Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Matematikatanítási és Módszertani Központ

Összehasonlító vizsgálatok a gömb és a sík geometriájában

Körzőrózsák és hozzáírt körsorozatok

Szakdolgozat

Konzulens:	**Témavezető:**	**Készítette:**
Lénárt István	**Dr. Rózsahegyiné Vásárhelyi Éva**	**Kádár Edina**
Oktatáskutató	Egyetemi docens	Matematika BSc

Budapest, 2010.

Tartalom

Előszó

A dolgozat célja a körzőrózsa és a hozzáírt körsorozat problémájának bemutatása. Előbbi nem más, mint adott sugarú körök halmaza, melyeket egy bizonyos meghatározott eljárás szerint veszünk fel. Tekintsünk egy alapkört, majd ennek egy tetszőleges pontját, s vegyük fel azt a kört, melynek a sugara megegyezik az alapkör sugarával s középpontja a már kiválasztott pont. Ekkor a két kör egyik metszéspontját tekintve egy újabb kör középpontjának, melynek sugara az eddigi körök sugaraival egyezik meg, folytatható az eljárás. Ha síkon végezzük a módszert, a művelet befejezhető lesz, hisz a körök egy idő után egymást fogják lefedni, vagyis a technika folytatásával a már meglévő köröket vesszük fel újra, ilyenkor beszélünk körzőrózsáról. Rengeteg kérdést vet fel az imént felvázolt eljárás, például: befejezhető-e minden sugár esetén a művelet, vagyis körzőrózsát kapunk-e? Melyekre igen és melyekre nem? Amennyiben nem kaptunk körzőrózsát, észre lehet-e venni valamilyen más alakzatot, aminek ehhez az eljáráshoz köze van? S utóbbi esetben mitől függ, hogy ezt kaptuk? Milyen különbségek adódnak a körzőrózsa vonatkozásában a sík és a gömb geometriájában? Van-e valamilyen mélyebb összefüggés a matematika más területével, mi az oka az eredményünknek? Hogy lehetne másképp megfogalmazni a problémát? Ilyen és ehhez hasonló kérdések megválaszolására törekszünk a dolgozatban.

A hozzáírt körsorozat problémája: tetszőleges alapkörhöz vegyünk fel olyan köröket, melyek sorjában egymást is és az alapkört is kívülről érintik, ekkor előfordulhat, hogy az érintő körök sorozata bezárul, vagyis olyan n körből álló gyűrűt kapunk, melyben az első kör kívülről érinti az utolsót. Ekkor beszélünk az alapkörhöz hozzáírt zárt körsorozatról. A dolgozatban csak azt az esetet fogjuk megvizsgálni, amikor az alapkör és a hozzáírt körök sugarai ugyanakkorák. Hasonló kérdések merülhetnek fel a hozzáírt körsorozat problémájánál, mint a körzőrózsánál. A dolgozatban bemutatjuk, hogy a két probléma ugyanazon elven nyugszik.

Az első fejezetben rövid áttekintést adunk a különböző geometriákról és fejlődésükről, ez inkább összefoglaló jellegű, mivel a téma részletes bemutatása meghaladná a dolgozat kereteit. Ezt követően a gömbi geometria alapfogalmait és tételeit mutatjuk be, melyek közül némelyiket a dolgozatban a későbbiekben is felhasználunk. Természetesen ez az alfejezet is összefoglaló jellegű. A második fejezetben definiáljuk a körzőrózsát és megvizsgáljuk az euklideszi és a gömbi geometriában, megkíséreljük összefüggésbe hozni a parkettázásokkal.

A harmadik fejezet körökhöz hozzáírt körsorozatokkal foglalkozik, megmutatjuk, hogy ez a jelenség ugyanazt az elvet rejti magában, mint a körzőrózsa. A negyedik fejezet az oktatási alkalmazásokkal kapcsolatos, szerkesztéseket és művészeti vonatkozásokat tartalmaz.

1. fejezet: Bevezetés

Ebben a fejezetben röviden áttekintjük a geometria axiomatikus felépítését, emellett matematikatörténeti szempontból is vizsgáljuk a gömbi és az euklideszi geometriát. Megnézzük, hogy e két geometria minek lehet a modellje, illetve milyen összefüggések vannak a különböző geometriák között. Ezt követően tárgyaljuk a gömbi geometria alapvető fogalmait és tételeit, melyekre a későbbiekben hivatkozni is fogunk.

1.1. Történeti bevezető

A gömbi geometriával már igen régóta foglalkoznak, különösen a gömbháromszögtan fejlődött ki nagyon korán, még korábban, mint hogy axiomatikus alapokra helyezték volna az euklideszi geometriát, ugyanis a csillagászok számára nélkülözhetetlen volt. A gömbbel többek között foglalkozott Arkhimédész (i. e. 287-212), aki a térfogatát ($4\pi r^3/3$, r sugarú gömb esetén), és a felszínét ($4\pi r^2$, r sugarú gömb esetén) is meghatározta. A csillagász, Menelaosz (kb. 70-140) *Szférika* című művében gömbháromszögekkel foglalkozott, a sík geometria egyes tételeit vitte át a gömbre. Sokan az arab matematikus, Abul-Vafa (940-998) nevéhez kapcsolják a gömbi szinusztételt, mások Abu-Naszr (870-950) nevéhez társítják a felfedezést, azonban az bizonyosnak látszik, hogy Abu-Vafa volt az első, aki mind a hat szögfüggvényt definiálta az egységsugarú kör segítségével, és ismerte a közöttük fennálló összefüggéseket. A középkor végéről érdemes még megemlíteni John Napiert (1550-1617), aki a logaritmus és a tizedesvessző bevezetése mellett a gömbi trigonometriában is jelentős eredményeket ért el.

