóban q darab van, hiszen az egyenesnek összesen $q+1$ pontja van és egy illeszkedik az ívre.



3.5.4. ábra: Ovális érintőinek száma

Mivel minden ponton át páros sok érintő megy, ezért minden P_i illeszkedik t_R-en kívül legalább egy másik érintőre, azaz minden P_i-hez létezik $t_i (\neq t_R)$ érintő (3.5.4. ábra). Ezek az érintők páronként különbözőek, mert két pontnak egyértelműen létezik összekötő egyenese, tehát ha $j \neq k$, akkor $t_j \neq t_k$. Az oválisnak összesen $q+1$ érintője van, azaz t_R-en kívül q. Ugyanakkor a q darab P_i pont mindegyikén áthalad t_R-en kívül legalább egy érintő, tehát mindegyiken pontosan egy érintő halad át. ■

Így az euklideszi síkon megszokott elnevezésekhez hasonlóan véges projektív síkon is lehet definiálni egy ovális belső és külső pontjait.

3.5.9. Definíció: P pont az ovális *külső pontja*, ha P-n át pontosan két érintő húzható, *belső pont*, ha egy sem.

Kiszámolhatjuk a q-adrendű projektív sík külső pontjainak a számát. Az ovális mind a $q+1$ pontjában egyértelműen állítható érintő, amely külön-külön q külső pontot tartalmaz. Viszont minden külső ponton két érintő halad, azaz mindegyiket kétszer számoltuk. Így adódik, hogy a külső pontok száma $\frac{q(q+1)}{2}$. Ebből kiszámolhatjuk belső pontok számát is, ha a sík összes pontjának számából kivonjuk az ovális pontjainak és a külső pontoknak a számát.

$$(q^2+q+1)-(q+1)-\frac{q(q+1)}{2} = q^2 - \frac{q^2+q}{2} = \frac{q^2-q}{2} = \frac{q(q-1)}{2}$$

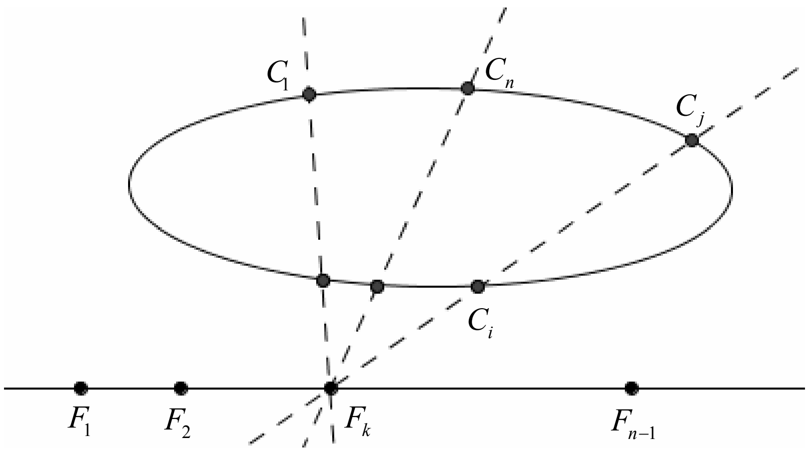
Azaz az oválison nem lévő pontoknak körülbelül fele belső és fele külső.

3.5.10. Tétel (Segre): Ha q páratlan, akkor $\mathrm{PG}(2,q)$ minden oválisa másodrendű görbe. (A tétel bizonyítása megtalálható a [4]-es könyvben.)

3.6. Körmérkőzéses bajnokság szervezése

Most már mindent tudunk, hogy megszervezhessünk egy *n* csapatos körmérkőzéses bajnokságot. Két módszert nézünk meg, melyek alkalmazhatósága *n*-től függ.

Ha $n = 2^r + 2$, akkor a $q = 2^r$ elemszámú véges test fölötti projektív sík segítségével generálhatjuk a fordulókat. A valóságban a legtipikusabb *n*, amelyre ez teljesül a 18, ami $2^4 + 2$. Többek között tizennyolccsapatos a német és holland labdarúgó-bajnokság is. Ekkor, mivel *q* páros, létezik $(q+2)$-ív. Feleltessük meg a csapatokat a $(q+2)$-ív pontjainak $\left(C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n\right)$, a fordulókat pedig egy ívet elkerülő rögzített *f* egyenes pontjainak $\left(F_1, F_2, F_3, \ldots, F_{n-1}\right)$, melynek $q+1 = n-1$ pontja van. A *k*. fordulóban pontosan akkor játszik az *i*. csapat a *j*-edikkel, ha C_i, C_j, F_k kollineáris (3.6.1. ábra).

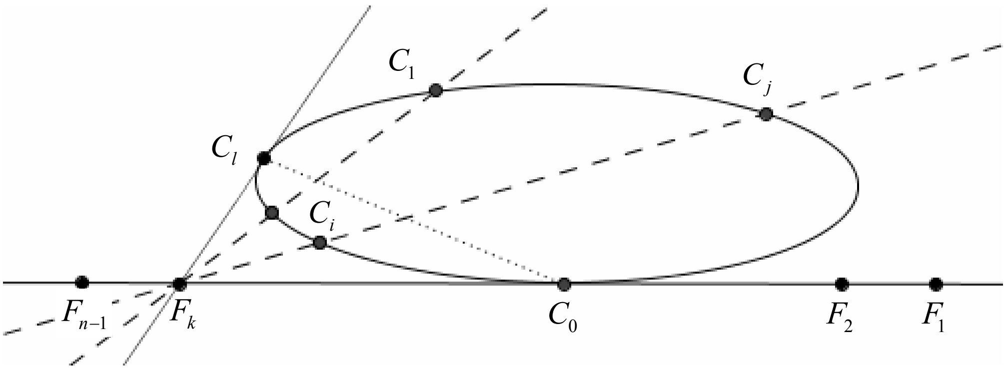


3.6.1. ábra: A *k*. forduló párosítása

Ez valóban a bajnokság egy lehetséges megszervezése, hiszen:

- Bármely C_i-nek és C_j-nek egyértelműen létezik összekötő egyenese, amely pontosan egy pontban metszi *f*-et és az a pont egyértelműen van hozzárendelve egy fordulóhoz. Tehát minden csapat minden másikkal pontosan egyszer találkozik.
- C_i és F_k pedig egyértelműen meghatározza C_j-t, ugyanis a C_iF_k egyenes további egy pontban metszi az ívet, hiszen a $(q+2)$-ívnek nincs érintője. Azaz minden csapat, minden fordulóban pontosan egyszer játszik.

