

**EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR**



**Integrál a  
relativisztikus kvantummechanikában**

**Szakdolgozat**

*Témavezető:*

**Mezei István**

adjunktus

ELTE TTK

Alkalmazott Analízis és  
Számításmatematikai Tanszék

*Készítette:*

**Finta Zsanett**

ELTE TTK

Matematika Bsc.  
tanári szakirány

Budapest, 2010. május 25.

---

## Tartalomjegyzék:

1. A határozott integrál ( Riemann-féle integrál )
  - 1.1 Az integrálszámítás kialakulása:
  - 1.2 A határozott integrál definíciója:
  - 1.3 A primitív függvény fogalma és a Newton-Leibniz-formula:
  - 1.4 A Riemann-integrál alkalmazásai a matematikában:
2. Klasszikus mechanika és kvantummechanika:
  - 2.1 Pontszerű test kinematikája:
    - 2.11 Pontszerű test sebessége és gyorsulása:
    - 2.12 Különböző mozgások sebessége és gyorsulása:
  - 2.2 A Newton törvények:
    - 2.21 Newton második törvénye – a dinamika alaptörvénye
  - 2.3 A mechanikai munka:
    - 2.31 Néhány ismert erő munkája:
  - 2.4 A harmonikus rezgőmozgás:
    - 2.41 Csillapított rezgések:
  - 2.5 Fourier analízis:
  - 2.6 A hővezetés egyenlete:
  - 2.7 Az energia fajtái, a mechanikai energia megmaradásának elve:
    - 2.71 Mozgási energia:
    - 2.72 Gravitációs energia:
  - 2.8 Termodinamika:
    - 2.81 Izoterm állapotváltozás:
    - 2.82 Adiabatus állapotváltozás :
    - 2.83 Izochor állapotváltozás:
    - 2.84 Izobár állapotváltozás:
  - 2.9 A Maxwell-egyenletek:
  - 2.10 Hatáselv:
  - 2.11 A Schrödinger-egyenlet:
    - 2.11.1 A Schrödinger-egyenlet megoldása:
    - 2.11.2 Peremérték-feladatok:
    - 2.11.3 Egy dimenziós (lineáris) harmonikus oszcillátor:
    - 2.11.4 Schrödinger macskája:

## **Előszó:**

A matematika és a fizika nem létezik egymás nélkül, számtalan területen fonódnak össze. Dolgozatomban az integrálszámítás alkalmazását vizsgálom a mechanika egyes ágaiban, a klasszikus és a kvantummechanika egyes folyamatainak leírásában. A tömegpont mozgásának leírása során rámutatok a matematika kapcsolatára a mozgást leíró mennyiségek között. Kitérek a mozgás különböző fajtáira és a kvantummechanika főbb összefüggéseire, a munka és az energia fogalmára, fajtáira, végül a kvantumfizika legfontosabb egyenleteire. A dolgozat elején pár mondatban kitérek az integrálszámítás kialakulására és fontosabb fogalmaira.

# 1. A határozott integrál ( Riemann-féle integrál )

## 1.1 Az integrálszámítás kialakulása:

**Gottfried Wilhelm Leibniz** (Lipcse, 1646. július 1. – Hannover, 1716. november 14.) polihisztor volt: jogász, diplomata, történész, matematikus, fizikus és filozófus egyszerre. Nagy Frigyes azt mondta róla „önmagában egy akadémia”.

Leibniz a XVII. század vége és a XVIII. század eleje között alkotott, egyike volt a német felvilágosodás alapítóinak. Newtontól függetlenül létrehozta a matematikai analízist. Hozzájárult a formális logika megteremtéséhez, az univerzális, tudományos kalkulus bevezetésével. Descartes-hoz hasonlóan az általános megismerési módszert kereste.

Apja a Lipcsei Egyetem erkölcsstanprofesszora volt. Kiváló kapcsolata volt a fiával, nagy gonddal és szeretettel nevelte, de 1652-ben bekövetkező halála miatt szellemi hagyatékként fiára már csak óriási könyvtárát hagyhatta. Leibniz tehetsége már korán megnyilvánult, 15 éves korában már egyetemi tanulmányait is megkezdte. Kezdetben Lipcsében jogot, majd Jénában matematikát hallgatott, majd az egyetem befejezése után Nürnbergben élt, ahol a francia és holland természettudósok munkáit tanulmányozta. 1668-tól a mainzi választófejedelem vette pártfogásába, s így külföldi tanulmányútra indulhatott: 1672-1676 közt Párizsban Descartes, Pascal és a természettudósok munkáival ismerkedett.

### *Matematika:*

Leibniz széles körben publikálta is eredményeit, és a svájci Bernoulli család segítségével az analízis fokozatosan kezdett terjedni Európában. Számológép konstruálásával is foglalkozott. Leibniz neve fémjelezte igen hosszú ideig a kombinatorikát, kutatta a tizedes törteket.

Alkalmazta a sorfejtések módszereit is. Newtontól függetlenül felfedezte a differenciál- és integrálszámítást. A mai jelölések főként Leibniztől származnak. (1686) A ma használatos matematikai jelek közül tőle származik az egyenlő (=), a szorzás (.), a hasonlóság ( $\sim$ ), az egybevágóság ( $\cong$ ), a differenciálhányados ( $dy/dx$ ), az integrál ( $\int$ ) jele. Ő használta először a „függvény”, a „koordináta”, a „calculus differentialis” (differenciálszámítás), a „calculus integralis” (integrálszámítás) elnevezéseket.

### *Fizika:*

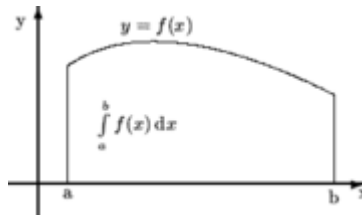
Ő volt az első külföldi tagja a Francia Tudományos Akadémiának. Hozzájárult az impulzus, a mozgási és helyzeti energia fogalmának kialakításához. Leibniz szerint: értelmetlen abszolút térről és abszolút időről beszélni, mint ahogy azt Newton gondolta. Úgy gondolta a tér nem más, mint két egyidejűleg létező tárgy közötti távolság, az idő pedig két esemény közti távolság. Hasonló módon, értelmetlenség abszolút időről beszélni, mert az idő fogalma az „események egymást követő rendjét” fejezi ki. Az idő fogalma relációs fogalom: az események közti viszonyokra vonatkozik.

**Newton** és Leibniz egymástól függetlenül dolgozták ki a differenciál és integrálkalkulust, egymástól eltérő szemlélettel. Míg Newton, akárcsak Galilei, a fizika (kinematika) felől közelítette meg a derivált fogalmát, addig Leibniz a Fermat és Pascal módszeréhez hasonlóan a görbéhez húzott érintő egyenes felől közelítette meg a differenciálszámítást. Bár Newton a fluxiómódszert Leibniz előtt dolgozta ki, az utókor mégis Leibniz módszerét választotta, és ez vált elsődlegessé a matematikában. Habár Newton a kora egyik legnagyobb tudósa volt, életének utolsó huszonöt évét megkeserítette az általa plágiummal vádolt Leibnizcel folytatott vita, ami nem csak a két tudós életét keserítette meg, hanem sajnos válaszfalat emelt a brit és az európai kontinensen élő matematikusok közé, és haláluk után is folytatódott. A szigetországi matematikusok csak a 19. században tértek át a jóval praktikusabb leibnizi írásmódra, ami jelentős hátrányba hozta a brit matematikai analízist.

### ***1.2 A határozott integrál definíciója:***

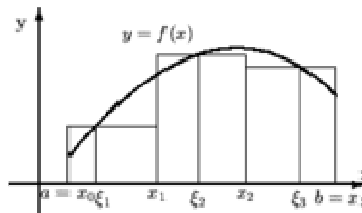
A határozott integrál fogalma – a differenciálhányadoshoz hasonlóan – számos, a matematikában, fizikában és a természettudomány egyéb területein alkalmazott gondolatmenet közös általánosításaként született meg.

**Riemann** (1826-1866) vezette be a függvénygörbe alatti terület első precíz definícióját. Őrőla nevezzük ezt Riemann-integrálnak. Általában erre használjuk a határozott integrál megnevezést. Az integrál jellemzői az integrálandó  $f(x)$  függvény és az  $[a,b]$  intervallum, amelyen integrálunk. Az  $a$ -t az *integrál alsó határának*, a  $b$ -t az *integrál felső határának* nevezzük.



*Integrálható (azon belül folytonos) függvény.*

Osszuk fel az intervallumot  $n$  részre valamilyen  $F_n = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  halmazzal, ahol  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Ezt az  $F_n$  halmazt az  $[a, b]$  intervallum egy *felosztásának* nevezzük. A felosztás *finomságának* nevezzük a felosztás leghosszabb részintervallumának a hosszát. Ennek a jele:  $d(F_n)$



*Az integrálási intervallum egy három részintervallumból álló felosztása*

Mindegyik  $[x_{i-1}, x_i]$  részintervallumból ( $1 \leq i \leq n$ ) kiválasztunk tetszőlegesen egy  $\xi_i$  elemet. Állítsunk  $f(\xi_i)$  magasságú téglalapokat a részintervallumokra, majd összegezzük ezek területét, így megkapjuk az adott felosztással adódó területet, amit *közelítő összegnek* nevezünk:

$$\sigma(F_n) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Ez a  $\Delta x_i = (x_i - x_{i-1})$  jelöléssel a így is felírható:

$$\sigma(F_n) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n$$

A felosztásokból az intervallumok számának növelésével készíthetünk végtelen sorozatokat:  $\{F_n\} = F_1, F_3, F_4, \dots$ . Ezeket *felosztássorozatoknak* nevezzük. Ha egy olyan felosztássorozatot veszünk, melyre a  $\{d(F_n)\} = d(F_1), d(F_2), \dots$  sorozat a nullához tart,

akkor a felosztássorozatot *normális felosztássorozatnak* vagy *minden határon túl finomodó felosztássorozatnak* nevezzük.

Ha a közelítő összegek sorozata minden normális felosztássorozat esetén konvergens, akkor azt mondjuk, hogy a függvény *Riemann-integrálható* az  $[a,b]$  intervallumon, és az határértékét a függvény *Riemann-integráljának* nevezzük.

Jele:  $\int_a^b f(x) dx$  vagy röviden:  $\int_a^b f$ .

$$d(F_n) \rightarrow 0 \Rightarrow \sigma(F_n) \rightarrow \int_a^b f$$

Összefoglalva az eddigieket:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

ahol

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max \{x_i - x_{i-1} | 1 \leq i \leq n\} = 0$$

Fontos megjegyezni, hogy minden szakaszosan folytonos függvény Riemann-integrálható.

Az alsó- és a felső integrálközelítő összeg:

Legyen:

$m_k := \text{az } [x_{k-1}, x_k] \text{ intervallumbeli függvényértékek infimuma (folytonos függvényre minimum)}$

$M_k := \text{az } [x_{k-1}, x_k] \text{ intervallumbeli függvényértékek supremuma (folytonos függvényre maximum)}$

$$S_* := \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \quad \text{alsó összeg}$$

$$S^* := \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k \quad \text{felső összeg}$$

Ha megnézzük az összes lehetséges felosztást, észrevehető, hogy mindegyikhez tartozik egy alsó ill. egy felső összeg. Amennyiben az alsó összegek halmazának supremuma megegyezik a felső összegek halmazának infimumával, akkor az  $f$  függvényt az  $[a,b]$ -n integrálhatónak nevezzük, a fenti közös értéket az  $f$  függvény  $[a,b]$ -re vonatkozó integráljának nevezzük.

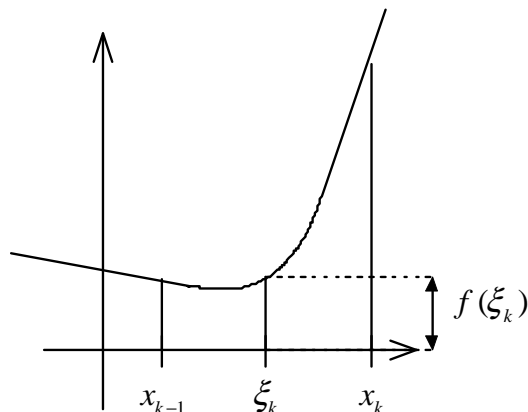
Jele:

$$\int_a^b f(x) dx \quad (:= \sup\{S_*\} = \inf\{S^*\}) \quad (\text{Riemann-integrál})$$

### Integrálközelítő összeg

$$\text{Legyen } S = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \quad S_* \leq S \leq S^*$$

(Leibniz latin betűkre cserélte a görög abc betűit.)



Ha létezik az  $\int_a^b f$  integrál, akkor  $s_n \leq \int_a^b f \leq S_n$ . Ekkor az integrált „két érték

közé tudjuk szorítani”. Ezt nevezzük (Darboux-féle) integrálközelítő összegnek.

### **1.3 A primitív függvény fogalma és a Newton-Leibniz-formula:**

Az  $I$  (véges vagy végtelen) intervallumon értelmezett  $f$  függvény *primitív függvényének* nevezzük az  $F$  függvényt, ha  $F'(x)=f(x)$  teljesül minden  $x \in I$  esetén. (Azaz ha  $F$  deriváltja az eredeti  $f$  függvény.)



Ha egy  $F(x)$  függvény primitív függvény, akkor  $F(x)+C$  is az, ahol  $C$  tetszőleges valós szám, mivel a konstans hozzáadása a deriváltat nem változtatja meg. Egy függvénynek végtelen sok primitív függvénye van, de ezeket konstans hozzáadásával megkapjuk egymásból. Ezt grafikusán is egyszerűen be lehet látni: derivált a függvény „változási gyorsaságát” jelenti, azaz a grafikonjának a meredekségét. Ha hozzáadunk egy konstans, akkor a függvény képe függőlegesen eltolódik. Természetesen ezzel minden pontban ugyanaz marad a meredeksége, így a függvény derivált függvénye ugyanaz marad.

*Például:* Az  $f(x)$  legyen a  $\cos x$  függvény. Ennek egyik primitív függvénye a  $\sin x$  függvény, hiszen  $(\sin x)' = \cos x$ , de a  $\sin x + 8$  függvény is primitív függvény. Általánosan azt mondhatjuk, hogy egy függvény pontosan akkor primitív függvénye a  $\cos x$  függvénynek, ha felírható  $\sin x + C$  alakban, ahol  $C$  valós szám.

Bebizonyítható, hogy a határozott integrál a következőképpen számolható:

*Newton–Leibniz-formula:*  $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$ , ahol az  $F$  függvény az  $f$  függvény egyik primitív függvénye, a  $[F(x)]_a^b$  pedig egy új jelölés az  $F(b)-F(a)$  kifejezésre.

## 1.4 A Riemann-integrál alkalmazásai a matematikában:

### Görbe alatti terület:

Az  $\int_a^b f(x) dx$  határozott integrál **geometriai jelentése:** az  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = 0$

egyenesek és az  $y = f(x)$  függvénygörbe által határolt síkidom előjeles területe (abban az értelemben, hogy az  $x$ -tengely alá eső területrészt az integrál negatív előjellel számolja).

