Az exponenciális függvény

Szakdolgozat

Készítette: Haraszti Anett
Matematika Bsc, tanári szakirány

Témavezető: dr. Bátkai András, adjunktus
ELTE TTK Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Budapest, 2010.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Már középiskolában is érdekelt az analízis. Így amikor szakdolgozat témát kellett választani, kézenfekvő volt, hogy az analízis témaköréből válasszak. Ezért fordultam első analízistanáromhoz, dr. Bátkai Andráshoz. Miután megbeszéltük, hogy az analízis mely részeit szerettem leginkább, ő javasolta az exponenciális függvényt. Ez a téma rögtön megtetszett, mert amellett, hogy az eddig tanultakból sokat fel lehet használni, arra is lehetőséget biztosít, hogy új, eddigi tanulmányaim során kevésbé mélyen érintett területeket jobban megismerjek.
A szakdolgozatomat az e szám történetével kezdem, mivel az e különösen fontos az exponenciális függvény szempontjából. A második fejezet az exponenciális függvénnyel foglalkozik. Először általánosan ismertetem a függvények történetét, majd áttérek a valós exponenciális függvényre, utána pedig kiterjesztem az exponenciális függvényt komplex változókra. Végül Cauchy függvényegyenletének általánosításán keresztül eljutok a mátrixok exponenciális függvényéig.

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, dr. Bátkai Andrásnak támogatásáért, a kérdéseimre érkező gyors válaszokért, melyekkel a munkámat segítette. Köszönettel tartozom továbbá Constantinovits Milánnak, aki kérésemre megírta az e-verset, amelyben a szavak betűinek száma megegyezik e számjegyeivel.

1. fejezet

Az e szám története

1.1. A logaritmus kialakulása

Manapság a számítógépek korában el sem tudjuk képzelni, hogy egy alapművelet elvégzése nehézségekbe ütközhet. Nem így volt ez a XVI. században. A gazdasági élet, a csillagászat, hajózás és az ipar sokszor kellemetlenül nagy számokkal való műveletek elé állította az embereket. Ezért megpróbáltak a számolást gyorsító módszereket találni.
Többek között erre használták a következő összefüggéseket:

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$a \cdot b = \frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}$$

Ezeket prosztaferetikus módszereknek nevezték el (két görög szó, a proszteizisz=hozzáadás és afairezisz = kiszámítás egyesítéséből).[1]
A kereskedők életében fontos szerepet játszott a pénz, így a kamatos kamat kiszámítása is. Ennek megkönnyítésére különböző táblázatokat készítettek. Pl. *Stevin* táblázata az $(1+r)^n$ értékeit tartalmazta különböző r kamatláb mellett.

[1] K.A. Ribnyikov: A matematika története, 142.o.

1.1.1. A Bürgi-féle logaritmus

Joost Bürgi az $a \cdot (1 + r)^n$ alakú kamatos kamat táblázatból kiindulva, r-t $\frac{1}{10^4}$-nek rögzítette, a-t 10^8-nak választva egy $g_k = 10^8 \cdot (1 + \frac{1}{10^4})^k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ mértani sorozatot kapott. Ehhez hozzárendelte az $a_k = k \cdot 10$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$ számtani sorozat megfelelő elemeit:

$$\begin{array}{cccccc} 10^8 & 10^8 \cdot (1 + \frac{1}{10^4}) & 10^8 \cdot (1 + \frac{1}{10^4})^2 & \ldots & 10^8 \cdot (1 + \frac{1}{10^4})^n & \ldots \\ 0 & 10 & 20 & \ldots & n \cdot 10 & \ldots \end{array}$$

Nyomtatásban a felső számok feketék az alsók pedig pirosak voltak. A piros számok a 10^8-nal osztott fekete számok logaritmusai, ha a logaritmus alapszáma $\sqrt[10]{1,0001}$. Osszuk el a piros sorozat elemeit 10^5-nel, a feketéket pedig 10^8-nal!

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1,0001 & 1,0001^2 & \ldots & 1,0001^n & \ldots \\ 0 & 0,0001 & 0,0002 & \ldots & \overline{0,000n} & \ldots \end{array}$$

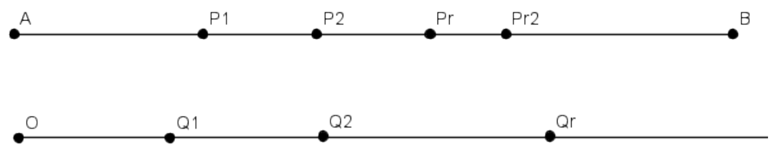
Ekkor az előbbi összefüggés szerint $\log_a 1,0001^n = \overline{0,000n}$, ebből $a \approx 2,718145$, ez e-től csak tízezredekben tér el. *Bürgi* táblázata 1611-ben elkészült, de csak 1620-ban adta ki. Így nem az övé volt az első megjelent logaritmustáblázat, ugyanis 1614-ben *John Napier* kiadta *A csodálatos logaritmustáblázat leírása* (rövden *Descriptio*) című művét. Ez a 0°és 90°közötti szögek trigonometrikus számainak nyolcjegyű logaritmusait tartalmazta, a szögek 1'-es ugrásokkal változtak.

1.1.2. A Napier-féle logaritmus

John Napier elsőségében egy szerencsés véletlen is közrejátszott. 1590-ben VI. Jakab, Skócia királya, Dánia felé hajózott, hogy ott jövendőbeli feleségével, Annával találkozzon. Az orvosa, Dr. John Craig elkísérte az útra. A rossz idő arra kényszerítette a társaságot, hogy kikössön a Hven-szigeten. Itt állt az Uraniborg nevű csillagvizsgáló, amelyben *Tycho Brahe* svéd-dán udvari csillagász dolgozott. Mivel a társaság a csillagvizsgáló közelében ért partot, a csillagász kötelességének érezte, hogy szórakoztassa őket, amíg jobbra fordul az idő. *Brahe* nem tudta megállni, hogy ne meséljen nekik a prosztaferetikus módszerekről (amiket a csillagvizsgálókban nagy előszeretettel alkalmaztak). Dr. Craig skót volt, és baráti kapcsolatban állt John Napierrel. *Napier* a barátjától megtudta, hogy egy kis találékonysággal hatékonyabb számolási eszközt lehetne kitalálni, mint az eddig ismertek, és munkához is látott.

A *Bürgi* által használt két sorozat helyett, amik diszkrét értékeket adtak, két elképzelt mozgást vizsgált, így két folytonos függvény között létesített kapcsolatot. Két, egymással párhuzamosan mozgó pontot figyelt, amik egyszerre és azonos kezdősebességgel indultak A ill. O pontból. A P pont az AB szakaszon haladt csökkenő sebességgel úgy, hogy a sebessége minden pillanatban arányos a B-től vett távolságával, a Q pont pedig egy AB-vel párhuzamos egyenes O pontjából indult P-vel egyszerre, és sebessége konstans volt.