Másik eset, amikor a véges geometria eszközeivel el tudjuk készíteni a menetrendet, ha $n = p^r + 1$, ahol p páratlan prímszám. Ilyen típusú bajnokság több is előfordul a valóságban, például a 18 és 20 is $p+1$ alakú. Az előbb említett tizennyolcsapatos bajnokságok mellett négy európai élbajnokság húszcsapatos: az angol, spanyol, olasz és francia. Ebben az esetben a p elemszámú véges test fölötti projektív síkot vizsgáljuk. Ezen a síkon létezik $(p+1)$-ív. Most is legyenek a csapatok az ív pontjai $\left(C_0, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}\right)$, a fordulók pedig az ívet érintő rögzített *f* egyenes íven nem lévő pontjai $\left(F_1, F_2, F_3, \ldots, F_{n-1}\right)$. Az egyenesen összesen $p+1 = n$ pont van, tehát $n-1$ külső pont. Ha $i, j \neq 0$, akkor – hasonlóan az előzőhöz – pontosan akkor rendeznek $C_i - C_j$ mérkőzést a *k*. fordulóban, ha C_i, C_j, F_k kollineáris. C_0 ellenfele pedig az a C_l $(l \neq 0)$ csapat lesz, melyre az F_k-t és C_l-et összekötő egyenes az ív érintője (3.6.2. á.).



3.6.2. ábra: A *k*. forduló párosítása

- Ha $i, j \neq 0$, akkor a C_iC_j egyenes nem a C_0 pontban metszi *f*-et, hiszen az ív három pontja nem lehet egy egyenesen. Akkor viszont egy F_k pontban metszi, azaz tetszőleges ilyen C_i-hez és C_j-hez egyértelműen létezik egy forduló. Ha viszont $j = 0$, akkor C_i-ben érintőt állítunk az ívhez. Ez egyértelmű és ez is egy F_k pontban metszi *f*-et. Tehát minden csapat minden másikkal pontosan egyszer találkozik.
- Bármely C_i-hez és F_k-hoz egyértelműen létezik C_j, mert ha C_iF_k egyenes szelő, akkor a másik metszéspont, ha érintő, akkor pedig az F_k-ból húzott másik érintő érintési pontja lesz C_j. Ez utóbbi is egyértelmű, mivel F_k külső pont, tehát pontosan két érintő húzható belőle. Azaz minden csapat, minden fordulóban pontosan egyszer játszik.

4. Gráfelméleti megközelítés

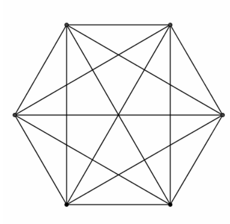
A körmérkőzéses bajnokság szervezését gráfelméleti szemszögből is meg lehet közelíteni. Ekkor a gráf csúcsai a csapatoknak felelnek meg, az élek pedig a mérkőzéseknek, oly módon, hogy egy él a két végpontja által meghatározott csapatok közötti mérkőzést reprezentálja. Így egy $2n$ csapatos körmérkőzéses bajnokság a $2n$ csúcsú teljes gráfnak felel meg. Mivel bármely két csúcs között pontosan egy él van, ezért bármely két csapat pontosan egyszer játszik egymással.

Jelölések:

$V(G)$: A G gráf csúcsainak a halmaza.

$E(G)$: A G gráf éleinek a halmaza.

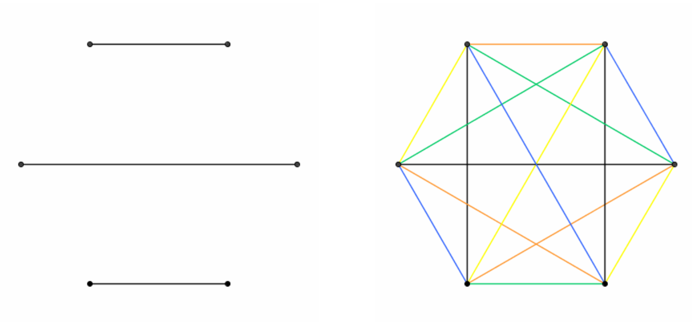
K_n: Az n csúcsú teljes gráf.



4.0.1. ábra: K_6

4.0.1. Definíció: A G gráf *1-faktorának* nevezzük az $F \subset E(G)$ élhalmazt, ha minden $x \in V(G)$ csúcs pontosan egy F-beli élen van rajta.

A G gráf 1-faktorainak $F = \{F_1, F_2, \ldots F_k\}$ halmazát G *1-faktorizációjának* nevezzük, ha minden $e \in E(G)$ él pontosan egy F-beli 1-faktorban szerepel.

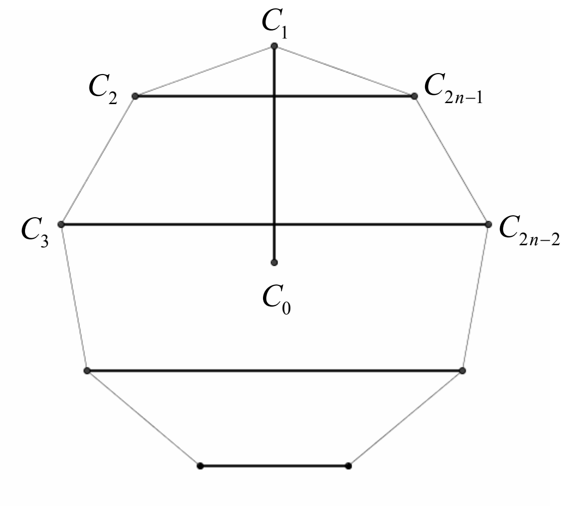


4.0.2. ábra: K_6 egy 1-faktora és egy 1-faktorizációja

Azaz a körmérkőzéses bajnokság szerevezése átfogalmazva gráfelméleti feladattá így hangzik: adjuk meg K_{2n} egy 1-faktorizációját. Ugyanis az 1-faktorok megfelelnek a fordulóknak, hiszen minden csúcs pontosan egy élen van rajta, azaz minden csapat pontosan egy mérkőzést játszik. Az 1-faktorizáció pedig a teljes menetrendnek, hiszen minden él pontosan egy 1-faktorban szerepel, azaz minden mérkőzés pontosan egy fordulóban kerül megrendezésre. És persze mindenki játszik mindenkivel, mivel K_{2n} 1-faktorizációját készítettük el.