Ebből következik, hogy az  $f(x)$  és  $g(x)$  függvénygörbék, valamint az  $x = a$  és  $x = b$  egyenesek által határolt síkidom területe:

$$\left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|$$

Az  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in [a, b]$  **paraméteres alakban** megadott görbe alatti terület:

$$\int_a^b x'(t)y(t) dt$$

### Átlagszámítás:

Legyen  $f$  az  $[a,b]$ -n folytonos, ekkor az  $f$  átlaga az  $[a,b]$ -n:

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (= \bar{f}(a,b))$$

Tetszőleges, az  $[a,b]$ -n intervallumon folytonos  $f$  függvényhez létezik olyan  $c \in (a,b)$  hely,

ahol  $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ . (Az integrálszámítás középértéktétele)

### Szektorterület:

Az  $x = x(t), y = y(t), t \in [a, b]$  paraméteres alakban megadott görbéhez az origóból húzott szektor területe:

$$\frac{1}{2} \int_a^b [x(t)y'(t) - x'(t)y(t)] dt$$

Az  $r = r(\varphi), \varphi \in [\alpha, \beta]$  polárkoordinátás alakban megadott görbéhez az origóból húzott szektor területe:

$$\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi$$

### Ívhosszszámítás:

Ha az  $f(x)$  függvény az  $[a,b]$  intervallumon differenciálható, és  $f'(x)$  ugyanitt folytonos, akkor a függvénygörbe hosszúsága az adott intervallumon:

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Az  $x = x(t), y = y(t), t \in [a, b]$  paraméteres alakban megadott folytonos ív hossza:

$$\int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

Az  $r = r(\varphi)$ ,  $\varphi \in [\alpha, \beta]$  polárkoordinátás alakban megadott folytonos ív hossza:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[r(\varphi)]^2 + [r'(\varphi)]^2} d\varphi$$

### **Térfogatszámítás:**

Ha az  $x$  tengelyre forgásszimmetrikus test palástjának a tengellyel párhuzamos ívét a folytonos  $f(x)$  függvény írja le, akkor a forgástestnek a tengely  $[a, b]$  szakaszára eső térfogata:

$$\pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Az  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in [a, b]$  paraméteres alakban megadott folytonos ív  $x$ -tengely körüli megforgatásával nyert forgástest térfogata:

$$\pi \int_a^b y^2(t) x'(t) dt$$

### **Felzínszámítás:**

Ha az  $x$  tengelyre forgásszimmetrikus test palástjának a tengellyel párhuzamos ívét a folytonos  $f(x)$  függvény írja le, akkor a tengely  $[a, b]$  szakasza körüli palást felszíne:

$$2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Az  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in [a, b]$  paraméteres alakban megadott folytonos ív  $x$ -tengely körüli megforgatásával nyert forgástest palástjának felszíne:

$$2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

### Súlypontszámítás:

Az  $f(x)$  függvénygörbe  $a$  és  $b$  abszcisszájú pontok által határolt **ívének** a súlypontja:

$$x_s = \frac{\int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx} \quad y_s = \frac{\int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx}$$

Ugyanezen ív alatti **lemez** súlypontja:

$$x_s = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} \quad y_s = \frac{\int_a^b f^2(x) dx}{2 \int_a^b f(x) dx}$$

Az ívet az  $x$ -tengely körül megforgatva, a kapott **forgástest** súlypontjának abszcisszája pedig:

$$x_s = \frac{\int_a^b x f^2(x) dx}{\int_a^b f^2(x) dx}$$

## 2. Klasszikus mechanika és kvantummechanika:

A mechanika két fő ága a *klasszikus mechanika* és a *kvantummechanika*. Bár ezeket alkalmazási területük közötti különbségek miatt külön tárgyaljuk, a klasszikus mechanika a kvantummechanika részének, úgynevezett speciális esetének tekinthető.

A klasszikus mechanika tudományágát gyakran az úgynevezett egzakt tudomány, (angolul exact science) példaképének tekintjük. Különös jellemzője tételeinek (kísérleti) megfigyeléssel való megalapozása és algebrai képletekkel való leírása, továbbá a megfigyelés helyességének bizonyítása.

A klasszikus mechanika Galilei majd Newton által kimunkált megfogalmazása alapvetően a "tömegpont" absztrakciójára épül. Ennek keretében egy nagyobb test mozgásának leírása úgy képzelhető el, hogy gondolatban a testet sok apró elemi *tömegpontra* bontjuk. A mechanika ezen területe a makroszkópikus fizikai tárgyak mozgását írja le a rájuk ható erők hatására, azonban csak a múlt század elején kifejlesztett kvantummechanika képes leírni az anyag molekuláknál kisebb atomok és szubatomi részecskék viselkedését erők hatására, míg a kvantummechanika tárgya ezzel szemben hagyományosan az elemi részecskék fizikájának elmélete.

### ***A klasszikus (newtoni) mechanika részterületei:***

*A klasszikus vagy newtoni mechanika* a testek mozgásának leírásával és az azokat okozó törvényekkel foglalkozik.

*Fő területei:*

- Kinematika (mozgástan): feladata a testek mozgásának leírása;
- Dinamika (erőtan): a testek mozgását okozó törvényszerűségeket vizsgálata;
- Statika: a testek erőhatás alatti egyensúlyának feltételeivel foglalkozik.

*További részterületei:* Newtoni mechanika, Hamilton-féle mechanika, Lagrange-féle mechanika, égimechanika, asztrodinamika, szilárdtest fizika, akusztika, folyékony anyagok (angolul "fluid") mechanikája, talajmechanika, kontinuum mechanika, hidraulika, folyadékok statikája, alkalmazott mechanika, vagy mérnöki mechanika, biomechanika, biofizika, statisztikus mechanika, Einstein-féle mechanika és univerzális (általános) gravitáció.

A vizsgált objektumok lehetnek pontszerűek, illetve kiterjedtek, merevek, vagy rugalmasak, halmazállapotuk szerint pedig szilárdak, folyékonyak és gázneműek (hidrodinamika és aerodinamika).

## ***A kvantummechanika részterületei:***

A *kvantummechanika* a természet, a fizikai rendszerek jelenleg érvényesnek gondolt elmélete, amelyik túllépett a klasszikus fizika fogalmain. Megállapításai a klasszikus fizikáétól főleg kis méretek, energiák és hőmérsékletek esetén különböznek. A kvantummechanika kísérletileg ellenőrizhető jóslatokat szolgáltat olyan jelenségekre, amikre a klasszikus mechanika és a klasszikus elektrodinamika nem képes, mint például a kvantálás, a hullám-részecske kettősség, a határozatlansági elv és a kvantumösszefonódás. A **kvantummechanika** egy rendszer pillanatnyi állapotát a hullámfüggvénnyel ábrázolja, ami a mérhető tulajdonságok - másképpen megfigyelhető mennyiségek - valószínűségi eloszlását írja le.

### *Részterületei:*

- Részecskefizika: részecskék szerkezete, mozgása és köztük előálló reakciók
- Magfizika: atommag mozgása, szerkezete és reakcióik
- Kondenzátumfizika: gázok, szilárd anyagok, folyadékok és gázok fizikája.
- Statisztikus kvantum mechanika: részecskekomplexumok, aggregátumok

## ***2.1 Pontszerű test kinematikája:***

### ***2.11 Pontszerű test sebessége és gyorsulása:***

A **sebesség** egy pontszerű test (vagy egy kiterjedt test egyik pontja) mozgásának jellemzésére szolgáló fizikai fogalom. Szokásos jelölése: **v**, a *velocitas* (latin) = sebesség szó alapján.

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds(t)}{dt} = \dot{s}(t)$$

A definícióból látszik, hogy az elmozdulás meghatározható a sebesség integráljából, legyen bármilyen fajta a mozgás. A sebesség-idő függvény és a helyzetvektor kezdeti értéke ismeretében meghatározható a hely-idő függvény.

Ábrázoljuk a sebesség  $x$  komponensét az idő függvényében és osszuk fel a  $t_1$  és  $t_2$  időpontok közötti tartományt keskeny  $\Delta t$  szélességű intervallumokra. Az  $i$ -edik téglalap  $v_x(t_i)\Delta t$  területe a  $t_i$  és  $t_i + \Delta t$  időpontok közötti elmozdulás  $x$  komponensének,  $\Delta x_i$  - nek közelítő értékével egyenlő. Ezért a  $\Delta t$  szélességű téglalapok területének összege jó közelítéssel az elmozdulás vektor  $x$  komponensének értékét adja meg a  $t_2 - t_1$  időtartamra. A sebességkomponens előjeles mennyiség, ezért a terület is előjeles lesz: a  $t$  tengely feletti terület pozitív, az alatta lévő pedig negatív. Tehát

$$x(t_2) - x(t_1) \approx \sum_i v_x(t_i)\Delta t .$$

A  $\Delta t$  felosztást finomítva az összeg határértéke a  $v_x(t)$  görbe alatti területhez tart. Így a  $t_1$  és  $t_2$  időpontok közötti elmozdulás vektor  $x$  komponensét a

$$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v_x(t) dt$$

határozott integrál adja.

Egy görbe vonalú pályán mozgó anyagi pont sebességének általában mind a nagysága, mind az iránya változik. A sebesség iránya azért változik, mert a sebesség érintő irányú, és ahogy a pálya görbül, változik az érintő iránya. A sebesség vektor időbeli változása sebességének jellemzésére szolgál a **gyorsulás** vektor.

$$a(t) = \frac{dv}{dt}$$

A gyorsulás a  $v$  sebességvektornak az idő szerinti differenciáhányadosa, tehát az  $r$  helyzetvektornak az idő szerinti második deriváltja.

A gyorsulás-idő függvény és a sebességvektor kezdeti értéke ismeretében meghatározható a sebesség-idő függvény. Az előzőekhez hasonlóan ábrázoljuk a gyorsulás  $x$  komponensét az idő függvényében és osszuk fel a  $t_1$  és  $t_2$  időpontok közötti

tartományt keskeny  $\Delta t$  szélességű intervallumokra. Az  $i$ -edik téglalap  $a_x(t_i)\Delta t$  területe itt a sebességváltozás  $x$  komponensének a  $t_i$  és  $t_i + \Delta t$  közötti időintervallumhoz tartozó közelítő értékével egyenlő. A  $\Delta t$  szélességű téglalapok területének összege a sebességváltozás  $x$  komponensének közelítő értékét adja meg a  $t_2 - t_1$  időtartamra. A gyorsuláskomponens előjeles mennyiség, ezért a terület is előjeles lesz: a  $t$  tengely feletti terület pozitív, az alatta lévő pedig negatív. Tehát

$$v_x(t_2) - v_x(t_1) \approx \sum_i a_x(t_i)\Delta t .$$

A  $\Delta t$  felosztást ismét finomítva az összeg határértéke az  $a_x(t)$  görbe alatti területhez tart. Így a  $t_1$  és  $t_2$  időpontok közötti sebességváltozás  $x$  komponensét a

$$v_x(t_2) - v_x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a_x(t) dt$$

határozott integrál adja.

## 2.12 Különböző mozgások sebessége és gyorsulása:

*Egyenes vonalú egyenletes mozgás:*

Az egyenes vonalú egyenletes mozgás a kinematika tárgykörébe tartozó legegyszerűbb mozgásforma. Jellemzője, hogy a test egyenes pályán, változatlan irányban úgy mozog, hogy egyenlő idők alatt egyenlő utakat fut be, bármilyen kicsik is ezek az időközök. A test által megtett  $s$  út és a megtételéhez szükséges  $t$  idő egyenesen arányosak, azaz hányadosuk állandó:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = v$$

Átrendezés után:

$$ds = v dt$$

Integrálva az egyenlet mindkét oldalát:

$$\int ds = \int v dt$$



Innét:

$$s_0 = C$$

Továbbá:

$$s = vt + C$$

$$s_0 = v \cdot 0 + C$$

A  $t$  idő alatt állandó sebességgel megtett út tehát:

$$s = vt + s_0$$

*Egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás:*

Egy test egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, ha a mozgás pályája egyenes és a sebességváltozás nagysága egyenesen arányos a közben eltelt idővel. A mozgást végző test sebessége változik az időben.

A test gyorsulása:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = a$$

$$\frac{dv}{dt} = a$$

Átrendezés után:

$$dv = a dt$$

Integrálva az egyenlet mindkét oldalát:

$$\int dv = \int a dt$$

Innét:

$$v = at + C$$

és

$$v_0 = a \cdot 0 + C$$

$$v_0 = C$$

Innét megkapjuk a test sebességét:

$$v = at + v_0$$

A sebesség definícióját felhasználva:

$$\frac{ds}{dt} = v(t)$$

Beírva a fenti összefüggést:  $\frac{ds}{dt} = at + v_0$

Átrendezve az egyenletet:  $ds = (at + v_0)dt$

Ahonnét a test által megtett út:  $s = a \frac{t^2}{2} + v_0 t + C$   
 $s_0 = a \cdot 0 + v_0 \cdot 0 + C$

$$\int ds = \int (at + v_0) dt$$

$$s_0 = C$$

A levezetés szerint:

$$s = a \frac{t^2}{2} + v_0 t + s_0$$

$$v = at + v_0$$

és

$$s = a \frac{t^2}{2} + v_0 t + s_0$$

Ha a  $t = 0$  időpontban a sebesség nulla, a mozgást pedig az  $s = 0$  ponttól követjük, akkor

$$s_0 = 0 \quad \text{és} \quad v_0 = 0$$

$$v = at$$

$$s = \frac{a}{2} t^2$$

*Egyenletes körmozgás:*

Ha egy pontszerű test körpályán mozog úgy, hogy a kör középpontjából a testhez húzott helyvektor elfordulásának sebessége (a szögsebesség) állandó, akkor egyenletes körmozgást végez.

$$\omega(t) = \frac{d\alpha}{dt} = \omega$$

Átrendezés után:

$$\alpha = \omega t$$

A megtett út pedig:

$$s = r\omega t$$

A test sebessége:

$$|v| = \frac{ds}{dt} = r\omega$$

A sebesség x ill. y irányú komponense:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad \text{és} \quad v_y = \frac{dy}{dt}$$

Ahonnét az x ill. y irányba megtett út:

$$x = r \cos \alpha = r \cos(\omega t)$$

$$y = r \sin \alpha = r \sin(\omega t)$$

A deriválásokat elvégezve:

$$v_x = -r\omega \sin(\omega t)$$

$$v_y = r\omega \cos(\omega t)$$

A sebesség nagysága:

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{r^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) + r^2 \omega^2 \cos^2(\omega t)} =$$

Bár a tömegpont kerületi sebességének nagysága  $\overline{v} = r\omega\sqrt{\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)} = r\omega$  állandó, de a sebesség irányának változásából azonban mégis adódik egy gyorsulásvektor, a mindenkor sugárirányban a kör középpontjába mutató,  $a_{\varphi} = -r\omega^2$  nagyságú centripetális gyorsulás. A test gyorsul, mivel változik a sebesség iránya. A gyorsulás is vektor, komponensei:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = (-r\omega \sin(\omega t))'_t = -r\omega^2 \cos(\omega t)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = (r\omega \cos(\omega t))'_t = -r\omega^2 \sin(\omega t)$$

Nagysága:

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{r^2 \omega^4 (\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t))} = r\omega^2$$

*Ferde hajítás:*

A kezdeti feltételek  $t = 0$  -nál:

