Miben segíti a kooperatív módszer a matematika tananyag megértését?

Kooperatív módszerek a matematikaórán

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Matematika BSc Szakdolgozat
Szerző: Mécs Anna
Témavezető: Pálfalvi Józsefné
Kelt: Bp., 2009. június 2.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Szakdolgozatomban a kooperatív módszereket fogom bemutatni. Leginkább az előnyeit hangsúlyozom, ám nem hagyom figyelmen kívül a veszélyeit sem. Óralátogatásokon szerzett tapasztalatok és a diákok véleménye alapján is értékelem a tárgyalt módszereket, emellett pedig saját óratervekkel szemléltetem elképzeléseimet.

Fontosnak tartom, hogy leendő tanárként az alternatív módszerekre nyitottan készüljünk a tanításra, ám mindent kritikusan kezeljünk. Munkámban is arra szeretnék rávilágítani, hogy mikor hasznos a kooperatív módszert alkalmazni. Nem kizárólagos lehetőségként, hanem egy alternatívaként mutatom be, amely a kellő időben, a kellő csoporttal a tanár nagy segítségére lehet.

2. A kooperatív módszer bemutatása

2.1 Alapgondolatok

A kooperatív módszer mind a tanár, mind a tanulók szerepét teljesen új, a frontális órától, egyéni eredményeket, állandó versenyhelyzetet középpontba helyező felfogástól eltérő megvilágításba helyezi. Mi is ez az új megvilágítás?

A tanóra nem az állandó csendről, fegyelemről és az egyéni munkáról szól, hanem a tanulók együttműködéséről. Itt a közös munkán van a hangsúly, hiszen a későbbiekben is arra lesz szükségük, hogy csapatban tudjanak dolgozni, meglássák, hogy a munka mely része áll igazán közel hozzájuk, felfedezzék más tehetségét is. Ezzel szemben rengeteg tanár amellett, hogy egybefüggő tömegként kezeli a diákokat, a tanulóknak mindent egyedül kell megérteniük, ha pedig megpróbálnak segíteni egymásnak, akkor az büntetést von maga után. Ezt a versenyeztető gondolkodásmódot ültetik a gyerekekbe is, akik a másikban nem a segítőtársat vagy „munkatársat” látják, hanem az ellenfelet, akinél jobbnak kell lenniük. Pedig alapvető cél volna az, hogy megtanuljanak egymással kommunikálni, kölcsönös segítésen alapuló kapcsolatot kialakítani társaikkal, vagy akár olyan személyekkel együtt dolgozni, akikkel esetleg különösebben nem szeretnének

Ezek az alapgondolatok természetesen a tanári szerep megváltozását is jelentik. Valamilyen szempontból kisebb, de más szempontból sokkal nagyobb részét képezi a pedagógus a tanórának. Hiszen a feladatok összeállítása, az együttműködő csoportos munka lehetővé tétele nagyobb előkészületeket igényel például a frontális órához képest, viszont a tanórán nagyobb szerepet kapnak a gyerekek. Habár látszólag csak a csoportokat kell felügyelnie és a feladatokat ismertetnie a pedagógusnak, mégis egy ilyen óra levezénylése talán sokkal nagyobb koncentrációt igényel. Itt hat-hét kiscsoport életét kell figyelemmel kísérni, segíteni nekik, ha megakadnak, azaz hat-hét felé szakadni. Viszont nem harminc felé, ami ezzel szemben könnyebbség.

A gyerekek szerepe is egészen más lesz. Nem csak befogadók, akik utána megpróbálnak egyedül megbirkózni a feladatokkal, hanem „kistanárok”, segítők, időfelelősök, szakértők lesznek, akik elengedhetetlen szereplői egy csoportnak. Így érzik azt, hogy nem mindegy, hogy mit tesznek, nem mindegy, ha nem dolgoznak, hiszen az az egész csoport munkájára kihat. Felelősség van a vállukon, amely ösztönzően hat rájuk a munkában. Mivel a csoportok teljesítményét értékelik, így mindenkinek dolgoznia kell.

2.2 Gyakorlati megvalósítás

2.2.1 Csoportok összeállítása

Egy kooperatív óra első elengedhetetlen lépése a csoportok kialakítása. Ez eleinte játékok segítségével, véletlenszerűen történik. Ám az osztály megismerése, a gyerekek matematikai tudásának, képességének feltérképezése után már érdemes tudatosan összeállítani a csoportokat. Itt kétféle szemlélettel állhatunk neki a felosztásnak: vagy heterogén csoportokkal dolgozunk, azaz mindenhova kerül jó matekos, közepes és rossz is, így a csoportok összetétele hasonló lesz, minden csoport ugyanolyan feladatokat kaphat, és várhatóan nagyjából egy tempóban halad. Illetve dolgozhatunk homogén csoportokkal, azaz az azonos képességű tanulók azonos csoportba kerülnek. Ekkor már az óránkon megjelenik a differenciálás, így a különböző csoportoknak különböző nehézségű, mennyiségű feladatot adhatunk. A Kagan-féle kooperatív módszer alapvetően heterogén csoportokkal foglalkozik, ám mindkét lehetőségnek megvannak a maga előnyei. A különböző képességű gyerekekből álló csoportok egyrészt jobban kezelhetővé teszik a tanórát, hiszen nagyjából egy tempóban haladó csoportokat – természetesen itt is lehetnek nagy eltérések – kell koordinálni, nem szükséges több feladatsort összeállítani. Valamint a gyerekek is jobban megtanulnak alkalmazkodni egymáshoz, ez a felállás leképezi a valóságot. Valamint így nem lesz még nagyobb a különbség jó és rossz matekosok között, és a jó ismerete még jobban elmélyül, ha el kell magyaráznia, a kevésbé ügyes pedig tanulhat a jótól. A homogén csoportok viszont lehetővé teszik azt, hogy differenciáljunk, de csoportmunkára is megtanítsuk a gyerekeket. Ezen felül nem húzzák vissza egymást, hanem mindenki haladhat a saját tempójában. Eleinte talán érdemesebb heterogén csoportokkal dolgozni, hiszen akkor még nem lehet olyan élesen meghatározni, hogy ki mennyire jó matekból, ráadásul egy rosszul eltalált ítélet egy életre elveheti a gyermek kedvét a számoktól. Később viszont már mindenki tisztában lehet képességeivel, láthatja, hogy mivel szeretne foglalkozni a későbbiekben (legalábbis a csapásirányt), így mindenkinek a saját szintjének megfelelő csoportra és feladatokra van szüksége, így érdemes áttérni a homogén csoportokra. De az már nem tartozik a hagyományos értelemben vett kooperatív módszerhez, hiszen az végig az egész közösségre vonatkozó feladatokkal foglalkozik.

2.2.2 Terem elrendezése

A csoportok összeállításán túl a terem elrendezése is nagyon fontos e módszernél. Lényeges, hogy a csoporton belül jól tudjanak dolgozni, a csoportok lássák egymást, és ha szükséges, akkor a tanárt is mindenki lássa. A teremben körbe elhelyezett padokkal ez remekül kivitelezhető, ahol csoportonként két-két összetolt pad körül tudnak dolgozni a gyerekek.

2.2.3 Fegyelmezés

Egy kooperatív óra talán egyik legnagyobb buktatója, hogy a gyerekek kommunikációjára, a megtárgyalásra helyezi a hangsúlyt. Viszont ugyanúgy fegyelmet vár el a tanulóktól, mint egy hagyományos órán, csak egy kicsit más keretek között. A hangzavar és a káosz veszélye különösen fenyeget, hiszen a tanár nem intheti csendre a gyerekeket, amikor az a feladat, hogy a csoporttal beszéljenek meg bizonyos fogalmakat, problémákat a tananyaggal kapcsolatban. Természetesen az sincs rendben, ha mindenki próbálja a másikat túlkiabálni. Éppen ezért az az egyik legnagyobb feladata a pedagógusnak, hogy megtanítsa a gyerekeket csendesen kommunikálni. Ehhez alapvető szabályokat kell bevezetni: például, ha a tanár felteszi a kezét, akkor, aki ezt észreveszi, az csendben marad, és szintén felemeli a kezét, így egy percen belül mindenki észleli az információt, és csend lesz. Ez nyilván hatásosabb, mint a hat csoport túlordítása. Ezen kívül fontos, hogy a tanulók tisztában legyenek azzal, hogy a csoportos óra nem azt jelenti, hogy beszélgetni lehet az órán, hanem, hogy lehetőségük van a feladatokról, fogalmakról egymást megkérdezni. Így azt is fontos tisztázni, hogy ha egy csoport megbeszélte a feltett kérdést, akkor csendben nézzenek a tanárra, hogy tudhassa, hogy ki hogy áll. Az alapszabályok betartása a legfontosabb, és egy idő után belátják a gyerekek, hogy ez nekik is érdekük.

2.2.4 A tanár szerepe, feladata

A tanár szerepe rendkívül összetett egy ilyen órán. Amellett, hogy a frontális tanórához hasonló határozottsággal kell fellépnie, fontos, hogy háttérben tudjon maradni. Azaz, ha kiosztotta az aktuális feladatokat, akkor a gyerekek annyit lássanak, hogy mindig ott van, ha segítségre van szükség, de hagyja, hogy maguk dolgozzanak, a csoportok önállóan oldják meg a problémákat. Ezen felül fontos, hogy a gyerekek ne „uralkodóként", hanem partnerként tekintsenek rá. Ehhez az szükséges, hogy mind a gyerekek, mind a pedagógus egyenrangú félként kezelje a másikat, azaz mindketten tartsák be a szabályokat.