Napier a művében először a P pont mozgását figyelte meg, és bizonyította



1.1. ábra. Mértani és számtani pont.

a következő állítást:

1. Állítás. *Ha a P pont A-ból indul és úgy halad B felé, hogy $BP_r : BP_{r+1}$ állandó, akkor ez az állandó érték megegyezik V_r és V_{r+1} arányával, ahol V_r a P_r-beli, V_{r+1} pedig a P_{r+1}-beli sebesség.*

Bizonyítás: Napier P mozgását egyenlő t időintervallumok alatt vizsgálta, az egyes intervallumokban a sebességet az intervallum kezdőpontjában felvett sebességgel közelítette. Tegyük fel, hogy P egy adott időben P_r-ben van, akkor t idő múlva P_{r+1}-ben lesz. A közelítésből adódik, hogy:

$$BP_r = BP_{r+1} + P_rP_{r+1} = BP_{r+1} + V_r \cdot t$$

A P pont mozgására vonatkozó feltétel ($BP_{r+1} : BP_r = k$, ahol k konstans) miatt $BP_{r+1} = k \cdot BP_r$. Ebből következik, hogy:

$$BP_r = k \cdot BP_r + V_r \cdot t$$

$$V_r = \frac{1}{t} \cdot BP_r \cdot (1-k)$$

Ez azt jelenti, hogy $V_{r+1} = \frac{1}{t} \cdot BP_{r+1} \cdot (1-k)$.
Ebből már látszik, hogy $V_r : V_{r+1} = BP_r : BP_{r+1}$. ■

Ezek után *Napier* következőképpen definiálta a logaritmust:

1. Definíció. *Ha a P pont akkor van P_k helyen, mint Q a Q_k helyen, akkor a BP_k távolság logaritmusa az OQ_k szakasz mérőszáma.*
jelölés: Naplog$(BP_k) = OQ_k$

Nézzük meg, hogyan lehetett számolni a definíció alapján. *Napier* az AB távolságát 10^7-nek vette, $\sin\alpha$ lehetséges értékeit B-től mérte fel a szakaszra, ahol A felel meg 10^7-nek, B pedig 0-nak.[2] P kezdősebessége 10^7 volt.
Vegyük az első időintervallumot: P és Q sebessége is 10^7. Ebben a szakaszban P pont A-ból P_1-be jut, ekkor

$$BP_1 = 10^7 - AP_1 = 10^7 - 10^7 \cdot t = 10^7 \cdot (1-t)$$

Q pont O-ból Q_1-be érkezik. A két pont távolsága $OQ_1 = 10^7t$. Így $\mathrm{Naplog}\{10^7 \cdot (1-t)\} = 10^7t$.
A második időintervallumban a P pont P_1-ből megy P_2-be. Ha P sebességét ebben az intervallumban V_1-gyel jelöljük, akkor

$$BP_2 = 10^7 - AP_2 = 10^7 - (AP_1 + P_1P_2) = 10^7 - 10^7 \cdot t - V_1 \cdot t = 10^7 \cdot (1-t) - V_1 \cdot t$$

[2] Akkoriban egy szög szinuszán egy kör félhúrjának hosszát értették, vagyis függött a kör sugarától, ami a szinuszt definiálta. A trigonometrikus táblázatok elkészítéséhez a kör sugarát elég nagynak választották, mert az eredményt minél pontosabban akarták megadni egész számban, mivel a tizedestörteket még nem ismerték

Az előző tétel alapján $V_1 : 10^7 = BP_1 : 10^7$. Ebből következik, hogy $V_1 = BP_1 = 10^7 \cdot (1-t)$, tehát

$$BP_2 = 10^7 \cdot (1-t) - 10^7 \cdot (1-t) \cdot t = 10^7 \cdot (1-t)^2$$

Q pont Q_1-ből Q_2-be érkezik. OQ_2 távolsága $OQ_2 = 10^7 \cdot 2t = 2 \cdot (10^7 t)$. Így $\mathrm{Naplog}\{10^7 \cdot (1-t)^2\} = 2 \cdot (10^7 t)$.
Általában az r-edik intervallumban $BP_r = 10^7 \cdot (1-t)^r$, $OQ_r = r \cdot (10^7 t)$ és $\mathrm{Naplog}\{10^7 \cdot (1-t)^r\} = r \cdot (10^7 t)$.
Napier t-t $\frac{1}{10^7}$-nek választotta. Így azt kapta, hogy

$$\mathrm{Naplog}\left\{10^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^1\right\} = 1$$

$$\mathrm{Naplog}\left\{10^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^2\right\} = 2$$

és általában

$$\mathrm{Naplog}\left\{10^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^r\right\} = r$$

Ha figyelembe vesszük, hogy $AB = 10^7$ és $OO = 0$, akkor a diszkrét esetekre egy a Bürgiéhez hasonló számtani és mértani sorozat elemeit kapjuk:

$$\begin{array}{ccccccc} 10^7 & 10^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^7}\right) & 10^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^2 & \ldots & 10^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^r & \ldots \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & r & \ldots \end{array}$$

Ha felhasználjuk azt a tényt, hogy a két mozgás folytonos, akkor tetszőleges $L \geq 0$ esetén

$$\mathrm{Naplog}\left\{10^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L\right\} = L$$

Vizsgáljuk meg, hogyan segítette a logaritmus a nagy számokkal végzett műveleteket.
Ha $L_1 = \mathrm{Naplog}\, N_1$ és $L_2 = \mathrm{Naplog}\, N_2$, akkor

$$N_1 \cdot N_2 = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{L_1} \cdot 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{L_2} = 10^7 \cdot 10^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{L_1 + L_2}$$

$$\frac{N_1 \cdot N_2}{10^7} = 10^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{L_1+L_2}$$
$$\mathrm{Naplog}\left(\frac{N_1 \cdot N_2}{10^7}\right) = L_1 + L_2 = \mathrm{Naplog}\, N_1 + \mathrm{Naplog}\, N_2$$

Az ismert számolási szabály ($\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$) itt egy kicsit más formában tűnik fel: a szorzást sikerült összeadássá átalakítani, a végeredmény csak a tizedesvessző helyében különbözik attól az eredménytől, amit a mai összefüggés alapján kapnánk.

Napier-féle logaritmustáblázat készítésének leírása (*Mirfici logarithmorum canonis constructio*) csak *Napier* halála után, 1619-ben jelent meg. Maga a táblázat felkeltette az angol *Henry Briggs* érdeklődését, aki meglátogatta *Napiert* 1616-ban. A két tudós összebarátkozott, és arra az álláspontra jutottak, hogy célszerűbb lenne a logaritmus alapjának 10-et választani, mert akkor 1 logaritmusa 0, a 10 logaritmusa pedig 1 volna, ezzel egyszerűsíteni lehetne a műveleteket. Sajnos *Napier* gyenge egészségi állapota miatt *Briggs* egyedül maradt az átszámítás gondjaival. Az új, tízes alapú logaritmustáblázatot 1617-ben, *Napier* halálának évében publikálta.
Az e szám első előfordulását *Napier Descriptio* című művének angol fordításában - a függelékben - tartják számon, $2,71828\ldots$ formában. A függelék valószínűleg *William Oughtredtől* származik.

1.2. Az e első megjelenései

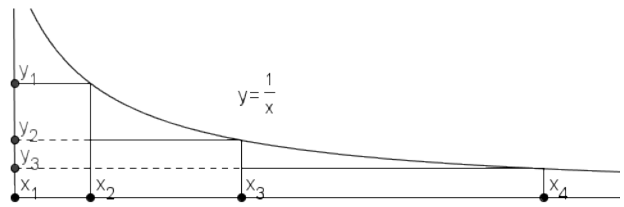
Napier logaritmusfogalma elég távolinak tűnik a mai definíciótól, az alkalmazási területe is jelentősen módosult. Mégis vannak korai utalások arra, amit ma a logaritmikus tulajdonság alatt értünk. 1636 előtt többen bebizonyították, hogy $n \neq -1$-et kivéve minden racionális szám esetén

$$\int_0^a x^n\, dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

De az $y = \frac{1}{x}$ egyenletű hiperbola alatti területet továbbra sem tudták kiszámolni. Az első sejtés *Gregorius a St. Vincento*, jezsuita atya nevéhez fűződik. Ő mutatta meg a következőt:

2. Állítás. *Ha az $y = \frac{1}{x}$ hiperbola A és B pontjainak abszcisszái megfelelően arányosak a hiperbola A_1 és B_1 pontjainak abszcisszáival, akkor az A és B közötti valamint az A_1 és B_1 közötti területek megegyeznek.* [3]

Ez ekvivalens azzal az állítással, hogy az $y = \frac{1}{x}$ hiperbola alatti terület az $(1, x)$ intervallumon $\ln x$, ahol a logaritmus alapszáma az az e szám, amelyre a hiperbola alatti terület az $(1, e)$ intervallumon 1. St. Vincento egy addig szokatlan közelítést használt a területre: ahelyett, hogy a téglalapok x-tengelyen vett oldalait azonos hosszúságúnak vette volna fel, a téglalapok területét rögzítette, az oldalt pedig ennek megfelelően változtatta. Mivel az



1.2. ábra. A hiperbola alatti terület (J.Havil: Gamma 23.o.)

egyes téglalapok területei megegyeznek, az első két téglalapra ezt felírva

$$y_1 \cdot (x_2 - x_1) = y_2(x_3 - x_2)$$
$$\frac{1}{x_1}(x_2 - x_1) = \frac{1}{x_2}(x_3 - x_2)$$
$$\frac{x_2}{x_1} - 1 = \frac{x_3}{x_2} - 1$$
$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2}$$

Ebből látszik, hogy az x_n-koordináták mértani sorozatot alkotnak, mert a szomszédos tagok hányadosa állandó. Ha pedig az első, második, ... n-edik téglalapok területeit összeadjuk, akkor ezek az összegek egy számtani sorozatot alkotnak. Ez egyértelműen a két sorozat közötti logaritmikus

[3]K.A. Ribnyikov: A matematika története, 148.o.