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0;$$

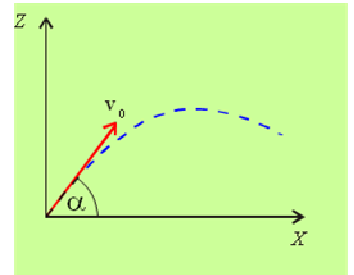
$$v_{x0} = v_0 \cos \alpha; \quad v_{y0} = 0; \quad v_{z0} = v_0 \sin \alpha$$

A sebesség komponenseit a megfelelő gyorsulás komponensek idő szerinti integráljaként kapjuk:

$$v_x(t) = v_{x0} + \int_0^t a_x(t) dt = v_0 \cos \alpha + 0 = v_0 \cos \alpha$$

$$v_y(t) = v_{y0} + \int_0^t a_y(t) dt = 0$$

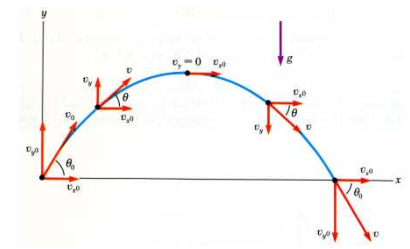
$$v_z(t) = v_{z0} + \int_0^t a_z(t) dt = v_0 \sin \alpha + \int_0^t -g(t) dt = v_0 \sin \alpha - gt$$



Azaz:

$$v_x = v_0 \cos \alpha; \quad v_y = 0;$$

$$v_z = v_0 \sin \alpha - gt$$

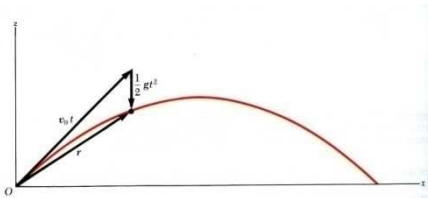


A **helyvektor** koordinátafüggvényei pedig a sebesség megfelelő komponenseinek idő szerinti integráljaként adódnak:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v_x(t) dt = 0 + \int_0^t v_0 \cos \alpha dt = 0 + v_0 t \cos \alpha = v_0 t \cos \alpha$$

$$y(t) = y_0 + \int_0^t v_y(t) dt = 0$$

$$z(t) = z_0 + \int_0^t v_z(t) dt = 0 + \int_0^t (v_0 \sin \alpha - gt) dt = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} gt^2$$



$$x = v_0 t \cos \alpha \quad y = 0$$

$$z = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} gt^2$$

ha  $x_0 = y_0 = z_0 = 0;$

Mintafeladatok:

I. Egy lejtő tetejéről nyugalomból induló pontszerű golyó helyét az  $x = 2,16t^2$  és  $y = -1,25t^2 + 10$  koordináta-idő függvények adják meg az ábrán feltüntetett koordináta rendszerben, méterben mérve. Adjuk meg a golyó sebességének és gyorsulásának  $v_x$ ,  $v_y$  és  $a_x$ ,  $a_y$  koordinátáit, mint az eltelt idő függvényét. Mekkora a golyó sebességének és gyorsulásának nagysága az indulás után 1,5 s-al.

Megoldás:

A sebesség  $v_x, v_y$  koordinátái az  $x, y$  koordinátákból idő szerinti deriválással kaphatók, azaz:

$$v_x = \dot{x} = (2,16t^2) = 2 \cdot 2,16t = \underline{\underline{4,32t}} \frac{m}{s}$$

$$v_y = \dot{y} = (-1,25t^2 + 10) = 2 \cdot -1,25t = \underline{\underline{-2,5t}} \frac{m}{s}$$

A gyorsulás  $a_x, a_y$  koordinátái a sebesség  $v_x, v_y$  koordinátáiból idő szerinti deriválással kaphatók, azaz:

$$a_x = \dot{v}_x = (4,32t) = \underline{\underline{4,32}} \frac{m}{s^2}$$

$$a_y = \dot{v}_y = (-2,5t) = \underline{\underline{-2,5}} \frac{m}{s^2}$$

Az indulás után 1,5s-al:  $v_x = (4,32 \cdot (1,5)) \frac{m}{s} = \underline{\underline{6,48}} \frac{m}{s}$

$$v_y = (-2,5(1,5)) \frac{m}{s} = \underline{\underline{-3,75}} \frac{m}{s}$$

$$a_x = \underline{\underline{4,32}} \frac{m}{s^2}$$

$$a_y = \underline{\underline{-2,5}} \frac{m}{s^2}$$

A sebesség és gyorsulás nagysága Pythagoras tételével számolható:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 7,48 \frac{m}{s}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 5 \frac{m}{s}$$

II. Egy homogén mágneses térbe lőtt töltött részecske spirális pályán mozog.

Térbeli helyét az idő függvényében az  $x = 2\cos(2t)$ ,  $y = 2\sin(2t)$ ,  $z = 5t$  koordináták határozzák meg méterben, egy alkalmasan választott koordináta rendszerben.

a., Hol van a részecske a megfigyelés kezdetétől számított 5s elteltével az adott koordináta rendszerben?

b., Mekkora ekkor a sebessége?

c., Mekkora ekkor a gyorsulása?

Megoldás:

a., A részecske helye 5s elteltével:  $x = 2\cos(2 \cdot 5) = -1,678m$

$$y = 2\sin(2 \cdot 5) = -1,08m$$

$$z = 5 \cdot 5 = 25m$$

b., A sebesség  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  koordinátái az  $x$ ,  $y$ ,  $z$  koordinátákból idő szerinti deriválással kaphatók, azaz:

$$v_x = \dot{x} = (2 \cdot \dot{\cos(2t)}) = -2 \cdot 2\sin(2t) = \underline{\underline{(-4\sin(2t))}} \frac{m}{s}$$

$$v_y = \dot{y} = (2 \cdot \dot{\sin(2t)}) = 2 \cdot 2\cos(2t) = \underline{\underline{(4\cos(2t))}} \frac{m}{s}$$

$$v_z = \dot{(5t)} = 5 \frac{m}{s}$$

5s elteltével:

$$v_x = -4\sin(2 \cdot 5) = 2,17 \frac{m}{s}$$

$$v_y = \underline{\underline{(4\cos(2 \cdot 5))}} \frac{m}{s} = -3,35 \frac{m}{s}$$

$$v_z = 5 \frac{m}{s}$$

A sebesség nagysága:  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = 6,4 \frac{m}{s}$

c., A gyorsulás  $a_x, a_y, a_z$  koordinátái a sebesség  $v_x, v_y, v_z$  koordinátáiból idő szerinti deriválással kaphatók, azaz:

$$a_x = \dot{v}_x = (-4 \cdot \dot{\sin}(2t)) = -2 \cdot 4 \cos(2t) = \underline{\underline{(-8 \cos(2t))}} \frac{m}{s^2}$$

$$a_y = \dot{v}_y = (4 \dot{\cos}(2t)) = -2 \cdot 4 \sin(2t) = \underline{\underline{(-8 \sin(2t))}} \frac{m}{s^2}$$

$$a_z = \dot{(5)} = 0 \frac{m}{s^2}$$

5s elteltével:

$$a_x = (-8 \cos(2 \cdot 5)) \frac{m}{s^2} = 6,71 \frac{m}{s^2}$$

$$a_y = (-8 \sin(2 \cdot 5)) \frac{m}{s^2} = \underline{\underline{4,35}} \frac{m}{s^2} \quad a_z = 0 \frac{m}{s^2}$$

A gyorsulás nagysága:  $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 7,95 \frac{m}{s^2}$

## 2.2 A Newton törvények:

A klasszikus mechanika megteremtőjének **Isaac Newtont**, az angol polihisztort tekintik. Egyike volt az angol Királyi Társaság, (Royal Society) egykori elnökeinek. Felfedezte, hogy a fehér fény összetett; ezzel a színek jelenségét beépítette a fény tudományába és lefektette a modern fizikai optika alapjait. Ő fogalmazta meg az anyag mozgására vonatkozó három törvényt (pontosabban axióma), melyet a 1687-ben megjelent három kötetes *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* című könyvében tett közzé. A Principia mechanikája a látható testek mozgásának egzakt, kvantitatív leírása volt, amely Newton három mozgástörvényén alapult:



(1) a testek megtartják nyugalmi állapotukat vagy egyenes vonalú egyenletes mozgásukat, amíg egy rájuk ható erő az állapot megváltoztatására nem készteti őket;

(2) a mozgás megváltozása (a sebességváltozás és a test tömegének szorzata) arányos a testre ható erővel;

(3) minden hatáshoz azonos nagyságú, ellentétes irányú ellenhatás tartozik.

Könyvében számos test mozgását leírta megfigyelésekkel alátámasztva, továbbá azt is megmutatta, hogy a gravitáció törvényével házasítva milyen módon használhatók törvényei a bolygók Kepler törvényeinek megfelelő mozgásának leírására.

A három törvényt több mint 200 éven keresztül megfigyelésekkel és kísérletekkel igazolták, egészen 1916-ig, amikor Albert Einstein relativitáselmélete, a mindennapokban ritkán előforduló jelenségek pontosabb jellemzésével kiváltotta. Newton törvényei a gravitáció törvényével, valamint a függvényanalízis (differenciálszámítás és integrálszámítás) terén elért eredményeivel párosítva elsőként tették lehetővé a fizikai jelenségek többségének rendkívül precíz leírását. Ilyen jelenség például a merev testek forgása, testek mozgása folyadékban, a ferde hajítások, az ingák lengése, az árapály, vagy a Hold és a bolygók mozgása. A második és harmadik törvény következménye, a lendületmegmaradás törvénye volt az elsőként felfedezett megmaradási törvény.

A Newton törvények a nem atomi méretű testek, nem extrém környezetben való mozgásának leírására mind a mai napig kiválóan alkalmazhatók.

## 2.21 Newton második törvénye – a dinamika alaptörvénye

**Newton II törvénye** szerint a tömegpont a gyorsulása egyenesen arányos a testre ható erők eredőjével, és az arányossági tényező, a test tehetetlenségének mértéke, éppen a test tömegével egyenlő:

$$\sum \underline{F} = m \cdot \underline{a}$$

ahol: **F** az erő vektora

$m$  a gyorsítandó tömeg

$\mathbf{a}$  a gyorsulás vektora

Az összefüggés megmutatja, hogy minél nagyobb egy testre ható erők eredője, annál nagyobb a test gyorsulása. A törvény definiálja továbbá a *tömeg* fogalmát, amely a testek állandó jellemzője, az erő és a gyorsulás arányának meghatározója.

Fontos megjegyezni, hogy Newton II. törvénye az általánosan érvényes megfogalmazás esetén azt mondja ki, hogy egy **pontszerű testre ható erők eredője egyenlő a test mozgásmennyiségének időegység alatti megváltozásával**:  $\underline{F} = d\underline{I} / dt$ . A klasszikus mechanika vizsgálataiban azonban (tehát amikor a fénysebességet meg nem közelítő sebességű mozgások összefüggéseit vizsgáljuk), a testek tömege állandónak tekinthető, így az

$$\underline{F} = \frac{d\underline{I}}{dt} = \frac{d(m\underline{v})}{dt} = m \cdot \frac{d\underline{v}}{dt} = m \cdot \underline{a}$$

összefüggések egymással egyenértékűek.

Általános esetben mind a sebesség, mind a tömeg időtől függő mennyiség, tehát

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{I}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \frac{dm}{dt} = m\mathbf{a} + \mathbf{v} \frac{dm}{dt}$$

Az  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  alakkal ellentétben ez az összefüggés akkor is érvényes, ha a tömeg idővel változik (például egy rakéta esetében). Az egyszerűbb alakot kapjuk, ha feltételezzük, hogy a tömeg állandó, így a  $dm/dt$  tag nullával helyettesíthető.

### 2.3 A mechanikai munka:

A **mechanikai munka** (szokásos jele:  $W$  vagy  $A$ ; *work* <angol> = *Arbeit* <német> = *munka* szavakból) az az energiamennyiség, amely egy anyagi pontot (vagy merev testet) erő segítségével adott távolságra elmozdít. Amikor egy testre vagy tömegpontra kifejtett erő hatására a test elmozdul, mechanikai munkavégzés történik. Abban a legegyszerűbb

esetben, amikor az erő az elmozdulás függvényében állandó, a végzett munkát az erő és az erő irányába eső elmozdulás szorzataként definiálhatjuk, vagyis:

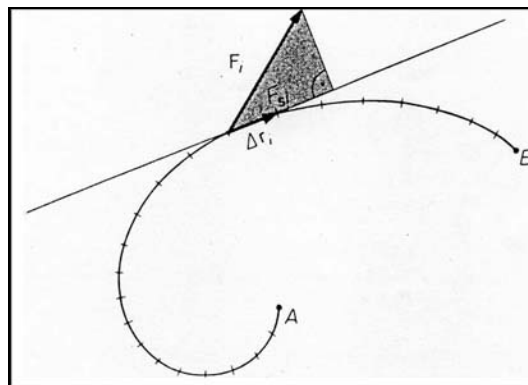
$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = F \cdot s \cdot \cos \alpha$$

ahol

- $\mathbf{F}$  az erő,
- $\mathbf{s}$  a test által megtett út,
- $F$  és  $s$  az erő- és az elmozdulás(vektor) nagysága,
- $\alpha$  az erő és az elmozdulás iránya által bezárt szög. (A munka nagysága e két vektor skaláris szorzata.)

A munka skaláris mennyiség, de felvehet negatív értéket is, akkor, ha az erő és az elmozdulás vektor egymással tompaszöget zárnak be.

Általános esetben természetesen az erő - elmozdulás  $F(s)$  függvény nem állandó, a munkát azonban ekkor is definiálhatjuk. Nézzünk példaként egy tetszőleges térbeli pályagörbén végzett, A és B végpontok között végbemenő mozgást, és tételezzük fel, hogy a pályagörbe tetszőleges pontjához tartozó erővektort ismerjük.



A pályagörbe A és B végpontok közötti szakasza felbontható olyan,  $\overline{\Delta s}_i$  elmozdulás vektorokkal jellemezhető  $n$  darab kis szakaszra, amelyeken belül a testre ható erő,  $\overline{\mathbf{F}}_i$ ,

állandónak tekinthető. Ezekre a szakaszokra az állandó erőnél megadott definíció alapján a végzett munka meghatározható, vagyis az  $i$ -edik szakaszon:

$$\Delta W_i = \overline{F}_i \cdot \overline{\Delta s}_i = F_i \cdot \Delta s_i \cdot \cos \alpha_i$$

Ha a munkát meghatározó szorzat tényezőit felcseréljük, akkor az  $F_i \cdot \cos \alpha_i$  mennyiség éppen az erővektornak a pályagörbe érintőjének irányába eső (tangenciális) komponensének nagyságát adja, vagyis:

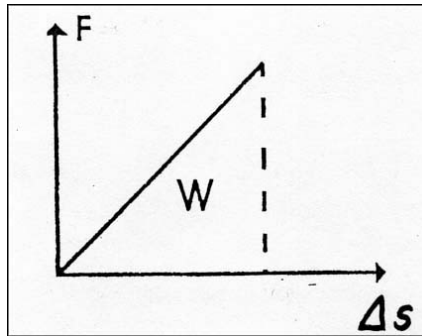
$$\Delta W_i = \overline{F}_i \cdot \overline{\Delta s}_i = F_i \cdot \Delta s_i \cdot \cos \alpha_i = F_{ti} \cdot \Delta s_i$$

Ezeket a végzett elemi munkákat összegezve megkaphatjuk az A és B pontok közötti összes munkavégzés értékét. Akkor kaphatunk pontos értéket, ha  $n$  értékét nagyon nagyra, és ennek megfelelően az elemi elmozdulások értékét igen kicsire, csaknem nullára választjuk, vagyis ha a felosztást minden határon túl finomítjuk:

$$W_{AB} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F_{ti} \cdot \Delta s_i = \int_A^B F_t(s) ds$$

A képletből látszik, hogy csak akkor tudjuk a munkát meghatározni, ha ismerjük a mindenkor tangenciális erő értékét az elmozdulás függvényében, és hogy az így meghatározott munka értéke az  $F_t(s)$  függvény alatti, A és B pontok között meghatározott területtel arányos.