4.1. K_{2n} 1-faktorizációja

Ábrázoljuk K_{2n}-t egy $(2n-1)$ csúcsú szabályos sokszög csúcsaival és középpontjával. Ekkor a középpontnak megfeleltetett csapat szerepe lesz kitüntetett, ezért nevezzük C_0-nak, a többi pontot pedig C_1, C_2, ... C_{2n-1}-nek. Bármely szabályos sokszög tengelyesen szimmetrikus a középpontját valamely csúcsával összekötő egyenesre. Ha a sokszögnek páratlan sok csúcsa van, akkor az is igaz, hogy ezen a tengelyen csak az a csúcs van rajta, amelyet összekötöttünk a középponttal. Ekkor viszont az összes többi – páros sok – csúcsot párba állíthatjuk úgy, hogy két csúcs akkor alkot egy párt, ha egymás tükörképei. Tehát ha C_0-t összekötjük valamely C_k-val ($k \neq 0$), akkor a többi csúcs párba állítható, ezeket a párokat is kössük össze éllel, így K_{2n} egy 1-faktorát, azaz egy fordulót kapunk. Ez $k = 1, 2, ..., 2n-1$-re mindig működik. Így a k. forduló párosítását a következőképp definiálhatjuk: $C_0 - C_k$ és $C_i - C_j$ pontosan akkor, ha C_i és C_j egymás tükörképei a C_0C_k egyenesre nézve. Már csak azt kell megvizsgálni, hogy ezek az 1-faktorok 1-faktorizációt alkotnak, vagyis, hogy ez valóban jó lebonyolítás.



- $2n-1$ forduló van, mert $k = 1, 2, ... 2n-1$.
- Minden fordulóban minden csapat pontosan egy mérkőzést játszik, mert 1-faktorokra bontottuk K_{2n}-t.
- Bármely két csapat pontosan egyszer játszik egymással. Ez C_0 esetén nyilvánvaló, egyébként pedig tetszőleges C_i és C_j akkor játszik egymással, ha egymás tükörképei. A C_iC_j szakasz felezőmerőlegese viszont átmegy C_0-n és a sokszög pontosan egy C_k csúcsán. Azaz bárhogy választjuk ki a sokszög két csúcsát, ahhoz egyértelműen létezik a C_0C_k egyenes, amely szintén egyértelműen meghatározza a k. fordulót, amelyben megrendezik a mérkőzést.

5. Bajnokságszervezés a valóságban

Az előző fejezetekben megismert módszerek egy bajnokság egy-egy lehetséges fordulókra bontását és az egyes fordulók párosításait adják meg. A nemzeti bajnokságoknál azonban nem csak az számít, hogy egy mérkőzésen melyik két csapat játszik, hanem az is, hogy hol rendezik a találkozót. A legtöbb nemzeti bajnokság – köztük a magyar és a már említett élbajnokságok is – oda-visszavágós körmérkőzéses bajnokságok. Azaz mindenki mindenkivel kétszer játszik, egyszer hazai pályán, egyszer pedig idegenben. Erre azért van szükség, mert a hazai pályán szereplő csapat kisebb-nagyobb előnyöket élvez. Több szurkoló támogatja, sokkal jobban ismeri a pálya sajátosságait, illetve gazdaságilag is fontos, ugyanis a hazai csapaté a bevétel. Egy szervezésnél ezt is figyelembe kell venni, és általában arra törekszenek, hogy ne legyenek hosszabb hazai vagy idegenbeli sorozatok. (Ez alól kivételt jelenthet, ha nagyok a távolságok és gazdaságosabb a távoli mérkőzéseket egymás után lejátszani.)

5.0.1. Definíció: Azt mondjuk, hogy egy szervezés *ideális* egy csapat számára, ha bármely egymást követő két mérkőzéséből egyik hazai, másik idegenbeli. Másképpen fogalmazva felváltva játszik otthon és vendégként.

5.0.2. Tétel: Bármely szervezés maximum két csapat számára lehet ideális.

Bizonyítás: Rendeljünk hozzá minden csapathoz egy vektort, melynek az i. koordinátája 1, ha otthon és 0, ha idegenben játszik az i. fordulóban. Így minden csapathoz más vektor tartozik, ugyanis amikor a két csapat egymás ellen játszik, akkor az egyiknél 1, a másiknál 0 az adott fordulónak megfelelő koordináta. Továbbá egy vektor akkor felel meg a csapat számára ideális szervezésnek, ha a koordinátái felváltva 0 és 1. Ilyenből kettő van: amelyik 0-val és amelyik 1-gyel kezdődik. Tehát a szervezés maximum két csapat számára lehet ideális. ■

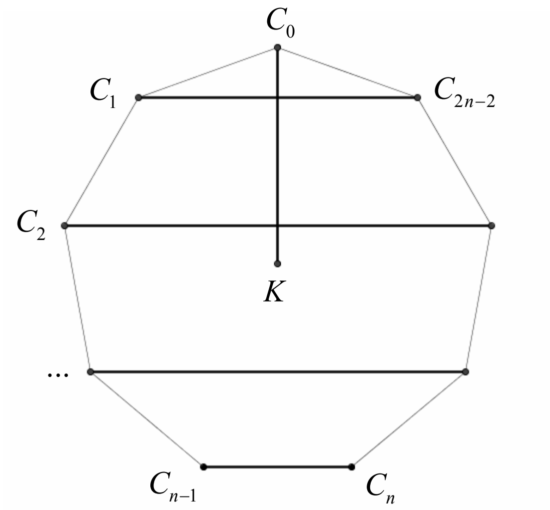
Másképpen fogalmazva láthatjuk, hogy egy szervezés nem lehet mindenki számára ideális, ezért adódik a kérdés, hogy akkor milyen szervezés a lehető legjobb. A nem ideális sorsolások közül a legjobb az, amikor egyszer törik meg a váltakozás.