Amellett, hogy egy ilyen óra előkészítése a hagyományoshoz képest több időt vesz igénybe, fontos, hogy a tanár minden eshetőségre figyeljen. Még ha hasonló csoportokat is állított össze, akkor is lehetnek lényeges sebességbeli különbségek, amelyekre fel kell készülni. Így fontos plusz feladatokkal felfegyverkezni, mert ha az egyik csoport unatkozik, akkor az megbéníthatja az órát, hiszen, ha nincs mivel foglalkozniuk, akkor nehezebben fegyelmezhetők.

Amellett, hogy egy-egy csoportra külön-külön figyelni kell, a csoportokon belül az egyéni teljesítményeket is fejben kell tartani. Nagyon éles szem és órai jelenlét szükséges ahhoz, hogy jól láthassuk, hogy ki mennyire veszi ki a részét a csoport munkájából: ki az, aki a hátán viszi a többieket, ki az, aki csak lemásolja az eredményeket és fogalma sincs az egészről, ki az, aki tudna dolgozni, de lusta, és hagyja, hogy a többiek megcsinálják helyette. Ha ezt a tanár nem tudja rendesen felmérni, akkor nem lesz olyan eredményes az órája.

2.2.5 Értékelés és számonkérés

A kooperatív módszer talán legnehezebb része az értékelés és a számonkérés. Hiszen míg az órákon az kapta a legnagyobb hangsúlyt, hogy együtt dolgozzanak, segítsenek a másiknak, addig egy-egy dolgozatnál éppen ennek ellenkezője a lényeg, hiszen az a fontos, hogy a saját tudásukról adjanak számot a gyerekek. A dolgozatírás mellett a csoportok értékelése is nagy hangsúlyt kap, ami szintén elősegíti a felelősségérzet kialakulását, illetve a csoporttársak teljesítményének megítélését. Egy csoport közösen is kap pontokat, amelyeket az általuk reálisnak tartott arányban kell szétosztaniuk. Ez nagyon fontos, hiszen így érzik a súlyát annak, hogy együtt dolgoznak, így nehezebb megúszni a munkát. Hiszen, ha a tanár értékeli rosszul egy tanuló teljesítményét, akkor a tanárt hibáztatja. Ha viszont a társai mondják neki, hogy nem dolgoztál jól, hátráltattál minket, nekünk kellett helyetted megoldani a feladatokat, akkor talán elgondolkodik azon, hogy a továbbiakban hogyan kéne az órához állnia.

A nagyobb számonkérések mellett az órákon folyamatosan jelen van az ellenőrzés. Ez lehet szúrópróbaszerű felszólítás, amely során egy-egy feladatara kell jól válaszolni. Az erre adott felelet az egész csoport munkáját értékeli, hiszen az volt a dolguk, hogy a csoport minden egyes tagja tudjon válaszolni a kérdésekre. Így egy idő után kénytelen lesz mindenki figyelni a feladatokra és a megoldásokra, hogy ne vívja ki csoporttársai haragját. Ezen kívül úgynevezett szakértői mozaikkal is számot adhatnak tudásukról. Ez a következőképpen zajlik: egy-egy csoportban mindenki kap egy-egy betűjelet, amely szerint össze kell gyűlniük az A-knak, B-knek, C-knek és D-knek. Betűnként oldanak meg egy nagyobb feladatot, amit utána ismertetniük kell az eredeti csoportjuknak. Itt mindenkinek nagyon figyelnie kell a saját feladatára, hiszen a többieket hátráltatja, ha nem tudja nekik elmagyarázni.

Ezeken kívül fontos, hogy ez a módszer az önállóságra, az egyéni felelősségre is nevel, így meg kell tanulniuk magukat ellenőrizni. Ez kiadott megoldókulcsokkal történik, amelynek megvan az a veszélye, hogy nem foglalkoznak vele, de egy idő után rájönnek, hogy nem kifizetődő rossz eredményt hagyni a füzetükben.

2.3 „Veszélye”

Természetesen ennek a módszernek is vannak ellenzői. A rosszallás mögött lustaság, a megszokottba való belesüppedés is állhat, de most tekintsünk el ettől a hozzáállástól, és a konstruktív kritikát nézzük!

Az egyik veszélye a módszernek, hogy a tananyag rovására mehet a gyerekek „életre tanítása”. Fontos végiggondolni, hogy egy-egy órán a módszer van a matematikáért, vagy a matematika van a módszerért. Ha a szakmai tartalom kárára történik a módszer alkalmazása, akkor lehet, hogy érdemesebb különválasztani a kettőt. A matematikai tartalom többféleképpen csorbulhat. Egyrészt előfordulhat, hogy a feladatok típusa miatt több „szervizidőre” van szükség, azaz mivel sokszor négyféle feladatot kell ismertetetni, ezért zavarossá, lassabbá válhat a feladatok kiosztása. Ezen kívül a csoportok szervezése, szétszedése is elvihet hasznos időt. A tanulás rovására válhat, hogy mivel nem a tanár diktálja, hogy mit kell írni, hanem egymásnak magyaráznak, egy-egy feladat különböző részeit csinálják, vagy más-más példát kapnak, így a füzetük nem feltétlenül lesz tisztázott, könnyebben kerülhet bele téves információ, így annak használata nehezebbé válhat.

Annak is megvan a veszélye, hogy a tanulók hátráltatják egymást, hiszen ha egy jó képességű gyerek nem haladhat a saját tempójában, akkor elveszhet a lelkesedése. Viszont olyan ritkán akad, aki annyira tisztán látna mindent, hogy ne fejlesztené az, hogy másoknak elmagyarázza az anyagot. Teljesen más megoldani egy példát, mint elmondani, hogy miért úgy kell megoldani. Így egy jó matekosnak is nagyon hasznos, ha másoknak elmagyarázhatja, hiszen az mélyíti tudását.

Ezeken felül a már említett hangzavar okozhat gondot egy-egy órán. Nagyon fontos és nehéz feladata a pedagógusnak, hogy elérje azt, hogy komolyan vegyék a csoportos órákat. Éreztetni kell velük a határokat: az, hogy szabad beszélni, nem azt jelenti, hogy ha éppen nincs feladat, akkor beszélni kell.

3. Esettanulmány

3.1 Órák bemutatása

Egy 25 fős, hetedikes osztályban öt négyfős és egy ötfős csoport dolgozott. Az órák alapvetően jó hangulatban teltek, a gyerekek aktívan részt vettek a munkában, habár néha talán túl nagy volt a hangzavar. Mivel idén kerültek a gimnáziumba, így a matematikaórák az elején inkább az ismétlésről, a hozott tudás szintre hozásáról, elmélyítéséről szóltak, amelyhez ideális volt a kooperatív módszer.

A diákoknak több típusú feladatot kellett csoportosan megbeszélniük. Először az {a, b, c} halmaz részhalmazait kellett tisztázniuk csoportonként. Itt az üres és az egész halmaz mint részhalmaz gondot okozott a legtöbb helyen. Ezt követően a metszet, unió és kivonás halmazműveleteket kellett megbeszélni és ábrázolni, majd az A={50-nél kisebb négyzetszámok} és a B={20-nál nem nagyobb, pozitív páros számok} halmazon kellett megoldani a műveleteket. Itt a négyzetszám fogalma meglepően nagy gondot okozott, de a csoportok jól működtek, egymásnak jól tudták magyarázni, hogy mi a helyes megoldás. Ez után a százalék és törtrész fogalmai következtek: mit értünk azon, hogy 3/7-ed rész, vagy 75 %, 50 %, mi a kapcsolat a két fogalom között? Itt is sokat segített, hogy egymással megbeszélhették a feladatot, nem elfogadniuk kellett, hogy hogyan működik, hanem maguktól, vagy a többiek segítségével rájöhettek. Ezt követően az említett témakörökkel kapcsolatos feladatokat már egyénileg kellett megoldaniuk a könyvből.

Egy másik órán a hatványozás azonosságaival foglalkoztak, ahol hasonlóan az előzőekhez fontos volt, hogy maguktól fejtsék meg a feladatot, próbáljanak meg magyarázatot találni a szabályosságokra, jöjjenek rá a logikájára. Itt talán több volt az egyéni, illetve páros munka, de érzékelhető, hogy ettől függetlenül így is sokat kommunikáltak a gyerekek: ha megakadtak, akkor tanácsot kértek a másiktól, és nem estek kétségbe. Ezen kívül az egyik órán a csoporton belül mindenki a saját betűjelének megfelelő feladatokat oldotta meg, és azokat ismertette csoporttársainak. Itt egy kicsit bizonytalanok voltak a gyerekek, sok volt a feladat, és nehezen tudták elmagyarázni egymásnak, illetve megérteni a másik magyarázatát, inkább csak másolták a megoldást.

3.2 Kérdőív

Az osztályból 24 gyerek töltött ki egy, a matematikaórával kapcsolatos kérdőívet. Fontos volt, hogy most érkeztek meg a régi iskolájukból, azaz volt összehasonlítási alapjuk, láthatták, hogy milyen különbség van egy frontális és egy kooperatív óra között. A kérdőív egyik részében 1-6-ig kellett osztályozniuk egy-egy kérdést, ahol az 1-es azt jelentette, hogy egyáltalán nem igaz rám, a 6-os pedig azt, hogy teljesen igaz rám.