Az euklideszi geometriát mindenki ismeri valamennyire, ugyanis ez az a geometria, amit az iskolában tanítanak, illetve a hétköznapokban a legtöbbször alkalmazunk. Bár már négyezer évvel ezelőtt a babilóniaiak és az egyiptomiak is foglalkoztak a geometria ezen területével, mégis a görögök nevéhez fűződik a születése, ugyanis ők voltak ez elsők, akik rendszerbe foglalták az elért eredményeket és bizonyításokat is közöltek. Az ókor egyik legkiemelkedőbb, legjelentősebb tudományos műve (melyben főként az addig elért eredmények kerültek összefoglalásra) Eukleidész *Elemek* (i.e. 300 körül) című munkája, melyben a róla elnevezett geometriát helyezi axiomatikus alapokra. Az idők során az euklideszi geometria egyre precízebb lett, gondolunk itt például arra, hogy Eukleidész a mai értelemben vett alapfogalmakat is definiálta; az ő posztulátumait ma már axiómaként tartjuk számon. 1899-ben jelent meg az euklideszi geometria első olyan axiómarendszere, amely megfelel a modern matematika szemléletmódjának és követelményeinek: David Hilbert (1862-1943) *A geometria alapjai* című munkájában. (Később mások is axiomatizálták az euklideszi geometriát, mint például Alfred Tarski (1901-1983) vagy George Birkhoff (1884-1944).) Ebben az axiómarendszerben öt nagy csoportja van az axiómáknak, mégpedig: illeszkedési axiómák, rendezési axiómák, egybevágósági axiómák, folytonossági axiómák, és a párhuzamossági axióma.

1.1.1. Párhuzamossági axióma. Ha adott egy e egyenes és egy rá nem illeszkedő P pont, akkor az általuk meghatározott síkban pontosan egy olyan f egyenes létezik, mely tartalmazza a P pontot és az e egyenest nem metszi.

A párhuzamossági axióma ekvivalens az ötödik euklideszi posztulátummal.

1.1.2. Eukleidész 5. posztulátuma. Ha két egyenest úgy metsz egy harmadik egyenes, hogy a metsző egyenes egyik oldalán keletkező belső szögek összege két derékszögnél kisebb, akkor, ha az eredeti két egyenest végtelenül meghosszabbítjuk, metszeni fogják egymást, mégpedig a harmadik egyenesnek azon az oldalán, ahol a belső szögek összege kisebb két derékszögnél.

1.1.3. Definíció. Maradék axiómarendszeren a párhuzamossági axiómát nem tartalmazó euklideszi axiómák együttesét értjük. A maradék axiómarendszerből fölépíthető geometriát abszolút geometriának, tételeit pedig abszolút (geometriai) tételeknek nevezzük.

Az 5. posztulátumot sokáig szerették volna kiiktatni az axiómarendszerből, úgy vélték, hogy a maradék axiómarendszerből levezethető, vagyis egy abszolút tétel. A sok rossz bizonyítás eredményeképpen születtek meg a helyettes axiómák, mint például [8]:

1.1.4. Axióma (Bolyai Farkas). Bármely három pont közös egyenesen vagy közös körön van.

1.1.5. Axióma (Wallis). Bármely háromszöghöz létezik olyan hozzá hasonló háromszög, melynek egyik oldala akkora, mint egy tetszőleges előre adott szakasz.

1.1.6. Axióma (Saccheri). Létezik legalább egy háromszög π szögösszeggel.

Ezek a helyettes axiómák ekvivalensek a párhuzamossági axiómával, vagyis a maradék axiómarendszerből és a helyettes axiómákból külön-külön következik az euklideszi axiómarendszer és ez visszafele is igaz.

Az abszolút geometria egyik modellje például az euklideszi geometria, de ide sorolható a Bolyai János (1802-1860) nevéhez fűződő hiperbolikus geometria is, az abszolút tételek tehát mindkét geometriában megállják a helyüket. Ilyen tételek például az alább felsoroltak, melyek mellesleg nem igazak a gömbi geometriában (amiből azonnal következik, hogy a gömbi geometria nem az abszolút geometria modellje) [8]:

1.1.7. Tétel. Ha adott egy e egyenes és egy rá nem illeszkedő P pont, akkor az általuk meghatározott síkban létezik legalább egy olyan f egyenes, amely átmegy P ponton és nem metszi az e egyenest.

1.1.8. Tétel (Legendre első szögtétele). A háromszög szögösszege nem nagyobb két derékszögnél.

1.1.9. Tétel. Bármely P ponthoz és a P-t nem tartalmazó e egyeneshez pontosan egy olyan f egyenes létezik, mely átmegy a P ponton és merőleges az e egyenesre.

A gömbi geometriában nem létezik két olyan egyenes melyek diszjunktak lennének, hiszen bármely két gömbi egyenes egy átellenes pontpárban metszi egymást. A gömbi háromszögek szögösszegei pedig nagyobbak két derékszögnél. Az 1.1.9. Tétel sem teljesül a gömbi geometriában, amint az a 3. ábrán is látható, egy adott ponton áthaladó gömbi egyenesek a pont polárisára merőlegesek (a pólus-poláris viszonyról az 1.2. alfejezetben lesz részletesebben szó).

Az abszolút geometria két, már említett modellje közötti különbséget az okozza, hogy míg az euklideszi esetben a maradék axiómarendszerhez a párhuzamossági axiómát, addig a hiperbolikus geometria esetében az alábbi axiómát vesszük hozzá.