Tekintsünk egy rugó adott mértékű megnyújtásához szükséges munkát. A rugó megnyújtásához szükséges erő a rugó megnyúlásának függvénye, és ezt az erő - elmozdulás függvényt a rugó karakterisztikájának nevezzük. A rugóerő a rugó megnyúlásával egyenesen arányos, vagyis előfeszítés nélküli esetben karakterisztikája egy az origón átmenő egyenes:



Ennek az egyenesnek a  $D = dF / ds$  meredekségét, a differenciáhányadost szokás a rugó rugóállandójának nevezni.

Ha a rugó egyik vége rögzített, akkor a másik végének elmozdulása megegyezik a rugó megnyúlásával, vagyis a végzett munka a függvény alatti területtel egyenlő:

$$W_{s_0} = \int_0^{s_0} F(s) ds = \int_0^{s_0} D \cdot s ds = \frac{1}{2} D s_0^2 ,$$

ami éppen a függvény görbéje alatti területtel, az ábrán jelölt háromszög területével egyenlő.

A mechanikai munka *egyenletes vagy egyenletesen változó körmozgás esetén* (a testre ható nyomatékok eredője, és ezáltal a tangenciális erő értéke állandó) :

$$W_{AB} = \int_{s_A}^{s_B} F_t(s) ds = F_t \cdot \int_{s_A}^{s_B} ds = F_t \cdot \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} r \cdot d\varphi = F_t \cdot r \cdot \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} d\varphi = M \cdot (\varphi_B - \varphi_A) = M \cdot \Delta\varphi ,$$

vagyis **a végzett munka a testre ható nyomaték és a munkavégzés közben bekövetkezett szögelfordulás szorzata**, pontosabban a legáltalánosabb esetben:

$$W_{AB} = \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} M(\varphi) d\varphi ,$$

amely a nyomaték - szögelfordulás függvény görbéje alatti terület.

## 2.31 Néhány ismert erő munkája:

a. **A nehézségi erő** ( $\vec{G} = -mg$ ) munkája ( $W_{o,h}^{neh}$ ) a felfelé ( $z_A=0, z_B=h$ ) repülő  $m$  tömegű tömegpont esetében a következőképpen számolható:

$$W_{o,h}^{neh} = -mgh$$

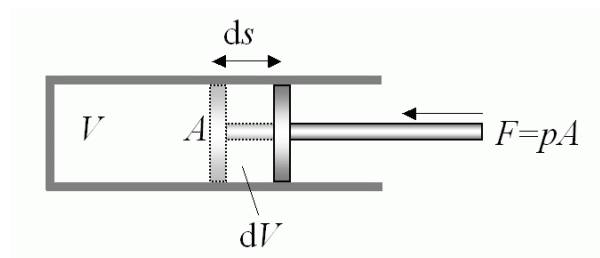
b. **A rugalmas erő** ( $\vec{F}^{rug} = -Dx = -m\omega^2 x$ ) munkája ( $W_{o,x_0}^{rug}$ ), miközben az  $m$  tömegű TP az egyensúlyi helyzettől ( $x_A=0$ ) távolodik ( $x_B=x_0$ ), a következőképpen számolható:

$$W_{o,x_0}^{rug} = -\frac{1}{2} m\omega^2 x_0^2 = -\frac{1}{2} Dx_0^2$$

### c., Térfogati munka

Ha egy rendszerben – amelyben  $p$  nyomás uralkodik – bármilyen halmazállapotú anyagnak megnő a térfogata, a nyomás ellenében munkát kell végeznie, vagy ha csökken a térfogata, akkor a külső nyomás végez munkát. Ezt a munkát nevezzük **térfogati munkának**. A térfogati munka tehát az összenyomást kísérő belső energia változást okozó munkavégzés.

$$E = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \Sigma(p_i \cdot \Delta V_i)$$



A térfogati munka definíciójából következik, hogy a p-V állapotsíkon a görbe alatti terület adja meg. A termodinamika első főtétele szerint a térfogati munka a gázon a külső erők által végzett munkaellentettje. Ha a gáz kitágul, akkor a térfogati munka pozitív, ellenkező esetben negatív. Fontos megjegyezni, hogy a munka nem csak a térfogatváltozás nagyságától függ, hanem a munkavégzés körülményeitől is. Pl.: ugyanakkora  $\Delta V$  térfogatváltozás esetén más-más nagyságú lesz a munka számszerű értéke, ha a folyamat során a nyomás állandó, vagy a hőmérséklet állandó. Ez azt jelenti, hogy a munka nem állapotfüggvény, mint például az entrópia.

A véges változásra vonatkozó térfogati munkát a  $V_1$  kezdeti és a változás végén betöltött  $V_2$  térfogat közötti integrálással számíthatjuk ki:

$$\Delta w = - \int_{V_1}^{V_2} p dV .$$

#### **d., Munkavégzés gravitációs erőterben:**

Newton univerzális gravitációs törvénye (az általános tömegvonzás törvénye) a következőket mondja ki:

A világegyetem minden objektuma kölcsönhatásban van egymással egy erővel, amely a két objektum tömegközéppontját összekötő egyenesen helyezkedik el. Ez az erő arányos a két objektum tömegének szorzatával és fordítottan arányos a két objektum tömegközéppontjának távolságának négyzetével.

Ha precízen nézzük a törvényt, akkor elmondható, hogy csak pontszerű objektumokra vonatkozik. Ha a tárgynak térbeli kiterjedése van, az erőt integrálszámítással kell megadni.

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \gamma \frac{mm_0}{r^2} dr = \left[ -\gamma \frac{mm_0}{r} \right]_A^B = -\gamma mm_0 \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \quad \int \frac{1}{r^2} dr = -\frac{1}{r}$$

Gravitációs erőterben két tetszőleges pont közötti munkavégzés csak a pontok helyzetétől - azok gravitációs erőcentrumtól való távolságától - függ, de független attól, hogy milyen útvonalon jutottunk el egyik pontból a másikba.

$$W_{PQ} = mgh$$

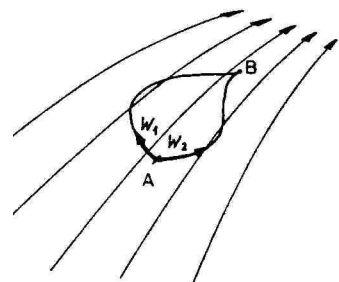
Nemkonzervatív erők (pl. súrlódás) esetén, a munka függ az úttól, tehát:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B (-\mathbf{F}) d\mathbf{r} = \int_A^B -F(r) \frac{\mathbf{r}}{r} d\mathbf{r} = \int_A^B -F(r) dr = [-f(r)]_A^B = -(f(B) - f(A))$$

Ha a gravitációs erőterben egy tetszőleges görbe mentén A pontból a B pontba megyünk, majd onnan valamilyen másik úton visszatérünk A-ba, akkor az  $m$  tömegpontot egy A-ból induló, és ugyanott végződő zárt görbe mentén mozgatjuk körbe, amelynek során a végzett munka zérus, hiszen:

$$W_{A \rightarrow A} = \oint (-\mathbf{F}) d\mathbf{r} = \int_A^B (-\mathbf{F}) d\mathbf{r} + \int_B^A (-\mathbf{F}) d\mathbf{r} = \left[ -\gamma \frac{mm_0}{r} \right]_A^B + \left[ -\gamma \frac{mm_0}{r} \right]_B^A = 0$$

*Itt érdemes megemlítenünk Eötvös Lorándot, akinek precíziós méréseit követően - melyek mindenben alátámasztották Newton eredeti megállapítását - az általános relativitáselmélet einsteini kidolgozásában jutott meghatározó szerep.*



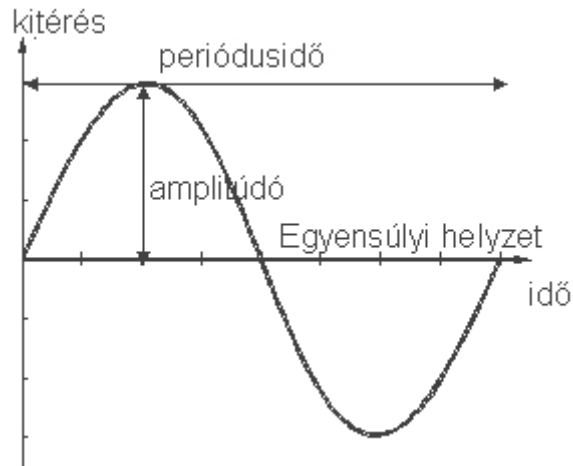
## 2.4 A harmonikus rezgőmozgás:

Harmonikus rezgőmozgás, rezgés keletkezik, amikor olyan erő hat a testre, amely arányos az elmozdulással (úttal) és mindig az egyensúlyi, a nyugalmi helyzet felé irányul.

Mivel nincs csillapítóerő, így a mozgást leíró differenciálegyenlet (lineáris esetben és az  $x$  tengely mentén):

$$m \ddot{x} = -Dx \quad \text{azaz} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{ahol} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad \text{a körfrekvencia}$$





A differenciálegyenlet megoldása pedig:

$$x(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

az  $A_0$  a maximális kitérés, az amplitúdó, a  $\varphi$  a fázisszög, amit sok esetben 0-nak veszünk).

A harmonikus rezgőmozgás jellemzői:

A frekvencia:

$$\nu = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}}$$

A periódusidő:

$$T = \frac{1}{\nu} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$$

A sebesség:

$$v = \dot{x} = \omega_0 A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

akkor a legnagyobb, amikor a kitérés  $x(t)=0$ . Ebből a mozgási energia a  $t$  időpillanatban ( $x(t)$  kitérés esetén):

$$E_{KIN} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

A potenciális energia, azaz a  $-Dx$  erővel szemben 0 és  $x$  között végzett munka:

$$W = \int_0^x D x' dx' = D \left[ \frac{(x')^2}{2} \right]_0^x = \frac{1}{2} D A_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

A teljes energia az előző kettőből (felhasználva a  $\omega_0^2 = D/m$  és a  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  összefüggéseket):

$$E = E_{KIN} + W = \frac{1}{2} D A_0^2 = \text{állandó}$$

Ez az energia (mechanikai) megmaradás törvénye.

## 2.41 Csillapított rezgések:

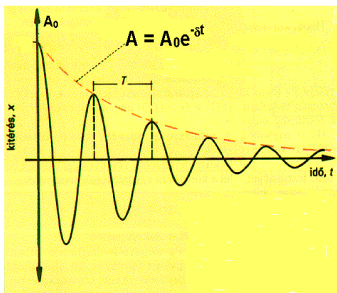
A rezgést végző test amplitúdója folyamatosan csökken. Speciális esetben ez a csökkenés lehet exponenciális. A csillapítatlan rezgés fenntartásához megfelelőütemben pótolni kell az elveszett energiát.

Csillapítóerő: súrlódási erő (belső súrlódás), közegellenállás arányos a sebességgel, azaz

$$K = -kv = -k \dot{x}$$

Ez alapján felírva a mozgás differenciálegyenletét:

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{ahol} \quad \delta = \frac{k}{2m}$$



Amelynek megoldása :

$$x(t) = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

## 2.5 Fourier analízis:

A Fourier-sorok elméletének kialakulásában is két fizikai probléma játszott főszerepet: a rezgő húr problémája, és a hővezetés egyenlete. A Fourier analízis egy tetszőleges periodikus rezgés harmonikus rezgések összegeként állít elő:

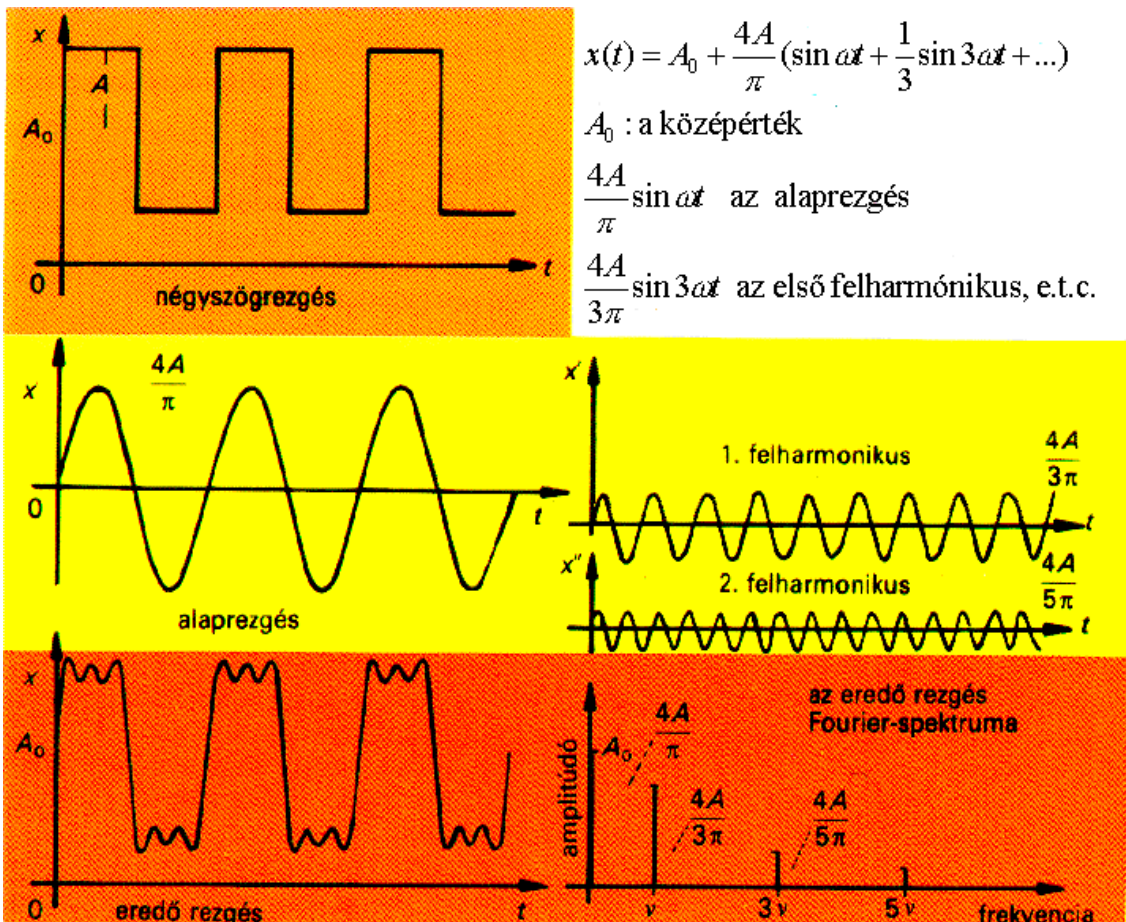
$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\omega t$$

ahol  $A$  és  $B$  a Fourier együtthatók.

