Szélsőérték-feladatok különböző megoldási módszerei

Szakdolgozat

Készítette: BERZSENYI VIKTÓRIA

Témavezető: MAUS PÁL

Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar

Matematikatanítási- és Módszertani Központ

2010

Tartalomjegyzék

Bevezetés 3

Definíciók, tételek, összefüggések, megoldási menetek 4

A háromszög egyenlőtlenség 4

Pitagorasz-tétel 4

Két pozitív szám számtani, mértani, harmonikus és négyzetes közepének geometriai definiálása 4

Számtani közép 4

Mértani közép 5

Harmonikus közép 6

Négyzetes közép 8

A középértékek jellemzői 9

Általánosítás több számra 10

Nem negatív számok összegére, szorzatára, valamint négyzetösszegére vonatkozó tételek 11

A másodfokú függvény szélsőértékeinek meghatározása 11

A differenciálható függvények szélsőértékeinek meghatározása 12

Feladatok 15

Befejezés 36

Felhasznált irodalom 37

Bevezetés

Szakdolgozatomban a szélsőérték-feladatok különböző megoldási módszereit és ezek alkalmazását szeretném bemutatni és összehasonlítani. A témaválasztásomat motiválta, hogy középiskolás tanulmányaimban a témakör elemi matematika eszközeivel történő megoldása kisebb hangsúlyt kapott. Ezt a hiányosságomat szerettem volna pótolni, illetve összekapcsolni az egyetemen tanultakkal. Ezen kívül a szakdolgozatomban összefoglaltakat szeretném később, tanári hivatásom gyakorlása alatt felhasználni.

Az első részben a megoldási módszerek elméleti hátterét tekintem át, ismertetve a szakdolgozatom feladataihoz felhasznált definíciókat, tételeket, összefüggéseket. A második rész példáit a Magyarországon használatban lévő középiskolai tankönyvek feladatsoraiból és feladatgyűjteményekből válogattam, többségében Hódi Endre munkájából. Könyvének előszavában írja a következőt: „Véleményem szerint szélsőérték-feladatot csak akkor indokolt differenciál-hányados segítségével megoldani, ha vagy egyáltalán nem találunk rá elemi megoldást, vagy, ha sikerül is megoldani elemi úton a feladatot, ez a megoldás nagyon bonyolult, lényegesen bonyolultabb annál, amit a differenciál-hányados alkalmazásával kaphatunk.” [3] Ezt szem előtt tartva arra törekedtem, hogy a feladatok megoldásainál elsősorban az elemi módszereket helyezzem előtérbe.

A tételbizonyítások, feladatok és megoldásaik szemléltető ábráit a GeoGebra rajzolóprogrammal készítettem.

Köszönetet szeretnék mondani konzulensemnek, Maus Pálnak, aki támpontot adott a szakdolgozat felépítéséhez és a konzultációkon a feladatok különböző megoldásaihoz.

[3] Hódi 5.o.

Definíciók, tételek, összefüggések, megoldási menetek

A háromszög egyenlőtlenség

A geometriai egyenlőtlenségek gyakran a következő fontos összefüggésre vezethetők vissza: $\boldsymbol{T_1}$: Három adott szakasz akkor és csakis akkor lehet egy háromszög három oldala, ha bármelyikük kisebb, mint a másik kettő összege.[4]

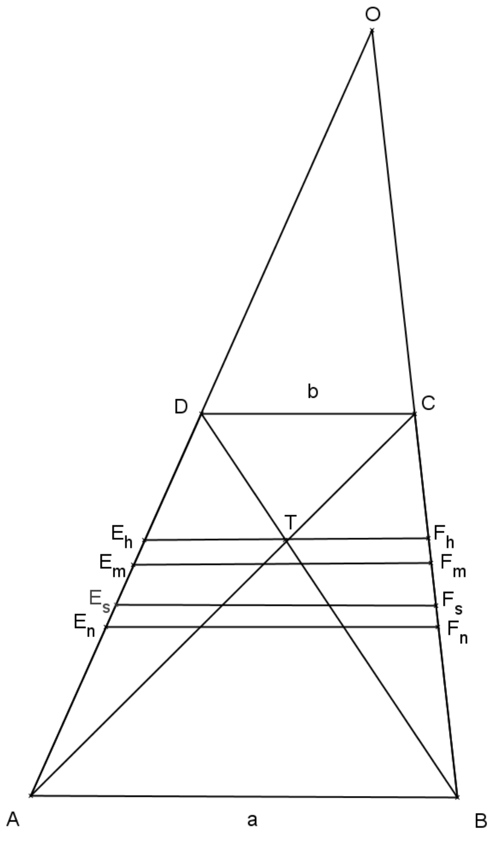
Pitagorasz-tétel:

$\boldsymbol{T_2}$: Minden derékszögű háromszögben a befogók négyzetének összege egyenlő az átfogó négyzetével.

Két pozitív szám számtani, mértani, harmonikus és négyzetes közepének geometriai definiálása

Számtani közép

Adottak az a és b különböző pozitív számok, és legyen $b < a$. Létezik olyan trapéz, amelyben az AB és CD párhuzamos oldalak hosszúsága a és b. (1. ábra)



1. ábra

[4] Reiman 226.o.

Jelöljük a trapéz szárainak felezőpontjait E_s-sel és F_s-sel. Az ezeket összekötő szakasz a trapéz középvonala, amely párhuzamos az AB és CD oldalakkal, és hossza

$$S = E_sF_s = \frac{a+b}{2}.$$

$\boldsymbol{D_1}$: Az $S = \frac{a+b}{2}$ számot nevezzük az a és b számok számtani közepének.[3]

$a = b$ esetén is, hiszen a trapéz helyett téglalappal ugyanígy definiálható.

(Az a és b számok egyenlőségének esetét a későbbi definíciók során külön fogjuk vizsgálni.)

Mértani közép

Tekintsük az $ABCD$ trapézt (1. ábra).

Mekkora annak a húrnak a hossza, amely az $ABCD$ trapézt két hasonló trapézra bontja?

(Nevezzük húroknak a szárak egy-egy pontját összekötő, az AB és CD oldalakkal párhuzamos szakaszokat.)

Tegyük fel, hogy létezik ilyen E_mF_m húr. Ekkor a hasonlóság miatt felírható, hogy

$$\frac{b}{E_mF_m} = \frac{E_mF_m}{a},$$

ebből

$$M = E_mF_m = \sqrt{ab}.$$

$\boldsymbol{D_2}$: Az $M = \sqrt{ab}$ számot az a és b számok mértani közepének nevezzük.[4]

A mértani közép bevezetése $a = b$ esetén ezzel a módszerrel nem lehetséges, de $a = b$ esetén is definiálhatjuk a két szám mértani közepét az $M = \sqrt{ab}$ egyenlőséggel.

A trapéznak nyilván egy és csak egy $\sqrt{ab}$ hosszúságú húrja van, hiszen $b < a$, és így

$$b^2 < ab < a^2,$$

$$b < \sqrt{ab} < a,$$

azaz $\sqrt{ab}$ az a és b számok közé esik [5], és ekkor a folytonosság elve miatt valóban létezik egyetlen $\sqrt{ab}$ hosszúságú húr.

[3] Szikszai 7.o.
[4] U.a. 9.o.
[5] U.a. 9.o.

A hasonlóságnak szükséges feltétele volt a két-két megfelelő oldal arányának egyezése. Be kell még látnunk, hogy az így keletkezett E_mF_mCD és az ABF_mE_m trapézok valóban hasonlók. Nagyítsuk az $ABCD$ trapéz szárainak O metszéspontjából az E_mF_mCD trapézt

$$\frac{\sqrt{ab}}{b}$$

arányban. A DC oldalból az E_mF_m húrt kapjuk, hiszen

$$b\frac{\sqrt{ab}}{b} = \sqrt{ab} = E_mF_m,$$

az E_mF_m húrból pedig az AB oldalt, mert

$$\sqrt{ab}\frac{\sqrt{ab}}{b} = a = AB.$$[6]

Azt állítjuk továbbá, hogy az E_mF_m húr rövidebb, mint az E_sF_s.