1.1.10. Bolyai-Lobacsevszkij-féle axióma. Adott e egyeneshez egy rá nem illeszkedő P ponton keresztül az általuk meghatározott síkban létezik legalább két olyan egyenes, mely diszjunkt az e egyenestől.

Az alábbi tétel pedig leírja, hogy pontosan mely geometriák abszolútak:

1.1.11. Tétel. [8] Minden abszolút geometria vagy euklideszi, vagy Bolyai- Lobacsevszij-féle.

A két geometria között az alábbi tétel segít különbséget tenni:

1.1.12. Tétel. [8] Egy abszolút geometria euklideszi vagy Bolyai- Lobacsevszkij-féle aszerint, hogy tartalmaz-e olyan háromszöget, melyben a szögek összege π, vagy egy olyan háromszöget, melyben a szögösszeg kisebb, mint π.

Felmerülhet a kérdés, hogy a gömbi geometriát honnan származtathatjuk, vagyis melyik axiómarendszer modellje, esetleg lehet-e más geometriákkal kapcsolatba hozni? Nyilvánvalónak látszik, hogy az 1.1.1 és 1.1.10. Axiómák helyett célszerű egy másik axiómát választani, hiszen a gömbön nem beszélhetünk párhuzamosságról. Ezért az alábbi axióma értelemszerűnek látszik:

1.1.13. Axióma (Riemann). Bármely két egyenes metszi egymást.

Ha a fenti axiómát hozzávesszük a maradék axiómarendszerhez, az 1.1.11. Tétel szerint ellentmondásra jutunk, ezért az axiómarendszerben más axiómát is meg kell változtatni, ha a gömbi geometriához akarunk eljutni. A Riemann-féle axiómát használva két geometriai elmélethez is eljuthatunk a maradék axiómarendszer alkalmas módosításával:

1.1.14. Definíció. [8] Egyszeres elliptikus geometriának nevezzük azt a geometriai elméletet, melyben a Riemann-féle axiómát feltételezzük, és emellett bármely két különböző egyenes pontosan egy pontban metszi egymást, de közülük (külön-külön) egyik sem különíti el a sík pontjait két idegen halmazra (nem szeparálja a síkot). Kétszeres elliptikus geometriának nevezzük azt a geometriai elméletet, melyben a Riemann-féle axiómát feltételezzük, és emellett bármely két különböző egyenes pontosan két különböző pontban metszi egymást, és a sík minden egyenese szeparálja a síkot.

A Riemann-féle kétszeres elliptikus geometria egyik modellje a gömbi geometria. Az egyszeres elliptikus geometria pedig származtatható a kétszeres elliptikus geometriából. A származtatásnak az az alapötlete, hogy az átellenes pontpárokat egy pontnak tekintik, tehát lényegében ezzel a megkötéssel elegendő csak egy félgömböt vizsgálni. Ezért a Riemann-féle egyszeres elliptikus geometriának a teljes gömbön kívül az alábbi modelleket is megengedik. Olyan félgömbfelület, melynek a peremfőkörének az átellenes pontjait egy pontnak tekintik, illetve olyan félgömbfelület, melynek a határoló főkörének pontosan a felét tekintik a modellhez tartozónak. A gömbfelületre a projektív sík egyik modelljeként is lehet tekinteni alkalmas megfeleltetéssel. Nem áll szándékunkban ezekbe a megfeleltetésekbe elmélyedni, célunk a gömbi geometria elhelyezése, megközelítése, más geometriával való kapcsolatának igen rövid bemutatása volt.

1.2. A gömbi geometria alapfogalmai, és tételei

Ebben az alfejezetben a tételek bizonyítását nem közöljük, mivel azok (többnyire) megtalálhatók a vonatkozó szakirodalomban [2], [6], [8], [11], [12], [16]. Mivel bármely két gömb hasonló, ezért elegendő egy O középpontú egységsugarú G gömböt vizsgálni. A továbbiakban gömbön egységsugarú gömböt értünk, melyre a háromdimenziós euklideszi tér részeként tekintünk. (Néhány kivételes esetben, mint a gömbháromszög területképleténél érdemes lesz az egységsugártól elvonatkoztatni, ilyenkor a gömb sugarát r_g-vel jelöljük.)

1.2.15. Definíció. A gömb egyenesei az O ponton áthaladó síkok G-vel vett metszetei, melyeket főköröknek is nevezünk.

Egy O ponton áthaladó közönséges egyenes G-vel vett metszeteként előálló két pontot *átellenes pontpár*nak hívjuk. Jelöljük O pont átellenes pontját O'-vel. Egy gömbi egyenest két pontja két *főkörív*re osztja.

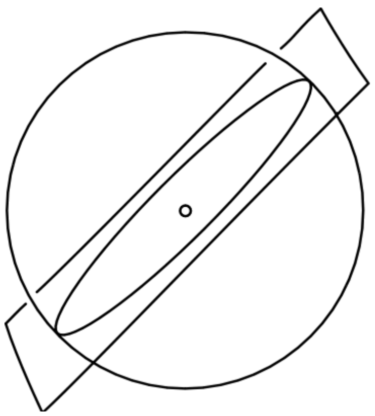
Bármely két gömbi pont, mely nem átellenes pontpár, egyértelműen meghatároz egy olyan gömbi egyenest, amely ezeket a pontokat tartalmazza. Átellenes pontpár esetében végtelen sok olyan egyenes létezik, mely áthalad mindkét ponton. Utóbbinak az az oka, hogy az euklideszi térben egy egyenes nem határoz meg egyértelműen egy síkot.