A Fourier együtthatók a következők:

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) dt, \quad A_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin n\omega t dt, \quad B_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos n\omega t dt$$

Példa a négyszögrezgés Fourier sorba fejtése:



## 2.6 A hővezetés egyenlete:

A hővezetés egyenlete skalár mennyiségek, mint a hőmérséklet viselkedését írja le, jellegzetessége, hogy ha egy helyen magasabb a hőmérséklet, mint a környezetében, akkor a magasabb hőmérséklet szétárad, amíg el nem ér egy állandó értéket.

Legyen adva egy homogén rúd, ami a környezetétől el van szigetelve, és elhanyagolható vastagságú a hosszúságához képest. Megpróbáljuk leírni a rúd hőmérsékletének időbeli változását. Ezt a problémát nevezik *egydimenziós hővezetési feladatnak*.

Egy test által tárolt hőmennyiség a test tömegétől és hőmérsékletétől függ: minél nagyobb a hőmérséklet, annál nagyobb a hőmennyiség. Egy  $m$  tömegű test hőmennyisége:  $\alpha \cdot m \cdot T$ , ahol  $\alpha$  egy konstans és  $T$  a hőmérséklet.

A rúd homogenitása azt jelenti, hogy a rúd bármely  $[a,b]$  szakaszának a tömege  $\gamma \cdot (b - a)$ , ahol  $\gamma$  egy konstans. Így az  $[a,b]$  szakasz hőmennyisége  $\delta \cdot (b - a) \cdot T$ . Ha a szakasz mentén a hőmérséklet változik (az  $x$  pontban a hőmérséklet  $T(x)$ ), akkor belátható, hogy az  $[a,b]$

szakasz hőmennyisége : 
$$\int_a^b \delta \cdot T(x) dx$$

Tegyük fel, hogy a rúd hőmérsékletét a  $c(t) \cdot f(x)$  függvény írja le Ekkor egy  $t$  időpontban az  $[a,b]$  szakasz hőmennyisége

$$H = \int_a^b \delta \cdot c(t) \cdot f(x) dx = \delta \cdot c(t) \cdot \int_a^b f(x) dx$$

Fourier feltételezte, hogy a  $b$  pontbeli hőáramlás sebessége arányos a hőmérséklet  $b$  pontbeli deriváltjával, aza itt a hőáramlás sebessége  $\kappa \cdot c(t) \cdot f'(b)$ , ahol  $\kappa$  egy pozitív konstans. Az  $a$  végpontban a hőáramlás ellentétes, így itt a sebesség  $-\kappa \cdot c(t) \cdot f'(a)$ .

Így azt kaptuk, hogy a  $H$  hőmennyiség változásának sebessége:

$$\kappa \cdot c(t) \cdot f'(b) - \kappa \cdot c(t) \cdot f'(a)$$

Azaz:

$$\delta \cdot c'(t) \cdot \int_a^b f(x) dx = \kappa \cdot c(t) \cdot (f'(b) - f'(a))$$

Itt  $b-a$ -val leosztva, majd  $b$ -vel  $a$ -hoz tartva azt kapjuk, hogy

$$\delta \cdot c'(t) \cdot f(a) = \kappa \cdot c(t) \cdot f''(a)$$

Ez minden  $a$ -ra igaz, tehát  $c'(t) \cdot f(x) = \rho \cdot c(t) \cdot f''(x)$

minden  $x$ -re, ahol  $\rho > 0$  konstans.

Tegyük fel, hogy a rúd végpontjaiban a hőmérséklet 0 fok. Ha a rúd hossza  $L$ , akkor az azt jelenti, hogy  $c(t) \cdot f(0) = c(t) \cdot f(L) = 0$  minden  $t$ -re. Feltehetjük, hogy  $c$  nem azonosan nulla, így

$$f(0) = f(L) = 0$$

Az egyenlet megoldása a következő: rögzítsünk egy olyan  $t$ -t, amelyre  $c(t) \neq 0$ . Ekkor az  $f$  kielégíti az  $f''(x) = b \cdot f(x)$  differenciálegyenletet minden  $x \in [0, L]$ -re,

$$\text{ahol } b = \frac{c'(t)}{\rho \cdot c(t)}.$$

Ha  $b = 0$ , akkor  $f$  lineáris, tehát a kezdeti feltételek alapján azonosan 0. Ezt az esetet (ami annak felel meg, hogy a rúd hőmérséklete folyamatosan azonosan 0) kizárhatjuk. Ha  $b > 0$  és  $b = a^2$ , akkor a differenciálegyenlet megoldása:  $f(x) = \alpha \cdot e^{ax} + \beta \cdot e^{-ax}$ . Ez a megoldás a kezdeti feltételt csak a  $\alpha = \beta = 0$  esetben elégíti ki, tehát szintén kizárhatjuk. Így szükségképpen  $b < 0$  és  $b = -a^2$ . Ekkor a differenciálegyenlet megoldása a következő:

$$f(x) = \alpha \sin(ax) + \beta \cos(ax).$$

Mivel  $f(0) = 0$ , ezért  $\beta = 0$ , tehát  $f(0) = L$  alapján  $aL = n\pi$ , ahol  $n$  egész szám. Azt kaptuk tehát, hogy ha a rúd hőmérsékletét egy  $c(t) \cdot f(x)$  alakú kifejezés írja le,

akkor  $f(x) = \sin \frac{n\pi}{L}x$  és  $c$  kielégíti a  $c'(t) = (-\rho a^2) \cdot c(t)$  differenciálegyenletet.

Ebből Fourier arra következtetett, hogy a rúd hőmérsékletét általános esetben

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin \frac{n\pi}{L}x$  alakú függvények írják le, akár csak a rezgő húr problémájának esetében.

Ezért Fourier *Bernoulli* véleményét osztva azt állította, hogy minden  $2\pi$  szerint periodikus

függvény előállítható  $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  alakban.

## 2.7 Az energia fajtái, a mechanikai energia megmaradásának elve:

Az energia szó a görög ενεργεια kifejezésből ered, ahol az εν- jelentése „be-” az έργον-é pedig „munka” az -ια pedig absztrakt főnevet képez. Az εν-εργεια összetétel az ógörögben „isten tett”-et vagy „bűvös cselekedet”-et jelentett, Arisztotelész később „ténykedés, művelet” értelemben használta, Diodórosz Szikulosz pedig egy „gép ereje”-ként.

Valamely test egy megadott állapotában munka végzésére képes, azt mondjuk, hogy a test adott szintű energiával rendelkezik. **A test energiája tehát az adott test adott állapotban érvényes munkavégző képességével egyenlő.**

Az energiának számos ismert fajtája van, a mozgással a mozgási (kinetikus) energiát asszociáljuk; egy erőterben, mint például Földünk gravitációs erőtere, a test helyzetéből adódóan helyzeti energiával is rendelkezik. A mechanikai energián kívül a hővel is társítható energia, amelynek megnyilvánulási formáival a hétköznapokban gyakran találkozunk. Közismert továbbá a kémiai, az elektromos és mágneses energia, valamint legújabbán a nukleáris energia

### 2.71 Mozgási energia:

A testek mozgásából származó energiát mozgási energiának nevezzük. A test gyorsítására fordított munka a test mozgási energiáját növeli, míg ha a felgyorsított test végez munkát, az mozgási energiáját csökkenti. Egy test mozgási energiája egyenlő azzal a

munkával, amit nyugalmi állapotból kell kifejtse, hogy elérje a kívánt sebességet és forgást.

$$E_k = \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{p}$$

A képlet azt mondja ki, hogy a mozgási energia ( $E_k$ ) egyenlő a sebesség ( $v$ ) és az impulzus ( $p$ ) skaláris szorzatának az integráljával.

A mozgási energiát először Leibniz vezette be 1686-ban, de akkor még az  $mv^2$  szorzatként, csak később tértek át a  $\frac{1}{2}mv^2$  kifejezésre. Eredetileg "eleven erőnek" nevezték el, mely meglehetősen félrevezető, hiszen itt nem erő jellegű mennyiségről van szó.

A már korábban tárgyalt dinamika alapegyenletének ( $m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}(t, \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})$ ) mindkét oldalát skalárisan  $r$ -rel megszorozva a következő egyenletet kapjuk, mely a mozgásegyenlet egyik első integrálja:

$$\frac{1}{2}mv^2(t) - \int_{t_0}^t \mathbf{F}(\mathbf{r}(t')) d\mathbf{r}(t') = konst.$$

A bal oldali megmaradó mennyiséget nevezték mechanikai energiának, amelynek első tagja nyilvánvalóan a *mozgási energia* (mert csak a test sebességétől függ), második a *helyzeti energia* (mivel az erő konzervatív, így munkája csak a helytől függ). Az előbbi egyenlet tehát a mechanikai energia megmaradását fejezi ki.

A most meghatározott egyenletet szavakkal a következőképpen fogalmazhatjuk meg: a testre ható erők eredője által végzett munka egyenlő a test mozgási energiájának az adott munkavégzés során létrejött megváltozásával, és ez a fizikai törvény természetesen általánosítható tetszőleges haladó mozgás esetére is. Ezt a törvényt **törvényt munkatételnek nevezik**, és általánosan azt mondja ki, **hogy tetszőleges haladó mozgás esetén a testre ható erők eredője által végzett munka egyenlő a test mozgási energiájának ezen munkavégzés hatására létrejött megváltozásával.**

## 2.72 Gravitációs energia:

A gravitációs (más néven *helyzeti* vagy *potenciális*) energia, az az energia, amellyel egy test rendelkezik potenciálos erőterben. A potenciális energia nagyságát mindig valamilyen nulla energia szinthez viszonyítják. Egy test gravitációs potenciális energiája  $U_g$  egyenlő a munkával amelyet az állandó gravitációs erő  $F = mg$  végez amikor a testet egy adott helyzetből egy másikba mozgatja  $h$  magasságba, és kifejezhető a

$$U_g = mgh ,$$

ahol  $m$  a test tömege,  $g$  a nehézségi gyorsulás,  $h$  a magasság.

Ez az egyenlet jó közelítéssel használható a Föld felszínén, ahol kis magasságok esetén a nehézségi gyorsulás állandónak vehető. Űrhajók esetén vagy csillagászati számításoknál a nehézségi gyorsulás  $g$  nem állandó, hanem a távolság négyzetével fordítottan arányos, így a képletet integrál formájában kell felírni. Egyenletes sűrűségű gömb esetén (közelítőleg ilyen egy bolygó is) a felszíntől  $h$  magasságra számítva az integrál a következő formát kapja:

$$U_g = \int_{h_0}^{h+h_0} \frac{Gm_1m_2}{r^2} dr ,$$

ahol,  $h_0$  a gömb sugara,  $m_2$  a gömb tömege és,  $G$  a gravitációs állandó.

Értelmezhetünk ezen belül rugalmas és elektrosztatikus potenciális energiát:

⇒ *rugalmas potenciális energia*: Egy rugalmas húrban vagy rugóban tárolt **rugalmas potenciális energia**, ha rugómerevsége  $k$ ,  $x$  megnyúlás esetén a Hooke-törvény integrálásából számítható:

$$U_r = \int kx dx = \frac{1}{2}kx^2$$

⇒ *elektrosztatikus potenciális energia*: Egy elektromosan töltött test **elektrosztatikus potenciális energiája** az a munka, melyet ahhoz kellene végeznünk, hogy a testet egy végtelen távoli pontból jelenlegi helyzetébe mozdítsunk, akkor, ha nincs jelen más (nem elektrosztatikus) erő a művelet folyamán. A **W** munka, mely szükséges ahhoz



hogy  $A_1$ -et a végtelenből  $A_2$ -től  $d$  távolságra mozgassuk a következőképpen számítható:

$$W = \frac{kq_1q_2}{d} ,$$

ahol  $k$  a Coulomb-állandó, vagyis  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

A különböző energiafajták átalakulhatnak egymásba, az energia mennyisége azonban eközben semmiképpen nem növekedhet. Az energia megmaradásának elvét először **Julius Robert Mayer** mondta ki 1842-ben fizikai rendszerekre és biológiai jelenségekre.

## 2.8 Termodinamika:

A **termodinamika** (ma már ritkán használt magyar nevén **hőtan**) a fizika energia-átalakulásokkal foglalkozó tudományterülete.

Egy magára hagyott termodinamikai rendszerben az intenzív állapotjelzők eloszlása homogénné válik, vagyis a rendszer egyensúlyi állapotba kerül. Az egyensúlyi állapottal a *termosztatika* foglalkozik. Minden pontjában ugyanakkora nyomás, hőmérséklet stb. lesz. Termodinamikai elveken alapszik továbbá például az időjárás-előrejelzés, robbanómotorok, repülőgép-hajtóművek, hűtőszekrény, kuktafazék, kémény.

A következő pontok megértéséhez mindenképp említést kell tennünk az egyesített gáztörvényről. A gáztörvények az ideális gáz (fizikai kémiában célszerűen a *tökéletes gáz* kifejezést használják) abszolút hőmérséklete ( $T$ ), nyomása ( $p$ ) és térfogata ( $V$ ) – ún. állapotjelzők – közötti matematikai összefüggések. A három gáztörvényt: Boyle–Mariotte-törvényt, a Gay-Lussac-törvényt és a Charles-törvényt összevonva az **egyesített gáztörvényt** kapjuk:

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$$

**Ebből a törvényből megkapjuk mindegyik állapotváltozásra jellemző összefüggéseket, ha a különböző állapotjelzőket állandónak választjuk:**

## 2.81 Izoterm állapotváltozás:

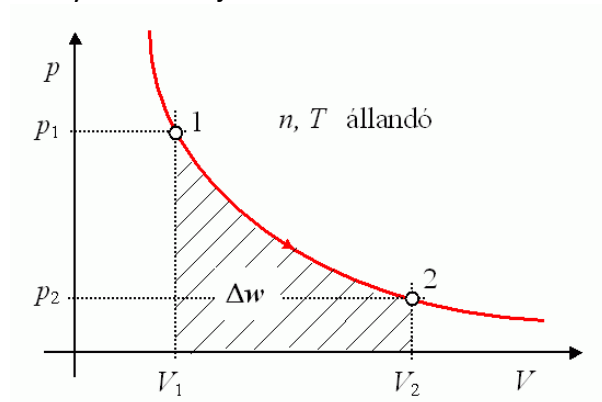
Az állandó hőmérsékletű ( $T = \text{konst.}$ ) állapotváltozás a nyomás-fajtérfogat diagramban egyenlőszárú hiperbolával ábrázolható, mivel az egyetemes gáztörvényből írható:

$$p \cdot v = R \cdot T = \text{konst.} \quad (\text{Boyle-Mariotte törvény})$$

Az állapotváltozás két végpontján mérhető állapotjelzők közötti összefüggés:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{v_2}{v_1}$$

A folyamat ábrája:



Izoterm állapotváltozás esetén az entalpia és a belső energia nem változik. Ez úgy lehetséges, ha a gáz tágulásakor a terjeszkedéshez szükséges munkával azonos mennyiségű hőt közlünk a rendszerrel.