E rész eredménye:

	1	2	3	4	5	6
1.Segített társaim magyarázata.	1	5	7	4	4	3
2. Tetszett, hogy közösen kellett dolgoznunk.			1	2	5	16
3. Zavart a nagy nyüzsgés.	3	5	1	7	2	6
4. Ha nem csoportban kellett volna dolgozni, gyorsabban haladtam volna.	10	6	3	3	1	1
5. Jobban élveztem az órát, mert csoportban dolgoztunk.			1	3	3	17
6.Jobban megértettem az anyagot, mint az előző iskolámban.		2	4	3	4	11
7. Örültem, hogy olyanokkal is beszélgettem, akikkel eddig nem sokat sikerült.			7	2	9	6
8. Kevésbé tartok a matekórától, mint ezelőtt.	2	3	2	5	4	8
9. Úgy érzem, hogy el tudnám magyarázni másoknak is ezt az anyagrészt.	1	2	6	7	5	3
10. Bátrabban mertem kérdezni a tanáromtól, mint az előző iskolámban.	1	3	1	7	3	8
11. Jobban figyeltem a matekórán és több feladatot oldottam meg, mint ezelőtt.		3	6	8	1	6
12. Otthon kevesebb gondot okozott a házi feladat, mint tavaly.	1	1	5	9	3	5

(A rubrikákban szereplő számok az adott értéket választók számát jelentik)

Az 1. kérdésre adott válaszok nagyjából egyenletesen oszlanak szét, különösebben nem mozdul el az eredmény egyik irányba sem: azaz a gyerekek fele vagy valóban nem érezte számottevőnek a többiek segítségét, vagy csak nem tudja még rendesen megítélni.

A 2. és 5. kérdésre egyértelmű válasz adódott: az első esetben 16-an, a másodikban 17-en a maximumra tettek, azaz a közös munka, a csoportok megléte a gyerekek nagy részének tetszett.

A 3. kérdésre jóval többen x-eltek a 4-es, 5-ös, 6-os mezőbe, mint annál kisebb számra, azaz, habár a csoportmunka és a közös gondolkodás sokaknak megfelelt, az ezzel járó nyüzsgés és hangzavar már kevésbé nyerte el a tetszésüket. Ez az eredmény arról árulkodik, hogy szükségük van a változatosságra, a kommunikálásra, de igénylik a munkához szükséges csendet, legfeljebb enyhe alapzajt. Ennek fényében különösen fontos a fegyelmezési alapszabályok lefektetése és szigorú betartatása, hiszen csak így lehet egy lazább, jó hangulatú órát kordában tartani.

A 4. kérdésre adott válaszok is egyértelműen a csoportmunka mellett szólnak, csupán 5-en gondolták úgy, hogy hátráltatta őket a csoport. Ez azt jelenti, hogy feltehetőleg mind a jobb, mind a rosszabb matekosok előnyösnek tartották a közös munkát, nem érezték nyűgnek a másikat.

Habár a 6. kérdés nem feltétlenül a módszerre, hanem inkább a régi és az új tanár összehasonlítására vonatkozik. De nem szabad figyelmen kívül hagyni azt, hogy a módszer a megértésre, feldolgozásra, szabályok kilogikázására ösztönzi a gyerekeket. Így bizonyára szerepe van abban, hogy csupán negyedük érezte úgy, hogy az előző iskolában jobban megértette az anyagot.

A 7. kérdés válaszai alapján közösségépítő hatása is lehet egy-egy ilyen órának, mivel a gyerekek többsége örült annak, hogy addig számunkra ismeretlen osztálytársakkal is beszélhetett. Egy-egy ilyen óra lehetőséget nyújt arra, hogy valóban kommunikáljanak egymással, és ha itt irányítottan megtanulnak feladatokat csoportban megoldani, akkor más osztályfeladatokat könnyebben véghez tudnak vinni, akár az itt látott minták alapján is.

A kooperatív módszer egyik fontos célja, hogy a gyerekek merjenek kérdezni, ne érezzék magukat butának, ha valamire nem tudják a választ, hanem keressék meg a helyes utat. Sokszor egy egész folyamatot nem tudnak megérteni, mert egy-egy apró láncszem hiányzik belőle, amelyre nem mernek rákérdezni, mert vagy nincs rá lehetőségük, vagy pedig olyan a légkör, hogy „nem illik” bármit is nem tudni. A 8. és 10. kérdésre adott válaszok alapján itt könnyebben megnyíltak, hiszen a gyerekek nagyjából háromnegyede itt inkább mert kérdezni, és kevésbé tartott a matematikaórától. Pedig köztudott, hogy ez szokott lenni az egyik „mumustárgy” a gimnáziumban.

A 9. kérdésre adott válaszok nem jelzik egyértelműen azt, hogy a módszerben hangsúlyozott szakértőségük valóban jelen volna, mindenesetre határozottan többen érzik úgy, hogy el tudnák magyarázni a tanultakat, ami egy hetedikes osztálynál különösen jó eredmény.

A 11. és 12. kérdésre nagyjából azonos válaszok érkeztek: a gyerekek több mint 2/3-a gondolja úgy, hogy jobban figyelt a matekórán és kevesebb gondot okozott a házi feladat.

A táblázatos állításokon túl kifejtős kérdésekre is választ kellett adniuk: a „Hogyan érezted magad a csoportban? Tudtatok egymásnak segíteni?” kérdésekre szinte mindenki csupa pozitívat írt. A legtöbb válaszban kifejtették, hogy nagyon élvezték, hogy csoportban dolgozhattak, és, hogy a legtöbbször tudtak egymásnak segíteni. Volt, aki kiemelte, hogy tetszett neki, hogy magyarázatokat kellett kitalálnia, hogy a többieknek is elmagyarázhatta, valaki más pedig azt írta, hogy így könnyebben megértette az anyagot. Az egy-két negatív észrevétel a hangzavarra vonatkozott, arra, hogy sokszor nem segítettek egymásnak, hanem csak fegyelmezniük kellett a másikat, illetve azt is leírták, hogy ha olyannal kell egy csoportban lenni, akit nem szeretnek, az nem olyan jó.

A „Mi tetszett és mi nem a matekórában?” kérdésre nagyon sokan leírták, hogy tetszett nekik, hogy csoportban dolgoztak. Az egyik válaszadó a kooperatív módszert nagyon jól visszaadóan ezt írta: „Az tetszik, hogy nem rögtön a szánkba rágják a megoldást, hanem adnak időt, hogy magunktól rájöjjünk. Ugyanakkor az embernek sosincs rendesen ideje elmélyedni, mert mindig kérdeznek valamit a csoporttársai, amire kötelességének érzi az ember, hogy válaszoljon.” Negatívumként többen említették a hangzavart, illetve, hogy nem tetszett nekik, hogy a hangoskodó gyerekeket nem küldték ki, valamint, hogy mások miatt nem lehetett játszani és normálisan tanulni.

Az utolsó két kérdésre – „Melyik csoportos óra tetszett? Mit tanultatok akkor?” – a legtöbben azt válaszolták, hogy nem emlékeznek, de ketten is a tablókészítést emelték ki, ketten a hatványos órát, volt, aki a halmazosat említette, más a betűjeles feladatokat, de sokan írták, hogy mindegyik nagyon tetszett nekik.

A kérdőív eredményeiből jól látszik, hogy sok folyamat már elindult a gyerekekben, de mivel még csak először találkoztak ezzel a módszerrel, és új osztályról van szó, így még nem lehet tisztán látni az eredményeket. A válaszokból és az órákon tapasztaltakból egyértelműen az szűrhető le, hogy a gyerekeknek szükségük van arra, hogy együtt dolgozhassanak, alapvetően jól érzik magukat, ha csoportban kell megoldaniuk a feladatokat. Viszont nem lételemük a hangzavar, hanem éppen ellenkezőleg, fontosnak tartják, hogy az órán meglegyen a kívánt rend.

A zömében pozitív válaszok alapján az szűrhető le, hogy egy nem annyira közkedvelt tárgy, a matematika pozitív élményként marad meg bennük, nem rettegnek az óráktól, hanem élvezik azokat. Úgy gondolom, hogy magában ez is hatalmas előrelépés, hiszen legtöbbször ezt sem sikerül elérni a gyerekeknél.

4. Példa a 7. osztályos számelmélet tananyag oktatására

4.1 Tervezet bemutatása

Önállóan összeállított tematikus tervet mutatok be, amelyben a hetedik osztályos számelmélet tananyag bizonyos óráit kooperatív módszerekkel építem fel.

Alapvetően egy hatosztályos gimnázium első évfolyamára járó diákokban gondolkodom, akik különböző általános iskolákból érkeztek, így eltérő tudással rendelkeznek. Egy 16 fős csoporttal fogok képzeletben dolgozni, akikkel az első matematikaórák egyikén járunk. Elvileg a legtöbbjüknek hatodik osztályban találkoznia kellett a következő fogalmakkal: maradék; osztó; többszörös; osztópár; közös osztó, legnagyobb közös osztó; közös többszörös, legkisebb közös többszörös; 2-vel, 5-tel, 10-zel, 4-gyel, 25-tel való oszthatóság; két szám összege, vagy egy szám többszöröse mennyit ad maradékul egy bizonyos számmal osztva; 9-cel és 3-mal való oszthatóság; prímszám, összetett szám; prímtényezős felbontás bevezetése, lnko, lkkt meghatározása ennek segítségével.

Természetesen ezeket a fogalmakat – mivel még sokan csak hatodikban találkoztak velük először, ráadásul eltérő mélységben – mindenképpen át kell ismételni a hetedikes számelmélet oktatásának bevezetésében. Ez a közös szintre hozás és a megalapozás miatt is elengedhetetlen. Ezeken felül a következők ismeretét szeretném elérni: osztó, többszörös absztraktabb megfogalmazása; oszthatósági szabályok önállóbb kitalálása /miután azelőtt elvileg hallottak róla/; nagyobb számokkal való foglalkozás, a szabályszerűségek kibővítése; már nem csak szabályok kimondása, hanem némelyek bebizonyítása is; prímfogalom mélyítése: prímtényezők használata az osztók felírásában is, szabályszerűségekre való rávezetés ennek segítségével; relatív prím fogalom bevezetése.

Az órákon a természetes számok körében dolgozunk.