1.2.16. Definíció. Gömbi szakaszoknak nevezzük a G gömb π-nél nem hosszabb főköríveit.

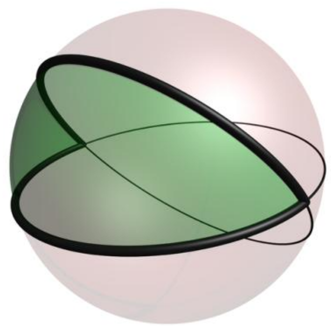
1.2.17. Definíció. Az A és B pontok gömbi távolságán az őket összekötő gömbi szakaszok hosszát értjük, vagyis $d(A,B) = AOB\measuredangle$.

1.2.18. Definíció. Két főkör hajlásszöge az őket tartalmazó két sík hajlásszöge.

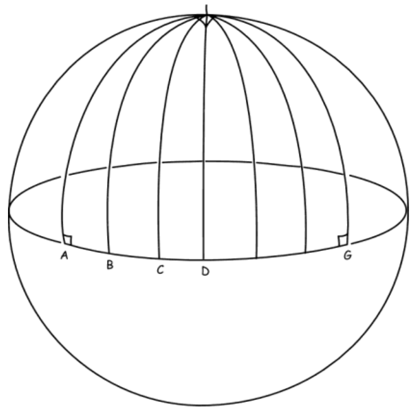
A *gömbi kétszög*eket két főkör segítségével nyerhetünk: két különböző gömbi egyenes mindig metsző és a gömböt mindig négy részre osztja, mégpedig négy kétszögre. A kétszögeknek mindkét oldala π oldalhosszúságú, hisz a két csúcsúk átellenes pontpárt alkot. Világos az is, hogy nem csak a két oldaluk egyforma hosszú, de a két szögük is azonos, vagyis egy szöge egybevágóság erejéig egyértelműen meghatározza a kétszöget. Az α szögű kétszögek területe 2α.



1. kép: Egy *O* ponton áthaladó *S* sík és *G* metszeteként előálló gömbi egyenes



2. kép: Két főkör a gömböt négy gömbkétszögre darabolja



3. kép: Egy ponton áthaladó gömbi egyenesek a pont polárisára merőlegesek

1.2.19. Definíció. A gömbi kör(vonal), azon G pontok halmaza, mely egy adott $K \in G$ ponttól (a kör középpontjától) adott (0 és π közötti) gömbi távolságra (a kör sugara, r) vannak.

1.2.20. Definíció. Egy K középpontú r sugarú gömbi kör belsejének nevezzük azoknak a pontoknak a halmazát, melyek a K ponttól r-nél kisebb távolságra vannak; külsejének nevezzük azoknak a pontoknak a halmazát, melyek nem elemei sem a körvonalnak, sem a kör belsejének.

A gömbön a *K* középpontú r sugarú körvonal egybeesik a *K'* középpontú $\pi - r$ sugarú körvonallal. Egy gömbi körre úgy is tekinthetünk, mint egy, az *O*-tól s ($s \in [0, r_g)$) távolságra lévő S síknak *G*-vel vett metszeteként előálló pontok halmazára. Ekkor a *K* középpontot nyilván úgy kapjuk meg, hogy nézzük az *O* ponton áthaladó, az *S* síkra merőleges egyenes *G*-vel vett metszetét, mely épp egy átellenes pontpárt ad, vagyis kaptunk egy *K* és egy *K'* pontot. Ebből látható már, hogy miért is beszélhetnénk egy körvonal esetében két középpontról és, hogy $d(K, K') - r = \pi - r$ alapján adódik a másik kör sugara. Természetesen két különböző körről beszélünk, annak ellenére, hogy maguk a körvonalak egybeesnek, hisz a külső és a belső pontjaik nem ugyanazok. Kitüntetett szerepet kap az az eset, amikor $r = \pi - r$, ekkor $s = 0$, vagyis a maximális kerületű körökhöz, gömbi egyenesekhez jutunk. Láthattuk, hogy bármely kör egyértelműen meghatároz egy átellenes pontpárt (a középpontjaikat). Fordítva ez nem igaz, vagyis bármely átellenes pontpár végtelen sok körnek lehet a középpontja, viszont egyértelműen meghatároznak egy főkört. Összefoglalva, bijektív megfeleltetés létesíthető a pontpárok és főkörök között, ezt a kapcsolatot nevezzük *pólus-poláris viszony*nak, vagy másképp fogalmazva *duális viszony*nak. Egy főkör pólusai a főkör középpontja (mint pontpár); egy pont polárisa a pont körüli $\pi/2$ sugarú kör, mely valójában főkör. Jelöljük a *c* főkör pólusait *C**-gal, és $C^{*\prime}$-vel (így a jelölésben a pontok egymáshoz való viszonya is tükröződik), a *C* pont polárisát pedig c^*-gal.

Megjegyezzük, hogy bármely *C* ponton áthaladó egyenes merőleges lesz a c^* főkörre (3. kép). Ha egy *P* pont illeszkedik egy *e* gömbi egyenesre, akkor az *e* gömbi egyenes *E**, $E^{*\prime}$ pólusai illeszkednek a *P* pont p^* polárisára.

1.2.21. Tétel. Az r sugarú gömbi kör területe: $t(r) = 2\pi(1 - \cos r)$, kerülete: $k(r) = 2\pi \sin r$.

1.2.22. Definíció. A gömb bármely három különböző *A*, *B*, *C* pontja, melyek nincsenek rajta egy főkörön, egyértelműen meghatároznak három gömbi szakaszt, melyek két részre osztják a gömböt. Ezek közül a kisebbik területűt nevezzük Euler-féle gömbháromszögnek. Csúcsai *A*, *B*, *C*; oldalai $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, szögei $CAB\sphericalangle = \alpha$, $ABC\sphericalangle = \beta$, $BCA\sphericalangle = \gamma$. Egy gömbháromszög szabályos, ha az oldalaik egyforma hosszúak és szögeik ugyanakkorák.