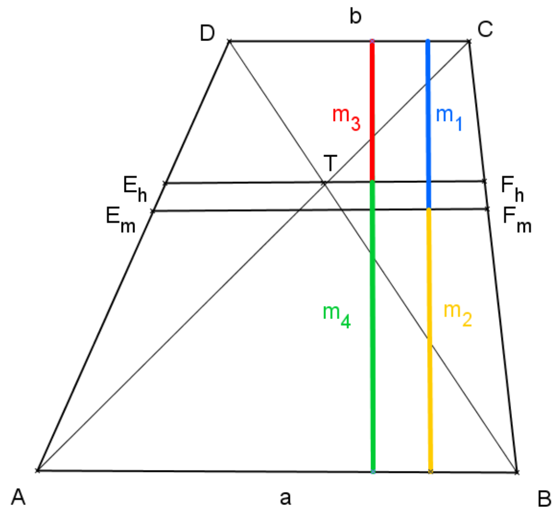
Ez abból következik, hogy az E_sF_s középvonal a magasságot felezi, a E_mF_mCD és ABF_mE_m hasonló trapézok közül az alsó trapéz magassága $\frac{\sqrt{ab}}{b}$ -szerese a felső trapéz magasságának, tehát nagyobb nála. Szemléletesen szólva az E_mF_m húr az E_sF_s felett van.

$\boldsymbol{T_3}$: Két különböző pozitív szám mértani közepe kisebb, mint a számtani közepe, $M < S$.[7]

Könnyen látható, hogy $a = b$ esetén $M = S$ egyenlőség teljesül.

Harmonikus közép

Jelöljük az $ABCD$ trapéz átlóinak metszéspontját T-vel. Számítsuk ki a T ponton átmenő E_hF_h húr hosszát (2. ábra).



2. ábra

[6] Szikszai 9.o.
[7] U.a.10.o.

A $CDB,\ F_hTB$, ill. az $CAB,\ CTF_h$ háromszögek hasonlóságából a

$$\frac{F_hT}{b}=\frac{F_hB}{CB},$$

illetve

$$\frac{F_hT}{a}=\frac{F_hC}{CB}$$

aránypárokat írhatjuk fel. Ezeket összeadva

$$F_hT\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=1.$$

Ugyanígy adódik a

$$E_hT\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=1$$

összefüggés. (Ezekből leolvasható, hogy T a húr felezőpontja.) A két egyenletet összeadva és rendezve a keresett húr hossza

$$H=E_hF_h=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

$\boldsymbol{D_3}$: A $H=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ számot nevezzük az a és b számok harmonikus közepének.[8]

Látható, hogy $a=b$ esetén is használható a fenti definició, hiszen egy téglalapban az átlók metszéspontjával ugyanígy végigvihető a gondolatmenet.

Azt állítjuk, hogy különböző a és b esetén az E_hF_h húr az eddigiek közül a legrövidebb, vagyis

$$H<M<S.$$

Az állítás következő bizonyítása konzultáción hangzott el.

Legyen az $ABCD,\ E_mF_mCD,\ ABF_m\,E_m$, a E_hF_hCD, és a $ABF_h\,E_h$ trapézok magassága rendre m, m_1, m_2, m_3 és m_4. Láttuk, hogy a E_mF_mCD és ABF_mE_m hasonló trapézok közül az alsó trapéz magassága$\frac{\sqrt{ab}}{b}$ -szerese a felső trapéz magasságának, vagyis:

$$m_1\frac{\sqrt{ab}}{b}=\mathrm{m}_2.$$

Tudjuk, hogy

$$m_1+m_2=m,$$

azaz

[8] Szikszai 10.o.

$$m_1 = \frac{m}{1+\frac{\sqrt{ab}}{b}}.$$

A TCD és a TAB háromszögek hasonlóak, ezért:

$$\frac{m_3}{m_4} = \frac{b}{a},$$

$$\frac{a}{b}m_3 = m_4.$$

Tudjuk, hogy

$$m_3 + m_4 = m,$$

ebből

$$m_3 = \frac{m}{1+\frac{a}{b}}.$$

$$\frac{m}{1+\frac{a}{b}} < \frac{m}{1+\frac{\sqrt{ab}}{b}},$$

az E_hF_h húr valóban rövidebb, mint a E_mF_m húr.

Bizonyítottuk, hogy

$\boldsymbol{T_4}$: két különböző pozitív szám harmonikus közepe kisebb, mint a mértani közepe.[9]

Bizonyítható, hogy $a = b$ esetén $H = M$ egyenlőség teljesül.

Négyzetes közép

A trapéz E_sF_s középvonala nem felezi a trapéz területét, hiszen $b < a$ miatt a középvonal feletti terület nyilván kisebb területű, mint az alatta levő. Ebből következően biztosan van pontosan egy olyan E_nF_n húr a középvonal alatt, mely a trapéz területét két egyenlő részre osztja. Határozzuk meg ennek a területfelező húrnak a hosszát.

Az ODC, OE_nF_n, OAB háromszögek hasonlóak (1. ábra), területeik aránya egyenlő az O-val szemközti oldalak négyzeteinek arányával, tehát van olyan k pozitív valós szám, hogy a három terület mértékszáma rendre

$$kb^2, k(E_nF_n)^2, ka^2.$$

Az $ABCD$ trapéz területfelezése azt jelenti, hogy az OE_nF_n háromszög területe az ODC és az OAB háromszögek területének számtani közepe, azaz

$$k(E_nF_n)^2 = \frac{ka^2 + kb^2}{2},$$

és ebből

[9] Szikszai 11.o.

$$N = E_nF_n = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

$\boldsymbol{D_4}$: A kapott $N = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ számot nevezzük az a és b számok négyzetes közepének.[10]

A fenti értelmezés $a = b$ esetén nem lehetséges, de ekkor is definiálhatjuk az a és b számok négyzetes közepét az $N = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ egyenlőséggel.

Mivel az E_nF_n szakasz a középvonal alatt van,

$$S < N.$$

$\boldsymbol{T_5}$: Két különböző pozitív szám számtani közepe kisebb a négyzetes közepénél.

Nyilvánvaló, hogy $a = b$ esetén $S = N$ teljesül.[11]

A középértékek jellemzői

A geometriai úton definiált négy húr és az ezeknek megfelelő négy középérték közös tulajdonsága, hogy mind a négy a és b közé esik, ha a és b különböző pozitív számok. Továbbá $b < a$ esetén

$$b < H < M < S < N < a.$$

Ha $a = b$, akkor minden húr hossza a és b közös számértékével egyenlő (és változatlanul igaz, hogy a négy nevezetes húr helyzete egyértelműen meghatározott),

továbbá $a = b$ esetén

$$b = H = M = S = N = a.$$

Vagyis

$\boldsymbol{T_6}$: ha a és b pozitív számok, és $b \leq a$ akkor,

$$b \leq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq a.$$

Az a és b számokat közepükkel pótolva középértékként ugyanazt a számot kapjuk, mint az a és b számok esetén.[12]

[10] Szikszai 11-12.o.
[11] U.a. 12.o.
[12] U.a. 12-13.o.

Általánosítás több számra

$\boldsymbol{D_5}$:Legyen adva az $a_1, a_2, \dots, a_n$ n db pozitív szám. Az n db pozitív szám számtani, mértani, harmonikus és négyzetes közepe rendre az a S, M, H, N szám, mellyel helyettesítve: szorzatuk, összegük, négyzetösszegük változatlan, tehát

$$S = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n},$$

$$M = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n},$$

$$H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}},$$

$$N = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

Bizonyítható, hogy

$\boldsymbol{T_7}$: bármelyik közép a legnagyobb és a legkisebb szám közé esik, ha a számok nem mind egyenlők. (Ha a számok egyenlők, bármelyik közepe e számokkal egyenlő.)[13]

Belátható, hogy

$\boldsymbol{T_8}$: n db pozitív szám esetén igaz a következő összefüggés:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \le \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

Az egyenlőség szükséges és elégséges feltétele:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n.$$ [14]

A szélsőérték-feladatok megoldásánál két vagy n db pozitív szám számtani, mértani, harmonikus és négyzetes és közepe közötti egyenlőtlenség, illetve egyenlőségláncot használjuk fel. A megoldásnál lényeges szerepet játszik, hogy az egyenlőtlenség egyik oldalán szereplő közép állandó lesz, a másik érték akkor veszi fel a minimumát vagy maximumát, ha ezzel az értékkel egyenlő. Ez akkor és csak akkor lehetséges, ha a két vagy n db pozitív szám megegyezik.

[13] Szikszai 16-17.o.
[14] U.a. 21-24.o.