4.2 Óravázlatok

4.2.1 Tematika:

1. óra: játékos bevezetés

2. óra: fogalmak pontosítása, leírása, mindegyikre példa

3. óra: osztópárok, osztók

4. óra: 2-vel, 5-tel, 10-zel való oszthatóság, szabály kimondása, bizonyítása, 100-zal való oszthatóság

5. óra: oszthatósági szabályok folytatása: 8, 125, 40, 200, 250, 500, majd: 3-as, 9-es oszthatóság, 6-tal való oszthatóság

6. óra: prímek, összetett számok, prímfelbontás

7. óra: prímtényező és osztó, lnko, lkkt, módszer

Ezen órák közül az elsőt, a harmadikat és a hatodikat fogom részletesen leírni.

4.2.2 1. óra – Bevezetés

Mivel még új számukra a csoport és az iskola, így indokolt a játékosabb bevezetés. Az első óra alapvető célja a fogalmak felelevenítése, illetve azok játékos használata. A padok eltolásával alakítjuk ki a teret.

1. feladat: *kicsi-nagy körök – a diákoknak a teremben járkálva kell majd egy-egy adott szám hallatán annyi fős körökbe állni, amennyi az elhangzott szám. A kimaradó emberek pedig a maradék kört alkotják. A következő számok hangoznak el: 4, 2, 6, 8, 5. Minden egyes számnál hangosan értékeljük, hogy hány kört alkottak, és a maradék körben hányan vannak. Kérdések: ha 30-an lennénk, akkor hány fős köröket tudnánk csinálni úgy, hogy senki sem marad ki? 16 fő esetén milyen számnál marad ki két ember?*

Hiba lehet, hogy nagy számoknál nem veszik észre, ha többen vannak egy csoportban. Ilyenkor az ellenőrzésnél kell őket rávezetni a hibájukra.

2. feladat: *csoportosulások – Jobbra álljon, aki páratlan napon született, balra, aki pároson! Alakítsatok ki négy csoportot, az ablakhoz legközelebb azok álljanak, akiknek a cipőméretük 0-át ad maradékul 4-gyel osztva, mellettük, akiknek 1-et, utána, akiknek 2-t és az ajtóhoz legközelebb, akiknek 3-at. Álljatok be növekvő sorba, aszerint, hogy kinek hány testvére van! Majd lépjen egyet előre az, akinek osztható 3-mal, és egyet hátra, akinek 2-t ad maradékul 3-mal osztva a testvéreinek száma.*

Bármilyen hasonló tulajdonságra rákérdezhetünk, és ezzel kicsit játékosan elevenítjük fel a maradék fogalmát. Fontos, hogy ellenőrizzük, hogy jó helyen állnak-e. Erre megkérhetünk minden csoportból egy embert, hogy mondja végig, hogy kik állnak ott, és, hogy jó helyen állnak-e. Gondot okozhat, ha valakinek 0 testvére van, így azt külön tudjuk itt tisztázni, hogy a 0 minden számmal osztható.

3. feladat: *osztópárba állás*

A következő számkártyákat osztom ki nekik:

3•_=24; _•8=24; 4•_=24; _•6=24; 4•_=32; _•8=32; 2•_=32; _•16=32; 5•_=30; _•6=30; 1•_=30; _•30=30; 3•_=27; _•9=27; 12•_=36; _•3=36.

Mindenkinek ki kell találnia, hogy mi lehet a hiányzó szám és utána meg kell keresnie a párját, azaz azt a társát akinek a hiányzó elem kitöltése után ugyanaz szerepel a számkártyáján. Utána az azonos eredménnyel rendelkező párok keressék meg egymást! Az így kialakult csapatok/párok beszéljék meg, hogy a kártyákon szereplő szorzatokon kívül hogyan lehet még felbontani az adott számot!
Megoldás
24=3•8=4•6; hiányzó párok: 24=1•24=2•12
32=4•8=2•16; hiányzó pár: 32=1•32
30=5•6=1•30; hiányzó párok: 30=2•15=3•10
27=3•9; hiányzó pár: 27=1•27
36=12•3; hiányzó párok: 36=1•36=2•18=4•9=6•6

Minden csoportból választhatunk ismét egy szóvivőt, aki elmondja, hogy milyen osztópárjaik vannak, és, hogy melyik párok hiányoztak. A többi csoportnak ellenőrizni kell őket. Mivel az osztópárok és a többfajta felbontások megelevenednek, így talán jobban megmaradnak bennük ezek a fogalmak.

4. feladat: *Osztók felkutatása*
A következő számkártyákat kapják meg a gyerekek:

1. $5x-90=4x-70$; $x=?$ /mo.: $x=20$/
2. $11\cdot 3^3:3=?$ /mo.:99/
3. $50-x=6^0$; $x=?$ /mo.: $x=49$/
4. $(\sqrt{16})\cdot\frac{1}{2}=?$ /mo.:2/
5. $3x+4=2x+8$; $x=?$ /mo.: $x=4$/
6. $5x=5^2$; $x=?$ /mo.: $x=5$/
7. $9\cdot(5-3+2)-(4-10)-8\cdot 4=?$ /mo.:10/
8. $\{6\cdot 4-22+8\cdot(-2)+17\}^2=?$ /mo.:9/
9. $2x+8=90:3$; $x=?$ /mo.: $x=11$/
10. $x^3=27$; $x=?$ /mo.: $x=3$/
11. $x/11+7=10$; $x=?$ /mo.: $x=33$/
12. $7x+1=50$; $x=?$ /mo.: $x=7$/
13. $(x/3)\cdot 5-2=28$; $x=?$ /mo.: $x=18$/
14. $2x-7=3\cdot 7$; $x=?$ /mo.: $x=14$/
15. $\{72-(8-4+3)\cdot 3+3\}/9=?$ /mo.:6/
16. $4x+20=2x+36$; $x=?$ /mo.: $x=8$/

Az 1. kártyát kapó gyerek álljon a tábla jobb oldalára, a 2. a közepére, a 3. pedig a bal szélére, és sorra írják fel a számaikat: 20, 99, 49. A többiek pedig keressék meg, hogy melyik számnak osztója az ő értékük, és álljanak hozzá! Az így kialakult csoportok írják fel a táblára azokat a számokat is az eredeti alá, majd beszéljék meg, hogy mely osztók maradtak ki, és hogy összesen hány osztója van az adott számnak! Majd minden csoportból az egyikük elmondja a megoldásukat, a többi csoportnak pedig ellenőriznie kell. Akik egyik számnak sem osztóik (6, 8, 14, 18), ők a saját számaiknak többszörösöket keresnek, és azokat mondják el.

Megoldás
20 kártyákon szereplő osztói: 2, 4, 5, 10; kártyákon nem szereplő osztói: 1, 20; osztók száma: 6.
99 kártyákon szereplő osztói: 3, 9, 11, 33; kártyákon nem szereplő osztói: 1, 99; osztók száma: 6.
49 kártyákon szereplő osztói: 7; kártyákon nem szereplő osztói: 1, 49; osztók száma: 3.
6 lehetséges többszöröse például: 12, 18, 24 stb.
8 lehetséges többszöröse például: 16, 24, 32 stb.
14 lehetséges többszöröse például: 28, 42, 56 stb.
18 lehetséges többszöröse például: 36, 54, 72 stb.

Hibaforrás lehet, hogy a számot és az 1-et nem veszik osztónak. Fontos, hogy erre rávezessük őket!

5. feladat: *közös osztók*

Ezek piros lapon szerepelnek:

1. 12+_=30
2. _+18=30
3. 60:_=4
4. _:15=4
5. 63-_=21
6. _-42=21
7. 16+_=48
8. _+32=48

Ezek pedig sárgán:

1. 5x+9=3•13; x=? /mo.: x=6/
2. x^3=125; x=? /mo.: x=5/
3. 4x/3=2x-10; x=? /mo.: x=15/
4. {8•9-2+4•(-4)}/9+1=? /mo.:7/
5. 50=(x-11) •5;x=?/mo.: x=21/
6. x^3=64; x=? /mo.: x=4/

7. {7+24-3•(-2)+2}/3-5=? *8. x/4+2=x-10 /mo.: x=16/*

/mo.:8/

A piros kártyát kapó gyerekek keressék meg a párjukat, azaz azt a társukat, akinek a hiányzó elem kitöltése után ugyanaz szerepel a számkártyáján, és írják fel mindketten azt a számot, ami a kártyájukról hiányzik. A sárga kártyások pedig keressék meg azt a párost, amelyiknek mindkét tagját osztják. Így alakulnak ki kisebb-nagyobb csoportok. Minden csoport írja fel a két szám összes közös osztóját, és karikázzák be a legnagyobbat és a legkisebbet. Majd minden csoport írjon fel egy olyan számot, amelyiknek mindkét eredeti szám osztója. Lehetőleg a legkisebbet keressék meg! Utána egy-egy kijelölt szószóló mondja el, hogy az ő csoportjuk mire jutott.

Megoldás

12 és 18: kártyákon szereplő közös osztóik: 6; kártyákon nem szereplő közös osztóik: 1, 2, 3. Legnagyobb: 6, legkisebb: 1. Legkisebb közös többszörös: 36.

60 és 15: : kártyákon szereplő közös osztóik: 5, 15; kártyákon nem szereplő közös osztóik: 1, 3. Legnagyobb: 15, legkisebb: 1. Legkisebb közös többszörös: 60.

63 és 42: kártyákon szereplő közös osztóik: 7, 21; kártyákon nem szereplő közös osztóik: 1, 3. Legnagyobb: 21, legkisebb: 1. Legkisebb közös többszörös: 126.

16 és 32: kártyákon szereplő közös osztóik: 4, 8, 16; kártyákon nem szereplő közös osztóik: 1, 2. Legnagyobb: 16, legkisebb: 1. Legkisebb közös többszörös: 32.