A fenti definícióban kizártuk azt az esetet, amikor az *A*, *B*, *C* pontok egy főköríven helyezkednek el. Néha érdemes megengednünk, hogy ezek az elfajuló esetek is gömbháromszöget alkossanak, de ez esetben majd külön jelöljük, vagyis háromszögön mindig Euler-féle háromszöget értünk. Az alábbiakban néhány rájuk vonatkozó tételt közlünk:

1.2.23. Tétel. Egy gömbháromszögben két oldal és az ezekkel szemközti szögek vagy páronként egyenlők, vagy ha nem egyenlők, akkor a hosszabb oldallal szemben a nagyobbik szög van.

1.2.24. Tétel. Egy gömbháromszögben bármely két oldal összege nagyobb, mint a harmadik oldal.

1.2.25. Tétel. Egy r sugarú gömb α, β, γ szögű gömbháromszögének a területe:

$$r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi).$$

1.2.26. Tétel (Gömbi szinusztétel). A bevezetett jelölések mellett egy gömbháromszögben teljesül az alábbi:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}.$$

1.2.27. Tétel (Gömbi koszinusztétel oldalakra). A szokásos jelölések mellett egy gömbháromszögben érvényes az alábbi:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha.$$

1.2.28. Tétel (Gömbi koszinusztétel szögekre). Egy gömbi háromszög a, b, c oldalaira és α, β, γ szögeire fennáll az alábbi összefüggés:

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a.$$

A következőkben bevezetjük a pólus-poláris viszonyon alapuló gömbi polárháromszöget.

1.2.29. Definíció. Tekintsünk egy *ABC* gömbi háromszöget és vegyük az *AB*, *BC*, *CA* egyenesekhez tartozó pólusok közül rendre azokat, melyeknek az *ABC* háromszög *C*, *B*, *A* csúcsától mért távolsága kisebb, mint $\pi/2$. Az így rendre keletkező C^*, B^*, A^* csúcsok által meghatározott gömbi háromszög az *ABC* háromszög polárháromszöge.

1.2.30. Tétel. Bármely gömbháromszög a saját polárháromszögének a polárháromszöge. A poláris gömbháromszög oldalai az eredeti háromszög megfelelő szögeit π-re egészítik ki.

Mint már említettük egyenes és pont egymás duálisai, ha egy főkörről és annak középpontjáról van szó, illetve fordítva. Szög duálisa szakasz, O középpontú r sugarú kör duálisa egy O középpontú $\pi/2 - r$, illetve egy O középpontú $\pi/2 + r$ sugarú *polárkör* lesz, melyeket úgy származtathatunk, hogy vesszük az eredeti körünk pontjainak polárisait, ezek az egyenesek éppen a két, már említett polárkört fogják érinteni. Az alábbi tétel jól érzékelteti ezt a viszonyt:

1.2.31. Tétel. A gömbön adott *P* ponton áthaladó, adott *k* körhöz húzott érintő pólusai, a *k* kör polárköreinek és a *P* pont körüli $\pi/2$ sugarú körnek a metszéspontjaiban vannak.

A gömbön tulajdonképpen nem beszélhetünk hasonlóságról, hisz párhuzamosság sem létezik. Gondoljunk bele, hogy a gömbháromszög szögei egyértelműen meghatározzák a háromszög területét (1.2.25. Tétel), de tekinthetjük az 1.1.5. Wallis-féle helyettes axiómát is. Tehát ha két háromszög hasonló, akkor szükségképpen egybevágó is.

1.2.32. Tétel. Két gömbháromszög egybevágó, ha bennük páronként egyenlő

a) három oldal
b) három szög
c) két oldal és az általuk közrefogott szög
d) egy oldal és a rajta fekvő két szög
e) két oldal és a nagyobbik oldallal szemközti szög.

Bizonyos tételek, (ahogy már láttuk is) igazak mind az euklideszi geometriában, mind a gömbi geometriában. A következő néhány tétel is ilyen, némelyik esetben kisebb változtatásokra van szükség. Mindig a tétel gömbi változatát közöljük csak.

1.2.33. Tétel. Két ponttól egyenlő távolságra lévő pontok mértani helye a gömbön egy főkör, mely a két pontot összekötő szakasz felezőmerőlegese, vagyis a két pontot összekötő szakasz felezőpontjába állított, a szakaszra merőleges egyenes.

Ez könnyen belátható, ha euklideszi térelemekkel írjuk le a problémát. Legyen a két pont A és B. Keressük azon pontok mértani helyét az euklideszi térben, melyek egyenlő távolságra vannak a két ponttól. Ez nem más, mint az *AB* szakaszfelező merőleges *T* síkja, így a keresett gömbi egyenes $T \cap G$.

1.2.34. Definíció. Egy gömbi háromszög súlyvonala a háromszög csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával összekötő gömbi szakasz.

Mivel a gömbön egy szakasz felezőpontja egyértelműen meghatározott pont, és két pontot összekötő egyenes is egyértelmű, ha nem átellenes pontpárokról van szó, ami jelen esetben nem fordulhat elő, így a gömbi súlyvonalak egy adott háromszögben egyértelműek. A későbbiekben látni fogjuk, hogy egy háromszög magasságvonalai nem minden esetben lesznek egyértelműek.

1.2.35. Tétel. A gömbi háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást, e pontot nevezzük súlypontnak.

A továbbiakban hasonló nevezetes vonalakat definiálunk, és mondunk ki róluk szóló tételeket.