összefüggésre utal.
Newton és *Nicolaus Mercator* egymástól függetlenül jutottak arra a felismerésre, hogy a hiperbola alatti terület egy adott számig egyenlő a szám logaritmusával. Az $\frac{1}{1+x}$ sorbafejtésével az $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$ kifejezést kapták, ami tagonként integrálava az $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots$ képletet adta. Ez nagy segítséget nyújtott a logaritmus kiszámításához. *Mercator* használta először a ,,természetes logaritmus" kifejezést az e alapú logaritmusra, bár maga az e szám konkrétan még nem jelent meg. Ekkor logaritmuson egyaránt értették *Napier* számait, a hiperbola alatti területet és az előbb említett végtelen sorösszeget.

Euler az, aki a múlt és jelen közötti különbségeket áthidalta. 1770-ben megjelent *Teljes bevezetés az algebrába* című könyvében adott definíciót a logaritmusra:

2. Definíció. *Tekintsük az $a^b = c$ egyenletet. Ekkor a b szám egyenlő a c szám a alapú logaritmusával.*[4]

Az definíció eredeti megfogalmazását ma kicsit körülményesnek és meglehetősen régiesnek gondolnánk, de tulajdonképpen megegyezik a fenti a definícióval. Az előbb említett könyv még jelentősebb, ha figyelembe vesszük, hogy ezt *Euler* már majdnem teljesen vakon diktálta egy szolgának, akit ,,matematikai titkárként" alkalmazott. *Euler* bevezetett egy modern függvényfogalmat is, amelynek az $y = a^x$ függvény egy speciális esete. Ennek inverzeként definiálta a logaritusfüggvényt.
Valószínűleg a kamatoskamat-számítás kapcsán jelent meg először az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ alakú kifejezés. Felmerült a kérdés, hogy milyen értékhez közelít ez, ha n végtelenül nagy, azaz mai jelöléssel a

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

[4] Euler az eredeti definícióban az a alapú logaritmusra a gyök kifejezést használja, a logaritmust pedig a gót l betűvel jelöli.

határértéket keresték. Kiderült, hogy ez a sorozat nagyon fontos szerepet játszik. A határértékére *Euler* az e jelölést vezette be. Először az *Elmélkedés az ágyúzás legújabb tapasztalatairól* című kézirtában használta az e számot, ez 1727-1728-ból származik. Később pedig egy *Goldbachnak* írt levélben 1731-ből találkozhatunk az e-vel. Nyomtatásban először 1736-ban, a *Mechanica* című tanulmányban jelent meg. A szimbólum megválasztásának okáról csak találgathatunk. Egyesek szerint az akkori matematikában használatos szokásos a, b, c, d betűk után sorban következő betűt választotta, mások az exponenciális szó kezdőbetűjével indokolják a választást. A rosszmájúak véleménye szerint *Euler* önmagáról nevezte el a számot.
Euler levezette, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Ha x helyére -1-et írunk, akkor

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

Ezek után nézzük meg *Napier* eredményeit a fentiek tükrében. Ehhez egy kicsit másképp kell megválasztani a két elképzelt mozgást. Legyen P és Q kezdősebessége is 1. Ez hatással van az AB távolságra is, hiszen a P pont sebessége egy adott pontban meg kell, hogy egyezzen a pontnak B-től vett távolságával. Így $AB = 1$. Ezekkel a feltételekkel az egymáshoz rendelt számok diszkrét esetben:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & \left(1-\frac{1}{10^7}\right) & \left(1-\frac{1}{10^7}\right)^2 & \dots & \left(1-\frac{1}{10^7}\right)^r & \dots \\
0 & \left(\frac{1}{10^7}\right) & \left(\frac{2}{10^7}\right) & \dots & \left(\frac{r}{10^7}\right) & \dots
\end{array}$$

Tehát általában:

$$\mathrm{Naplog}\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^L = \frac{L}{10^7}$$

$L = 10^7$-re

$$\mathrm{Naplog}\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7} = 1$$

Bár a 10^7 nem végtelen nagy, de elég nagy ahhoz, hogy $\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$ -t $\frac{1}{e}$-vel közelítsük:

$$1 = \text{Naplog}\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7} \approx \text{Naplog}\left(\frac{1}{e}\right)$$

Ebből látszik, hogy *Napier* logaritmusánál tulajdonképpen $\log_{\frac{1}{e}}$ -ről volt szó.

Ez felírható a differenciálszámítás felhasználásával is. Tudjuk, hogy a sebességet kifejezhetjük $v(t) = \frac{ds}{dt}$ alakban, ahol t az idő, s az út és $v(t)$ a sebesség a t időpillanatban. Alkalmazzuk ezt a *Napier* által elképzelt két mozgásra, amelynél az AB távolság és a két pont kezdősebessége is 10^7. Jelölje BP távolságát x, az OQ stávolságot y, az arányossági tényező pedig legyen 1. Ekkor a P pontra $v(t) = x(t)$, a P által megtett út pedig $s(t) = 10^7 - x(t)$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = (10^7 - x(t))' = -x'(t) = -\frac{dx}{dt}$$

$$x(t) = -\frac{dx}{dt} \text{ tehát } \frac{dx}{dt} = -x$$

A Q pont egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, $v_0 = 10^7$ és $y(t) = 10^7 \cdot t$. Tehát:

$$\frac{dy}{dt} = 10^7$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{10^7}{x}$$

Ebből integrálás után $y = -10^7 \ln x + c$. A kezdeti értékeket figyelembe véve határozzuk meg a c értékét ($x = 10^7$ és $y = 0$):
$0 = -10^7 \ln 10^7 + c$ Tehát $c = 10^7 \ln 10^7$. Ekkor

$$y = -10^7 \ln x + 10^7 \ln 10^7 = 10^7 \ln \frac{10^7}{x}$$

$$\frac{y}{10^7} = \ln \frac{10^7}{x}$$

Mivel $\ln\lambda = \frac{\log_{\frac{1}{e}}\lambda}{\log_{\frac{1}{e}} e} = \log_{\frac{1}{e}}\frac{1}{\lambda}$, ezért azt kapjuk, hogy

$$\frac{y}{10^7} = \log_{\frac{1}{e}}\frac{x}{10^7}$$

Tehát így is megállapíthatjuk, hogy *Napier* logaritmusának alapja $\frac{1}{e}$ volt.

Euler több felfedezést is tett az e számot illetően, melyeket 1748-ban, az *Introductio in analysin infinitorum* (röviden *Introductio*) című művében publikált. Megmutatta, hogy

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

Euler bizonyította be azt is, hogy az e szám irracionális. *Euler* 18 tizedesjegy pontossággal meghatározta e értékét, bár azt nem közölte, hogyan jutott erre az eredményre.
1844-ben *Liouville* megmutatta, hogy az e szám egyetlen egészegyütthatós, másodfokú polinomnak sem gyöke. 1873-ban sikerült *Hermite*-nek bebizonyítania, hogy e transzcendens, azaz egyetlen egész együtthatós polinomnak sem gyöke.
Ma már több, mint 10^9 nagyságrenű tizedesjegyig meghatározták e pontos értékét, de még most, a számítógépek korában is folyik a verseny a további tizedesjegyek meghatározásáért. Az e számjegyeinek megjegyzésére több verset, mondatot is kitaláltak, ilyen Constantinovits Milán következő verse is:

Ez állandó! E konstans
és hatalmas,
s Eulertől is hírneves szám!
Vádol hiányzása:
logaritmus léte sincs ám!
e-nk kincs!
Így mindig számosítsd!
És láthatod: világos, amit
sejtett ó, rég Hermit'.