Nem negatív számok összegére, szorzatára, valamint négyzetösszegére vonatkozó tételek

$\boldsymbol{T_9}$: Ha az $x_1, x_2, \dots, x_n$ nemnegatív számok összege állandó, akkor

1. az $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$ szorzat $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ esetén lesz a lehető legnagyobb.[15]
2. az $x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_n{}^2$ négyzetösszeg értéke $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ esetében a legkisebb.[16]

A másodfokú függvény szélsőértékeinek meghatározása

A szélsőérték-feladatok egy része megoldható másodfokú függvény minimum és maximumhelyének vizsgálatával. Ennek menete a következő: a feladatok megadott adataiból a közöttük fennálló összefüggések ismeretében a keresett mennyiség (terület, kerület stb.) felírható az egyik adat (oldalhossz, magasság stb.) másodfokú függvényeként. Ennek a másodfokú függvénynek keressük a szélsőértékeit a következő módon:

Az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \neq 0$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

másodfokú függvény hozzárendelési szabályát teljes négyzetté alakítással átírhatjuk a következő alakba:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Az átalakításból leolvashatjuk, hogy az f függvény a képét a normálparabolából milyen geometriai transzformációkkal kaphatjuk meg.

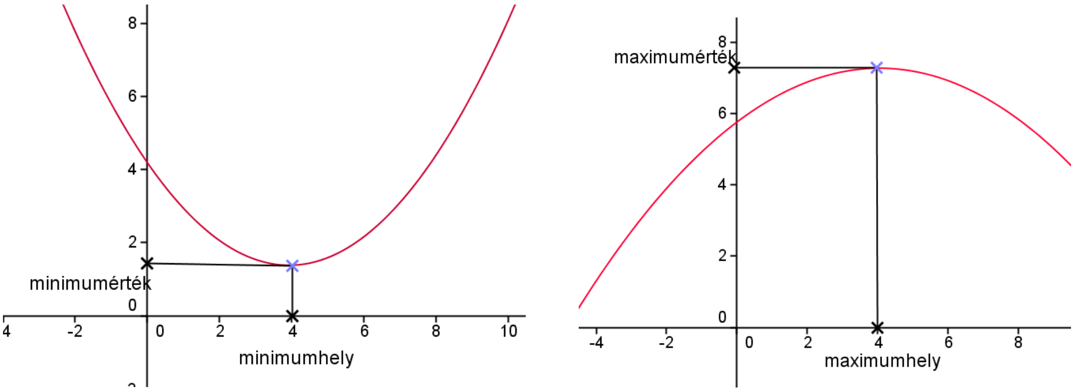
$\boldsymbol{T_{10}}$: Az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \neq 0$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

másodfokú függvény szélsőértékhelye (3. ábra):

$$x_{szélsőérték} = -\frac{b}{2a}.$$

[15] Hódi 32.o.
[16] U.a. 33.o.



3. ábra

A szélsőérték,

$$\text{ha } a > 0, \text{ akkor minimum}$$

$$\text{ha } a < 0, \text{ akkor maximum.}$$

A szélsőértéknél a függvényérték :

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \neq 0$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

függvény zérushelyei az

$$ax^2 + bx + c = 0$$

egyenlet gyökei.[17]

A differenciálható függvények szélsőértékeinek meghatározása

Elsőként a monotonitás kritériumaival kezdjük.

$\boldsymbol{T_{11}}$: Legyen az f függvény folytonos $[a, b]$-ben és differenciálható (a, b)-ben.

1. Az f függvény akkor és csak akkor monoton növekedő (illetve monoton csökkenő) $[a, b]$-ben, ha $f'(x) \geq 0$ (illetve $f'(x) \leq 0$) minden $x \in (a, b)$-re.
2. Az f függvény akkor és csak akkor szigorúan monoton növő (illetve szigorúan monoton csökkenő) $[a, b]$ -ben, ha $f'(x) \geq 0$ (illetve $f'(x) \leq 0$) minden $x \in (a, b)$-re, és ha $[a, b]$-nak nincs olyan részintervalluma, amelyen f'azonosan nulla.

Az előző tétel segítségével egy tetszőleges differenciálható függvény lokális és abszolút szélsőértékeit kereshetjük meg, abban az esetben is, ha a függvény nem egy korlátos és zárt intervallumon van értelmezve. Ugyanis a derivált előjeléből megállapíthatjuk, hogy a

[17] Matematika 10. 66-67.o.

függvény mely intervallumon nő és mely intervallumon csökken, és ez általában elegendő információt ad a szélsőértékek megkereséséhez.

Ha f differenciálható az a pontban, akkor ahhoz, hogy f-nek a-ban lokális szélsőértéke legyen, szükséges (de általában nem elégséges) feltétele, hogy $f'(a) = 0$ teljesüljön.

A következő tételek elégséges feltételt adnak a lokális szélsőértékhely létezésére.

$\boldsymbol{T_{12}}$: Legyen az f függvény differenciálható az a pont egy környezetében.

1. Ha $f'(a) = 0$, és f' lokálisan növekedő (illetve lokálisan csökkenő) az a helyen, akkor az a pont f-nek lokális minimumhelye (illetve lokális maximumhelye).
2. Ha $f'(a) = 0$, és f' szigorúan lokálisan növekedő (illetve szigorúan lokálisan csökkenő) a-ban, akkor az a pont f-nek szigorú lokális minimumhelye (illetve szigorú lokális maximumhelye).

$\boldsymbol{T_{13}}$: Legyen az f függvény kétszer differenciálható az a pontban. Ha $f'(a) = 0$ és $f''(a) > 0$, akkor f-nek a-ban szigorú lokális minimuma van. Ha $f'(a) = 0$ és $f''(a) < 0$, akkor f-nek a-ban szigorú lokális maximuma van.

($f'(a) = 0$ és $f''(a) = 0$ esetében a magasabb rendű deriváltak értékéből lehet elégséges feltételt nyerni arra, hogy az a pont f-nek lokális szélsőértékhelye legyen.)

Következzenek a konvexitásra vonatkozó feltételek.

$\boldsymbol{T_{14}}$: Legyen az f függvény differenciálható az I intervallumban.

1. Az f függvény akkor és csak akkor konvex (illetve konkáv) I-ben, ha f' monoton növekedő (illetve csökkenő) I-ben.
2. Az f függvény akkor és csak akkor szigorúan konvex (illetve szigorúan konkáv) I-ben, ha f' szigorúan monoton növekedő (illetve szigorúan monoton csökkenő) I-ben.

$\boldsymbol{T_{15}}$: Legyen az f függvény differenciálható az I intervallumban. Az f függvény akkor és csak akkor konvex I-ben, ha bármely $a \in I$-re az f függvény grafikonja az a pontba húzott érintő felett halad.

$\boldsymbol{T_{16}}$: Legyen az f függvény kétszer differenciálható I intervallumban. Az f függvény akkor és csak akkor konvex (illetve konkáv) I-ben, ha $f''(x) \geq 0$ (illetve $f''(x) \leq 0$) minden $x \in I$-re.[18]

[18] Analízis 1. 264-269.o.

A differenciálszámítás módszereivel történő szélsőérték-meghatározás első lépése ugyanaz, mint az előző módszernél: az egyik adatból fejezzük ki a többit az ismert összefüggések felhasználásával, és a keresett mennyiség a kifejező adat függvényeként írható fel. Meg kell határoznunk a függvény értelmezési tartományát, majd a differenciálható függvény szélsőértékeit a fent kiemelt tételek segítségével. Végül ellenőrizni kell az értelmezési tartomány határpontjaiban a függvény- vagy határértéket. A kritikus határértékek meghatározásánál alkalmazhatjuk a következő tételt:

$\boldsymbol{T_{17}}$:(L'Hospital-szabály): Legyen f és g differenciálható α egy pontozott környezetében, és tegyük fel, hogy itt $g \neq 0$ és $g' \neq 0$. Tegyük fel továbbá, hogy vagy

1. $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} g(x) = 0$, vagy
2. $\lim_{x\to\alpha} |g(x)| = \infty$.

Ha

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \beta,$$

akkor ebből következik, hogy

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta.$$

Itt α jelentése lehet egy a valós szám, az $a+0, a-0, \infty$ vagy $-\infty$, β jelentése pedig egy b valós szám, ∞ vagy $-\infty$. [19]

(Az α egy pontozott környezetén az $(\alpha-\delta, \alpha+\delta) \setminus \{\alpha\}$ alakú intervallumot értjük, ahol δ tetszőleges pozitív szám.)[20]

[19] Analízis 1. 277.o.
[20] U. a. 135.

Feladatok

I. feladat

Adott kerületű téglalapok közül melyiknek maximális a területe?