1.2.36. Tétel. Bármely *ABC* háromszögnek létezik köré írható köre, melynek középpontját az oldalfelező merőlegesek metszeteként kapjuk meg.

1.2.37. Definíció. Egy gömbi háromszög szögének a szögfelezője az a csúcson áthaladó főkör, amelyik a szöget két egyenlő részre osztja.

1.2.38. Tétel. A gömbi háromszög szögfelezői egy átellenes pontpárban metszik egymást, ezek közül a háromszögben lévő pont a háromszögbe beírt körének a középpontja.

A következő tételek bemutatják, hogy egy gömbi háromszögben milyen kapcsolat van szögfelezők és oldalfelező merőlegesek között.

1.2.39. Tétel. Egy gömbi háromszög szögfelezője a polárháromszögének az oldalfelező merőlegese.

1.2.40. Tétel. Egy gömbi háromszög beírható körének a középpontja a polárháromszöge körülírható körének a középpontja.

1.2.41. Definíció. Egy gömbi háromszög magasságvonalán, valamely csúcsból a szemközti oldal egyenesére állított merőlegest értjük. A magasságvonalak metszeteit magasságpontpárnak hívjuk.

A gömbön a magasságvonal nem minden esetben egyértelmű. Ugyanis például egy *oktáns* (olyan háromszög, melynek minden szöge $\pi/2$) esetében egy csúcsa és annak szemközti oldala pólus-poláris viszonyban áll egymással. Ennek következtében, mint már említettük végtelen sok egyenes létezik, mely áthalad egy csúcson és merőleges a szemközti oldalra. Hasonló a helyzet akkor is, ha a háromszögnek pontosan két szöge $\pi/2$. A különbség utóbbi és az oktáns között az, hogy míg az oktáns esetében egyik csúcsból induló magasságvonal sem egyértelmű, addig a másik példánál, abból a csúcsból induló magasságvonal lesz nem egyértelmű, melynél nem $\pi/2$ a szög. Összefoglalva, ezeknél az eseteknél nem határozható meg egyértelműen a magasságpontpár, más esettől nem kell eltekintenünk, hisz csak ezeknél a lehetőségeknél állhat fenn pólus-poláris viszony. Ellenben elmondható, hogy az oktáns esetében a gömb bármely átellenes pontpárját választva magasságpontpárnak, a pontpár egyértelműen meghatározza az oktáns magasságvonalait. Hasonló a helyzet, amikor az ABC háromszögnek pontosan két $\pi/2$ szöge van, legyenek ezek az A és a B csúcsnál, ekkor az AB egyenes bármely átellenes pontpárját választva magasságpontpárnak, az egyértelműen meghatározza az ABC háromszög magasságvonalait.

1.2.42. Tétel. Minden olyan gömbi háromszögnek a magasságvonalai egy pontpárban metszik egymást, melyekben nincs legalább két olyan szög, amelyik $\pi/2$.

A kivételeknél, ahogy már említettük, nem lesznek egyértelműek a magasságvonalak. Ezeknél a háromszögeknél tudunk úgy választani három magasságvonalat, hogy azok ne egy pontpáron menjenek keresztül.

Sok esetben háromszög és polárháromszöge között szoros kapcsolat áll fenn, az alábbi tétel is egy ilyen összefüggést mutat be.

1.2.43. Tétel. Egy gömbi háromszög magasságvonalai a polárháromszögének a magasságvonalai.

1.2.44. Állítás. A gömbön nem teljesül Thalesz-tétele.

Ennek ellenére mégis érdemes foglalkozni a jelenséggel. *Thalesz-gömbháromszög*nek nevezzük azt az *ABC* gömbháromszöget, melyre teljesül, hogy valamelyik oldalának a hossza a körülírható kör átmérőjével azonos.

1.2.45. Definíció. Egy gömbháromszög kiegészítő gömbháromszögének nevezzük azt a háromszöget, mellyel az eredeti háromszög gömbkétszöget alkot. Tehát egy *ABC* α, β, γ szögű gömbháromszögnek az a oldalhoz tartozó kiegészítő gömbháromszöge, az *A*, *A*’ csúcsú α szögű gömbkétszög *ABC* háromszöget nem tartalmazó része.

1.2.46. Tétel. Vegyünk egy *ABC* Thalesz-gömbháromszöget, melynek legyen *AB* oldala a körülírható kör átmérője. Ekkor a c oldalhoz tartozó *ABC* háromszög kiegészítő gömbháromszögének a területe mindig π.

Legyen ugyanis *ABC* körülírható körének középpontja K_{ABC}, továbbá legyen $CAB\sphericalangle = \alpha$ és $ABC\sphericalangle = \beta$, ekkor $BCA\sphericalangle = \alpha + \beta$, hiszen $K_{ABC}AC$ és $K_{ABC}BC$ egyenlő szárú gömbháromszögek lesznek, következésképp a kiegészítő gömbháromszög szögei $\alpha + \beta$, $\pi - \alpha, \pi - \beta$.

1.2.47. Tétel (Felezőpontok tétele). Vágjunk ketté egy f főkörrel egy gömbkétszöget úgy, hogy a kétszögből két darab gömbi háromszög keletkezzen. Vegyük a háromszögek egy-egy oldalának felezőpontját úgy, hogy a választott két oldal a gömbkétszög különböző oldalain legyen. Ekkor ezek a felezőpontok és az f főkör gömbkétszögbe eső szakaszának a felezőpontja, egy gömbi egyenesre illeszkednek.