*Az izoterm térfogati munka:*

Ha a hőmérséklet állandó, a belső energia is állandó, vagyis  $dU = 0$ , az I. főtétel alapján a rendszerrel közölt, vagy a rendszer által leadott hőmennyiség teljes mennyisége térfogat-növekedésre fordítódik, vagy a térfogatcsökkenésből származik, vagyis:

$$dQ + dw = 0 ,$$

és

$$\delta Q = dQ = pdV .$$

Ekkor a térfogati munka a következőképpen írható fel:

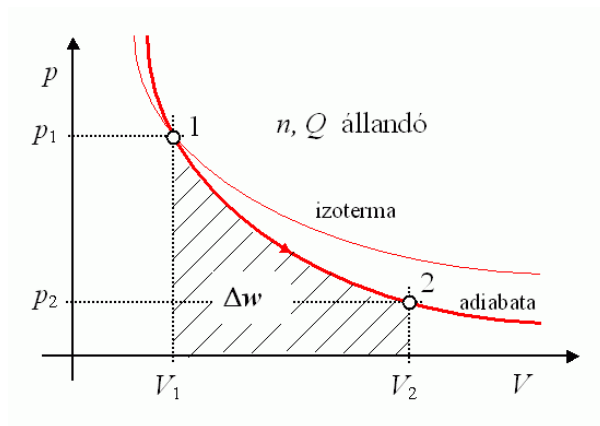
$$\Delta w = - \int_1^2 dQ = - \int_{V_1}^{V_2} pdV = -RT \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) = -RT \ln \left( \frac{p_1}{p_2} \right) .$$

## 2.82 Adiabaticus állapotváltozás :

Adiabaticus állapotváltozás akkor következik be, ha a közeg és környezete között nem lehetséges hőáramlás: a közeg környezete felé hőszigetelt. Ekkor  $dQ = 0$ , a rendszer és a környezet között semmilyen hőcsere sem lehetséges. A termodinamika I. főtétele alapján és az állandó térfogaton vett moláris hőkapacitás definíció összefüggését felhasználva:

$$dU = -pdV = C_V dT .$$

A folyamat ábrája:



Ha ideális gárról van szó, amikor nincs belső súrlódás, a folyamat egyben izentrópikus is, azaz a folyamat során a gáz entrópiája nem változik.

Véges változás esetén 1 mol tökéletes gáz adiabaticus térfogati munkája:

$$\Delta w = \Delta U = \int_{T_1}^{T_2} C_V dT = C_V(T_2 - T_1).$$

A kifejezésből azt a következtetést lehet levonni, hogy az adiabatikusan összenyomott gáz fölmelegszik (pl.: a biciklipumpa, a dízelmotorok működése stb.), adiabatikusan kitáguló pedig lehűl. (például a kiszűrt szódavizes patron jegesedése, gázok cseppfolyósítása stb.).

Felhasználva a tökéletes gázok állandó nyomáson és állandó térfogaton mért moláris hőkapacitás közötti

$$R = C_p - C_V ,$$

összefüggést, valamint az adiabatikus kitevő definíció egyenletét:

$$\kappa = \frac{C_p}{C_V} ,$$

Az adiabatikus térfogati munka az alábbi módon is számítható:

$$\Delta w = \int_{T_1}^{T_2} \frac{R}{\kappa - 1} dT = \frac{R}{\kappa - 1} (T_2 - T_1) .$$

Kiindulva a  $-pdV = C_V dT$  ,összefüggésből, és behelyettesítve az általános gáztörvényből a nyomás  $p = \frac{RT}{V}$  kifejezését, az állapotjelzők közötti *Poisson-egyenletekhez* juthatunk.

Adiabatikus folyamatot szigorúan véve a gyakorlatban nem lehet megvalósítani, mert a rendszer tökéletesen nem szigetelhető el a környezetétől. Úgyszintén nem létezik tökéletesen izoterm folyamat sem. A gyakorlatban végbemenő folyamatot politrópnak nevezzük és a két állapotváltozás „között” zajlik, ennek megfelelően a politrópa egyenlete:

$pV^m = \text{állandó}$  ,amelyben  $1 \leq m \leq \kappa$  ,vagyis a politrópa az izoterma és az adiabata „között” halad. A politróp változás során végzett térfogati munka a következőképp számítható:

$$\Delta w = \int_{T_1}^{T_2} \frac{R}{m-1} dT = \frac{R}{m-1} (T_2 - T_1) .$$

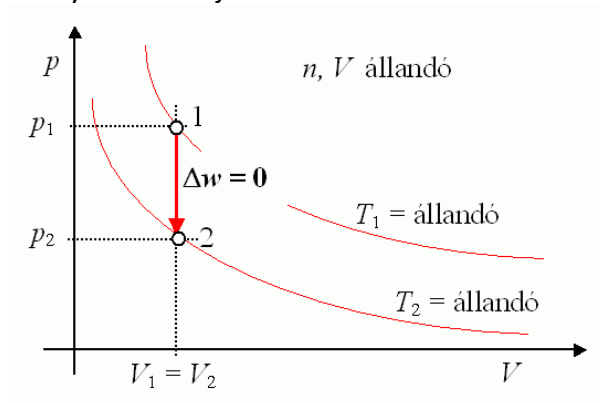
Megfelelően választott kitevővel minden állapotváltozás leírható a politropikus állapotváltozás egyenleteivel:

- $n = 0$ ; izobár állapotváltozás,
- $n = 1$ ; izotermikus állapotváltozás,
- $n = \kappa$ ; adiabatikus állapotváltozás,
- $n = \infty$ ; izochor állapotváltozás.

### 2.83 Izochor állapotváltozás:

Állandó térfogatú állapotváltozásnál a közeg **sűrűsége** és így **fajtérfogata** állandó:  $v = \text{const}$ . Ilyen állapotváltozás csak akkor jön létre, ha a közeggel hőt közlünk vagy a közegből hőt vonunk el.

A folyamat ábrája:



Az egyetemes gáztörvényből következik, hogy az állapotváltozás két pontja között a hőmérséklet és nyomás között az alábbi összefüggés áll fenn:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad (\text{Gay-Lussac II. törvénye})$$

Izochor állapotváltozás során a rendszer térfogata állandó:  $dV = 0$ ,  
 vagyis:

$$\Delta w = - \int_{V_1}^{V_2} p dV = 0 .$$

Tehát izochor állapotváltozás során nincs térfogati munka. A rendszerrel közölt hő a rendszer belső energiájának növelésére fordítódik, vagy a rendszer által leadott hő a belső energia csökkenéséből származik:

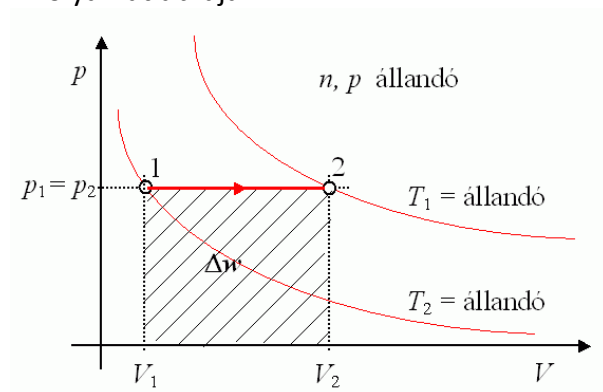
$$\Delta U = \Delta Q_V = \int_{T_1}^{T_2} C_V dT = C_V(T_2 - T_1) .$$

## 2.84 Izobár állapotváltozás:

Izobár folyamatoknál a gáz nyomása nem változik. A gáz térfogata és hőmérséklete közötti kapcsolat az állapotegyenlet segítségével határozhatjuk meg. Az állandó nyomású állapotváltozáshoz ( $p = \text{const.}$ ) hőközlésre vagy hőelvonásra van szükség. Az előzőekhez hasonlóan írható:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{T_2}{T_1} \quad (\text{Gay-Lussac I. törvénye})$$

A folyamat ábrája:



Az izobár állapotváltozás során a nyomás állandó:  $dp = 0$ , vagyis az integrálás egyszerűen elvégezhető:

$$\Delta w = - \int_{V_1}^{V_2} p dV = -p(V_2 - V_1) = -p\Delta V .$$

Ha tehát állandó nyomáson növeljük a rendszer hőmérsékletét, akkor a térfogata nő, a rendszer munkát végez a környezetén, vagy fordítva, a hőmérséklet csökkentése esetén a környezet végez a rendszeren munkát.

## ***2.9 A Maxwell-egyenletek:***

James Clerk Maxwell a XIX. század legnagyobb elméleti fizikusa – Faraday zseniális kísérletei alapján, melyben az összes addigi elektromosságtani jelenséget megvizsgált – felírta a Maxwell-egyenleteket. Ebben egyesítette az elektromos és mágneses jelenségeket és a fényt is, mint elektromágneses hullámot írta le. Maxwell elméletét aztán a szintén zseniális Albert Einstein még tovább szintetizálta, de ez már a speciális relativitáselmélet. A Maxwell-egyenletek az elektrodinamika témaköréhez tartoznak. Az elektromos és mágneses jelenségek már az ókorban is ismertek voltak, de valódi természetüket felismerni és tulajdonságaikat matematikai formába önteni csak az újkorban sikerült. **Maxwell** 1864-ben először írta fel a négy törvényét együtt. Az Ampère-törvényt kiegészítette az időben változó elektromos tér keltette mágneses térrel, és a további egységesítésként Coulomb elektrosztatikus potenciálja mintájára bevezette a vektorpotenciál fogalmát.

Maxwell megmutatta, hogy az egyenletek szerint létrejöhetnek elektromágneses hullámok, amiket később Hertz fedezett fel. Ezek olyan hullámok, melyekben az oszcilláló elektromos és mágneses mező halad vákuumban. Maxwell 1865- ben ezt írta:

„Ez a sebesség olyan közel esik a fényéhez, hogy erős okunk van feltételezni, hogy a fény maga (beleértve a hőszugárzást és a többi sugárzást ha létezik) elektromágneses

zavar, mely hullám formájában terjed az elektromágneses térben az elektromágnesesség törvényei szerint.”

A maxwelli elektrodinamika felfedezése nagy hatással volt a fizikára, olyan új elméletek nőttek ki belőle, mint például a speciális relativitáselmélet. Az elektrodinamika kvantált elmélete, a relativisztikus kvantumelektrodinamika a mai fizikai elméletek legpontosabbika. Számos gyakorlati felhasználása gazdagítja mindennapi életünket a mikrohullámú sütőtől a lézerkésen át egészen a modern távközlési rendszerekig.

A Maxwell-egyenletek leírják, mind az elektromos, mind a mágneses tér viselkedését, valamint kölcsönhatásukat az anyaggal.

### **Maxwell négy egyenlete a következőket mondja ki:**

- 1. Az elektromos tér forrásos, azaz elektromos töltés jelenlétében erővonalak indulnak a pozitív töltésekről, melyek a negatív töltéseken végződnek. (Gauss-törvény)
- 2. A mágneses indukció változása elektromos teret indukál, melynek iránya ellenkező mint az őt létrehozó változás. (A Lenz-törvény és Faraday indukciós törvényének egyesítése)
- 3. A mágneses tér forrásmentes, azaz a mágneses tér erővonalai önmagukba záródnak. (Gauss mágneses törvénye),
- 4. Az elektromos áram, illetve a folytonossági egyenlet kielégítéséből adódó eltolási áram mágneses teret hoz létre. (Ampère-törvény)

Gauss-törvény

$$\oint_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \rho \cdot dV = Q$$

Faraday-Lenz-törvény

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

Gauss mágneses törvénye

$$\oint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$$



## Ampère-törvény

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} + \frac{d}{dt} \int_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A}$$

A Maxwell-egyenleteknek két formája van: ezek a *mikroszkopikus* és a *makroszkopikus* egyenletek. A mikroszkopikus egyenletek alapvető mennyiségei  $\mathbf{E}$  elektromos térerősség és  $\mathbf{B}$  mágneses indukció. A makroszkopikus egyenletek a mikroszkopikus egyenletek átlagolásával adódnak. Az alapvető makroszkopikus mennyiségek  $\mathbf{E}$  elektromos térerősség,  $\mathbf{D}$  elektromos eltolás vektor,  $\mathbf{B}$  mágneses indukció és  $\mathbf{H}$  mágneses térerősség.

Az egyik legérdekesebb tulajdonságuk, hogy ezeknek az egyenleteknek van hullámmegoldásuk is.

A Maxwell-egyenletekből több más fizikai fogalom, összefüggés levezethető, mint például a töltésmérleg és –megmaradás, a Poynting-vektor és az energiamérleg.

## **2.10 Hatáselv:**

### *Történeti áttekintés:*

A legkisebb hatás elvét először Maupertuis fogalmazta meg 1746-ban, majd 1748-tól kezdődően Euler, Lagrange, és Hamilton fejlesztették tovább. Maupertuis abból az érzésből vezette le az elvet, hogy az Univerzum tökéletessége megkíván egyfajta gazdaságosságot, és nem fér össze semmilyen energiapazarlással. A természetes mozgás olyan kell legyen, ami valamilyen mennyiséget minimalizál. Ő ezt a *vis viva*-ban, vagy *élőerőben* találta meg, amit ma mozgási energiának hívunk. Euler elfogadta a legkisebb hatás elvét, és a mennyiséget „erőfeszítésnek” hívta, amely a helyzeti energiának felel meg.

A fizikában a **hatáselv** a mozgás természetéről tett állítás, amiből egy erőhatás alatt álló test pályája meghatározható, illetve a kölcsönhatás és átalakulás egyenletei levezethetők. A befutott pálya olyan, amelynek mentén számított hatás stacionárius, azaz a pálya kis odébb tolására nem változik, ezért a pályát nem az erőhatásokra bekövetkező gyorsulások alapján próbáljuk felépíteni, hanem a stacionárius hatás alapján próbáljuk kiválasztani a lehetséges pályák közül.

Az elvet a **stacionárius hatás elvének** vagy **Hamilton-elvnek** is hívjuk. Szintén használatban van a kevésbé általános és történetesen helytelen legkisebb hatás elve elnevezés is. A hatás egy skalár mennyiség (egy szám), energia  $\times$  idő mértékegység dimenzióval. Az elv egyszerű, általános és hatásos elmélet a klasszikus mechanika mozgásainak leírására. A hatáselv kiterjesztése leírja az elektrodinamikát, relativitáselméletet és kvantumelméletet.

*A hatáselv a klasszikus mechanikában:*

A hatáselv a klasszikus mechanikában egyenértékű a Newton törvényekkel, amely többféle módon is felírható. Az egyik közülük a Lagrange-formalizmus vagy Lagrange-mechanika.