5.0.3. Definíció: Egy szervezés *optimális* egy csapat számára, ha pontosan egyszer fordul elő, hogy két egymást követő fordulóban mindkétszer otthon vagy mindkétszer idegenben szerepel.

Mivel az 5.0.2. tétel szerint legfeljebb két csapat számára lehet ideális a szervezés, ezért a lehető legjobb lehetőségnek az tűnik, hogy két csapat számára ideális, a többieknek pedig optimális. Ekkor a szervezés egészére mondjuk, hogy *optimális*. A következő tétel megmutatja, hogy ilyen szervezés mindig létezik is.

5.0.4. Tétel: Minden $2n$ csapatos bajnokság megszervezhető úgy, hogy 2 csapat számára ideális, $2n-2$ számára pedig optimális legyen.

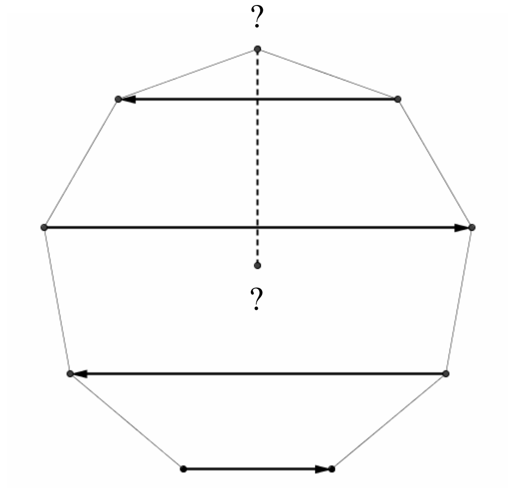
Bizonyítás: Ennek belátásához a gráfelméleti megközelítést használjuk, de a könnyebb számolás érdekében máshogy betűzve a csúcsokat.



5.0.1. ábra: A gráfelméleti megközelítés, más betűzéssel

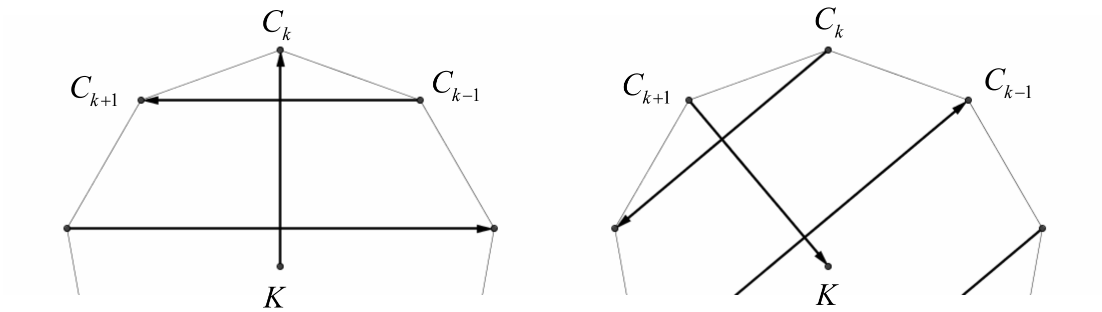
Az 5.0.1. ábra betűzésével azt mondhatjuk, hogy a k. fordulóban rendezik a KC_k és $C_{k+i}C_{k-i}$ mérkőzéseket, ahol $0 \le k \le 2n-2$, $1 \le i \le n-1$ és a $k \pm i$ számokon az $(2n-1)$-gyel vett osztási maradékot értjük. (Ezért célszerűbb így betűzni a szabályos sokszög csúcsait, hiszen így könnyen megfeleltethetőek $\boldsymbol{Z}_{2n-1}$ elemeinek.) Rendezzék a KC_k mérkőzést K pályáján, ha k páros és C_k pályáján, ha k páratlan. A másik típusú mérkőzések közül pedig C_{k-i} legyen a vendéglátó, ha i páros és C_{k+i}, ha i páratlan.

Ez a pályabeosztás megfelel annak, hogy a korábban megismert 1-faktorizációt irányítjuk az 5.0.2. ábrán látható módon.



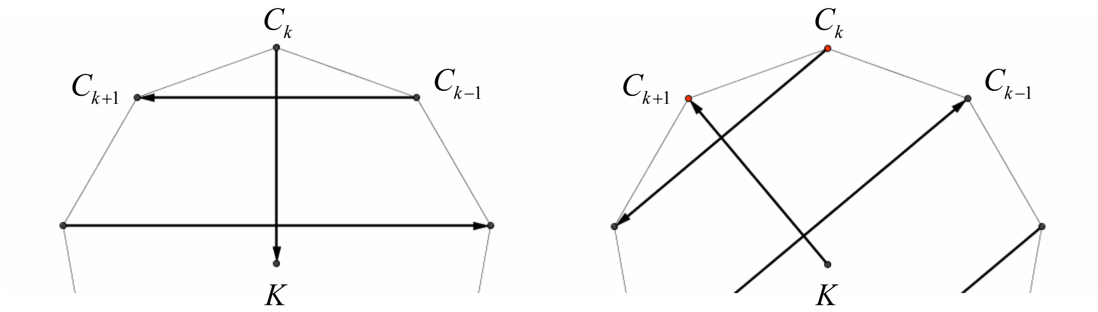
5.0.2. ábra: Az élek a hazai csapat felé vannak irányítva

Világos, hogy K számára ez a szervezés ideális. Nézzük meg, hogy egy tetszőleges C_x csapat hol játszik két egymást követő fordulóban. Ha ez a két forduló olyan, hogy C_x egyikben sem találkozik K-val, akkor egyik mérkőzés hazai, másik pedig idegenbeli, hiszen két egymást követő nyíl fordított irányítású. Most nézzük meg K ellenfeleit két egymást követő fordulóban. A k. fordulóban biztos, hogy C_{k+1} otthon játszik. Ha k páratlan, akkor C_k is hazai pályán játszik. Így a következő fordulóban C_k és C_{k+1} vendég lesz, hiszen $k+1$ páros. Azaz C_k és C_{k+1} egymást követő két mérkőzésén felváltva játszik otthon és idegenben (5.0.3. ábra).