Ezzel a tétellel és következményeivel például belátható, hogy a gömbháromszög magasságvonalai egy pontpáron mennek keresztül. *Talpponti gömbháromszög*nek nevezzük a T_a, T_b, T_c talppontokból előálló gömbháromszöget, ahol a talppontok, a gömbháromszög megfelelő csúcsán átmenő magasságvonalak és a szemközti oldalak metszeteként állnak elő. Oktáns esetében is beszélhetünk talpponti gömbháromszögekről. Tetszőleges átellenes pontpárt választva magasságpontpárnak, az egyértelműen meghatározza a talpponti gömbháromszöget. Mivel az átellenes pontpár tetszőleges lehet, egy adott oktánsnak végtelen sok talpponti gömbháromszöge van.

1.2.48. Tétel. Oktánsban tetszőleges pontpárt választva magasságpontpárnak, az ezáltal meghatározott talpponti gömbháromszög oldalösszege mindig π.

Oktánsnak az oldalösszege mindig $3\pi/2$. Egy tetszőleges gömbháromszög oldalösszege 0 és 2π között változhat, míg szögösszege π és 3π között mozog. A következő tételt Fejér Lipót bizonyította a síkon, de a gömbön is (változtatás nélkül) teljesül.

1.2.49. Tétel. A hegyesszögű *ABC* gömbháromszögbe beírt minimális kerületű gömbháromszög az *ABC* gömbháromszög talpponti gömbháromszöge.

Oktáns esetében bármely átellenes pontpárt választva magasságponpárnak, az ez által meghatározott talpponti gömbháromszög az oktánsba beírt minimális kerületű gömbháromszög, melynek oldalösszege mindig π, azaz a kerület független a magasságpontpár választásától.

1.2.50. Tétel. (Lexell-tétel). Legyen adott a gömbön egy *ABC* háromszög. Azon *C”* pontok mértani helye, mely az eredeti háromszög területét adják az *ABC* háromszög rögzített *AB* alapjával, két körnek, a Lexell-köröknek egy-egy köríve, melyeket így nyerünk: tekintsük az *A’B’C* pontok által meghatározott (Lexell-) körnek az *A’B’* szakaszt nem tartalmazó körívét. Illetve tekintsük az *A’B’*C_t pontok által meghatározott (Lexell-) körnek az *A’B’* szakaszt nem tartalmazó körívét, melynek C_t pontját úgy kapjuk, hogy *C*-t tükrözzük az *AB* egyenesre. (Megjegyzés *A’* és *B’* is megfelelhet *C”*-nek, ha úgy választjuk meg az *AA’*, illetve *BB’* egyeneseket, hogy a Lexell-kört ne metssze, hanem érintse.)

1.2.51. Definíció. Egy *ABC* gömbi háromszög *AB* oldalához tartozó középvonala, az *AC* és *BC* gömbi szakaszok felezőpontjait összekötő gömbi szakasz.

1.2.52. Definíció. Tekintsük a gömb tetszőleges négy különböző *A, B, C, D* pontját, melyekre teljesül, hogy közülük semelyik három nem illeszkedik egy főkörre. Az *AB, BC, CD, DA* gömbi szakaszok két részre osztják a gömböt, ezek közül a kisebbik területűt nevezzük (Euler-féle) gömbnégyszögnek. Csúcsai *A*, *B*, *C*, D; oldalai *AB*, *BC*, *CD*, *DA*. Ha az oldalaik egyforma hosszúak, és a szögeik is egyforma nagyságúak, szabályos gömbi négyszögekről beszélünk.

1.2.53. Definíció. Az olyan gömbi négyszögeket, melyeknek két szemközti oldala egyenlő és merőleges a harmadik oldalra, gömbi Saccheri-féle négyszögeknek nevezzük.

Nem feltétlenül látható azonnal, hogy a Lexell-tétel és az euklideszi sík között bármilyen összeköttetés lenne. Kapcsolatuk abban rejlik, hogy a *C”* pontokat mindkét geometriában analóg módon származtathatjuk. Összefoglalva, arra a kérdésre válaszol a tétel, hogy egy *ABC* háromszög rögzített *AB* alapja esetén hol van azon C*”* pontoknak a mértani helye, melyekre teljesül, hogy $T(ABC) = T(ABC")$. Az euklideszi síkon a *C”* pontok két egymással és *AB*-vel párhuzamos egyenest alkotnak, melyek *AB*-től m_c távolságra helyezkednek el. Mindkét geometriában a háromszög középvonalának segítségével átdarabolhatjuk az *ABC* háromszöget, sík esetében téglalappá, gömb esetében gömbi Saccheri-féle négyszöggé, melyeknek egyik oldala *AB*, másik oldala a középvonal lesz. Belátható, hogy a sík esetéhez hasonlóan, a megfelelő *C”* pontok mértani helye a középvonaltól a középvonal és *C* közötti távolságra helyezkednek el a megfelelő oldalon. Természetesen *AB* által határolt *C*-t nem tartalmazó félgömbön/félsíkon is elvégezhető a fenti eljárás, amit *AB*-re, mint tengelyre való tükrözéssel nyerünk. A gömbi geometriában még egyéb kikötéseket is kell tennünk, de látható, hogy a *C”* pontok származtatása igen hasonló.

1.2.54. Definíció. Egy gömbi háromszög területfelezőjének nevezzük a háromszög csúcsán áthaladó, vele szemközti oldalt metsző főkört, ami felezi a háromszög területét.

1.2.55. Tétel. Egy gömbi háromszög három területfelezője egy pontpárban metszi egymást.

Utóbbi tétel megfelelője a síkon nyílván igaz, hisz ott a területfelezők a súlyvonalakkal egyeznek meg, s tudjuk, hogy a síkbeli háromszögek súlyvonalai egy ponton mennek át. Az euklideszi sík tételei közül sok átvihető gömbre, ha egy síkbeli tétel bizonyításánál csak olyan tételeket használtunk fel, melyek a gömbön is érvényesek, akkor nyilván maga a tétel is érvényes lesz a gömbön.