Itt is hibaforrás lehet, ha az egyet kihagyják, illetve a 60, 15 párosnál és a 16, 32 párosnál nem a 60-at, illetve nem a 32-t találják meg a legkisebb közös többszörösnek. Ez a feladat segít feleleveníteni, hogy az 1 minden szám osztója. Illetve a közös osztó, közös többszörös fogalma újra előkerül, mindenhol lehet az osztályt kérdezni, hogy sikerült-e megtalálnia az adott csoportnak a legkisebb közös többszöröst.

4.2.3 3. óra – osztópárok, osztók

Már állandó, négyfős, heterogén csoportokban dolgoznak. Minden csoportnak van egy száma, és minden gyereknek egy betűjele.

1. feladat – Totó

Csoportokban dolgoznak, először meg kell oldaniuk a feladatot, utána pedig minden kérdéshez kihúzzuk, hogy melyik csoportból melyik betűvel rendelkező diák mondja a választ.

	1	*2*	*x*
1. Tudjuk egy számról, hogy osztható 6-tal. Osztható-e 2-vel is?	*Igen.*	*Lehetséges.*	*Nem.*
2. Tudjuk egy számról, hogy osztható 3-mal és 6-tal. Osztható-e 18-cal is?	*Igen.*	*Lehetséges.*	*Nem.*
3. Egy kétjegyű szám utolsó számjegye 8. Ekkor:	*Biztos, hogy osztható 4-gyel.*	*Lehet, hogy osztható 4-gyel.*	*Biztos, hogy nem osztható 4-gyel.*
4. A 28-nak…	*4 osztója van.*	*5 osztója van.*	*6 osztója van.*
5. Két szám 3-mal osztva ugyanannyit ad maradékul. Az összegük…	*Biztosan osztható 3-mal.*	*Lehet, de nem biztos hogy osztható 3-mal.*	*Biztos, hogy nem osztható 3-mal.*

Megoldás:

	Megoldás
1. Tudjuk egy számról, hogy osztható 6-tal. Osztható-e 2-vel is?	*Igen, hiszen a 6 is osztható 2-vel, 6=2•3.*
2. Tudjuk egy számról, hogy osztható 3-mal és 6-tal. Osztható-e 18-cal is?	*Nem, például a 12 osztható 3-mal és 6-tal is, de 18-cal nem.*
3. Egy kétjegyű szám utolsó számjegye 8. Ekkor:	*Lehet, hogy osztható 4-gyel. Ellenpélda: 18 nem osztható 4-gyel. Mellette példa: 28 osztható 4-gyel.*
4. A 28-nak…	*6 osztója van: 1, 2, 4, 7, 14, 28.*
5. Két szám 3-mal osztva ugyanannyit ad maradékul, Az összegük…	*Lehet, de nem biztos, hogy osztható 3-mal. Ellenpélda: 4+7=11 nem osztható 3-mal. Mellette példa: 6+9=15 osztható 3-mal..*

Ez a feladat teljesen alkalmas arra, hogy négyesével megvitassák a kérdéseket. Mivel mindenki hozzá tud szólni, tudnak példákat, ellenpéldákat hozni egymásnak, és ami nagyon fontos: érvekkel kell meggyőzniük a csapattársaikat az igazukról. Mindenkinek egy véleményen kell lennie, és mindenkinek tudnia kell, hogy miért azt a választ választották. A gyengébb diákoknak segíthetnek a jobbak, a jobbak pedig rengeteget fejlődhetnek egy-egy magyarázat gyártásával. Illetve fejleszti a számelméleti gondolkodásukat, és az oszthatóság fogalmát kicsit jobban tudják kezelni ezután.

2. feladat: (Apáczai Kiadó, Matematika Tankönyv, 7. osztály, II. Kötet)

A büfében a következő áruk kaphatók:

Pogácsa – 52 Ft, Kakaós csiga – 65 Ft, Szalámis zsemle 98 Ft, Süti – 67 Ft, Torta – 84 Ft, Kókuszos rúd – 46 Ft, Kis üdítő – 48 Ft, Nagy üdítő – 64 Ft.

a) Két dolgot vettem, és a fizetett összeg osztható volt hárommal.

b) Három dolgot vettem, és a fizetett összeg osztható volt hárommal.

c) Két dolgot vettem, és a fizetett összeg osztható volt 6-tal.

Megoldás

3-mal osztva 0 maradékot adnak: Torta, Kis üditő.

3-mal osztva 1 maradékot adnak: Pogácsa, Süti, Kókuszos rúd, Nagy üditő.

3-mal osztva 2 maradékot adnak: Kakaós csiga, Szalámis zsemle.

A következőkben csupán a maradékot fogom jelölni, azon belül bármelyik árut lehet választani:

a) 0+0; 2+1

b) 1+1+1; 0+1+2

6-tal osztva 0 maradékot adnak: Torta, Nagy üdítő.

6-tal osztva 1 maradékot ad: Süti.

6-tal osztva 2 maradékot ad: Szalámis zsemle.

6-tal osztva 4 maradékot adnak: Pogácsa, Kókuszos rúd, Nagy üdítő.

6-tal osztva 5 maradékot ad: Kakaós csiga.

c) 0+0; 1+5; 2+4.

Itt is hasonlóan az előző feladathoz, csoportokban kell kitalálniuk, hogy miket vásárolnának. Utána pedig egy számot és egy betűt kihúzva egy-egy részt egy-egy kisorsolt gyereknek kell elmondania, így tényleg mindenkinek figyelnie kell a csapat megoldására. Ha a többiek mást találtak, akkor azt is meghallgatjuk, és a többi csapatnak kell eldöntenie, hogy az a megoldás helyes-e. A feladat a kombinációs készségüket segíti. Valószínűleg adódik olyan csapat, aki egy idő után csak a maradékokkal számolt, nem az egész számmal. Ilyenkor őket mindenképpen megkérem arra, hogy magyarázzák el a többieknek, hogy hogyan oldották meg a feladatot. Ha nincs ilyen, akkor pedig én vezetem rá őket a következő kérdésekkel: Hogy lehet a leggyorsabban megoldania feladatot? Mi lett volna, ha hatalmas számokat mondok, amelyek összeadása rengeteg időbe telik?

3. feladat (Apáczai Kiadó, Matematika Tankönyv, 7. osztály, II. Kötet)

Keresd a párját! (k, l, m , n, p és q pozitív egészek)

a) 7k b) 3l+2 c) 5n+4 d) 5m e) 3k+6l

f) (5p+1)+(5q+4) g) 5n+2n h) (3m+1)+(3k+2)

A) Osztható 7-tel B) osztható 3-mal C) A 3-as maradéka 2 D) 5-tel osztható

E) 5-tel osztva 4 maradékot ad

Megoldás:

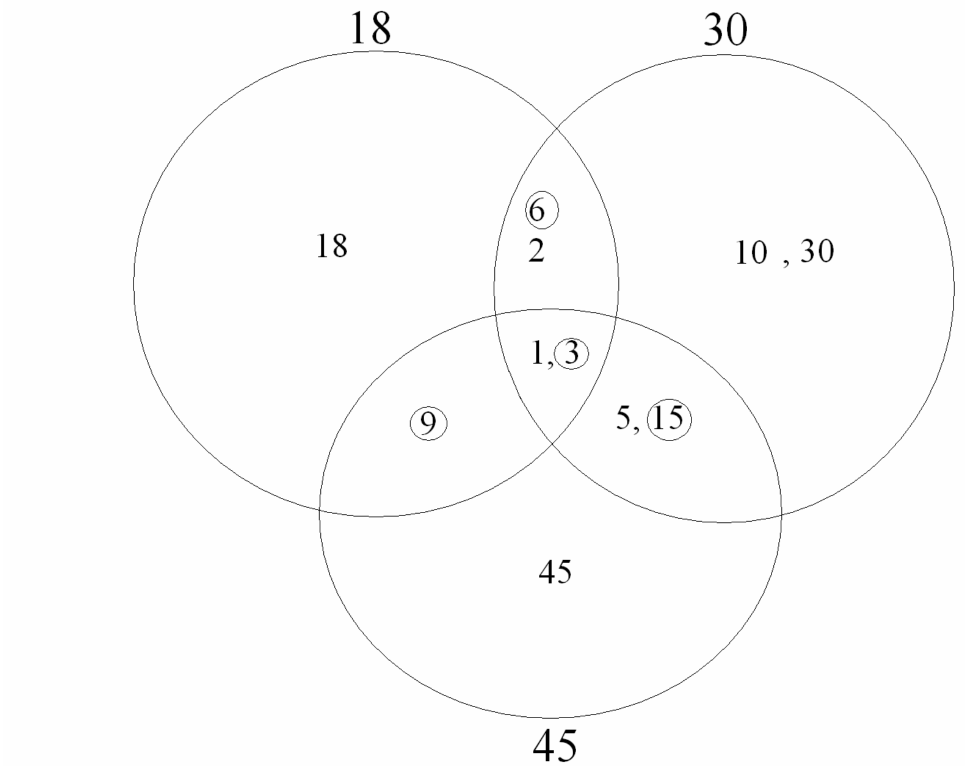
a – A, b – C, c – E, d – D, e – B, f – D, g – A, h – B.

Párokban kell megoldaniuk a feladatot, majd a csoport két párja füzetet cserél egymással, és a párok ellenőrzik a másik pár munkáját. Vitás kérdés esetén csoporton belül megbeszélik, fontos, hogy a csoport egységes véleményt alakítson ki. Az ellenőrzésnél hasonlóan az eddigiekhez egy betű és egy szám kihúzásával szólítok fel gyerekeket, akiknek meg kell indokolniuk a válaszukat. A feladat célja, hogy általánosabban, a matematika nyelvén megfogalmazott tulajdonságokat is tudják kezelni, ne ijedjenek meg a betűktől. A fogalmak pontosításánál az ezt megelőző órán már használtuk ezeket a betűket, így nem teljesen idegen. Viszont általános iskolában még nem igazán találkoznak ezzel, így ez az egyik fontos lépés a 7. osztályban. Arra lehet buzdítani őket, hogy mindig konkrét számokkal próbáljanak ki egy-egy kifejezést.