2. fejezet

Az exponenciális függvény

2.1. A függvényfogalom kialakulása

A függvényfogalom már az emberek által igen régen észrevett ok-okozati viszonyokban is megmutatkozott. A korai matematikában találunk olyan utalásokat, amelyek az okozati összefüggések egyre tudatosabbá válására utalnak. Ezt támasztják alá az egyiptomi és babiloni táblázatok, melyeket a számolás megkönnyítésére állítottak össze. Az ógörög matematikusok rengeteg függvényfogalomat rejtő összefüggést fogalmaztak meg, miközben mennyiségi törvényeket kutattak. Ide sorolhatjuk az ógörög és a középkorból származó hindu és arab húrtáblázatokat. *Ptolemaiosz* által bevezetett földrajzi szélesség és hosszúság már kimondottan koordinátarendszert alkot. Ezek is hasonlóan fejlett függvényfogalmat rejtenek, mint a középkori *Oresme* sebesség-idő-grafikonjai.

Descartes nevéhez fűződik a függvény első definíciója. ,,A függvényeket megfeleltetéseknek definiálta, bár ő még csak az algebrai műveletekkel meghatározott függvényekkel foglalkozott".[1] Vele egyidőben *Fermat* is hasonló eredményekre jutott, nekik tulajdonítjuk a változó mennyiségek matematikájának megalkotását.

Leibniz alakította tovább a fogalmat, ő használta először a függvény (a latin

[1]Sain Márton: Nincs királyi út 698. o.

functio = eljárás, végrehajtás) kifejezést ,,valamely görbének egy pontjához tartozó olyan szakaszra, amely változik, ha a pont végigfut a görbén".[2] A XVII. század végén, a XVIII. század elején elterjedt az az értelmezés, mely szerint azokat az analitikus kifejezéseket tekintették függvénynek, amik kifejezték a változók és állandók közötti összefüggést. Ezt a fogalmat jelölte *Johann Bernoulli* φx-szel. *Euler* is ezt a felfogást követte, és következőképpen definiálta a függvényeket *Introductio in analysin infinitorum* c. művének első kötetében:

> ,,A változó mennyiség függvénye analitikus kifejezés, amely ebből a változó mennyiségből és számokból vagy állandó mennyiségekből van valamilyen módon összetéve."[3]

Euler φ helyett f-fel jelölte, komplex argumentumot is megengedett, és az analitikus kifejezéseket a következő operácókkal képezte: a négy alapművelet, hatványozás, gyökvonás, sorbafejtés, differenciálás, integrálás. Ezen kívül foglalkozott még az e^x, $\ln x$ és a trigonometrikus függvényekkel is. *Euler* osztályozta a függvényeket az őket leíró képletben előforduló műveletek szerint, ezt később kiegészítette a függvények tulajdonságai szerinti csoportosítással. *Euler* kezdetben úgy gondolta, hogy minden függvény hatványsorba fejthető, vagyis

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

ahol z általában komplex. Ebből következik, hogy állításai lényegében a mai analitikus függvényekre vonatkoznak. Miközben differenciálegyenleteket vizsgált, olyan függvényekre bukkant, amelyeket tetszőleges alakú grafikon is megadhatott. Feltételezte, hogy ezek nem fejthetők hatványsorba. Nehézséget okozott, hogy a hatványsorok elmélete nem volt teljes, a konvergenciafeltételeket még nem tisztázták. Mivel nem körvonalazódott a konvergens és divergens sorok közötti különbség, olyan módszerek, amelyek egyik

[2] Sain Márton: Nincs királyi út 698.o.

[3] idézve: K.A. Ribnyikov: A matematika története 206. o.

esetben jó eredményhez vezettek, a másiknál használhatatlannak bizonyultak. A matematikai viszonyok tisztázásban jelentős szerepe volt elméleti fizikai problémáknak, nevezetesen a húrok rezgéseinek. A problémát először *Brook Taylor* oldotta meg, majd *D'Alambert*, és három évvel később *Euler* adott rá általánosabb megoldást. Ebben olyan függvényeket találtak, amik nem ,,folytonosak", hanem csak összefüggők. Egy függvényt folytonosnak mondtak, ha az egész értelmezési tartományán egyetlen analitikus kifejezéssel felírható volt, a mai értelemben vett folytonosságot összefüggőségnek nevezték.

Abból a kérdésből, hogy egy szabadkézzel rajzolt, összefüggő vonal analitikus-e, vita alakult ki. *Euler* és *Daniel Bernoulli* adtak rezgő húrokra olyan példát, ami trigonometrikus sorba volt fejthető. A vitát *Fourier* zárta le a hővezetés elméletében fellépő parciális differenciálegyenletek megoldásával. Bebizonyította, hogy ha egy összefüggő vonalat különböző egyenletű véges szakaszok alkotnak, akkor az összefüggő vonal által definiált függvény

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

alakú sorba fejthető, ahol a később Fourier-eggyütthatóknak elnevezett együtthatók

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx.$$

Dirichlet 1829-ben megmutatta, hogy minden olyan függvény felírható trigonometrikus sorok összegeként, amelyeket véges sok folytonos szakaszból álló görbe definiál. Ezzel megoldódott *Euler* ,,szabadon vezetett kéz által leírt" görbéinek problémája, hiszen ezek szintén felírhatók ,,hatványsor" alakban.

Már nem volt szükség arra, hogy a függvényeket csak analitikus kifejezésekként értelmezzék, elterjedt a függvényeket általános megfeleltetésekként értelmező szemlélet, *Dirichlet* adott egy általános függvénydefiníciót:

3. Definíció. *Az y és x változók olyan viszonyban vannak, hogy x valamely számértékéhez bármilyen törvény hozzárendeli y-nak egy értékét, akkor azt mondjuk, hogy y az x független változó függvénye.*[4]

Ezt, amit ma halmazelméleti kifejezésekkel kicsit másképp fogalmazunk meg, lényegében azonban ugyanaz a kettő. Ehhez a definícióhoz *Bolyai Farkas* is eljutott még *Dirichlet* előtt. Ő a kövekezőket írta az 1832-ben megjelent *Tentamen*ben: ,,Tágabb értelemben a függvény bármilyen operáció, amely az időben és térben elképzelhető"[5]
Bolzano is fontos szerepet játszott a függvények elméletének fejlődésében, bár politikai okok miatt nem publikálhatta műveit, így jelentősségét csak később ismerték fel. Még *Cauchy* előtt bevezette a folytonosság pontos definícióját, a féloldali folytonosságot, és meghatározta a folytonos függvények számos tulajdonságát. *Bolzano* és *Dirichlet* munkája biztos alapot nyújtott ahhoz, hogy a XIX. században *Cauchy* és *Weierstrass* leírja a valós függvények tulajdonságait. Ezek után a komplex függvénytan is biztos alapokra talált. A halmazelméleti definíció nem írja elő, hogy a függvények értelmezési tartománya és értékkészlete számhalmaz legyen, hanem ezek elemei tetszőleges matematikai objektumok lehetnek. Így létrejöttek a függvénytannak további területei. Ha a függvények halmazából a számok halmazába képezünk, a leképezést funkcionálnak nevezzük, ha a függvényekhez rendelünk függvényeket, akkor operátorokról beszélünk. A funcionálanalízis foglalkozik az operátorokkal és funkcionálokkal, ezt a területet *Vito Voltera*, olasz matematikus óta tartják számon önálló kutatási területként. Ezen a területen több magyar matematikus is kimagasló eredményeket ért el: *Riesz Frigyes, Haar Alfréd, Neumann János* valamint *Szőkefalvi Nagy Béla.*

[4]Sain Márton: Nincs királyi út 700.o.
[5]idézve: Sain Márton: Nincs királyi út 700.o.