5.0.3. ábra: A *k*. és a (*k*+1). forduló, páratlan *k* esetén

Ha viszont k páros, akkor C_k vendég. De C_k a következő fordulóban is vendég lesz, C_{k+1} pedig sorozatban másodszor otthon játszik, mert ekkor $k+1$ páratlan (5.0.4. ábra).



5.0.4. ábra: A *k*. és a (*k*+1). forduló, páros *k* esetén

Általánosan: az F_{2k} és F_{2k+1} fordulókban törik meg a váltakozás és pontosan két csapat (C_{2k} és C_{2k+1}) számára. Ilyen fordulópár $n-1$ darab van, tehát összesen $2n-2$-szer törik meg a váltakozás és mindig más csapatnál. Tehát ez a szervezés optimális. ■

Ezzel a módszerrel már a pályaválasztói jogot is figyelembe véve tudunk bajnokságot szervezni, ami a legtöbbször elegendő egy nemzeti bajnokság megszervezéséhez. De előfordulhat az is, hogy két csapat hazai mérkőzéseinek ugyanaz a stadion ad otthont. Ekkor a sorsolásnak azt is biztosítania kell, hogy nem szerepelhet ugyanabban a fordulóban hazai pályán ez a két csapat. (Kivéve azt a fordulót, amikor egymás ellen játszanak, de hivatalosan akkor is az egyik csapat vendég.) Például az olasz bajnokság 2008/2009-es kiírásában négy olyan stadion is van, amelyet két csapat használ. A Milan és az Internazionale a San Siróban, a Roma és a Lazio a Stadio Olimpicóban, a Juventus és a Torino a Stadio delle Alpiban, míg a Sampdoria és a Genoa a Stadio Luigi Ferrarisban játssza hazai mérkőzéseit. Az előző bizonyításban megadott módszer erre a problémára is megoldást nyújt, ugyanis párba állítja a csapatokat az alapján, hogy melyek sorsolása ellentétes.

5.0.5. Definíció: Két csapat sorsolását *ellentétesnek* nevezünk, ha valahányszor az egyik csapat otthon játszik, akkor a másik idegenben.

Az előbbi konstrukcióban szerepel két csapat, melyek számára ideális a sorsolás és az egyik otthon, a másik vendégként kezd, tehát az ő sorsolásuk ellentétes. A többi $2n-2$ csapat pedig automatikusan párba áll, ugyanis ha megtörik egy csapat váltakozó szereplése, akkor pontosan két együttesé törik meg. És ezeknek a pároknak ellentétes a sorsolása, mivel ekkor az egyik kétszer otthon, a másik kétszer idegenben szerepelt, egyébként pedig egymás mellett helyezkednek el a sokszögön, tehát definíció szerint ellentétesen játszanak.

Ezzel a módszerrel minden igényt kielégítően meg lehet szervezni egy *n* csapatos körmérkőzéses bajnokságot. Ezt a szervezést generálja a mellékelt program is, amely tetszőleges *n* csapat esetén megadja a körmérkőzéses bajnokság egy lehetséges optimális szervezését, valamint az ellentétes párokat.

5.1. A magyar bajnokság szervezése

Ez a fejezet a leggyakorlatiasabb, ugyanis azt mutatja be, hogy a Magyar Labdarúgó Szövetség (MLSZ) hogyan szervezi az összes hozzá tartozó bajnokságot, többek között az elsőosztály küzdelmeit. Létezik egy sablon, amelyben szerepel 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 és 20 csapatos bajnokság egy lehetséges sorsolása (lásd: Melléklet). Ez természetesen figyelembe veszi a pályaválasztói jogot is és ügyel arra, hogy lehetőleg felváltva játsszanak otthon és idegenben a csapatok. Mint azt korábban láttuk, a lehető legjobb szervezés az, amikor két csapat felváltva játszik hazai pályán és idegenben, a többinél pedig egyszer előfordul, hogy kétszer egymás után otthon, vagy kétszer egymás után idegenben szerepel. Ezek a sorsolási sablonok is kielégítik ezt a feltételt, tehát optimális a magyar bajnokságok lebonyolítása, hiszen az elmúlt évtizedekben minden MLSZ által szervezett bajnokságot ezek segítségével bonyolították le. Sőt fel vannak tüntetve benne az ellentétes sorsolási számok, azaz azok a számpárok, amelyeket az olyan csapatok kaphatnak, melyeknek közös stadionjuk van. Tehát ha az egyik csapat számát kisorolták, az egyértelműen, sorsolás nélkül meghatározza a „lakótárs” sorszámát is. Ezzel jelenleg nem kell törődni a magyar bajnokságban, hiszen minden csapatnak van saját stadionja.

Az viszont elképzelhető, hogy egy csapat a város stadionjában szerepel, amely más eseményeknek is helyszínéül szolgálhat. Ezért a csapatok minden sorsolás előtt elküldhetik, hogy a következő szezonban mely fordulók időpontjában foglalt a stadionjuk, egyúttal kérhetik, hogy abban a fordulóban idegenben játszhassanak. Ekkor a sorsolási sablonban megnézik, hányas sorszámú csapatok szerepelnek az adott fordulóban idegenben és csak azok közül a számok közül sorsolnak a csapatnak. Egy adott fordulóban értelemszerűen a csapatok fele játszik otthon és a másik fele idegenben. Tehát egy ilyen kérés felezi a kapható lehetséges sorszámokat. További kérések esetén tovább csökkennek a lehetőségek. Az MLSZ tájékoztatása szerint olyan is előfordul, hogy egy csapatnak csupán két számból sorsolnak. Sőt megtörténhetne az is, hogy annyi kérés érkezik a csapatok részéről, hogy azokat nem lehet egyidejűleg teljesíteni, de gyakorlatban ilyen nem szokott előfordulni. Ha mégis ez történne, akkor néhány kérést figyelmen kívül kell hagyni, és más módon megoldani a stadionkérdést, például pályaválasztói jog felcserélésével, semleges pályán való megrendezéssel, vagy a mérkőzés elhalasztásával.