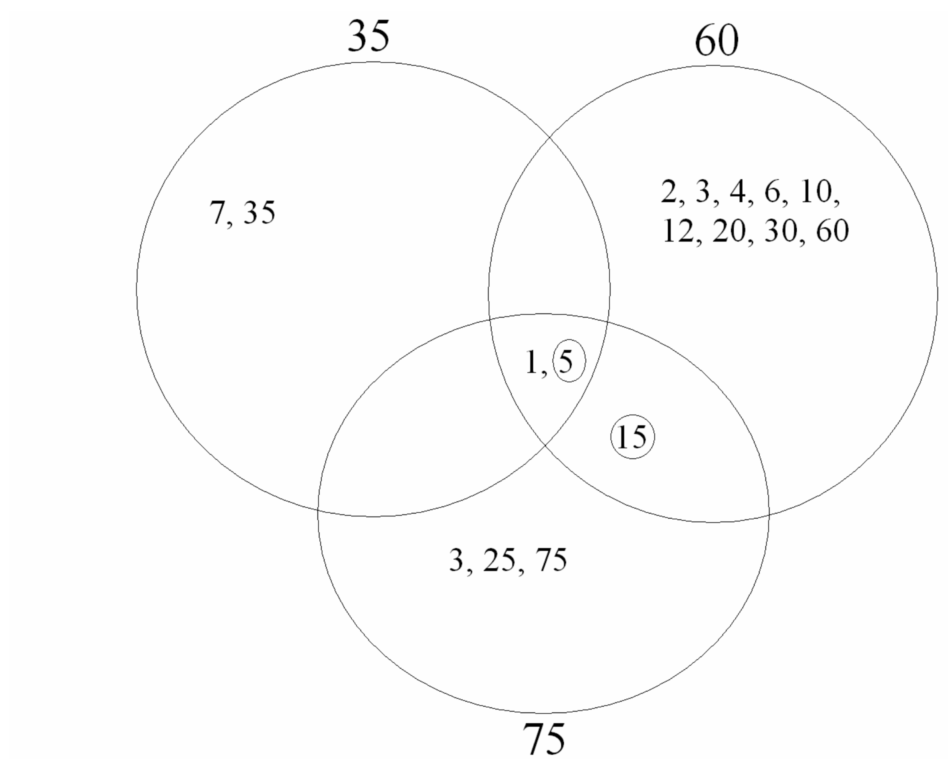
4. feladat – plakát készítése

Csoportonként 3-3 különböző szám osztóit kell egy nagy papírra halmazábrán szemléltetniük. A halmazok metszeteiben az adott számok közös osztói szerepelnek. Minden metszetben be kell karikázniuk a legnagyobbat! Minden ábra mellé írják oda, hogy melyik számnak hány osztója van, két-két számnak melyik a legnagyobb közös osztója és a három számnak együtt mennyi a legnagyobb közös osztója!

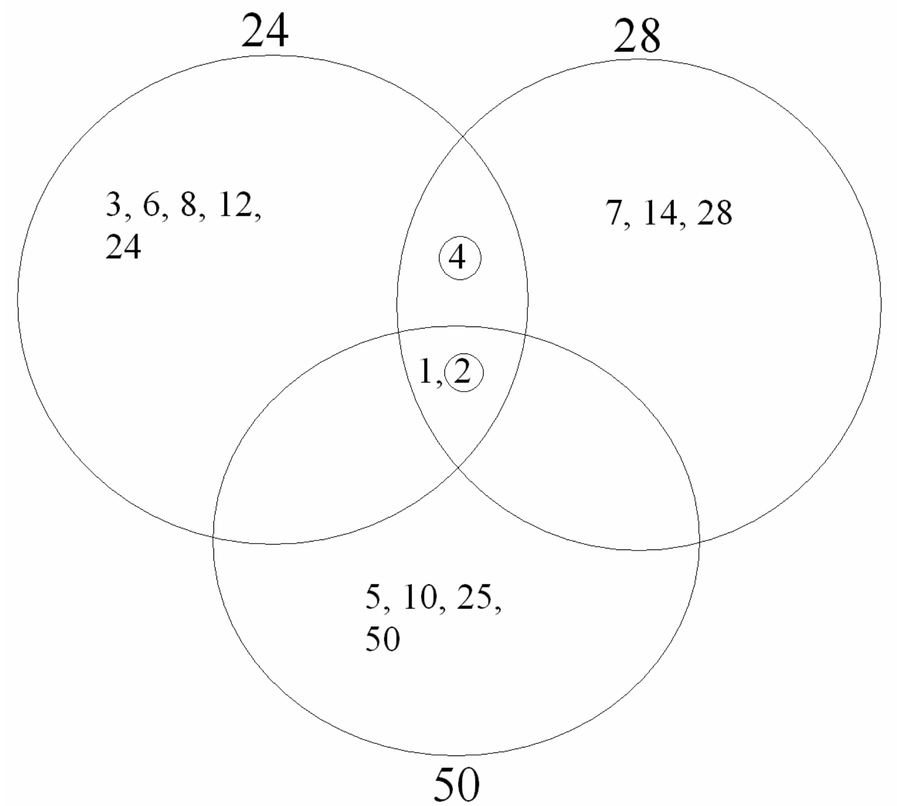
1. csoport: 18, 30, 45



2. csoport: 35, 60, 75



3. csoport: 24, 28, 50



Megoldás:

1. csoport: osztók száma: 18 – 6 db, 30 – 8 db, 45 – 6 db. (18;30)=6, (18;45)=9, (30;45)=15, (18;30;45)=3.

2. csoport: osztók száma: 35- 4db, 60 – 12db, 75 – 6 db, (35;60)=5, (35;75)=5, (60;75)=15, (35;60;75)=5.

3. csoport: osztók száma: 24 – 8 db, 28 – 6 db, 50 – 6 db. (24;28)=4, (24;50)=2, (28;50)=2, (24;28;50)=2.

Miután elkészültek vele, betűnként összegyűlnek, és végigjárják az összes plakátot. Az adott plakátnál mindig az a diák magyaráz, aki részt vett a plakát készítésében.

A közös osztó fogalom megelevenedik számukra, így jobban a „magukévá tudják tenni”. Láthatják, hogy három szám (legnagyobb) közös osztójáról is szó lehet. Hibaforrás, hogy az egyet és a számot magát nem jelölik. Itt is mindenki „rákényszerül” arra, hogy figyeljen, hiszen utána el kell magyaráznia a többieknek.

Házi feladat: (Apáczai Kiadó, Matematika Tankönyv, 7. osztály, II. Kötet)

A feladott négy feladatból mindenkinek hármat kell kiválasztania.

1. feladat

Sorold fel a következő számok összes osztópárját! Melyik számnak hány osztója van?

a) 10   b) 24   c) 36   d) 60

2. feladat

Írd be a táblázat megfelelő helyére a kártyákon levő betűket!

A 2·5·11   B 11+11+11   C (2+4+6) ·11   D 6·11+3

E 10·11·12   F 5·9+3·4   G 2+5+11   H 10+11+12

	Páros	Osztható 10-zel	11-nek többszöröse	Többszöröse a 3-nak	3-as maradéka 1
Igaz					
Hamis					

3. feladat

Döntsd el, hogy melyik állítás igaz és melyik hamis! Válaszodat indokold!

a) Minden 6-tal osztható szám osztható 3-mal.

b) Nincs olyan 3-mal osztható szám, ami 6-tal is osztható lenne.

c) Két 3-mal osztható szám összege osztható 6-tal.

d) Ha egy szám 3-mal osztva egy maradékot ad, akkor 6-tal osztva is egy a maradék.

e) Ha egy szám 6-tal osztva 1 maradékot ad, akkor 3-mal osztva is 1 a maradék.

4. feladat

Egy számhoz hozzáadjuk annak 3-szorosát és 9-szeresét is. Mutasd meg, hogy így biztosan 13-mal osztható számot kapunk! Mi lehetett a kiindulási szám, ha az összeg 1131?

Megoldások, megjegyzések

1.feladat

Sorold fel a következő számok összes osztópárját! Melyik számnak hány osztója van?

Megoldás

a) $10 = 1 \cdot 10 = 2 \cdot 5$ – osztók száma: 4

b) $24 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$ – osztók száma: 8

c) $36 = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6$ – osztók száma: 9

d) $60 = 1 \cdot 60 = 2 \cdot 30 = 3 \cdot 20 = 4 \cdot 15 = 5 \cdot 12 = 6 \cdot 10$ – osztók száma: 12

Megjegyzés

Azért szántam elsőnek ezt a feladatot, mert mechanikusan kéri számon az órán tanultakat, nem kell hozzá semmilyen különleges ötlet, így mindenki meg tudja csinálni. Viszont megmozgatja a diákok agyát, utána kell gondolni, osztani-szorozni kell. Az osztók megszámolásával pedig bevezetjük a későbbi szabályokat. Mivel egy négyzetszám is szerepel köztük, így az órán, amikor megbeszéljük a feladatot, megtárgyalhatjuk, hogy mit vettek észre, vajon miért csak a 36-nak van páratlan számú osztója. Hibalehetőség, hogy nem írják fel az egyszeres párokat, illetve, hogy néhány esetet kétszer vesznek.

2. feladat

Írd be a táblázat megfelelő helyére a kártyákon levő betűket!