1. megoldás

Jelöljük a téglalap oldalait a-val és b-vel.

$$K = 2(a+b)$$

$$T = ab$$

$$T_{max} = ?$$

Alkalmazzuk a $\boldsymbol{T_3}$-ban leírt számtani és mértani közép közötti összefüggést a téglalap oldalaira:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} = \frac{K}{4}.$$

Állandó számtani közép esetén a mértani közép akkor veszi fel a maximumát, ha a két közép egyenlő. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha

$$a = b.$$

Mivel a téglalap területe éppen a mértani közép négyzete, ezért a terület is ekkor lesz maximális.[21]

Vagyis adott kerületű téglalapok közül a négyzet területe maximális.

2. megoldás

Legyen a téglalap egyik oldalának hossza $\frac{K}{4} + x$, a másik $\frac{K}{4} - x$.

Ezek szorzata a két szám összegének és különbségének szorzatára vonatkozó összefüggés alapján:

$$\left(\frac{K}{4} + x\right) \cdot \left(\frac{K}{4} - x\right) = \frac{K^2}{16} - x^2.$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{K^2}{16} - x^2 \leq \frac{K^2}{16},$$

egyenlőség csak $x = 0$ esetén lehetséges. A téglalap kerülete állandó, a részek szorzata, azaz a téglalap területe akkor maximális, ha $x = 0$. Tehát mindkét oldal $\frac{K}{4}$ hosszúságú, vagyis a téglalap négyzet.[22]

[21] Mozaik 10. 97-98.o.
[22] Hódi 37. o.

A feladat következő két megoldása konzultáción hangzott el.

3. megoldás

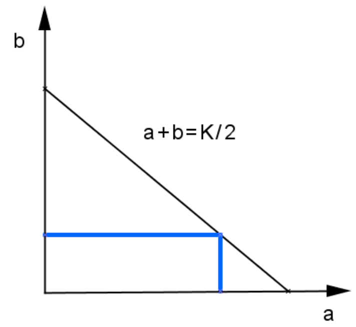
Jelöljük a téglalap oldalait a-val és b-vel.

$$K = 2(a + b)$$

$$T = ab$$

$$T_{max} = ?$$

Ábrázoljuk a feltételeket egy (a, b) koordinátarendszerben. (4. ábra)



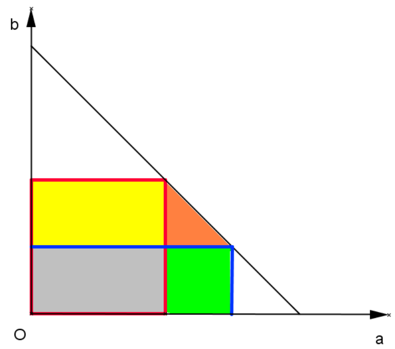
4. ábra

Ekkor a téglalapok origóval szemközti csúcsai egy

$$a + b = \frac{K}{2}$$

egyenletű egyenesen mozognak. (A csúcspontok tengelyekre vonatkozó merőleges vetületei határozzák meg a téglalapokat, ezek között keressük a maximális területűt.)

Azt sejtjük, hogy a maximális területű téglalap a négyzet.



5. ábra

Az 5. ábrán pirossal jelöltem a négyzetet, kékkel egy tetszőleges, feltételnek megfelelő téglalapot. Szürkére színeztem a két négyszög közös részét. Azt kell belátni, hogy a sárga terület nagyobb, mint a zöld.

A sárga téglalap és a zöld téglalap egy-egy oldala egyenlő hosszúságú, mert a narancssárga háromszög egyenlő szárú, a négyzet másik oldala (ami megegyezik a magasságával) pedig nagyobb, mint a téglalap magassága, vagyis a négyzet területe nagyobb.

4. megoldás

Jelöljük ismét a téglalap oldalait a-val és b-vel.

$$K = 2(a + b)$$

$$T = ab$$

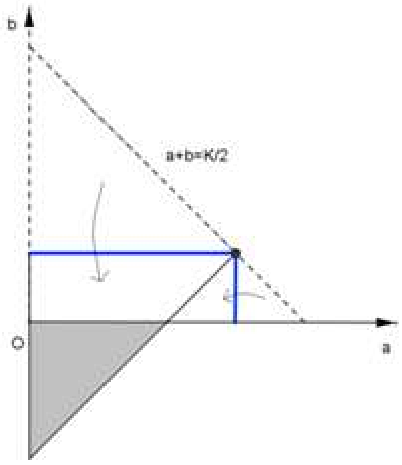
$$T_{max} = ?$$

Ábrázoljuk megint a feltételeket egy (a, b) koordinátarendszerben. (4. ábra)

Jelöljük az

$$a + b = \frac{K}{2}$$

egyenletű egyenes alatti területet T_e-vel. Hajtogatással fedjük le a téglalap területét a $T_e - ab$ területű idommal. (6. ábra)



6. ábra

A szürkével jelölt, lefedés után megmaradt háromszög területe

$$T_e - 2ab.$$

A maradék $T_e - 2ab$ terület akkor minimális, ha ab maximális. Akkor nem marad a hajtogatás után maradék, ha

$$T_e = 2ab,$$

vagyis a keresett téglalap négyzet.

5. megoldás

$$s = \frac{K}{2} = (a + b)$$

Jelöljük a téglalap kerületének felét s-sel, oldalait a-val és $s - a$-val. Ekkor:

$$T = a(s - a)$$

$$T = -a^2 + sa$$

Az s adott, a változó. Tekintsük a

$$-a^2 + sa$$

kifejezést az a másodfokú függvényének. Ennek a másodfokú függvénynek keressük a maximumát.

A $\boldsymbol{T_{10}}$ -es tételt alkalmazva a másodfokú függvény szélsőértékhelye:

$$\frac{-s}{-2} = \frac{1}{2}s.$$

Mivel $-1 < 0$, ezért $a = \frac{1}{2}s$ helyen a függvénynek maximuma van. Ekkor

$$a = \frac{1}{2}s = \frac{K}{4}$$

$$4a = K,$$

vagyis az adott kerületű maximális területű téglalap a négyzet.

6. megoldás

Legyen ismét a téglalap kerületének fele s, oldalai a és $s - a$.

$$T(a) = -a^2 + sa$$

A terület a másodfokú függvénye, $T(a)$ folytonos az $[0, s]$ intervallumon, és kétszeresen differenciálható a $(0, s)$ intervallumon. Alkalmazzuk a $\boldsymbol{T_{13}}$-as tételt.

A függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol az első deriváltja 0.

$$T(a)' = -2a + s \text{ (}s\text{ konstans)}$$

$$-2a + s = 0$$

$$a = \frac{1}{2}s$$

A szélsőérték fajtája a második derivált segítségével állapítható meg:

$$T(a)'' = -2.$$

Mivel $-2 < 0$, ezért $a = \frac{1}{2}s$-helyen maximum van, értéke:

$$T\left(\frac{1}{2}s\right) = -\frac{1}{4}s^2 + s\frac{1}{2}s = \frac{1}{4}s^2.$$

Ellenőrizzük a végpontokban a függvényértékeket!

$$T(0) = 0 + s0 = 0$$

$$T(s) = -s^2 + s^2 = 0$$

$$\frac{1}{4}s^2 > 0$$

minden esetben.

Így $a = \frac{1}{2}s$ esetén a $T(a)$ függvénynek valóban maximuma van.

$$a = \frac{1}{2}s = \frac{K}{4}$$

$$4a = K,$$

vagyis a négyzet területe maximális az adott kerületű téglalapok közül.

A feladat első négy megoldása rendkívül ötletes. 1.-nél azt használtuk ki, hogy a két oldal számtani közepe éppen a téglalap kerületének negyede, ami adott, mértani közepük pedig a téglalap területének négyzetgyöke. A 2. megoldás alapja a téglalap oldalainak ötletes elnevezése. A 3.-ban geometriai úton bizonyítottuk be sejtésünket, a 4. megoldás hajtogatással vezet rá a maradék terület minimalizálására. Az 5. és 6. megoldásnál az első részben leírt módon határoztuk meg a maximális területű téglalapot.

II. feladat

Adott területű téglalapok közül melyiknek minimális a kerülete?[23]

1. megoldás

Legyen a téglalap egyik oldala a, a másik b.

$$T = ab$$

$$K = 2(a+b)$$

$$K_{min} = ?$$

Alkalmazzuk a $\boldsymbol{T_3}$-ban leírt számtani és mértani közép közötti összefüggést a-ra és b-re.