Melléklet: Az MLSZ szervezési sablonja

SORSOLÁSI TERVSZÁMOK Őszi bajnokság

1. forduló

6-os	1-6	2-5	3-4							
8-as	1-8	2-7	3-6	4-5						
10-es	1-10	2-9	3-8	4-7	5-6					
12-es	1-12	2-11	3-10	4-9	5-8	6-7				
14-es	1-14	2-13	3-12	4-11	5-10	6-9	7-8			
16-os	1-16	2-15	3-14	4-13	5-12	6-11	7-10	8-9		
18-as	1-18	2-17	3-16	4-15	5-14	6-13	7-12	8-11	9-10	
20-as	1-20	2-19	3-18	4-17	5-16	6-15	7-14	8-13	9-12	10-11

2. forduló

6-os	4-2	5-1	6-3							
8-as	5-3	6-2	7-1	8-4						
10-es	6-4	7-3	8-2	9-1	10-5					
12-es	7-5	8-4	9-3	10-2	11-1	12-6				
14-es	8-6	9-5	10-4	11-3	12-2	13-1	14-7			
16-os	9-7	10-6	11-5	12-4	13-3	14-2	15-1	16-8		
18-as	10-8	11-7	12-6	13-5	14-4	15-3	16-2	17-1	18-9	
20-as	11-9	12-8	13-7	14-6	15-5	16-4	17-3	18-2	19-1	20-10

3. forduló

6-os	1-4	2-3	6-5							
8-as	1-6	2-5	3-4	8-7						
10-es	1-8	2-7	3-6	4-5	10-9					
12-es	1-10	2-9	3-8	4-7	5-6	12-11				
14-es	1-12	2-11	3-10	4-9	5-8	6-7	14-13			
16-os	1-14	2-13	3-12	4-11	5-10	6-9	7-8	16-15		
18-as	1-16	2-15	3-14	4-13	5-12	6-11	7-10	8-9	18-17	
20-as	1-18	2-17	3-16	4-15	5-14	6-13	7-12	8-11	9-10	20-19

4. forduló

6-os	2-6	3-1	4-5							
8-as	3-8	4-2	5-1	6-7						
10-es	4-10	5-3	6-2	7-1	8-9					
12-es	5-12	6-4	7-3	8-2	9-1	10-11				
14-es	6-14	7-5	8-4	9-3	10-2	11-1	12-13			
16-os	7-16	8-6	9-5	10-4	11-3	12-2	13-1	14-15		
18-as	8-18	9-7	10-6	11-5	12-4	13-3	14-2	15-1	16-17	
20-as	9-20	10-8	11-7	12-6	13-5	14-4	15-3	16-2	17-1	18-19

5. forduló

6-os	1-2	5-3	6-4							
8-as	1-4	2-3	7-5	8-6						
10-es	1-6	2-5	3-4	9-7	10-8					
12-es	1-8	2-7	3-6	4-5	11-9	12-10				
14-es	1-10	2-9	3-8	4-7	5-6	13-11	14-12			
16-os	1-12	2-11	3-10	4-9	5-8	6-7	15-13	16-14		
18-as	1-14	2-13	3-12	4-11	5-10	6-9	7-8	17-15	18-16	
20-as	1-16	2-15	3-14	4-13	5-12	6-11	7-10	8-9	19-17	20-18

6. forduló

8-as	2-8	3-1	4-7	5-6						
10-es	3-10	4-2	5-1	6-9	7-8					
12-es	4-12	5-3	6-2	7-1	8-11	9-10				
14-es	5-14	6-4	7-3	8-2	9-1	10-13	11-12			
16-os	6-16	7-5	8-4	9-3	10-2	11-1	12-15	13-14		
18-as	7-18	8-6	9-5	10-4	11-3	12-2	13-1	14-17	15-16	
20-as	8-20	9-7	10-6	11-5	12-4	13-3	14-2	15-1	16-19	17-18

7. forduló

8-as	1-2	6-4	7-3	8-5						
10-es	1-4	2-3	8-6	9-5	10-7					
12-es	1-6	2-5	3-4	10-8	11-7	12-9				
14-es	1-8	2-7	3-6	4-5	12-10	13-9	14-11			
16-os	1-10	2-9	3-8	4-7	5-6	14-12	15-11	16-13		
18-as	1-12	2-11	3-10	4-9	5-8	6-7	16-14	17-13	18-15	
20-as	1-14	2-13	3-12	4-11	5-10	6-9	7-8	18-16	19-15	20-17

8. forduló

10-es	2-10	3-1	4-9	5-8	6-7					
12-es	3-12	4-2	5-1	6-11	7-10	8-8				
14-es	4-14	5-3	6-2	7-1	8-13	9-12	10-11			
16-os	5-16	6-4	7-3	8-2	9-1	10-15	11-14	12-13		
18-as	6-18	7-5	8-4	9-3	10-2	11-1	12-17	13-16	14-15	
20-as	7-20	8-6	9-5	10-4	11-3	12-2	13-1	14-19	15-18	16-17

9. forduló

10-es	1-2	7-5	8-4	9-3	10-6					
12-es	1-4	2-3	9-7	10-6	11-5	12-8				
14-es	1-6	2-5	3-4	11-9	12-8	13-7	14-10			
16-os	1-8	2-7	3-6	4-5	13-11	14-10	15-9	16-12		
18-as	1-10	2-9	3-8	4-7	5-6	15-13	16-12	17-11	18-14	
20-as	1-12	2-11	3-10	4-9	5-8	6-7	17-15	18-14	19-13	20-16

10. forduló

12-es	2-12	3-1	4-11	5-10	6-9	7-8				
14-es	3-14	4-2	5-1	6-13	7-12	8-11	9-10			
16-os	4-16	5-3	6-2	7-1	8-15	9-14	10-13	11-12		
18-as	5-18	6-4	7-3	8-2	9-1	10-17	11-16	12-15	13-14	
20-as	6-20	7-5	8-4	9-3	10-2	11-1	12-19	13-18	14-17	15-16