Ha egy részecske pályáját a  $t$  idő függvényében  $x(t)$ -vel, sebességét  $\dot{x}(t)$ -vel jelöljük, akkor a Lagrange-függvény valószínűleg ezek függvénye, beleértve az explicit időfüggést is:

$$L[x(t), \dot{x}(t), t]$$

Az  $S$  hatásintegrál a Lagrange-függvény időintegrálja  $t_1$  időbeli  $x(t_1)$  pont és a  $t_2$  időbeli  $x(t_2)$  között fennáll:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L[x(t), \dot{x}(t), t] dt.$$

Ebben az esetben egy részecske pályáját úgy találhatjuk meg, hogy az erre vett  $S$  hatásintegrál stacionárius (minimum vagy nyeregpon). A hatásintegrál egy funkcionál (egy függvénytől függő függvény). Ha a rendszerben konzervatív erők hatnak, akkor a mozgási energia és a helyzeti energia *különbségeként* megválasztott Lagrange-függvény a helyes Newton-törvényekhez vezet.

*Az Euler-Lagrange-egyenletek:*

Az Euler-Lagrange egyenletek közvetlenül nem interpretálhatók geometriailag, ez bizonyos hátrányt jelent a kezelhetőségben, de a Legendre transzformáció segítségével

ezekből jól áttekinthető mozgásegyenletek nyerhetők. Az adott konkrét fizikai rendszer „bonyolultsága” besűríthető egyetlen egy függvény, a Hamilton függvény „bonyolultságába”.

Egy pálya menti integrál stacionárius pontja ekvivalens differenciálegyenletek egy együttesével, amiket Euler-Lagrange-egyenleteknek hívunk.

Tegyük fel, hogy van egy  $S$  hatásintegrálunk  $L$ -en ami az időfüggő koordinátától és időfüggő időderiváltjától függ  $x(t)$  és  $dx(t)/dt$ :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}) dt.$$

Tekintsünk egy másik  $x_1(t)$  görbét (pályát), ami ugyanabban a pontban kezdődik és végződik, mint az első görbe, és tegyük fel, hogy a két görbe közötti távolság mindenhol kicsi:  $\varepsilon(t) = x_1(t) - x(t)$  kicsi. A kezdő- és végpontban  $\varepsilon(t_1) = \varepsilon(t_2) = 0$ .

Az első és második görbe mentén vett integrálok különbsége (amit  $S$  variációjának hívunk):

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} [L(x + \varepsilon, \dot{x} + \dot{\varepsilon}) - L(x, \dot{x})] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \varepsilon \frac{\partial L}{\partial x} + \dot{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) dt$$

ahol  $L$ -et  $\varepsilon$  és  $\varepsilon'$  szerint első rendben fejtettük ki. Végrehajtva a parciális integrálást a második tagon és kihasználva, hogy  $\varepsilon(t_1) = \varepsilon(t_2) = 0$  :

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left( \varepsilon \frac{\partial L}{\partial x} - \varepsilon \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) dt.$$

$S$  minden pontban stacionárius, azaz  $\delta S = 0$  minden  $\varepsilon$ -ra.

A  $\delta S = 0$  minden  $\varepsilon$ -ra, akkor és csak akkor, ha:

$$\frac{\partial L}{\partial x_a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} = 0 \quad (\text{Euler-Lagrange egyenletek})$$

Ahol  $x$ -et  $x_a$ -val helyettesítettük ( $a = 0,1,2,3$ ), mivel a kapott eredménynek minden koordináta esetén igaznak kell lennie. Ezeket az egyenleteket a variációs probléma Euler-Lagrange-egyenleteinek hívjuk. Az egyenleteknek egy fontos egyszerű következménye, hogy ha  $L$  nem függ explicit módon  $x$ -től (azaz  $x$  ún. *ciklikus koordináta*), azaz:

$$\text{ha } \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \text{ akkor } \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \text{ állandó.}$$

A  $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ -nak *konjugált impulzus* a neve és ez megmaradó mennyiség. Ha gömbi polárkoordinátákat használunk ( $t, r, \varphi, \vartheta$ ) és  $L$  nem függ  $\varphi$ -től, akkor a konjugált impulzus a megmaradó impulzusmomentum.

A funkcionálanalízis formalizmusában az Euler-Lagrange-egyenletek egyszerűen így fejezhetők ki:

$$\frac{\delta S}{\delta x_i(t)} = 0$$

### **Példa: Szabad részecske polárkoordinátákban**

Tegyük fel, hogy egy  $m$  tömegű szabad részecske az Euklidészi-térben egyenes vonalú egyenletes mozgást végez  $v$  sebességgel. Ez a következő módon írható fel polárkoordinátákban. Mivel nincs potenciál, a Lagrange függvény egyszerűen a mozgási energiával egyenlő:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

ortonormált  $(x,y)$  koordinátákban, ahol a pont a görbeparaméter (általában a  $t$  idő) szerinti deriválást jelöl.

Polárkoordinátákban  $(r, \phi)$  a mozgási energia és így a Lagrange-függvény:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2).$$

Az  $r$  sugár és a  $\phi$  polárszög Euler-Lagrange-egyenletei:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\varphi} = 0.$$

A két egyenlet megoldása pedig:

$$r \cos \varphi = at + b$$

$$r \sin \varphi = ct + d$$

ahol az  $a, b, c, d$  konstansok értékét a kezdeti feltételek határozzák meg. A megoldás tényleg egy egyenes vonal, polárkoordinátákban.

*A hatáselv néhány alkalmazása:*

Legnagyobb szerepe a kvantummechanikában van, a Richard Feynman által kidolgozott útintegrál megfogalmazása a stacionárius hatás elvén alapul, valamint a már említett Maxwell-egyenletek is származtathatók ebből.

A fizika további sok problémája állítható fel és oldható meg a hatáselv formájában, mint például megtalálni a legrövidebb utat a parthoz, hogy elérjünk egy fuldoklót. A dombról lefutó víz a legnagyobb lejtőt keresi, a leggyorsabb utat, egy medencébe folyó víz úgy terül szét, hogy a felszíne a lehető legalacsonyabban legyen. A fény a leggyorsabb utat követi egy optikai rendszeren keresztül. Egy test pályája gravitációs mezőben a hatáselv segítségével határozható meg, valamint a szimmetriák is jobban kezelhetők a hatáselvvvel és az Euler-Lagrange-egyenletekkel.

A hatáselv alkalmazása sokszor egyszerűbb, mint a Newton-törvényeké, mivel a hatáselv egy skalár elmélet, aminek alkalmazásai kizárólag elemi számításokat igényelnek.

## ***2.11 A Schrödinger-egyenlet:***

*Erwin Schrödinger* Nobel-díjas osztrák fizikus 1887. augusztus 12-én született Bécsben. Klasszikus és modern nyelveket tanult, a bécsi egyetemen Friedrich Hasenöhl és Franz Exner tanítványa volt. Ő az atomelmélet újrafogalmazója, a hullámmechanika

megteremtője, az anyaghullámok terjedését leíró egyenlet kidolgozója, a kvantumbiológia megalapozója. Foglalkozott termodinamikával, a fémek fajhőjével, az atomi spektrumokkal s a színek fiziológiájával, megjelent egy angol-német verseskötete is. 1920-ban Max Wien asszisztense lett Jénában, majd Stuttgartban és Breslauban (ma Wrocław) tanított. 1926-ban a zürichi egyetemre ment, itt jelent meg az Annalen der Physikben A kvantálás, mint sajátértékprobléma című cikke a hullámmechanikáról, ezt nevezik ma Schrödinger-egyenletnek. E cikkben időfüggetlen rendszerekre értelmezte a hullámegyenletet s kimutatta, hogy a hidrogénszerű atomok esetén helyes energia-sajátértékeket ad. Ez a 20. század egyik legnagyobb eredménye, amely forradalmat idézett elő a fizikában és kémiában. A Schrödinger-egyenlet leírja a részecskék mozgásának valószínűségi hullámát s a külső hatások módosításait - ezzel feloldotta a Bohr-atommodell ellentmondásait. További cikkeiben többek között megmagyarázta a harmonikus kvantumoszillátort, a merev rotort, a kétatomos molekulát s új levezetést adott a Schrödinger-egyenletre, bemutatta az időben változó rendszerek, így a szórás kezelését.

A hullámfüggvény időbeli változása determinisztikus abban az értelemben, hogy adott időben, adott hullámfüggvényből kiindulva határozott előrejelzést kapunk arra, hogy bármely későbbi időben milyen lesz a hullámfüggvény. Nem relativisztikus esetben ezt a folytonos időfüggést írja le a Schrödinger-egyenlet, amit relativisztikus esetben a Dirac-egyenlettel kell helyettesítenünk. A kvantummechanika valószínűségi jellege tehát a mérés folyamatában rejlik.

A mikrorészecskék viselkedésének két igen jellegzetes megnyilvánulása az, hogy: *a)* a kötött részecske csak meghatározott, diszkrét energiaértékeket vehet fel, és *b)* a részecskéknek hullámszerű tulajdonságaik vannak, és leírásuknál igen fontos szerepet játszik egy a körülmények által meghatározott hullámfüggvény.

A Schrödinger-egyenlet egy energia sajátérték-egyenlet. Létezik időfüggetlen és időfüggő formája is.

Az egy dimenziós Schrödinger egyenlet:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(\psi) = E\psi$$

$$p = \int_V \psi^* \psi dx$$

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0 \\ V_0, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

Schrödinger egyenlet potenciál lépcsővel:

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi_1 = 0$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}\psi_2 = 0$$

A Schrödinger-egyenlet írja le a részecskék hullámszerű viselkedését a nemrelativisztikus kvantummechanikában. Az egyenlet megoldásai hullámfüggvények, amik a részecske valószínűségi amplitúdóját írják le. A kvantummechanika leírja más hullámok – mint például a fény és a hang – részecsketulajdonságait is atomi szinten és az alatt.

### 2.11.1 A Schrödinger-egyenlet megoldása:

Az egyenlet megoldásai hullámfüggvények, amik a részecske valószínűségi amplitúdóját írják le. A kvantummechanika leírja más hullámok – mint például a fény és a hang – részecsketulajdonságait is atomi szinten és az alatt.

#### Egy térdimenzióban:

Az egy dimenziós  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$  hullámegyenlet általános megoldásának alakja:

$$u(t, x) = f(x + ct) + g(x - ct)$$

ahol  $f$  és  $g$  kétszer differenciálható. Az első összeadandó a balra, a második összeadandó a jobbra futó hullámot írja le.

Az  $f$  és a  $g$  függvények kifejezhetők koszinuszos függvények lineáris kombinációjaként is:

$$\cos(kx - \omega t + \varphi),$$

vagy a komplex exponenciális függvénnyel:

$$u(t, x) = \operatorname{Re} \int dk a(k) e^{i(kx - \omega t)}.$$

A frekvencia pedig:  $\omega = |k| c$ .

A  $\varphi(k)$  fázisszöveget az  $a(k)$  komplex amplitúdó foglalja magában.

### **Adott kezdeti feltételekkel**

Legyen  $u(t, x) = f(x + ct) + g(x - ct)$  az egy dimenziós hullámeqyenlet megoldása. Adva legyenek még az  $u(0, x) = \phi(x)$  és az  $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = u_t(0, x) = \psi(x)$  kezdeti feltételek.

Ekkor:

$$\begin{aligned}u(0, x) &= f(x) + g(x) = \phi(x) \\u_t(0, x) &= c(f'(x) - g'(x)) = \psi(x)\end{aligned}$$

A második egyenletet integrálva kapjuk:

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi,$$

Megoldva pedig:

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{2} \left( \phi(x) + \frac{1}{c} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi \right) \\g(x) &= \frac{1}{2} \left( \phi(x) + \frac{1}{c} \int_x^{x_0} \psi(\xi) d\xi \right)\end{aligned}$$

Így a kezdeti feltételes megoldás:

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \left( \phi(x + ct) + \phi(x - ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi) d\xi \right)$$

### ***Két térdimenzióban:***

Két dimenzióban az egyenlet alakja:



$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Megoldásának általános alakja:

$$u(t, x, y) = \frac{1}{2\pi c} \iint_D \frac{\phi(x + \xi, y + \eta)}{\sqrt{(ct)^2 - \xi^2 - \eta^2}} d\xi d\eta.$$

Ez a megoldás a magasabb dimenziós egyenletek megoldó képletéből is levezethető.

### **Három, vagy több térdimenzióban**

Az általános megoldás magasabb dimenzióban is kifejezhető síkhullámok lineáris kombinációjaként:

$$e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)}, \text{ ahol } \omega = |\mathbf{k}|c$$

és egy ilyen síkhullám  $c$  sebességgel mozog a  $\mathbf{k}$  irányban.

A megoldás általános alakja:

$$u(t, \mathbf{x}) = \text{Re} \int d^n k a(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - |\mathbf{k}|ct)}$$

Három dimenzióban a megoldás előáll a kezdeti értékek középértékeként: legyen  $u(t, \mathbf{x})$  a függvény,  $\phi$  és  $\psi$  adott függvények

$$u(0, \mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial}{\partial t} u(0, \mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}).$$

Ha most feltesszük, hogy  $c=1$ , akkor a kezdeti értékhez tartozó megoldás megadható a középértékek lineáris kombinációjaként:

$$u(t, \mathbf{x}) = t M_{t,\mathbf{x}}[\psi] + \frac{\partial}{\partial t} (t M_{t,\mathbf{x}}[\phi])$$

Itt:

$$M_{t,\mathbf{x}}[\chi] = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 d\cos\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \chi(\mathbf{x} + t\mathbf{n}(\vartheta, \varphi)) \quad \text{ahol} \quad \mathbf{n}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

a  $\chi$  függvény középvértéke az  $\mathbf{x}$  középpontú  $|t|$  sugarú gömbön. Kiemelendő, hogy  $M_{0,\mathbf{x}}[\chi] = \chi(\mathbf{x})$ .

A kezdeti érték feladat megoldása folytonosan függ a kezdeti értéktől, és a  $t$  időpontban az  $\mathbf{x}$ -beli érték csak azoktól az  $\mathbf{y}$  pontokban felvett értékektől függ, amely  $\mathbf{y}$ -okból a  $c=1$  sebességgel haladó hullám elérhetett  $\mathbf{x}$ -be. Azaz, a hullám  $c=1$  sebességgel halad, és eleget tesz a Huygens-elvnek.

Alacsonyabb dimenziókban azonban nem teljesül a Huygens-elv, az  $\mathbf{x}$ -beli érték azoktól az  $\mathbf{y}$  pontokban felvett értékektől is függhet, amely  $\mathbf{y}$ -okból a  $c=1$  sebességnél lassabban haladó hullám elérhetett  $\mathbf{x}$ -be. Páros dimenziókban hasonlóan nem teljesül a Huygens-elv.

## 2.11.2 Peremérték-feladatok:

### *Egy térdimenzióban:*

Egy  $x=0$  és  $x=L$  között kifeszített hajlékony húr eleget tesz a hullámegyenletnek minden  $t>0$  és  $0 < x < L$ -re. Különböző peremfeltételek adhatók:

$$\begin{aligned} -u_x(t, 0) + au(t, 0) &= 0, \\ u_x(t, L) + bu(t, L) &= 0, \end{aligned}$$

ahol  $a$  és  $b$  nem negatív. Ha azt akarjuk, hogy a határpontokban  $u$  nulla legyen, akkor  $a$ -nak és  $b$ -nek a végtelenbe kell tartania.

A változók szétválasztásával:  $u(t, x) = T(t)v(x)$ .