2.2. Az exponenciális függvény

Már *Euler* előtt is létezett az exponenciális függvény. Többek között *Jacob Bernoulli* is úgy gondolt a logaritmusfüggvényre, mint az exponenciális függvény inverzére. Az exponenciális sort ismerték már korábban is, például szerepel *Newton* az 1665 körüli *Végtelen sok tagú egyenletek segítségével történő számítások* című értekezésében. *Euler* erőfeszítéseket tett az ebben az időben igencsak megnövekedett matematikai analízis rendszerezésére, ezért az ő eredményeivel kezdeném az exponenciális függvény tényleges tárgyalását.

2.2.1. Euler és az exponenciális függvény

Euler az *Introductio* című művében több szempontból is csoportosította a függvényeket. Megkülönböztette az algebrai és a transzcendens függvényeket. Azon függvényeket nevezte transzcendensnek, amelyek nem algebraiak, tehát amik exponenciális és logaritmikus mennyiségektől függenek, illetve olyanoktól, amelyekre az integrálszámítás vezet. Ide tartoztak például a logaritmusfüggvények, a trigonometrikus függvények és az exponenciális függvény is. Az algebrai függvényeket továbbosztotta irracionális és racionális függvényekre, a racináliskakat pedig egész illetve törtfüggvényekre. Ezen kívül megkülönböztetett explicit és implicit függvényeket illetve egyértelmű és többértelmű függvényeket.[6]

A 4. fejezetben *Euler* azt írja, hogy a függvények hatványsorba fejtésével a transzcendens függvények könnyebben felismerhetők. Tisztában volt vele, hogy nem tudta általánosan bizonyítani a függvények hatványsorba fejthetőségét, hanem erről minden egyes esetben külön meg kellett győződni. Utalt racionális kitevőjű hatványsorok lehetőségére is.

A függvények hatványsorba fejtése *Euler* számára egy eszközt jelentett, melynek segítségével a függvényeket könnyebben tudta vizsgálni. Így tett

[6] Ugyan a gyökös kifejezések többértelműsége régóta ismert volt, de ez idő tájt vált fontossá a probléma tanulmányozása

az exponenciális függvénnyel is. Abból a tényből indult ki a függvény sorbafejtéséhez, hogy $a^0 = 1$. Az exponenciális függvény monoton növekedése miatt $(a > 1)$ egy végtelen kis ω és egy ω-tól függő szintén végtelen kicsi ψ-re $a^\omega = 1 + \psi$. Mivel ψ függ ω-tól, ezért ψ-t felírhatjuk $k\omega$-ként. Ekkor $a^\omega = 1 + k\omega$. Továbbá egy tetszőleges i-re

$$a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i$$

Ezután alkalmazta a binomiális tételt

$$a^{i\omega} = 1 + \frac{i}{1}k\omega + \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2}k^2\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}k^3\omega^3 + \dots$$

Majd i-t helyettesítette $i = \frac{x}{\omega}$-val, ahol x egy véges szám. Ezt átrendezve $\omega = \frac{x}{i}$-t kapta. Tudjuk, hogy ω végtelen kicsi, ezért i-nek végtelenül nagynak kell lennie. Nézzük meg, hogy mit ad ez a helyettesítés a képletre:

$$a^x = 1 + \frac{1}{1}kx + \frac{1(i-1)}{1 \cdot 2i}k^2x^2 + \frac{1(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2i \cdot 3i}k^3x^3 + \dots$$

Euler azt írja, hogy ez az egyenlet akkor helyes, ha i helyére egy végtelen nagy számot írunk. k egy a-tól függő szám. Mivel i végtelen nagy, ezért $\frac{i-n}{i}$ értéke vehető 1-nek minden n természetes számra. Így

$$a^x = 1 + \frac{kx}{1} + \frac{k^2x^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

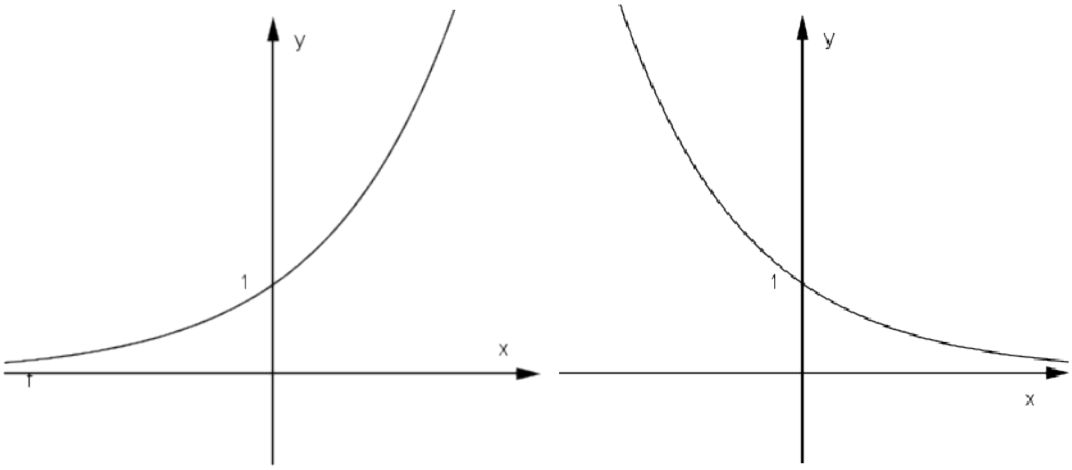
Ebből a képletből látszik az a és k közötti összefüggés x értékét 1-nek választva:

$$a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

$k = 1$-re az e számot kapjuk, a hozzá tartozó exponenciális sor pedig:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

Az exponenciális függvény grafikonja az $a > 1$ esetben ahogy x nő, úgy nő y is először lassan, majd egyre gyorsabban. Ha x csökken, akkor y is, egyre lasabban, de soha nem éri el a nullát. Ha $0 < a < 1$, akkor pont fordítva: ahogy x nő, úgy csökken y, de soha nem lesz nulla, ha x csökken, akkor y nő.



2.1. ábra. Exponenciális függvények

Az exponenciális függvény növekedését jól illusztrálja az a legenda, amely szerint a sakk felltalálója azt kérte a királytól, aki megkérdezte tőle, hogy mit kér a találmányáért cserébe, szerényen azt válaszolta, hogy a sakktábla minden négyzetére tegyenek rizsszemeket úgy, hogy az elsőre egyet, a másodikra kettőt, a harmadikra négyet és mindegyikre az előző kétszeresét egészen addig, amíg mind a 64 négyzetre nem került rizsszem. A király - meglepődve a feltaláló szerénységén- rögtön utasította a szolgáit, hogy hozzanak egy zsák rizst, és kezdjék el felrakni a táblára. Nagy csodálatukra a királyság összes rizse sem lett volna elég, hogy a feltaláló kérését teljesítsék. Az utolsó négyzetre 2^{63} rizsszemet kellett volna feltenni, már ez is hatalmas szám, ehhez még hozzá kellene adni az előző négyzeteken lévő rizsszemeket.