Megoldás

A $2 \cdot 5 \cdot 11 = 110$ B $11+11+11 = 33$ C $(2+4+6) \cdot 11 = 132$ D $6 \cdot 11+3 = 69$

E $10 \cdot 11 \cdot 12 = 1320$ F $5 \cdot 9+3 \cdot 4 = 57$ G $2+5+11 = 18$ H $10+11+12 = 33$

	Páros	Osztható 10-zel	11-nek többszöröse	Többszöröse a 3-nak	3-as maradéka 1
Igaz	A, C, E, G	A, E	A, B, C, E, H	B, C, D, E, F, G, H	
Hamis	B, D, F, H	B, C, D, F, G, H	D, F, G	A	A, B, C, D, E, F, G, H

Megjegyzés

A feladat első kihívása, hogy az adott betűkhöz tartozó értékeket jól számolják ki, vagy rájöjjenek, hogy nem mindenhol érdemes beszorozni. Esetleg ezt érdemes az órán kiszámolni és leellenőrizni, hogy ne ezen múljon a házi feladatuk. Az összezavarhatja őket, ha a saját számukkal jól gondolkodtak, mégis rossz az eredményük, mert ez azt rögzítheti bennük, hogy rosszul gondolkodtak a feladat másik részében is.

A feladat második részéhez nem szükséges különösebb ötlet, inkább figyelmesség és pontosság kell. Ezért gondoltam arra, hogy ez alkalmas lehet másodiknak. Ez jó bevezetése az oszthatósági szabályoknak, hiszen egyrészt így értékelni fogják, hogy adunk egy gyorsabb módszert a kezükbe, másrészt pár szabályra maguk is ráébredhetnek (2-vel, 10-zel való oszthatóság). Ami probléma lehet, az az utolsó rubrika. Hiszen ott egyik sem kerül az igaz kategóriába, és ez gyanús lehet a gyerekeknek, azt gondolhatják, hogy valamit elrontottak.

3. feladat

Döntsd el, hogy melyik állítás igaz, és melyik hamis! Válaszodat indokold!

<u>Megoldás</u>

a) Minden 6-tal osztható szám osztható 3-mal. *Ez igaz, hiszen egy szám akkor osztható 6-tal, ha 3-mal is osztható. Vagy: a 6 osztható 3-mal, így a 6 többszörösei is oszthatók 3-mal.*

b) Nincs olyan 3-mal osztható szám, ami 6-tal is osztható lenne. *Nem igaz. Ellenpélda: 6, 12…*

c) Két 3-mal osztható szám összege osztható 6-tal. *Nem igaz. Ellenpélda: 6+3=9…*

d) Ha egy szám 3-mal osztva egy maradékot ad, akkor 6-tal osztva is egy a maradék. *Nem igaz. Ellenpélda: a 10 3-mal osztva 1 maradékot ad, de 6-tal osztva 4-et.*

e) Ha egy szám 6-tal osztva 1 maradékot ad, akkor 3-mal osztva is 1 a maradék. *Igaz. Hiszen a 6-tal osztható számok 3-mal is oszthatók, így ha egyet ad maradékul 6-tal osztva, akkor 3-mal osztva is. (Fordítva azért nem igaz, mert nem minden 3-mal osztható szám osztható 6-tal is.)*

<u>Megjegyzés</u>

Ez már egy fokkal nehezebb feladat, hiszen általánosságban kell gondolkodni. Az első három meghatározás viszonylag egyszerűbb, kisebb gondot okozhat. Az a fontos, hogy mindenki elmondhassa az indoklását, és hogy biztosak legyünk abban, hogy mindenki érti-e a megoldást. Az utolsó kettőnél már lehetnek gondjaik. Az egész feladatnál, az utolsó két pontnál pedig különösen, azt tanácsolhatjuk, hogy próbálják ki konkrét számokon. Ha találnak olyat, amelyikre nem igaz, akkor az állítás sem igaz. Viszont ha nagyon sokfélét megnéztek, de nem találtak olyat, ami ellenpélda lenne, az nem azt jelenti, hogy az állítás igaz. Próbáljanak meg általánosan gondolkodni! A megoldásokat felírhatjuk absztrakt módon is, hiszen a hetedikes számelmélet anyag egyik fő feladata, hogy általánosabban, absztrakt módon is értelmezni tudják a szabályosságokat.

4. feladat

Egy számhoz hozzáadjuk annak 3-szorosát és 9-szeresét is. Mutasd meg, hogy így biztosan 13-mal osztható számot kapunk! Mi lehetett a kiindulási szám, ha az összeg 1131?

Megoldás

$x+3x+9x = 13x$ – ez mindig osztható 13-mal, hiszen egy szám 13-szorosa.

$13x = 1131 \qquad x = 87$

Ell.: $87+261+783 = 1131$

Megjegyzés

Ez már egy nehezebb feladat, hiszen ha valaki még nem csinált ilyen jellegű feladatot, akkor nehezebben tud nekiállni. De lehet azt tanácsolni nekik, mielőtt elkezdenek gondolkodni, hogy próbálják ki konkrét számokon ezt a műveletet, és vizsgálják meg a kapott eredményt. Így rájöhetnek a szabályosságra egy idő után.

4.2.4 6. óra – prímek, összetett számok, prímfelbontás

1. feladat – ismétlőkérdések

A következő kártyákat kapják meg a diákok:

1. 3a45; a=? a) osztható legyen 3-mal, b) osztható legyen 9-cel

Megoldás: a) a=0, 3, 6, 9. b) a= 6.

2. a256; a=? a) osztható legyen 4-gyel, b) osztható legyen 3-mal

Megoldás: a) a=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. b) a= 2, 5, 8.

3. 812b; b=? a) osztható legyen 8-cal

Megoldás: a) b=0, 8.

4. 91ab+3124; a,b=? a) osztható legyen 100-zal

Megoldás: a) a= 7, b=6.

5. 44a5; a=? a) osztható legyen 3-mal, b) osztható legyen 9-cel

Megoldás: a) a=2, 5, 8. b) a= 5.

6. 348a; a=? a) osztható legyen 6-tal

Megoldás: a) a=0, 6.

7. 8abc+3220; a,b,c=? a) osztható legyen 1000-rel

Megoldás: a) a=7, b=8, c=0.

8. 67a8; a=? a) osztható legyen 3-mal, b) osztható legyen 9-cel

Megoldás: a) a=0, 3, 6, 9. b) a= 6.

9. 2abc+3113; a,b,c=? a) osztható legyen 1000-rel

Megoldás: a) a=8, b=8, c=7.

10. a123; a=? a) osztható legyen 3-mal, b) osztható legyen 9-cel

Megoldás: a) a=3, 6, 9. b) a= 3.

11. 4a47; a=? a) osztható legyen 3-mal, b) osztható legyen 9-cel

Megoldás: a) a=0, 3, 6, 9. b) a= 3.

12. 11a2; a=? a) osztható legyen 4-gyel, b) osztható legyen 3-mal

Megoldás: a) a=1, 3, 5, 7, 9. b) a= 2, 5, 8.

13. 31b2; b=? a) osztható legyen 8-cal

Megoldás: a) b=1, 5, 9.

14. 54ab+7824; a,b=? a) osztható legyen 100-zal

Megoldás: a) a=7, b=6.

15. 34a7; a=? a) osztható legyen 3-mal, b) osztható legyen 9-cel

Megoldás: a) a=1, 4, 7. b) a= 4.

16. 158a; a=? a) osztható legyen 6-tal

Megoldás: a) a=4.

A kártyák hátulján szerepel a feladat megoldása. Párokban egymást kérdezik, majd ellenőrzik.

Az előző órákon tanultak játékos átismétlése, a szabályok felelevenítése. Miután a párok végeztek, véletlenszerűen néhány párt felszólítok, akik elmondják, hogy mi volt a feladatuk, mi a jó megoldás, és, hogy miért azok a helyesek.

2. feladat – osztók száma

Minden csoport írja fel a következő számok osztóit, és osztóinak számát:

1. csoport: 1, 5, 9, 13

2. csoport: 2, 6, 10, 14

3. csoport: 3, 7, 11, 15

4. csoport: 4, 8, 12, 16

Amikor végeztek, akkor sorsolással kiválasztom, hogy melyik csoportból melyik betűjelű diák írja fel a táblára a megoldást. Egy közös táblázatban szemléltetjük ezt:

Szám	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Osztók	1	1, 2	1, 3	1, 2, 4	1, 5	1, 2, 3, 6	1, 7	1, 2, 4, 8	1, 3, 9
Osztók száma	1	2	2	3	2	4	2	4	3

Szám	10	11	12	13	14	15	16
Osztók	1, 2, 5, 10	1, 11	1, 2, 3, 4, 6, 12	1, 13	1, 2, 7, 14	1, 3, 5, 15	1, 2, 4, 8, 16
Osztók száma	4	2	6	2	4	4	5

Kérdések:

Mely számoknak van: 1 osztója? 1

2 osztója? 2, 3, 5, 7, 11, 13

3 osztója? 4, 9

4 osztója? 6, 8, 10, 14, 15

5 osztója? 16

6 osztója? 12

Páratlan számú osztója? 1, 4, 9, 16

Azokat a pozitív egész számokat, amelyeknek pontosan két különböző pozitív egész osztója van, prímszámoknak nevezzük. Azaz itt: 2, 3, 5, 7, 11, 13.

Azokat a pozitív egész számokat, amelyeknek 3 vagy annál több különböző pozitív egész osztója van, összetett számoknak nevezzük.

Tehát az 1 se nem prím, se nem összetett szám, hiszen csupán egy pozitív egész osztója van .

3. feladat – prímtéglák (Apáczai Kiadó, Matematika Tankönyv, 7. osztály, II. Kötet)

A számokat prímtéglákból építhetjük fel, ahol az összetapasztó malter a szorzás. A következő prímtégláink vannak:

2	2	3	5	5	5
5	7	7	11	13	41

Építsünk ezekből a prímekből szorzással olyan számokat, amelyek:

a) 3-mal oszthatók *b) 10-zel oszthatók*

c) 6-tal oszthatók *d) négyzetszámok*

d) 24-gyel oszthatók!