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

$$\sqrt{T} \leq \frac{a+b}{2} = \frac{K}{4}$$

Állandó mértani közép esetén a számtani közép akkor veszi fel a minimumát, ha a két közép egyenlő. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha

$$a = b.$$

$$\frac{2a}{2} = \frac{K}{4}$$

$$4a = K$$

Tehát az adott területű minimális kerületű téglalap a négyzet.

[23] Mozaik 10. 98.o. 6. feladat (Eredetileg a terület 100 cm^2.)

A következő megoldás konzultáción hangzott el.

2. megoldás

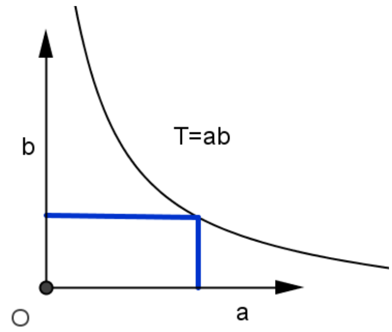
Legyen a téglalap egyik oldala a, a másik b.

$$T = ab$$

$$K = 2(a + b)$$

$$K_{min} = ?$$

Ábrázoljuk a feltételeket egy (a, b) koordinátarendszerben. (7. ábra)

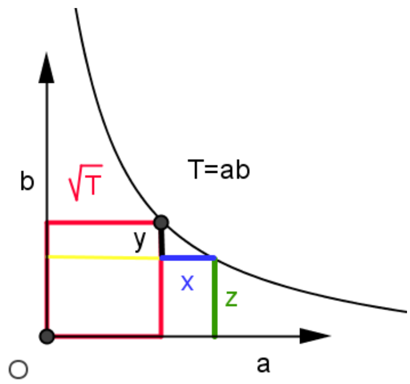


7. ábra

Ekkor a téglalapok origóval szemközti csúcsai egy

$$T = ab$$

egyenletű hiperbolán mozognak. (A csúcspontok tengelyekre vonatkozó merőleges vetületei határozzák meg a téglalapokat, ezek között keressük a minimális kerületűt.)



8. ábra

A 8. ábrán pirossal jelöltem a négyzetet, kékkel egy tetszőleges, feltételnek megfelelő téglalapot (az oldalak színezésével megegyezik az őket jelölő betűk színe). Azt állítjuk, hogy a minimális kerületű téglalap a négyzet, vagyis

$$4\sqrt{T} < 2\sqrt{T} + 2z + 2x$$

$$2\sqrt{T} < 2(z+x)$$

$$\sqrt{T} < z+x$$

$$z+y < z+x$$

$$y < x.$$

Ez teljesül, hiszen

$$\sqrt{T}\cdot y = z\cdot x,$$

és

$$z < \sqrt{T}.$$

Vagyis a négyzet kerülete minimális.

3. megoldás

Jelöljük a téglalap egyik oldalát a-val, a másikat $T = ab$-ből kifejezve $\frac{T}{a}$-val.

$$K(a) = 2\left(a + \frac{T}{a}\right) = 2a + 2Ta^{-1}$$

A kerület a függvénye, $K(a)$ folytonos az $(0,\infty)$ intervallumon, és kétszeresen differenciálható a $(0,\infty)$ intervallumon. Alkalmazzuk a $\boldsymbol{T_{13}}$-as tételt.

A függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol az első derivált 0.

$$K'(a) = -2Ta^{-2} + 2 \text{ (}T\text{ konstans)}$$

$$-2Ta^{-2} + 2 = 0$$

$$1 = \frac{T}{a^2}$$

$$a = \sqrt{T}$$

A szélsőérték fajtája a második derivált segítségével állapítható meg:

$$K''(a) = 4Ta^{-3} = \frac{4T}{a^3}$$

$$\frac{4T}{\sqrt{T}^3} > 0,$$

ezért $a = \sqrt{T}$-helyen minimum van, értéke:

$$K\left(\sqrt{T}\right) = 2\sqrt{T} + \frac{2T}{\sqrt{T}} = 4\sqrt{T}$$

Ellenőrizzük a végpontokban a határértékeket.

$$\lim_{a\to 0+} 2Ta^{-1} + 2a = \infty$$

$$\lim_{a\to\infty} 2Ta^{-1} + 2a = \infty$$

$$4\sqrt{T} < \infty$$

minden esetben. Így $a = \sqrt{T}$ esetén a függvénynek valóban minimuma van. Ekkor

$$T = a^2,$$

vagyis adott terület mellett minimális kerületű téglalap a négyzet.

A II. feladat 1. megoldásánál azt használtuk ki, hogy a két oldal mértani közepe éppen a téglalap területének négyzetgyöke, ami adott, számtani közepük pedig a kerület negyede. A 2.-nál geometria úton bizonyítottuk be sejtésünket, a 3. megoldásnál differenciálszámítással határoztuk meg a minimális kerületű téglalapot.

A következő feladat megoldásával együtt konzultáción hangzott el.

III. feladat

Adott kerületű háromszögek közül melyiknek maximális a területe?

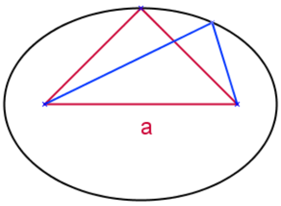
Jelöljük a háromszög oldalait a-val, b-vel és c-vel.

Rögzítsük az a oldal hosszát.

Rajzoljunk olyan ellipszist, amelyben a fókuszpontok távolsága éppen a, nagytengelye pedig

$$K - a = b + c$$

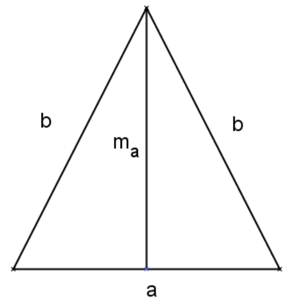
hosszúságú. Így az ellipszis ívén helyezkedik el a háromszög harmadik csúcsa, melynek távolságösszege a két fókuszponttól, azaz a háromszög alapjának végpontjaitól $b + c$. (9. ábra)



9. ábra

Adott kerület és rögzített alap esetén a háromszög területe maximális magasság esetén lesz a legnagyobb. A maximális magasság az ellipszis tető- és mélypontjánál lesz. Ekkor $b = c$, vagyis a terület rögzített a oldal mellett egyenlő szárú háromszög estén lesz maximális. Azaz bármely nem egyenlő szárú háromszöghöz létezik ugyanakkora kerületű és nagyobb területű egyenlő szárú háromszög, így elegendő az egyenlő szárúakra megoldani a feladatot.

Jelöljük az egyenlő szárú háromszög alapját a-val, szárait b-vel.(10. ábra)



10. ábra

Felírhatók a következő összefüggések:

$$a + 2b = K \text{ állandó}$$

$$2T = am_a,$$

és Pitagorasz tételéből:

$$m_a = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$2T = a\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = a\frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2} = a\frac{1}{2}\sqrt{2b + a}\sqrt{2b - a}$$

$$= a\frac{1}{2}\sqrt{K}\sqrt{K - 2a} =$$

$$= \frac{\sqrt{K}}{2}\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{K - 2a}$$

ahol $\frac{\sqrt{K}}{2}$ pozitív konstans.

A $\boldsymbol{T_8}$-cal jelölt tétel alapján írjuk fel $\sqrt{a}, \sqrt{a}, \sqrt{K - 2a}$ pozitív kifejezésekre a mértani és négyzetes közép közötti összefüggést:

$$\sqrt[3]{\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{K - 2a}} \leq \sqrt{\frac{\sqrt{a}^2 + \sqrt{a}^2 + \sqrt{K - 2a}^2}{3}} = \sqrt{\frac{K}{3}}.$$

Állandó négyzetes közép esetén a mértani közép akkor veszi fel a maximumát, ha a két közép egyenlő. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\sqrt{a} = \sqrt{K - 2a},$$

$$a = K - 2a$$

$$3a = K.$$

Vagyis adott kerületű háromszögek közül a szabályos háromszögnek maximális a területe.

A harmadik feladatnak egyféle megoldását jegyeztem le, melyben fontos szerepet játszott, hogy a háromszöget ellipszisben helyeztük el, ezek után a terület ötletes felírásával alkalmazni tudtuk az n db pozitív szám mértani és négyzetes közepére vonatkozó tételt.

IV. feladat

Bontsunk fel egy adott számot két nem negatív szám összegére úgy, hogy a tagok négyzetösszege a lehető legkisebb legyen![24]

Vezessük be a következő jelöléseket és írjuk le a feladatban megfogalmazott összefüggések:

$$h = x + y$$

h adott, $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Mennyi $x^2 + y^2$ minimuma?