11. forduló

12-es	1-2	8-6	9-5	10-4	11-3	12-7				
14-es	1-4	2-3	10-8	11-7	12-6	13-5	14-9			
16-os	1-6	2-5	3-4	12-10	13-9	14-8	15-7	16-11		
18-as	1-8	2-7	3-6	4-5	14-12	15-11	16-10	17-9	18-13	
20-as	1-10	2-9	3-8	4-7	5-6	16-14	17-13	18-12	19-11	20-15

12. forduló

14-es	2-14	3-1	4-13	5-12	6-11	7-10	8-9			
16-os	3-16	4-2	5-1	6-15	7-14	8-13	9-12	10-11		
18-as	4-18	5-3	6-2	7-1	8-17	9-16	10-15	11-14	12-13	
20-as	5-20	6-4	7-3	8-2	9-1	10-19	11-18	12-17	13-16	14-15

13. forduló

14-es	1-2	9-7	10-6	11-5	12-4	13-3	14-8		
16-os	1-4	2-3	11-9	12-8	13-7	14-6	15-5	16-10	
18-as	1-6	2-5	3-4	13-11	14-10	15-9	16-8	17-7	18-12
20-as	1-8	2-7	3-6	4-5	15-16	16-12	17-11	18-10	19-9	20-14

14. forduló

16-os	2-16	3-1	4-15	5-14	6-13	7-12	8-11	9-10		
18-as	3-18	4-2	5-1	6-17	7-16	8-15	9-14	10-13	11-12	
20-as	4-20	5-3	6-2	7-1	8-19	9-18	10-17	11-16	12-15	13-14

15. forduló

16-os	1-2	10-8	11-7	12-6	13-5	14-4	15-3	16-9		
18-as	1-4	2-3	12-10	13-9	14-8	15-7	16-6	17-5	18-4	
20-as	1-6	2-5	3-4	14-12	15-11	16-10	17-9	18-8	19-7	20-13

16. forduló

18-as	2-18	3-1	4-17	5-16	6-15	7-14	8-13	9-12	10-11	
20-as	3-20	4-2	5-1	6-19	7-18	8-17	9-16	10-15	11-14	12-13

17. forduló

18-as	1-2	11-9	12-8	13-7	14-6	15-5	16-4	17-3	18-10	
20-as	1-4	2-3	13-11	14-10	15-9	16-8	17-7	18-6	19-5	20-12

18. forduló

20-as	2-20	3-1	4-19	5-18	6-17	7-16	8-15	9-14	10-13	11-12

19. forduló

20-as	1-2	12-10	13-9	14-8	15-7	16-6	17-5	18-4	19-3	20-11

Ellentétes sorsolási számok:

6-os	1-4	2-5	3-6							
8-as	1-5	2-6	3-7	4-8						
10-es	1-6	2-7	3-8	4-9	5-10					
12-es	1-7	2-8	3-9	4-10	5-11	6-12				
14-es	1-8	2-9	3-10	4-11	5-12	6-13	7-14			
16-os	1-9	2-10	3-11	4-12	5-13	6-14	7-15	8-16		
18-as	1-10	2-11	3-12	4-13	5-14	6-15	7-16	8-17	9-18	
20-as	1-11	2-12	3-13	4-14	5-15	6-16	7-17	8-18	9-19	10-20

SORSOLÁSI TERVSZÁMOK Tavaszi bajnokság

1. forduló

6-os	6-1	5-2	4-3							
8-as	8-1	7-2	6-3	5-4						
10-es	10-1	9-2	8-3	7-4	6-5					
12-es	12-1	11-2	10-3	9-4	8-5	7-6				
14-es	14-1	13-2	12-3	11-4	10-5	9-6	8-7			
16-os	16-1	15-2	14-3	13-4	12-5	11-6	10-7	9-8		
18-as	18-1	17-2	16-3	15-4	14-5	13-6	12-7	11-8	10-9	
20-as	20-1	19-2	18-3	17-4	16-5	15-6	14-7	13-8	12-9	11-10

2. forduló

6-os	2-4	1-5	3-6							
8-as	3-5	2-6	1-7	4-8						
10-es	4-6	3-7	2-8	1-9	5-10					
12-es	5-7	4-8	3-9	2-10	1-11	6-12				
14-es	6-8	5-9	4-10	3-11	2-12	1-13	7-14			
16-os	7-9	6-10	5-11	4-12	3-13	2-14	1-15	8-16		
18-as	8-10	7-11	6-12	5-13	4-14	3-15	2-16	1-17	9-18	
20-as	9-11	8-12	7-13	6-14	5-15	4-16	3-17	2-18	1-19	10-20

3. forduló

6-os	4-1	3-2	5-6							
8-as	6-1	5-2	4-3	7-8						
10-es	8-1	7-2	6-3	5-4	9-10					
12-es	10-1	9-2	8-3	7-4	6-5	11-12				
14-es	12-1	11-2	10-3	9-4	8-5	7-6	13-14			
16-os	14-1	13-2	12-3	11-4	10-5	9-6	8-7	15-16		
18-as	16-1	15-2	14-3	13-4	12-5	11-6	10-7	9-8	17-18	
20-as	18-1	17-2	16-3	15-4	14-5	13-6	12-7	11-8	10-9	19-20

4. forduló

6-os	6-2	1-3	5-4							
8-as	8-3	2-4	1-5	7-6						
10-es	10-4	3-5	2-6	1-7	9-8					
12-es	12-5	4-6	3-7	2-8	1-9	11-10				
14-es	14-6	5-7	4-8	3-9	2-10	1-11	13-12			
16-os	16-7	6-8	5-9	4-10	3-11	2-12	1-13	15-14		
18-as	18-8	7-9	6-10	5-11	4-12	3-13	2-14	1-15	17-16	
20-as	20-9	8-10	7-11	6-12	5-13	4-14	3-15	2-16	1-17	19-18