Pont az exponenciális függvény növekedésének mértéke az, ami érdekessé és egyedülállóvá teszi. A függvény változásának mértékét a derivált fejezi ki. Nézzük meg ezt az $f(x) = b^x$ függvény esetén, ahol b rögzített.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{b^x - b^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{b^{x_0}(b^{x-x_0} - 1)}{x - x_0}$$

Tudjuk, hogy $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$. Hogy ezt fel tudjuk használni, alakítsuk át a b^x-es kifejezést.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{b^{x_0}(b^{x-x_0} - 1)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} b^{x_0} \frac{e^{\ln b \cdot (x - x_0)} - 1}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} b^{x_0} \ln b \frac{e^{\ln b \cdot (x - x_0)} - 1}{\ln b \cdot (x - x_0)} = b^{x_0} \ln b \lim_{x \to x_0} \frac{e^{\ln b \cdot (x - x_0)} - 1}{\ln b \cdot (x - x_0)}$$

$x \to x_0$ miatt $\ln b \cdot (x - x_0) \to 0$, ezért alkalmazható az előző nevezetes határérték azaz:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{e^{\ln b \cdot (x - x_0)} - 1}{\ln b \cdot (x - x_0)} = 1 \text{ így } \lim_{x \to x_0} b^{x_0} \ln b \frac{e^{\ln b \cdot (x - x_0)} - 1}{\ln b \cdot (x - x_0)} = b^{x_0} \ln b$$

Ebből látszik, hogy az exponenciális függvény deriváltja arányos magával a függvénnyel. Ha a függvény alapját e-nek választjuk, akkor a függvény deriváltja megegyezik a függvénnyel. Az e^x az egyetlen függvény, ami ezt tudja (a konstansszorosaival együtt). Ez a tulajdonsága teszi alkalmassá az exponenciális függvényt, hogy olyan folyamatokat írjon le, melyek során valamilyen mennyiség változása arányos magával a mennyiséggel. Ezeket a $\frac{dy}{dx} = ay$ differenciálegyenletek írják le, ahol a határozza meg a változás mértékét. Ennek a megoldásai az $y = Ce^{ax}$ függvények, ahol C-t a kezdeti feltétel segítségével tudjuk meghatározni. Ilyen jelenségekre példa a radioaktív anyagok bomlása és a népesség növekedése.

2.2.2. A komplex exponenciális függvény

Euler nagyszerű matematikus volt, aki úgy játszott a képletekkel, ahogy a gyerekek a játékokkal. Minden lehetséges helyettesítést kipróbált, amíg nem talált valami érdekeset. Az eredmény gyakran szenzációs volt. Az exponenciális sorban a valós z változót kicserélte a komplex iz-re. Így a következő formális kifejezést kapta:

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \dots$$

Tudjuk, hogy

$$i^n = \begin{cases} (-1)^k & \text{ha } n = 2k \\ (-1)^k i & \text{ha } n = 2k - 1. \end{cases}$$

Így az előző egyenlet felírhatjuk, mint

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots$$

Euler felcserélte a kifejezések sorrendjét, egymás mellé gyűjtötte azokat, amik képzetesek voltak. Ez veszélyes lehet, hiszen a véges összegektől eltérően a tagok sorrendjének cseréjétől változhat összeg, sőt, a konvergens sor divergenssé is válhat. De *Euler* idejében a hatványsorok elmélete nem volt még teljesen kidolgozott, így ő a ,,végtelennel való gondtalan kísérletezés korszakában élt *Newton* fluxiójának és *Leibniz* differenciáljának szellemében".[7] Ma már tudjuk, hogy a tagok sorrendjének megváltoztatása azért nem okozott gondot, mert a komplex exponenciális sor abszolút konvergens, hiszen $\frac{1}{\limsup \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}} = \infty$, és tudjuk, hogy abszolút konvergens sor bármely átrendezése is konvergens. A tagok sorrendjének megcserélésével azt kapta, hogy:

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)$$

Akkoriban már ismerték a $\sin x$ és $\cos x$ trigonometrikus függvények hatványsorait, így *Euler* eljutott a nevezetes

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

képlethez, ami összekapcsolja a trigonometrikus függvényeket az exponenciális függvénnyel. ix helyett $-ix$-t írva és a $\cos(-x) = \cos x$ illetve a $\sin(-x) = -\sin x$ összefüggéseket felhasználva eljutott az

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

egyenlethez. Az előző két egyenlet összeadásáva és kivonásával kapjuk, hogy

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \text{ és } \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}.$$

Bár a képlet pontos levezetése és felhasználása további bizonyításoknál *Euler* Introdictiojához kötődik, nem ő volt az első, aki ezt az összefüggést felfedezte. *Johann Bernoulli* már 1702-ben talált egy olyan képletet, ami a trigonometrikus függvények és a logaritmus közötti kapcsolatra utalt. 1714-ben *Roger Cotes* is publikált egy tételt komplex számokról, ami modern írásmóddal a következő alakban írható fel:

$$\sqrt{-1}\varphi = \log_e(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) \quad \varphi \in \mathbb{R}$$

[7] Eli Maor: e: the story of a number 159.o

Euler az 1740. október 18-án *Johann Bernoulli*nak írt levelében megállapította, hogy $y = 2\cos x$ és $y = e^{\sqrt{-1}x} + e^{-\sqrt{-1}x}$ ugyanannak a differenciálegyenletnek a megoldása. Ezt a felismerést 1743-ban publikálta.

A komplex exponenciális függvényt definiálhatjuk a hatványsorával:

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$$

Valamint értelmezhetjük az Euler-féle összefüggés felhasználásával, ha $z = x + iy$ ahol $x, y \in \mathbb{R}$:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Ha z valós szám, vagyis $y = 0$, akkor $w = e^x$, tehát megegyezik a valós exponenciális függvénnyel. A komplex exponenciális függvény a valós exponenciális függvény sok tulajdonságát „örökölte". Többek között

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1) \cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) =$$

$$= e^{x_1+x_2}[\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)] = e^{z_1+z_2}$$

a komplex számok szorzására vonatkozó szabály miatt. A valós exponenciális függvénnyel ellentétben a komplex periodikus függvény, ugyanis:

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z.$$

vagyis a függvény kielégíti az $f(z) = f(z + 2i\pi)$ A függvény periódusa $2i\pi$, azaz tetszőleges k egész számra igaz, hogy

$$e^{z+2k\pi i} = e^z$$

Mit tudunk mondani a komplex exponenciális függvény deriváltjáról? Ehhez egyszerűbbnek tűnik a hatványsorral vett definíciót alapul venni. Tudjuk, hogy a hatványsorok összegfüggvénye a konvergenciasugáron belül tetszőlegesen sokszor differenciálható, a deriváltak pedig a valóshoz analóg módon számíthatók. Mivel a komplex változós exponenciális függvény

hatványsora minden $z \in \mathbb{C}$ esetén konvergens, így a hatványsor bármely z esetén tagonként differenciálható és $f'(z) = e^z$.
Formálisan kiterjesztettük az exponenciális függvényt komplex változókra. Amellett, hogy megőrizte a valós exponenciális függvény számos fontos tulajdonságát, felvett új jellemzőket is, amik különösen hasznosak. Ehhez nézzük meg, hogy hogyan lehet a komplex exponenciális függvényeket ábrázolni. Komplex függvénytanban a függvényeket két síkon ábrázoljuk, az értelmezési tartományt egy z (xy-)síkon, az értékkészletet pedig egy w (uv-)síkon.
Az ábrázoláshoz hasznosabb, ha az $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ definíciót alkalmazzuk, mert a jobb oldal egy komplex szám trigonometrikus alakja, ahol e^x a szám abszolút értéke, y pedig a szög. Ha szétválasztjuk a valós és képzetes részt, azt kapjuk, hogy:

$$\begin{cases} u = e^x \cos y \\ v = e^x \sin y \end{cases}$$

Az $x = c$ (ahol c konstans) egyenesek képe az

$$\begin{cases} u = e^c \cos y \\ v = e^c \sin y \end{cases}$$

görbe lesz, amiből a paramétereket kiiktatva az

$$u^2 + v^2 = e^{2c}$$

körökhöz jutunk. Az y-tengellyel párhuzamos egyeneseket origó középponttú körökbe képezi. Az y-tengelynek ($x = 0$ egyenes) az $u^2 + v^2 = e^0 = 1$ kör felel meg. Megfigyelhető, hogy ha a függőleges egyenesek egymástól egyenlő d távolságra vannak, a képeiket alkotó körök sugara exponenciálisan nő, és egy olyan mértani sorozatot alkot, amelynek a hányadosa $q = e^{2d}$. Nem véletlenül juthat eszünkbe erről *Napier* munkájára, hiszen ő is -diszkrét eseben- számtani és mértani sorozatok között létesített kapcsolatot.
Az $y = c$ egyenesek képét az