1. megoldás

Írjuk fel x-re ésy-ra a $\boldsymbol{T_5}$-ben megfogalmazott számtani és négyzetes közép közötti összefüggést!

$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$\frac{h}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

Állandó számtani közép esetén a négyzetes közép akkor veszi fel a minimumát, ha a két közép egyenlő. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha

$$x = y$$

Vagyis a tagok négyzetösszege akkor minimális, ha a számot felezzük.

2. megoldás

Alkalmazzuk a $\boldsymbol{T_9}$-cel jelölt tételt:

$$x, y \in \mathbb{R}^+,$$

$$x + y = h \text{ állandó,}$$

az

$$x^2 + y^2$$

négyzetösszeg értéke $x = y$ esetén a legkisebb.

[24] Mozaik 10. 102.o. 6. feladat alapján

3. megoldás

Tekintsük a

$$x^2 + (h - x)^2 = 2x^2 - 2hx + h^2$$

kifejezést x másodfokú függvényének. Ennek a másodfokú függvénynek keressük a minimumát. Alkalmazzuk a $\boldsymbol{T_{10}}$-es tételt!

A másodfokú függvény szélsőértékhelye:

$$\frac{2h}{4} = \frac{1}{2}h.$$

Mivel $2 > 0$, ezért $x = \frac{1}{2}h$ helyen a függvénynek minimuma van.

$$y = h - \frac{1}{2}h$$

$$y = x,$$

vagyis a négyzetösszeg akkor a legkisebb, ha a számot felezem.

4. megoldás

A négyzetösszeg felírható x másodfokú függvényeként:

$$N(x) = 2x^2 - 2hx + h^2.$$

Ennek a másodfokú függvénynek keressük a minimumát. $N(x)$ folytonos az $[0, h]$ intervallumon, és kétszeresen differenciálható a $(0, h)$ intervallumon. Alkalmazzuk a $\boldsymbol{T_{13}}$-as tételt.

Az $N(x)$-szel jelölt függvénynek ott lehet szélsőérték, ahol az első derivált nulla.

$$N'(x) = 4x - 2h = 0 \text{ (} h \text{ konstans)}$$

$$x = \frac{1}{2}h$$

A szélsőérték fajtája a második derivált segítségével állapítható meg:

$$N''(x) = 4$$

$$4 > 0,$$

ezért $x = \frac{1}{2}h$-nél minimum van, értéke:

$$N\left(\frac{1}{2}h\right) = 2\frac{1}{4}h^2 - 2h\frac{1}{2}h + h^2 = \frac{1}{2}h^2.$$

Ellenőrizzük a végpontokban a függvényértékeket!

$$N(0) = 0 - 2x0 + h^2 = h^2$$

$$N(h) = 2h^2 - 2hh + h^2 = h^2$$

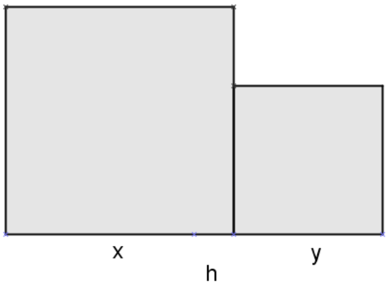
$$\frac{1}{2}h^2 < h^2,$$

minden esetben. $x = \frac{1}{2}h$ valóban minimum.

Azaz a négyzetösszeg akkor a legkisebb, ha a számot felezzük.

A feladatot geometriai példára is átfogalmazhatjuk:

Egy szakasz fölé két négyzetet rajzolunk. Mekkora oldalhosszúság esetén lesz a két négyzet területe minimális.[25] (11. ábra)



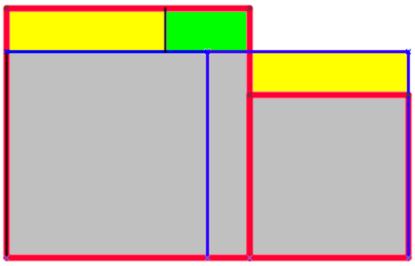
11. ábra

Legyen a szakasz hossza h, a négyzetek oldalának hossza x és y.

$$T = x^2 + y^2$$

minimumát keressük.

5. megoldás[26]



12. ábra

Az előző megoldások alapján az a sejtés, hogy egybevágó négyzetek esetén lesz a terület a lehető legkisebb. Ennek bizonyításához a 12. ábrán pirossal jelöltem az adott szakasz tetszőleges felosztásához tartozó négyzeteket, kékkel a két egybevágó négyzetet, melyek oldalhosszúsága $\frac{1}{2}h$. A pirossal és kékkel kiemelt négyzetek közös részét szürkére színeztem. A két, sárgával jelölt téglalap egybevágó, a két kék négyzet együttes területe a zöld téglalap területével kisebb a piros négyzetek területénél. A zöld téglalap egyik oldala az adott szakasz felosztásakor keletkezett részek különbsége, a másik oldala

[25] Hódi 10.17. feladat

[26] U.a. 46.o.

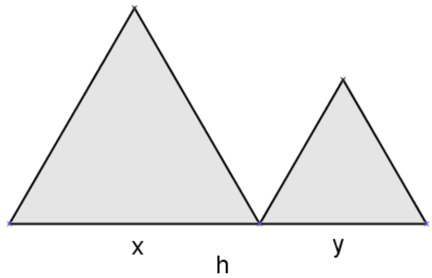
ennek a fele. Látható, hogy az adott szakasz kétféle felosztásához tartozó négyzetek területe annál kevésbé különbözik egymástól, minél kisebb a különbség az adott szakasz két része között.

A IV. feladat 1. megoldásánál azt használtuk ki, hogy a két szám (x és y) számtani közepe éppen az adott szám (h) fele. A 2. 3. 4. megoldásnál a szükséges átalakítások után az 1. rész megfelelő tételeit alkalmaztuk. Az 5. megoldás ötlete az volt, hogy az algebrai példa átfogalmazható geometriai feladattá. Ezután sejtésünket átdarabolással bizonyítottuk.

Vizsgálhatjuk a feladatot szabályos háromszögek esetén.

V. feladat

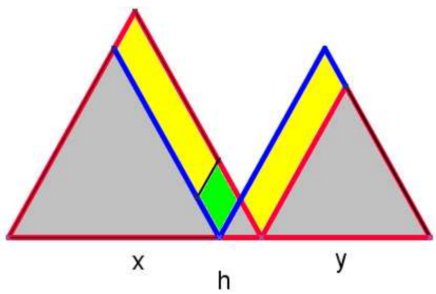
Adott hosszúságú szakaszt két részre vágunk, mindkét rész fölé egy-egy szabályos háromszöget rajzulunk. Milyen hosszúságú szakaszoknál lesz a két szabályos háromszög területének összege minimális?[27] (13. ábra)



13. ábra

Az V. feladatnál is alkalmazható a IV. feladat 1. 2. 3. és 4. megoldási menete, és az 5. feladathoz hasonló átdarabolás, melynek megoldási ötlete konzultáción hangzott el:

5. megoldás



14. ábra

Az a sejtés, hogy egybevágó szabályos háromszögek esetén lesz a terület a lehető legkisebb. Ennek bizonyításához a 14. ábrán pirossal jelöltem az adott

[27] Matematika 10. 69. o. 5. példa (Eredetileg a szakasz hossza 20 cm.)

szakasz tetszőleges felosztásához tartozó háromszögeket (oldalhosszúságaik x és $y, x > y$), és kékkel a két egybevágó háromszöget ($\frac{1}{2}h$ oldalhosszúsággal). A pirossal és kékkel kiemelt háromszögek közös részét szürkére színeztem. A két, sárgával jelölt paralelogramma egybevágó, mert a megfelelő szögeik megegyeznek, és rövidebb oldaluk

$$x - \frac{1}{2}h = (h - y) - \frac{1}{2}h = \frac{1}{2}h - y,$$

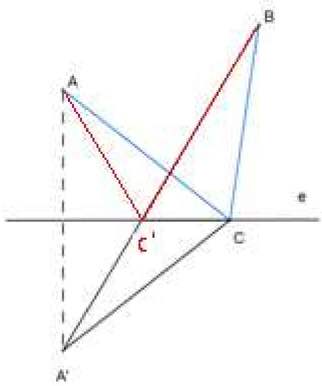
a hosszabbik y hosszúságú.