A csoportok megkapják ezeket a papírból kivágott prímtéglákat, így valóban „építkezhetnek”, egyiküknek kell lejegyezni a megoldásokat, másikuk felelős az időtartásért, harmadikuk nyúlhat a téglákhoz, negyedikük pedig a csendfelelős. Miután mindenki legalább egy példát írt az összes részhez, vagy megindokolta, hogy miért nincs megoldása, a lapot, amelyre jegyzeteltek – természetesen a füzetük mellett –, az eggyel balra lévő csoportnak kell odaadniuk. Utána következik a megbeszélés: szokásos módon húzok egy betűt és egy számot, viszont a másik csoport megoldását kell felolvasni, és a felolvasónak el kell döntenie, hogy helyes vagy sem a megoldás.

A feladat jó bevezetése a prímfelbontásnak, hiszen itt az alapkövekből indulunk ki, és nem visszafele próbáljuk megérteni a felbontás lényegét. A 10-zel, 6-tal való oszthatóság is világosabbá válhat számukra, és a négyzetszámok sajátosságára is fény derül, maguk jöhetnek rá arra, hogy mi szükséges hozzá.

4. feladat – prímfelbontás

A táblára felírom a 420-at, amit közösen fogunk felbontani. Az első csoportból egy felszólított diáknak a legkisebb prímet kell mondania, ami a 420 osztója, és az osztást el is kell végeznie: 420:2=210.

A következő csoportból egy diáknak a 210 legkisebb prímosztóját kell megkeresnie, és elvégezni az osztást: 210:2=105.

És így tovább: 105:3=35.
35:5=7
Egészen 1-ig folytatjuk: 7:7=1.
Tehát: 420= 2•2•3•5•7.
Ez akasztófamódszerrel így néz ki:

420	2
210	2
105	3
35	5
7	7
1	

5. feladat – prímfelbontás
Betűnként kell a következő számok prímfelbontását elvégezni:
A: 200 B: 156 C: 490 D: 196

Ha elkészültek vele, akkor a csoportban mindenki eggyel balra csúsztatja és ellenőrzi a hozzá került felbontást. Majd a táblánál minden betűből egy sorsolt számú diák írja fel párhuzamosan a helyes megoldást:

$200=2^3\bullet 5^2$ $156=2^2\bullet 3\bullet 13$ $490=2\bullet 5\bullet 7^2$ $196=2^2\bullet 7^2$
Kérdések:
Melyik osztható 8-cal
Melyik négyzetszám?
Melyik osztható 19-cel?
Melyik osztható 6-tal?

Lehetséges az, hogy ugyanannak a számnak két különböző felbontása is létezik, ha a prímtényezők sorrendje nem számít? Minden szám prímtényezős felbontása a sorrendtől eltekintve egyértelmű.

Házi feladat:

Az első két feladatot kötelező megoldani, a harmadikat és a negyediket szorgalmiként lehet beadni.

Feladatok:

1. feladat (Apáczai Kiadó, Matematika Tankönyv, 7. osztály, II. Kötet)

Egy szám prímtényezős felbontása $A=2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$*, egy másiké pedig* $B=2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$*.*

A szorzás elvégzése nélkül válaszolj!

a) Melyik szám osztható 6-tal? b) Melyik szám osztható 7-tel? c) Melyik számban van meg a 15 többször? d) Melyik szám többszöröse a 12-nek?

e) Mennyi az A/B tört legegyszerűbb alakja? f) Mennyi az előző tört reciproka?

2. feladat

Készítsd el a következő számok prímfelbontását!

A: 60 B: 126 C: 66

Melyik prímtényezők szerepelnek mindháromban? Mi lehet a legnagyobb közös osztójuk?

Szorgalmi feladatok:

3. feladat (Róka Sándor: 2000 feladat az elemi matematika köréből)

Páros-e vagy páratlan az első 100 prímszám szorzata?

4. feladat (Róka Sándor: 2000 feladat az elemi matematika köréből)

Adjunk meg két egész számot, melyek összege is, szorzata is prím!

Megoldások, megyjegyzések:

1. feladat (Apáczai Kiadó, Matematika Tankönyv, 7. osztály, II. Kötet)

Egy szám prímtényezős felbontása $A=2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, egy másiké pedig $B=2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$.

A szorzás elvégzése nélkül válaszolj!

a) Melyik szám osztható 6-tal? Mindkettő, hiszen a $2 \cdot 3$ mindkettő felbontásában szerepel.

b) Melyik szám osztható 7-tel? Az A, mert a 7-es prímtényező az A-ban szerepel, de a B-ben nem.

c) Melyik számban van meg a 15 többször? Az A-ban $2^2 \cdot 7=28$-szor, a B-ben $2 \cdot 3 \cdot 11=66$-szor van meg, tehát a B-ben.

d) Melyik szám többszöröse a 12-nek? Az A, hiszen $12=2^2 \cdot 3$.

e) Mennyi az A/B tört legegyszerűbb alakja? $A/B=(2 \cdot 7)/(3 \cdot 11)$

f) Mennyi az előző tört reciproka? $B/A=(3 \cdot 11)/(2 \cdot 7)$

Megjegyzés

Mivel az utolsó feladatban ehhez nagyon hasonlóan vettük végig, hogy az oszthatóságok miként olvashatók le a prímtényezős felbontásból, így ezt a feladatot mindenkinek meg kell tudnia csinálni. Az a) és b) részek kifejezetten könnyűek, a többin már gondolkodniuk kell, de így lehet lemérni, hogy mennyire gyakorlottak ezekben az eljárásokban.

2. feladat

Készítsd el a következő számok prímfelbontását!

A: $60=2^2 \cdot 3 \cdot 5$

B: $126=2 \cdot 3^2 \cdot 7$

C: $66=2 \cdot 3 \cdot 11$

Melyik prímtényezők szerepelnek mindháromban? 2, 3

Mi lehet a legnagyobb közös osztójuk? $2 \cdot 3$

Megjegyzés

Itt is viszonylag mechanikusan kell elvégezniük az órán tanultakat, de az utána való kérdéseken már el kell gondolkodniuk. Mivel a következő órán a prímtényezős felbontás alapján a legnagyobb közös osztóról és a legkisebb közös többszörösről lesz szó, így ez jó bevezetése annak. Így saját maguk fedezhetik fel, hogy mi kell ahhoz, hogy valami közös osztó legyen, és ahhoz, hogy valamelyik ezek közül a legnagyobb legyen.

Szorgalmi feladatok:

3. feladat (Róka Sándor: 2000 feladat az elemi matematika köréből)
Páros-e vagy páratlan az első 100 prímszám szorzata? Páros, hiszen a 2 az első prímszám, így a szorzatban szerepelni fog, tehát csak páros lehet.

Megjegyzés

Mivel nem gyakorlottak a prímek kezelésében, így megijedhetnek ettől a feladattól, viszont a jobbaknak remek lehetőség arra, hogy kicsit utána gondoljanak.

4. feladat (Róka Sándor: 2000 feladat az elemi matematika köréből)
Adjunk meg két egész számot, melyek összege is, szorzata is prím! 1 és a 2.

Megjegyzés

Ez még egy fokkal nehezebb feladat, mint az előző. Itt is végig kell gondolniuk, hogy mit is jelent az, hogy prím. Ha csupán két osztója lehet, akkor az egyik tagnak biztosan az 1-nek kell lennie. Viszont a szorzatnak prímnek kell lennie, így csak egy prím lehet a másik tag. De a 2-n kívül minden prím páratlan, amelyhez az 1-et hozzáadva páros számot kapunk. Tehát csak a 2 lehet ez a másik szám. Ellenőrzés: az 1•2=2 és az 1+2=3 is prím.

5. Összegzés

A kooperatív módszerek rengeteg lehetőséget nyitnak meg egy matematikatanár előtt. Hiszen egyéni, páros, csoportos feladatokban is gondolkodhat, a csoportokat szétszedheti, átalakíthatja, a csoporton belül kinevezhet csendfelelőst, időfelelőst, írnokot – azaz újítások tárháza kerül a kezébe. Természetesen a felsőbb osztályokban már kevésbé hatásos, ha mindig kooperatív módszerrel tanítunk, kiváltképp, ha jelentősek az egyéni különbségek, és más-más cél vezérli a diákokat. De akár egy végzős osztályt is motiválhat, ha néha-néha, akár egy összefoglalásnál, akár egy témakezdő órán kooperatív módszerrel tanulhatnak. Hiszen nem csapásként kell felfogni, hogy szeretnek beszélgetni egymással, és nem büntetni kell őket a közös munkáért, hanem éppen ezt a kooperatív hozzáállást kell kihasználni. Ezzel a módszerrel megtaníthatjuk őket a közös munkára, és előnyt faraghatunk abból, hogy szeretnek egymással kommunikálni.

Felhasznált irodalom:

Spencer Kagan: Kooperatív tanulás (Ökonet Kft, Budapest, 2001)

Pálfalvi Józsefné: Matematika didaktikusan (Typotex Kiadó, Budapest, 2000)

Matematika 6.B, 7.B (Műszaki könyvkiadó, Budapest, 2004, 2005, szerkesztette: Hajdu Sándor)

Matematika Tankönyv 7. évfolyam, II. Kötet (Apáczai Kiadó, Budapest, 2003)

Róka Sándor: 2000 feladat az elemi

Sulinova, Tanári kézikönyv, Szociális kompetencia 1–12. évfolyam, A TANULÁS IRÁNYÍTÁSA című fejezetből A KOOPERATÍV MÓDSZER (Szerzők: Zágon Bertalanné és Nagy Ilona)