$$\begin{cases} u = e^x \cos c \\ v = e^x \sin c \end{cases}$$

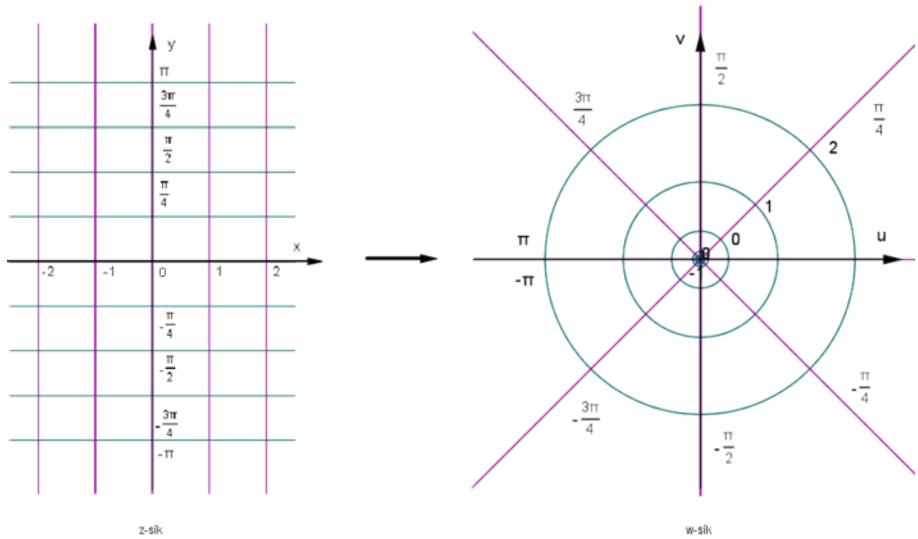
képlet adja meg. Ha elosztjuk egymással a két egyenletet, az x paraméter kiesik, így ezeknek az egyeseknek a

$$v = u \operatorname{tg} c$$

origón átmenő (fél)-egyenesek felelnek meg. Ha $c = 0$, akkor $v = 0$ képe az u-tengely pozitív fele lesz, ugyanis $u = e^x$ mindig pozitív. Ha $y = c = 2\pi$, akkor a kép ismét az u-tengely pozitív fele lesz, ugyanis

$$\begin{cases} u = e^x \cos 2\pi = e^x \\ v = e^x \sin 2\pi = 0 \end{cases}$$

Ahogy a valós periodikus függvények tulajdonságait elég egy perioduson megállapítani, ugyanígy a komplex változós, periodikus exponenciális függvény viselkedését is elegendő egy 2π hosszúságú intervallumon, például $y = -\pi$ és $y = \pi$ között megvizsgálni.



2.2. ábra. A komplex $f(z) = e^z$ függvény (E. Maor: e: the Story of a Number)

2.2.3. Mátrixok exponenciális függvénye

1821-ben *Cauchy* megfogalmazta a következő problémát: Keressük az összes olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos leképezést, amely kielégíti a következő függvényegyenletet:

$$f(s+t) = f(s) + f(t) \qquad s,t \in \mathbb{R}$$
$$f(0) = 1$$

Már *Euler* óta ismert volt a függvényegyenlet tipikus megoldása:

4. Definíció. *Minden $a \in \mathbb{R}$ esetén definiáljuk az exponenciális függvényt*

$$f_a(t) := e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^k}{k!} \text{ minden } t \in \mathbb{R} \text{ esetén.}$$

Belátható, hogy a Cauchy-féle függvényegyenlet folytonos megoldásai pontosan az f_a függvények.

1. Tétel. *Az f_a exponenciális függvény minden $a \in \mathbb{R}$ esetén kielégíti a*

$$f_a(s+t) = f_a(s) + f_a(t) \qquad s,t \in \mathbb{R}$$
$$f_a(0) = 1$$

függvényegyenletet és a következő differenciálegyenletet:

$$\tfrac{d}{dt} f_a(t) = a \cdot f(t) \qquad t \in \mathbb{R}$$
$$f_a(0) = 1$$

Megfordítva a Cauchy-féle függvényegyenlet minden folytonos megoldása, és a differenciálegyenlet minden differenciálható megoldása $f(t) = e^{at}$ ahol $t \in \mathbb{R}$.

Ezzel *Cauchy* kérdését megválaszolták. 1905-ben *Georg Hamel* találta meg a fügvényegyenlet összes, nem csak folytonos megoldását.

Dinamikus rendszerek

A függvényegyenlet felmerülésében fontos szerepe volt a dinamikus rendszereknek. Dinamikus rendszereknek nevezzük azokat a rendszereket, amik az időben előre meghatározottan, determinisztikusan[8] változnak. A természettudományok, a gazdaságtudomány és a társadalomtudomány is

[8]determinizmuson a természettudományokban a világ összes jelenségének ok-okozati összefüggését értik.

egyre inkább rendszerek tágabb értelemben vett mozgásával foglalkozik. Ez a tágabb értelemben vett mozgás változást jelent az idő során. Ezeket a változásokat már régebben is szerették volna matematikailag leírni. Az első nagy sikert *Newton* érte el, amikor leírta a bolygók mozgását. 100 évvel később *Laplace* fogalmazott meg egy ,, mechanikus determinizmust"[9], ami létfontosságúvá vált az időtől függő rendszerek természettudományos és matematikai vizsgálatához.

Nézzük most meg, hogy hogyan lehetne egy ilyen dinamikus rendszert matematikailag leírni. Az időt valós számokkal írjuk le úgy, hogy egy adott időpontot egy bizonyos $t \in \mathbb{R}$ számmal adunk meg. Jelölje X a renszer összes lehetséges állapotainak halmazát, egy adott állapotot pedig jelölje x, az állapothalmaz egy eleme. Ebből már kézenfekvő, hogy a rendszer változását az időben, azaz a ,,mozgást" $\mathbb{R} \ni t \mapsto x(t) \in X$ leképezés adja meg, ahol $x(t)$ a rendszer állapota a t időpillanatban.

2. Tétel. *Meghatározottsági axióma: Minden $t_0 \in \mathbb{R}$ időponthoz, és minden $x_0 \in X$ állapothoz pontosan egy $x(\cdot) : \mathbb{R} \to X$ mozgás létezik, ami a t_0 időpillanatban az x_0 állapotot veszi fel, vagyis amelyre $x(t_0) = x_0$.*

Ezek után már definiálhatunk X-ből X-be leképezéseket:

5. Definíció. *Bármely két $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ időpillanatra legyen adott a $\varphi_{t_1,t_0} : X \to X$ leképezés, amelyre $\varphi_{t_1,t_0}(x_0) := x(t_1)$, ahol $x(\cdot)$ az egyértelmű $x(t_0) = x_0$ mozgás.*

Másképp kifejezve $\varphi_{t_1,t_0}(x_0)$ a renszer állapota t_1-kor, ha a rendszer állapota t_0-ban x_0 volt. Az axiómából és a definícióból következik a $\phi := \{\varphi_{t_1,t_0} : t_1, t_0 \in \mathbb{R}\}$-beli leképezések kompzíciójára, hogy:

3. Tétel. *Függvényegyenlet (nem autonóm): Minden $t_2, t_1, t_0 \in \mathbb{R}$ esetén érvényes, hogy*

$$\varphi_{t_2,t_0} = \varphi_{t_2,t_1} \circ \varphi_{t_1,t_0}$$
$$\varphi_{t_0,t_0} = id.$$

[9]Eszerint a világegyetem jelenlegi állapotát úgy kell tekinteni, mint egy korábbi állapot következményét és a következő állapot okát.

Bizonyítás: Legyenek $t_2, t_1, t_0 \in \mathbb{R}$ rögzítve és legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ tetszőleges, $x(\cdot)$ jelölje azt az egyértelmű mozgást, melyre $x(t_0) = x_0$. Definíció szerint

$$x_1 = x(t_1) = \varphi_{t_1,t_0}(x_0)$$

$$x_2 = x(t_2) = \varphi_{t_2,t_0}(x_0)$$

Másrészt pontosan egy olyan mozgás van, ami t_1-ben x_1, és φ_{t_2,t_1} definíciója szerint a t_2 időpontban $\varphi_{t_2,t_1}(x_1)$ értéket veszi fel. $x(\cdot)$ t_1-kor x_1-ben van, tehát a meghatározottsági axióma szerint

$$x(t_2) = \varphi_{t_2,t_1}(x_1)$$

Vagyis ez azt jelenti, hogy

$$\varphi_{t_2,t_0}(x_0) = \varphi_{t_2,t_1}\left(\varphi_{t_1,t_0}(x_0)\right)$$

minden $x_0 \in \mathbb{R}$ esetén ∎

Sokszor hasznos lehet, ha feltesszük, hogy a rendszer mozgása csak a t_1 és t_0 közötti eltéréstől függ. Az ilyen rendszereket nevezzük autonómnak.