A két egybevágó háromszög együttes területe a zöld paralelogramma területével kisebb a piros háromszögek területénél. A zöld paralelogramma mindkettő oldala $\frac{1}{2}h - y$ hosszúságú. Vagyis az adott szakasz kétféle felosztásához tartozó részek területe annál kevésbé különbözik egymástól minél kisebb a zöld paralelogramma területe.

VI. feladat

Adott a síkban egy e egyenes és az egyenes ugyanazon oldalán A és B pontok. Hogyan lehet az A-ból B-be az e egyenes érintésével az ABC alakú legrövidebb úton eljutni?

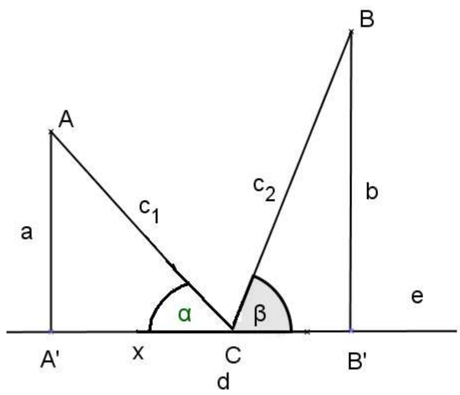
1. megoldás



15. ábra

A 15. ábrán kékkel jelöltem az e egyenesen tetszőlegesen felvett C ponthoz tartozó útvonalat. Tükrözzük az A pontot az e egyenesre. A tengelyes tükrözés távolságtartó tulajdonsága miatt A képe, A' ugyanakkora távolságra van az e egyenestől, mint A. Az $A'CB$ útvonal, vagyis a vele megegyező hosszúságú ACB útvonal akkor lesz a legrövidebb (pirossal jelölve $AC'B$), ha egyenes, vagyis az érintési pont az $A'B$ szakasz és az e egyenes metszéspontja.(15. ábra)

2. megoldás[28]



16.ábra

Alkalmazzuk a 16. ábrán látható jelöléseket. Pitagorasz tétele alapján felírhatók a következő összefüggések:

$$c_1 = \sqrt{a^2 + x^2}$$
$$c_2 = \sqrt{b^2 + (d - x)^2},$$

vagyis az ACB útvonal hossza kifejezhető x függvényeként (d az A és Bpontok e egyenesre való merőleges vetületeinek távolsága):

$$f(x) = c_1 + c_2 = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d - x)^2}$$
$$= (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} + (b^2 + (d - x)^2)^{\frac{1}{2}}$$

Ennek az $f(x)$ függvénynek keressük a minimumát. Alkalmazzuk a $\boldsymbol{T_{13}}$-as tételt.

Az $f(x)$ függvénynek ott lehet szélsőérték, ahol az első derivált nulla (a, b, d konstans).

$$f'(x) = \frac{1}{2}(a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x + \frac{1}{2}(b^2 + (d - x)^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2d + 2x) =$$
$$= \frac{2x}{2\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{-2d + 2x}{2\sqrt{b^2 + (d - x)^2}} =$$
$$= \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d - x}{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}} =$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = 0$$
$$\cos\alpha = \cos\beta$$
$$\alpha = \beta$$

[28] Beke 79.o. 5. kidolgozott példa

Vagyis az ACB útvonal akkor a legrövidebb, ha az AC útszakasz ugyanakkora szöget zár be az e egyenessel, mint a CB.

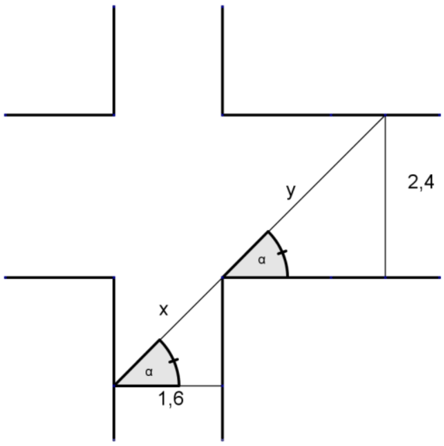
(Az A pontból induló e tükörből visszaverődő B-be érkező fénysugár is ugyanezt az utat járja be.)

A VI. feladat 1. megoldása elemi matematika szemináriumon is elhangzott, 2. megoldása szögfüggvényekre való ötletes visszavezetése miatt keltette fel a figyelmemet.

A következő feladat megoldásával együtt konzultáción hangzott el.

VII. feladat

Egy épületben egy $1{,}6\ m$ széles és egy $2{,}4\ m$ széles folyosó keresztezi egymást. Be tudunk-e fordulni $6\ m$ hosszú létrával a $2{,}4\ m$ széles folyosóról az $1{,}6\ m$ széles folyosóra.(17. ábra)



17. ábra

Befordulás közben a létra a 16. ábrán látható módon érinti a folyosó sarokélét. Ebben a helyzetben meghatározható, hogy mekkora lehet a létra minimális hosszúságú.

A két egyvonalas szög egyállású. A jelölt derékszögű háromszögekre felírhatók a következő összefüggések.

$$x = \frac{1{,}6}{\cos\alpha}$$

$$y = \frac{2{,}4}{\sin\alpha}$$

$$f(\alpha) = x + y = \frac{1{,}6}{\cos\alpha} + \frac{2{,}4}{\sin\alpha}$$

minimumát keressük.

Alkalmazzuk a $\boldsymbol{T_{13}}$-as tételt. Az $f(\alpha)$-val jelölt függvénynek ott lehet szélsőérték, ahol az első derivált nulla.

$$f'(\alpha) = (1{,}6(\cos\alpha)^{-1} + 2{,}4(\sin\alpha)^{-1})'$$
$$= -1{,}6(\cos\alpha)^{-2} \cdot (-\sin\alpha) - 2{,}4(\sin\alpha)^{-2}\cos\alpha$$
$$= \frac{1{,}6\sin\alpha}{(\cos\alpha)^2} - \frac{2{,}4\cos\alpha}{(\sin\alpha)^2} = 0$$
$$1{,}6(\sin\alpha)^3 = 2{,}4(\cos\alpha)^3$$
$$(\tan\alpha)^3 = \frac{2{,}4}{1{,}6}$$
$$(\tan\alpha)^3 = 1{,}5$$
$$\tan\alpha \approx 1{,}1447$$
$$\alpha \approx 48{,}86°$$

A szélsőérték fajtája a második derivált előjeléből állapítható meg:

$$f''(\alpha) = -1{,}6 \cdot (-2)(\cos\alpha)^{-3} \cdot (-\sin\alpha) \cdot (-\sin\alpha) - 1{,}6 \cdot (-\cos\alpha)(\cos\alpha)^{-2} - 2{,}4 \cdot (-2)(\sin\alpha)^{-3}\cos\alpha \cdot \cos\alpha + 2{,}4 \cdot \sin\alpha \cdot (\sin\alpha)^{-2}$$
$$= \frac{3{,}2(\sin\alpha)^2}{(\cos\alpha)^3} + \frac{1{,}6\cos\alpha}{(\cos\alpha)^2} + \frac{4{,}8(\cos\alpha)^2}{(\sin\alpha)^3} + \frac{2{,}4\sin\alpha}{(\sin\alpha)^2} =$$
$$= \frac{3{,}2(\sin 48{,}86°)^2}{(\cos 48{,}86°)^3} + \frac{1{,}6\cos 48{,}86°}{(\cos 48{,}86°)^2} + \frac{4{,}8(\cos 48{,}86°)^2}{(\sin 48{,}86°)^3} + \frac{2{,}4\sin 48{,}86°}{(\sin 48{,}86°)^2}$$
$$\approx 6{,}37 + 2{,}43 + 4.86 + 3{,}19 \approx 16{,}85 > 0,$$

vagyis $\alpha \approx 48{,}86°$ -nál valóban minimum van, értéke:

$$\frac{1{,}6}{\cos 48{,}86°} + \frac{2{,}4}{\sin 48{,}86°} \approx 2{,}43 + 3{,}19 \approx 5.62 < 6$$

azaz 6 m-es létrával nem tudunk befordulni.

Az eredeti feladat megoldásához a differenciálszámítást használtuk, mivel itt elemi megoldást nem ismerünk. Ha azonban a két folyosó keresztmetszete egyforma méretű, akkor a következő szép elemi megoldás adódik.

$$f(\beta) = x + y = \frac{1}{\cos\beta} + \frac{1}{\sin\beta}$$

minimumát keressük.