5. forduló

6-os	2-1	3-5	4-6							
8-as	4-1	3-2	5-7	6-8						
10-es	6-1	5-2	4-3	7-9	8-10					
12-es	8-1	7-2	6-3	5-4	9-11	10-12				
14-es	10-1	9-2	8-3	7-4	6-5	11-13	12-14			
16-os	12-1	11-2	10-3	9-4	8-5	7-6	13-15	14-16		
18-as	14-1	13-2	12-3	11-4	10-5	9-6	8-7	15-17	16-18	
20-as	16-1	15-2	14-3	13-4	12-5	11-6	10-7	9-8	17-19	18-20

6. forduló

8-as	8-2	1-3	7-4	6-5						
10-es	10-3	2-4	1-5	9-6	8-7					
12-es	12-4	3-5	2-6	1-7	11-8	10-9				
14-es	14-5	4-6	3-7	2-8	1-9	13-10	12-11			
16-os	16-6	5-7	4-8	3-9	2-10	1-11	15-12	14-13		
18-as	18-7	6-8	5-9	4-10	3-11	2-12	1-13	17-14	16-15	
20-as	20-8	7-9	6-10	5-11	4-12	3-13	2-14	1-15	19-16	18-17

7. forduló

8-as	2-1	4-6	3-7	5-8						
10-es	4-1	3-2	6-8	5-9	7-10					
12-es	6-1	5-2	4-3	8-10	7-11	9-12				
14-es	8-1	7-2	6-3	5-4	10-12	9-13	11-14			
16-os	10-1	9-2	8-3	7-4	6-5	12-14	11-15	13-16		
18-as	12-1	11-2	10-3	9-4	8-5	7-6	14-16	13-17	15-18	
20-as	14-1	13-2	12-3	11-4	10-5	9-6	8-7	16-18	15-19	17-20

8. forduló

10-es	10-2	1-3	9-4	8-5	7-6					
12-es	12-3	2-4	1-5	11-6	10-7	8-8				
14-es	14-4	3-5	2-6	1-7	13-8	12-9	11-10			
16-os	16-5	4-6	3-7	2-8	1-9	15-10	14-11	13-12		
18-as	18-6	5-7	4-8	3-9	2-10	1-11	17-12	16-13	15-14	
20-as	20-7	6-8	5-9	4-10	3-11	2-12	1-13	19-14	18-15	17-16

9. forduló

10-es	2-1	5-7	4-8	3-9	6-10					
12-es	4-1	3-2	7-9	6-10	5-11	8-12				
14-es	6-1	5-2	4-3	9-11	8-12	7-13	10-14			
16-os	8-1	7-2	6-3	5-4	11-13	10-14	9-15	12-16		
18-as	10-1	9-2	8-3	7-4	6-5	13-15	12-16	11-17	14-18	
20-as	12-1	11-2	10-3	9-4	8-5	7-6	15-17	14-18	13-19	16-20

10. forduló

12-es	12-2	1-3	11-4	10-5	9-6	8-7				
14-es	14-3	2-4	1-5	13-6	12-7	11-8	10-9			
16-os	16-4	3-5	2-6	1-7	15-8	14-9	13-10	12-11		
18-as	18-5	4-6	3-7	2-8	1-9	17-10	16-11	15-12	14-13	
20-as	20-6	5-7	4-8	3-9	2-10	1-11	19-12	18-13	17-14	16-15

11. forduló

12-es	2-1	6-8	5-9	4-10	3-11	7-12				
14-es	4-1	3-2	8-10	7-11	6-12	5-13	9-14			
16-os	6-1	5-2	4-3	10-12	9-13	8-14	7-15	11-16		
18-as	8-1	7-2	6-3	5-4	12-14	11-15	10-16	9-17	13-18	
20-as	10-1	9-2	8-3	7-4	6-5	14-16	13-17	12-18	11-19	15-20

12. forduló

14-es	14-2	1-3	13-4	12-5	11-6	10-7	9-8			
16-os	16-3	2-4	1-5	15-6	14-7	13-8	12-9	11-10		
18-as	18-4	3-5	2-6	1-7	17-8	16-9	15-10	14-11	13-12	
20-as	20-5	4-6	3-7	2-8	1-9	19-10	18-11	17-12	16-13	15-14

13. forduló

14-es	2-1	7-9	6-10	5-11	4-12	3-13	8-14			
16-os	4-1	3-2	9-11	8-12	7-13	6-14	5-15	10-16		
18-as	6-1	5-2	4-3	11-13	10-14	9-15	8-16	7-17	12-18	
20-as	8-1	7-2	6-3	5-4	16-15	12-16	11-17	10-18	9-19	14-20

14. forduló

16-os	16-2	1-3	15-4	14-5	13-6	12-7	11-8	10-9		
18-as	18-3	2-4	1-5	17-6	16-7	15-8	14-9	13-10	12-11	
20-as	20-4	3-5	2-6	1-7	19-8	18-9	17-10	16-11	15-12	14-13

15. forduló

16-os	2-1	8-10	7-11	6-12	5-13	4-14	3-15	9-16		
18-as	4-1	3-2	10-12	9-13	8-14	7-15	6-16	5-17	4-18	
20-as	6-1	5-2	4-3	12-14	11-15	10-16	9-17	8-18	7-19	13-20

16. forduló

18-as	18-2	1-3	17-4	16-5	15-6	14-7	13-8	12-9	11-10	
20-as	20-3	2-4	1-5	19-6	18-7	17-8	16-9	15-10	14-11	13-12

17. forduló

18-as	2-1	9-11	8-12	7-13	6-14	5-15	4-16	3-17	10-18	
20-as	4-1	3-2	11-13	10-14	9-15	8-16	7-17	6-18	5-19	12-20

18. forduló

20-as	20-2	1-3	19-4	18-5	17-6	16-7	15-8	14-9	13-10	12-11

19. forduló

20-as	2-1	10-12	9-13	8-14	7-15	6-16	5-17	4-18	3-19	11-20

Tárgymutató

Irodalomjegyzék

[1] Freud Róbert: *Lineáris algebra*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1998.

[2] Hajós György: *Bevezetés a geometriába*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2006.

[3] Kiss György: *Hogyan szervezzünk körmérkőzéses focibajnokságot?*, Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, 2006/9, 514-525.

[4] Kiss György - Szőnyi Tamás: *Véges geometriák*, Polygon Kiadó, Szeged, 2001.

[5] Wallis, W. D.: *One-factorizations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.