4. Tétel. *Autonómia-axióma: A* $\phi := \{\varphi_{t_1,t_0} : t_1, t_0 \in \mathbb{R}\}$ *meghatározott rendszerre* X *állapothalmazon minden* $r, t \in \mathbb{R}$ *esetén érvényes, hogy*

$$\varphi_{r+t,r} = \varphi_{t,0}$$

Emellett az extra feltétel mellett definiálhatunk X-en olyan T leképezéseket, hogy $T(t) := \varphi_{t,0}$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén. Ezek a leképezések a függvényegyenlet autonóm verzióit elégítik ki.

5. Tétel. *Autonóm függvényegyenlet: Legyen* $\phi := \{\varphi_{t_1,t_0} : t_1, t_0 \in \mathbb{R}\}$ *autonóm rendszer* X*-en. Ekkor a* $T(t) := \varphi_{t,0}$ $t \in \mathbb{R}$ *leképezések kielégítik a következő függvényegyenletet:*

$$T(t+s) = T(t) \circ T(s)$$
$$T(0) = id \text{ minden } t, s \in \mathbb{R}.$$

Bizonyítás: t, s valós számokra

$$T(t) \circ T(s) = \varphi_{t,0} \circ \varphi_{s,0}$$

Az autonóm axióma miatt

$$\varphi_{t,0} \circ \varphi_{s,0} = \varphi_{t+s,s} \circ \varphi_{s,0}.$$

A 3. tételből pedig következik, hogy

$$= \varphi_{t+s,s} \circ \varphi_{s,0} = \varphi_{t+s,0} = T(t+s)$$

Ezzel igazoltuk a tételt.■
Az ilyen matematikai objektumokat nevezzük dinamikus rendszereknek, vagyis

6. Definíció. *A* $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ *leképezések rendszerét az* X *állapothalmazon,* $T(t) : X \to X$*, ha minden* $t, s \in \mathbb{R}$ *esetén teljesül, hogy*

$$\begin{aligned} &T(t+s) = T(t) \circ T(s) \\ &T(0) = id \end{aligned}$$

dinamikus rendszernek nevezzük.

Ez a rendszernek egy általános leírása, egy konkrét rendszer leírásához pontosan tisztázni kell a leképezések tulajdonságait. Tegyük fel például, hogy a rendszerünk egy tetszőleges $x_0 \in X$ pontból indul, és t idő elteltével egyértelműen az $f(t)x_0$ állapotba kerül. Ha további s idő telik el, akkor a rendszer az előzőek alapján az $f(s)f(t)x_0$ állapotba érkezik. Ha viszont kezdettől fogva először a $t + s$ pillanatban nézzük a rendszert, akkor az az $f(t + s)x_0$ állapotba jut. Ekkor az egyértelműség miatt $f(t + s)x_0 = f(s)f(t)x_0$. Mivel ez minden x_0 kezdeti állapotra igaz, összefoglalva mondhatjuk, hogy

$$f(s)f(t) = f(s+t), \quad f(0) = 1$$

mert ha nem telik el idő, akkor a rendszer az eredeti helyén marad, vagyis $f(0)x_0 = x_0$. Így eljutottunk a *Cauchy* által felvetett függvényegyenlethez.

Mátrixértékű exponenciális függvény

A XIX. század második felére a véges dimenziós vektorterek és mátrixok elmélete annyit fejlődött, hogy *Cauchy* problémáját tudták általánosítani. Azokat a folytonos, mátrix értékű leképezéseket keresték $f : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$, amik kiegyenlítették a

$$\begin{aligned} &f_a(s+t) = f_a(s) + f_a(t) \qquad s,t \in \mathbb{R} \\ &f_a(0) = I \end{aligned}$$

függvényegyenletet. Nem alkalmazhatták rögtön a Cauchy-féle függvényegyenlet tipikus megoldását, csak 1887-ben definiálta *Guiseppe Peano* az egydimenzióshoz analóg módon a mátrixértékű exponenciális függvényt.

7. Definíció. *Minden valós $A \in M_n(\mathbb{R})$ mátrixra az exponenciális függvényt a következőképpen definiálhatjuk:*

$$f_A(t) := e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \qquad k \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}$$

Ezek után *Peano* megmutatta, hogy minden ilyen exponenciális függvény eleget tesz az előbbi függvényegyenlet feltételeinek. Ezeket az eredményeket a valós esethez hasonlóan így fogalmazhatjuk meg:

6. Tétel. *Az f_A exponenciális függvény minden $A \in M_n(R)$ mátrix esetén kielégíti az*

$$\begin{aligned} &f_A(s+t) = f_A(s) + f_A(t) \qquad s,t \in \mathbb{R} \\ &f_A(0) = I \end{aligned}$$

függvényegyenletet és a következő differenciálegyenletet:

$$\begin{aligned} &\tfrac{d}{dt} f_A(t) = A \cdot f_A(t) \qquad t \in \mathbb{R} \\ &f_A(0) = I \end{aligned}$$

Az egydimenziós eset alapján sikerült a definíciót és az eredményt is kiterjeszteni. Ezt folytatta *Peano* egy tanítványa, *Maria Gramegna*, aki elkezdett végtelen dimenziós rendszerekkel foglalkozni, bár ez csak jóval később épült be a köztudatba.

Végtelen dimenziós exponenciális függvény

Lagrange már 1772-ben formális érveléseken keresztül a Taylor-formulát exponenciális függvényként kapta meg, *Fourier* is fontos eredményekre jutott a hővezetésről szóló könyvében, de ezek az eredmények nem voltak megfelelően precízek, ezért matematikai körökben vitatottak maradtak. Mégis csak a XX. század végére vált olyan fejletté a végtelendimenziós analízis, hogy általánosítani tudják a *Cauchy* által megfogalmazott problémát. Így csak 1939-ben jutott *Israil Moise Gewitch Gelfand* el odáig, hogy korlátlan operátorokra definiálja az exponenciális függvényt.

Ezzel áttekintettük az exponenciális függvény történetét és kiterjesztését mátrixokra, illetve érintőlegesen végtelen dimenzióra. A dolgozat elkészítése közben megismert történeti rész jól alkalmazható a középiskolai tanítás során az analízis témájú órák - függvények, logaritmus, exponenciális függvény- színesebbé tételére.

Irodalomjegyzék

[1] Dr. Gáspár Gyula és Dr. Szarka Zoltán, *Műszaki matematika, VI. kötet, Komplex függvénytan*, Tankönyvkiadó, 1982

[2] Halász Gábor, *Bevezető komplex függvénytan*, ELTE Eötvös Kiadó Kft., Budapest, 2002

[3] Julian Havil, *Gamma*, Springer, Berlin-Heidelberg, 2007

[4] Hans Niels Jahnke (Hrsg.), *Geschichte der Analysis*, Spektrum,Akad. Verl., Heidelberg, 1999

[5] Kós Rita, Kós Géza, *Miért természetes az e?*, KöMal 2003/5

[6] Eli Maor, *e: The Story of a Number*, Princeton University Press, New Jersey, 1994

[7] Rainer Nagel *Was schert den Mathematiker der Determinismus*

[8] Rainer Nagel, Gregor Nickel, *Exponentialfunktion und wissenschaftlicher Determinismus - Fortschritt oder ewige Wiederkehr des Gleichen?* Schriftenreihe der Europäischen Akademie Bozen 14, Bolzano 1999

[9] K.A. Ribnyikov, *A matematika története*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1974

[10] Sain Márton, *Matematikatörténeti ABC*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1978

[11] Sain Márton, *Nincs királyi út!*, Gondolat, Budapest, 1986