Felhasználva a $\boldsymbol{T_6}$ -ban jelölt összefüggést felírható $\sin\beta$ -ra és $\cos\beta$ -ra a harmonikus és négyzetes közép közötti összefüggés.

$$\frac{2}{\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\cos\beta}} \leq \sqrt{\frac{(\sin\beta)^2+(\cos\beta)^2}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Állandó négyzetes közép esetén a harmonikus közép akkor veszi fel a maximumát, ha a két közép egyenlő. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\sin\beta = \cos\beta$$

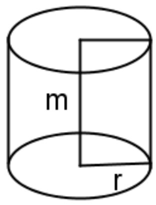
$$\beta = 45°$$

$$\frac{1}{\cos 45°}+\frac{1}{\sin 45°} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \approx 2{,}83,$$

azaz 1 m-es folyosók kereszteződésébe legfeljebb 2,83 m hosszú létrával lehet befordulni.

VIII. feladat

Adott felszínű egyenes hengerek közül melyiknek maximális a térfogata?(18. ábra)



18. ábra

Vezessük be az alábbi jelöléseket: legyen az egyenes henger alapkörének sugara r, magassága m, a felszíne A, térfogata V.

Tudjuk, hogy

$$A = 2r^2\pi + 2r\pi m$$

és

$$V = r^2\pi m.$$

Mennyi V maximuma, ha A állandó?

1. megoldás

$$A = 2r^2\pi + 2r\pi m = 2r\pi(r+m)$$

$$m = \frac{A}{2r\pi} - r,$$

így

$$V = r^2\pi\left(\frac{A}{2r\pi} - r\right) = \frac{r^2\pi A}{2r\pi} - r^3\pi = r\left(\frac{A}{2} - r^2\pi\right).$$

Szorozzuk be mindkét oldalt $2V\pi$-vel:

$$2V^2\pi = 2r^2\pi\left(\frac{A}{2} - r^2\pi\right)\left(\frac{A}{2} - r^2\pi\right)$$

V ugyanott maximális, ahol $2V^2\pi$.

$$2r^2\pi\left(\frac{A}{2} - r^2\pi\right)\left(\frac{A}{2} - r^2\pi\right)$$

három olyan pozitív tényező szorzata, melynek összege állandó:

$$2r^2\pi + \left(\frac{A}{2} - r^2\pi\right) + \left(\frac{A}{2} - r^2\pi\right) = A.$$

Alkalmazzuk a $\boldsymbol{T_9}$. tételt.Akkor lesz a térfogat maximális, ha

$$2r^2\pi = \left(\frac{A}{2} - r^2\pi\right).$$

Ebből:

$$3r^2\pi = \frac{A}{2}$$

$$r = \sqrt{\frac{A}{6\pi}}$$

és

$$m = 2\sqrt{\frac{A}{6\pi}}.$$

A maximális térfogat pedig

$$V = \sqrt{\frac{A}{6\pi}}\left(\frac{A}{2} - \frac{A}{6\pi}\pi\right) = \frac{1}{3}A\sqrt{\frac{A}{6\pi}}.$$ [29]

2. megoldás

Fejezzük ki újra m-et az első egyenletből:

$$m = \frac{A}{2r\pi} - r,$$

így

$$V(r) = r^2\pi\left(\frac{A}{2r\pi} - r\right) = \frac{r^2\pi A}{2r\pi} - r^3\pi = -r^3\pi + \frac{A}{2}r$$

[29] Hódi 77.o.

A térfogat r harmadfokú függvénye. $V(r)$ folytonos az $\left[0, \sqrt{\frac{A}{2\pi}}\right]$ intervallumon, és kétszeresen differenciálható a $\left(0, \sqrt{\frac{A}{2\pi}}\right)$ intervallumon.

Alkalmazzuk a $\boldsymbol{T_{13}}$-as tételt.

A $V(r)$ függvénynek ott lehetséges szélsőértéke, ahol $V'(r) = 0$.

$$V'(r) = -3\pi r^2 + \frac{A}{2},$$

mert A és π állandó.

$$-3\pi r^2 + \frac{A}{2} = 0$$

$$r^2 = \frac{A}{6\pi}$$

$$r = \sqrt{\frac{A}{6\pi}}$$

A szélsőérték fajtája a második derivált előjeléből állapítható meg:

$$V''(r) = -6\pi r$$

$$V''\left(\sqrt{\frac{A}{6\pi}}\right) = -6\pi\sqrt{\frac{A}{6\pi}} < 0$$

ezért $r = \sqrt{\frac{A}{6\pi}}$ estén a függvénynek maximuma van, értéke:

$$V\left(\sqrt{\frac{A}{6\pi}}\right) = \sqrt{\frac{A}{6\pi}}\left(\frac{A}{2} - \frac{A}{6\pi}\pi\right) = \frac{A}{3}\sqrt{\frac{A}{6\pi}}.$$

Ellenőrizzük a végpontokban a függvényértékeket!

$$V(0) = 0\left(\frac{A}{2} - 0\pi\right) = 0$$

$$V\left(\sqrt{\frac{A}{2\pi}}\right) = \sqrt{\frac{A}{2\pi}}\left(\frac{A}{2} - \frac{A}{2\pi}\pi\right) = 0$$

$$\frac{A}{3}\sqrt{\frac{A}{6\pi}} > 0,$$

vagyis $\frac{A}{3}\sqrt{\frac{A}{6\pi}}$ valóban maximum.

Az ehhez a sugárhoz tartozó magasság:

$$m = 2\sqrt{\frac{A}{6\pi}}.$$

Adott felszínű egyenes hengerek közül az $\frac{A}{3}\sqrt{\frac{A}{6\pi}}$ sugarú és $2\sqrt{\frac{A}{6\pi}}$ magasságú hengernek maximális a térfogata.

A VIII. feladat 1. elemi megoldása egyszerűbb, mint a differenciálszámítás módszereit alkalmazó 2., előbbihez azonban ismerni kell a $\boldsymbol{T_9}$-cel jelölt tételt.

Befejezés

Szakdolgozatomban bemutattam a szélsőérték-feladatok megoldási módszerei közül a két pozitív, és *n* darab pozitív számra felírható számtani, mértani, harmonikus és négyzetes közép közötti egyenlőtlenségekre, a másodfokú függvény vizsgálatára és a differenciálszámításra vonatkozó tételeket, melyeket egyéb elemi matematikából ismert módszerekkel együtt a feladatok megoldásánál alkalmaztam. Nem definiáltam, csak analízis tanulmányaim alapján felhasználtam az intervallum, monotonitás, abszolút szélsőérték, korlátosság, határérték, folytonosság és a differenciálhatóság fogalmát, mert nem a differenciálszámítás bevezetése volt a célom. Szakdolgozatom mindkét részéből kihagytam az ún. optimalizálási módszereket, mert ezeket eddigi egyetemi tanulmányaim alatt nem tanultam a szakdolgozat szintjének megfelelő részletességgel.

A feladatokat igyekeztem nehézségi sorrendben, egymásra épülve közölni, kezdve véleményem szerint a témakör alapfeladatával. A megoldásoknál a bevezetőben megfogalmazott célkitűzésemet követtem: a módszerek többsége gimnáziumi tananyagra épít, ezek mellett a feladatok többségénél megtalálható a differenciálszámítással történő megoldás is.

Szakdolgozatom anyaggyűjtése során sok új példával és ötlettel találkoztam, ezeket minden bizonnyal a későbbiekben is tudom majd alkalmazni.

Felhasznált irodalom

Analízis 1.	Laczkovich Miklós – T. Sós Vera: Analízis. 1. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2005.
Beke	Dr. Beke Manó: Bevezetés a differenciál- és integrálszámításba. 3. kiadás. Gondolat, Budapest, 1965.
Hódi	Hódi Endre: Szélsőérték-feladatok elemi megoldása. 3., átdolg. kiadás. Typotex, Budapest, 1994.
Matematika. 10.	Hajnal Imre - Számadó László - Békéssy Szilvia: 10. Matematika a gimnáziumok számára. 2. kiadás. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2003.
Mozaik 10.	Kosztolányi József - Kovács István - Pintér Klára - Dr. Urbán János - Vincze István: Sokszínű matematika. 10. Mozaik, Szeged, 2008.
Reiman	Reiman István: A geometria és határterületei. Gondolat, Budapest, 1986.
Szikszai	Dr. Szikszai József: A hatványközepek. Középiskolai szakköri füzet. Tankönyvkiadó, Budapest, 1987.
GeoGebra	GeoGebra rajzolóprogram, In: www.geogebra.org (telepítve: 2010. 04. 08)