Következik, hogy  $\frac{T''}{c^2T} = \frac{v''}{v} = -\lambda$ .

A  $\lambda$  sajátérték a

$$\begin{aligned} v'' + \lambda v &= 0, \\ -v'(0) + av(0) &= 0, \quad v'(L) + bv(L) = 0. \end{aligned}$$

rendszer nem triviális megoldása, ami az általánosabb Sturm-Liouville-tétel speciális esete. Ha  $a$  és  $b$  is pozitív, akkor az összes sajátérték pozitív lesz, és megoldásként trigonometrikus függvények adódnak. Az  $u$ -ra és  $u_t$ -re adott négyzetesen integrálható kezdeti feltételekre adott megoldás ezek szerint a függvények szerint trigonometrikus sorba fejthető.

**Magasabb dimenzióban:**

Tekintsük a  $D$  tartományt az  $m$ -dimenziós  $X$  térben, és jelöljük a határát  $B$ -vel. Ekkor a változókra a következőknek kell teljesülniük:  $x$   $D$ -beli, és  $t > 0$ .  $D$  határán az  $u$  megoldásra kikötjük, hogy

$$\frac{\partial u}{\partial n} + au = 0,$$

ahol  $n$  a  $B$ -ről kifelé mutató normális egységvektor, és  $a$  a  $B$ -n definiált nem negatív függvény. Ha  $u$ -nak nullának kell lennie a határon, akkor  $a$ -nak a végtelenbe kell tartania.

A kezdeti feltételek:

$$u(0, x) = f(x), \quad u_t = g(x),$$

ahol  $f$  és  $g$  a  $D$ -n értelmezett függvények. A feladat megoldható  $f$  és  $g$  sajátfüggvények szerinti sorfejtésével.

Ezek a sajátfüggvények eleget tesznek ezeknek az egyenleteknek:

$$\nabla \cdot \nabla v + \lambda v = 0, \quad D\text{-ben,}$$

$$\text{és } \frac{\partial v}{\partial n} + av = 0, \quad B\text{-n.}$$

Ha  $D$  körlap, akkor a sajátfüggvények előállnak, mint egy csak a  $\theta$  szögtől függő szögfüggvény, és egy, csak a középponttól való távolságtól függő Bessel-függvény szorzata. Három dimenzióban, ha a határ gömbfelület, akkor a két tényező közül az egyik egy harmonikus gömbfüggvény, a másik egy félegész Bessel-függvény.

### 2.11.3 Egy dimenziós (lineáris) harmonikus oszcillátor:

A fizika sok területén használják a harmonikus oszcillátor modelljét különféle rendszerek leírására. A harmonikus oszcillátor olyan rendszer, amelyben a visszahúzó erő egyenesen arányos a rezgő rész kitérésével. Ilyen rendszer lehet egy kis tömegpont, amelyet két vízszintes rugó tart, vagy az úgynevezett matematikai inga, amelynek kitérése elég kicsi, és a rajta függő súly jó megközelítésben pontszerűnek tekinthető.

Az  $m$  tömegű egy dimenziós harmonikus oszcillátorra  $F = -kx$  rugalmas erő hat, ahol  $k$  pozitív állandó. Mivel  $F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$ , a potenciális energia:  $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ . Ha a potenciális energiát

$(V(x))$  a hely  $(x)$  függvényében ábrázoljuk, parabolát kapunk.

A harmonikus oszcillátor Schrödinger-egyenlete: 
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}kx^2\psi = E\psi$$

A Schrödinger-egyenlettel meghatározhatóak a lehetséges energia-sajátértékek ( $E_n$ ), és a hozzájuk tartozó sajátfüggvények ( $\psi_n$ ). Az egyenletet a Sommerfeld-féle polinom módszerrel lehet megoldani.

Az energia lehetséges értékei a sajátértékek:  $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega = \left(n + \frac{1}{2}\right)h\nu$ , ahol

$\omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{k}{m}}$  körfrekvencia, és  $n=0,1,2,\dots$  nemnegatív egész szám. Ezzel a sajátértékek teljes rendszerét megkaptuk. Az oszcillátor energia-sajátértékei tehát nem vesznek fel tetszőleges értékeket, hanem  $h\nu$  kvantum egész számú többszörösei.

Az  $n = 0$ -hoz tartozó  $E_0 = \frac{h\nu}{2}$  sajátértéket az oszcillátor zéruspont-energiájának nevezzük.

A szomszédos energiaszintek közti különbség:  $E_n - E_{n-1} = h\nu$

Az  $E_n$  sajátértékhez tartozó sajátfüggvény:  $\psi_n \sim H_n\left(\frac{x}{a}\right)e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ , ahol  $a^4 = \frac{\hbar^2}{mc}$ , és  $H_n$  az  $n$ -dik Hermite-polinom.

Az arányossági tényező egy normáló tag, mivel  $|\psi|^2 = 1$ -nek teljesülnie kell.

### Alkalmazás:

- *Kétatomos molekulák vibrációs színekének értelmezése*

A kétatomos molekulákban az atomokat közelítőleg rugalmas erők tartják egymás közelében. A molekula ezek hatására rezgéseket végez, amelyek lehetséges energiaértékeit a fenti energia sajátértékek adják meg.

- *Szilárd testek Einstein-modellje*

A modellben a szilárd testet úgy képzeljük el, hogy az atomjai a kristályrács rácspontjaiban helyezkednek el, és egyensúlyi helyzetük körül kis amplitúdóval rezegnek. A test minden atomja azonos amplitúdóval rezeg, és a köztük lévő kölcsönhatástól eltekintünk. Ekkor az atomokat elemi oszcillátorokként vizsgálhatjuk, így jó közelítéssel meghatározhatjuk a szilárd anyag moláris hőkapacitásának értékét.

Kétségtelenül a kvantumelmélet írja le pontosabban az inga viselkedését, azonban a klasszikus leírás sokkal praktikusabb ebben az esetben, hiszen a mindennapi életben sosem tudjuk az inga helyzetét (vagy energiáját) ilyen pontosan mérni. A kvantumelmélet mintegy magában foglalja a klasszikus elméletet. A makroszkopikus világban általában teljesen megfelelő a klasszikus megközelítést alkalmazni, az elemi részecskék és a mezők világában azonban sok esetben egyedül a kvantumelmélet ad használható eredményt.

A természetben előforduló rendszereket általában nem lehet egyetlen – adott paraméterű – harmonikus oszcillátorral modellezni. Gyakran azonban a ránézésre összevissza rezgő rendszer leírható néhány, esetleg végtelen különböző paraméterű harmonikus oszcillátor összegével. Ilyen, viszonylag egyszerű rendszer egy ideális *zongorahúr*. Minden módusnak megfelel egy adott rezgésszámú, amplitúdójú és fázisú oszcillátor. Ha elég sok módust gerjesztünk, a teljes húr igen bonyolult módon rezeghet, a húr egy kiválasztott pontjának időbeli kitérésfüggvénye szabálytalannak tűnik. A klasszikus elmélet szerint a húr teljes energiája a gerjesztett oszcillátorok energiájának összege, a nem gerjesztett (nulla amplitúdójú) módusok energiája zérus, vagyis azokat nem is kell figyelembe venni

#### 2.11.4 Schrödinger macskája:

A tudós ezzel a neves kísérlettel kívánta szemléltetni a mikrovilágban uralkodó törvények hétköznapi szemlélet számára meghökkentő idegenszerűségét, azt, hogy részecskék egyidejűleg több helyen, különféle állapotokban lehetnek. A kísérlet csak egy fikció volt, a valóságban nem végezték el.

A fizikusok régóta töprengenek azon, vajon hol húzódik az a határ, ahol a kvantum-szuperpozíció mindenképpen összeroppan, azaz az egymással keveredő állapotok dekoherenssé válnak. Ez az állapotváltozás egyúttal a mikro- (a kvantumfizika törvényei által irányított) és a makro- (klasszikus fizika törvényei érvényesülnek) világ közötti határvonalat határozza meg.

Teller Ede egy 1996. október 21-én, a Debreceni Akadémiai Bizottság előtt tartott előadásában így írja le a kísérletet Schrödinger szemszögéből:

***„Tegyük fel, hogy van egy macskám. Ezt beteszem egy ketrecbe, és a ketrec mellé odateszek egy radioaktív készítményt, amely percenként 50%-os valószínűséggel bocsát ki egy alfa-részecskét. Egy számlálót is odateszek, ami egy percre bekapcsol. Ha ez alatt a perc alatt jön egy alfa-részecske, akkor a számláló megindul, kinyit egy kis ajtót, bejön egy kémiai mérge, amitől a macska meghal. Ha pedig nem jött alfa-részecske ebben a percben, a macska életben marad. Én ezt nem figyelem. A kísérlet végén a macska állapotfüggvénye olyan, hogy a macska egy fél valószínűséggel él, és egy fél valószínűséggel halott. Heisenberg szerint - mondja Schrödinger - ha most hirtelen ránézek a macskára, attól a tekintettől a macska tényleg meghal, vagy a macska tényleg megél. Hát kérem szépen - mondta Schrödinger -, én ebből egy szót sem hiszek. Ez így nem lehet.”***

Schrödinger macskája tehát élet és halál kvantummechanikai szuperpozíciójában lebeg, mivel sorsa összefonódott egy potenciálisan macskagyilkos  $\alpha$ -részecskéével.

*Vagyis ugyanakkora esélye van annak, hogy a macska él, mint annak, hogy már elpusztult, esetleg köztes állapotban van, élet és halál között.*

## Irodalomjegyzék:

1. Tasnádi Péter - Skrapits Lajos – Bérces György: Mechanika I.
2. Tasnádi Péter - Bérces György - Skrapits Lajos - Litz József: Mechanika II. Hőtan
3. Erostyák János - Kozma László - Bergou János - Pintér Ferenc: Fénytan  
Relativitáselmélet Atomhéjfizika
4. Bronstein – Szemengyajev – Musiol – Mühlig: Matematikai kézikönyv
5. Scharnitzky Viktor: Differenciálegyenletek
6. Laczkovich Miklós – T. Sós Vera: Analízis I. – II.
7. <http://hu.wikipedia.org/wiki/Riemann-integr%C3%A1l>
8. <http://hu.wikipedia.org/wiki/Riemann-integr%C3%A1l%C3%A1s>
9. <http://hu.wikipedia.org/wiki/Riemann>
10. [http://hu.wikipedia.org/wiki/Gottfried\\_Wilhelm\\_Leibniz](http://hu.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Wilhelm_Leibniz)
11. <http://www.roik.bmf.hu/harp/matek/inte/node3.html>
12. [http://hu.wikipedia.org/wiki/Klasszikus\\_mechanika](http://hu.wikipedia.org/wiki/Klasszikus_mechanika)
13. <http://hu.wikipedia.org/wiki/Kvantummechanika>
14. [www.freeweb.hu/demfklh/y\\_fizikajegyzet101.doc](http://www.freeweb.hu/demfklh/y_fizikajegyzet101.doc)
15. <http://hu.wikipedia.org/wiki/Gyorsul%C3%A1s>
16. <http://hu.wikipedia.org/wiki/Sebess%C3%A9g>
17. [http://hu.wikipedia.org/wiki/Isaac\\_Newton](http://hu.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton)
18. [http://hu.wikipedia.org/wiki/Newton\\_t%C3%B6rv%C3%A9nyei](http://hu.wikipedia.org/wiki/Newton_t%C3%B6rv%C3%A9nyei)
19. [http://hu.wikipedia.org/wiki/Mechanikai\\_munka](http://hu.wikipedia.org/wiki/Mechanikai_munka)
20. <http://www.sulinet.hu/tovabbtan/felveteli/ttkuj/fizika/munka/munka.html>
21. [fizikaweb.uni-pannon.hu/fizika...1.../Fizika\\_1-6\\_Munka\\_es\\_energia.pp](http://fizikaweb.uni-pannon.hu/fizika...1.../Fizika_1-6_Munka_es_energia.pp)
22. [http://hu.wikipedia.org/wiki/Potenci%C3%A1lis\\_energia](http://hu.wikipedia.org/wiki/Potenci%C3%A1lis_energia)
23. <http://www.freeweb.hu/hmika/Lexikon/Html/HarmRezg.htm>
24. <http://hu.wikipedia.org/wiki/Rezg%C3%A9s>
25. [http://hu.wikipedia.org/wiki/A\\_Fourier-sor\\_t%C3%B6rt%C3%A9nete](http://hu.wikipedia.org/wiki/A_Fourier-sor_t%C3%B6rt%C3%A9nete)
26. <http://www.renyi.hu/~major/valszam/central.html>
27. <http://rs1.szif.hu/~horvathz/Bevde/node4.htm>
28. [http://www.math.bme.hu/~simonk/mp3/parc\\_diff\\_1.pdf](http://www.math.bme.hu/~simonk/mp3/parc_diff_1.pdf)

29. [http://hu.wikipedia.org/wiki/Grigorij\\_Jakovlevics\\_Perelman](http://hu.wikipedia.org/wiki/Grigorij_Jakovlevics_Perelman)
30. <http://www.mindentudas.hu/mindentudasegyeteme/bencze/20030127bencze.html>
31. <http://hu.wikipedia.org/wiki/Energiamegmarad%C3%A1s>
32. [www.roik.bmf.hu/fizika/fizeload/1.Mechanikal.doc](http://www.roik.bmf.hu/fizika/fizeload/1.Mechanikal.doc)
33. <http://hu.wikipedia.org/wiki/Termodynamika>
34. <http://hu.wikipedia.org/wiki/%C3%81llapotv%C3%A1ltoz%C3%A1s>
35. [http://www.uni-miskolc.hu/~www\\_fiz/fiz1b/node30.html](http://www.uni-miskolc.hu/~www_fiz/fiz1b/node30.html)
36. [www.kzs.hu/tudastar/fizika/G%C3%A1zok%20%C3%A1llapotv%C3%A1ltoz%C3%A1sai.ppt](http://www.kzs.hu/tudastar/fizika/G%C3%A1zok%20%C3%A1llapotv%C3%A1ltoz%C3%A1sai.ppt)
37. <http://hu.wikipedia.org/wiki/Maxwell-egyenletek>
38. <http://www.fke.bme.hu/oktatas/Eldin/Ea13.pdf>
39. [http://tdk.ttk.bme.hu/Tdk08/eloadasok/Nagy\\_Akos.pdf](http://tdk.ttk.bme.hu/Tdk08/eloadasok/Nagy_Akos.pdf)
40. <http://hu.wikipedia.org/wiki/Elektrodinamika>
41. <http://energiapedia.hu/james-clerk-maxwell>
42. <http://hu.wikipedia.org/wiki/Schr%C3%B6dinger-egyenlet>
43. <http://www.stop.hu/articles/article.php?id=178073>
44. <http://hu.wikipedia.org/wiki/Kvantum-elektrodinamika>
45. [http://hu.wikipedia.org/wiki/Erwin\\_Schr%C3%B6dinger](http://hu.wikipedia.org/wiki/Erwin_Schr%C3%B6dinger)
46. [http://wapedia.mobi/hu/Schr%C3%B6dinger\\_macsk%C3%A1ja](http://wapedia.mobi/hu/Schr%C3%B6dinger_macsk%C3%A1ja)
47. <http://www.interpressmagazin.hu/index.php?page=magazin&cid=123>