A következő fejezetekben egy konkrét problémát vizsgálunk meg az euklideszi és a gömbi geometriában, a már említett körzőrózsákkal fogunk foglalkozni.

2. fejezet: Körzőrózsák

Ebben a fejezetben először bevezetjük az r sugarú, n szirmú nem elfajuló és elfajuló körzőrózsa fogalmát. Ezt követően a gömb és a sík geometriájában megvizsgáljuk, hogy mely r esetén léteznek ezek az alakzatok. A nem elfajuló körzőrózsákat kapcsolatba hozzuk a parkettázásokkal, illetve a platóni testekkel. Megvizsgáljuk, hogy mely platóni testnek van köze a körzőrózsához, megnézzük, hogy milyen tiszta mozaikot lehet készíteni a gömbön szabályos konvex sokszögekből.

2.1. A körzőrózsa bevezetése

2.1.56. Definíció. Legyen g egy O középpontú, r ($\in \mathbb{R}$, pozitív) sugarú, tetszőleges alapkör a síkon, illetve a gömbön. A g alapkör egy tetszőleges K_0 pontjából vegyük fel az r sugarú k_1 kört. A k_1 kör és a g kör két pontban is metszik egymást, legyen ezek közül az egyik pont a K_1. Most a K_1 pontból vegyük fel az r sugarú k_2 kört. A k_2 kör szintén két pontban metszi a g kört, az egyik a K_0, hisz $d(K_0, K_1) = r$, a másik pont legyen K_2. Majd az előzőekhez hasonlóan vegyük fel a K_i pontokat, és a k_i köröket, amíg a K_n pont meg nem egyezik a K_0 ponttal ($i = 1,2,..,n$). Ha az O körül csak egyszer fordultunk, vagyis bármely i-re ($i = 1,2,\ldots,n$) és bármely K_k-ra ($k = 0,1,2\ldots,n$) teljesül, hogy K_k nem eleme a (K_{i-1}; K_i) nyílt intervallumnak (természetesen a kör nem nagyobbik intervallumát választva), ekkor egy r *sugarú, n szirmú (nem elfajuló) körzőrózsá*ról beszélünk.

2.1.57. Definíció. Ha a 2.1.56. Definíció szerint K_0=K_n, de létezik olyan i ($i = 1,2,..,n$), melyre létezik olyan K_k ($k = 0,1,\ldots,n$), hogy K_k eleme a (K_{i-1};K_i) nyílt intervallumnak (természetesen a kör nem nagyobbik intervallumát választva), *elfajuló, r sugarú, n szirmú körzőrózsá*ról beszélünk.

Mindkét definíciónál az n szirmú körzőrózsán a $\cup\,(k_i \cup g)$ halmazt értjük ($i = 1,2,\ldots,n$). A 2.1.56. Definícióban ismertetett eljárás nem feltétlenül fejeződik be, ilyenkor nem beszélünk körzőrózsáról. Az előbb említett definícióban a K_i pontokat és k_i köröket addig vettük fel, míg a K_n pont meg nem egyezett a K_0 ponttal ($i = 1,2,..,n$), vagyis adott r sugár mellett, körzőrózsa létezése esetén, mindig csak véges sok kört kell felvenni.

Nyilvánvaló, hogy sem a sík, sem a gömb geometriájában nem változtat a körzőrózsa létezésén, típusán, szirmainak számán az r sugarú, g kör (O középpontjának) elhelyezkedése. Utóbbiból és a definícióból következik, hogy a körzőrózsa létezése csak a sugártól függhet, sőt ez az egyetlen változó, melyen az alakzat létezése múlik. Így felmerül a kérdés, hogy melyek azok az r-ek, melyek esetén van értelme körzőrózsáról beszélni. Ha egy adott r sugár esetén létezik körzőrózsa, akkor r egyértelműen meghatározza az alakzatot egybevágóság erejéig, de ez visszafelé is igaz, vagyis az alakzat egyértelműen meghatározza a sugarat. Ugyanis ha az alakzatokra feldarabolva tekintünk, a $K_{i-1}K_iO$ háromszögek ($i = 1,2,\dots,n$) oldalai mind r hosszúságúak, s mivel a vizsgálandó geometriákban egy háromszög oldalhosszai egyértelműen meghatározzák a háromszöget (1.2.32. Tétel), illetve ez fordítva is igaz, így r a körzőrózsát is egyértelműen meghatározza.

A K_i pontok szintén meghatározzák az alakzatot, hisz ezek a k_i körök középpontjai. Bár körzőrózsán az $\cup\,(k_i \cup g)$ halmazt értjük ($i = 1,2,\dots,n$), ezentúl (mivel a g halmazhoz tartozó K_i pontok megléte után csak szerkesztés kérdése, hogy körzőrózsát kapjunk), ha ezek a K_i pontok már megvannak a g körön, szintén úgy tekintünk rá, mint körzőrózsára. Ha r sugarú, n szirmú (nem elfajuló) körzőrózsákról beszélünk, akkor valójában elég azt megvizsgálni, hogy milyen n oldalú, T szabályos, konvex sokszögek írhatóak be az adott r sugarú körbe úgy, hogy T oldalhossza r legyen.

2.1.58. Észrevétel. Ha egy O középpontú r sugarú g körbe beleírható egy olyan n oldalú, szabályos, T sokszög, melynek az oldalhossza megegyezik r-rel, akkor létezik (pontosan egy) r-hez tartozó nem elfajuló n szirmú körzőrózsa.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a fenti feltételek teljesülnek, ekkor nyilván, ha a k_i körök ($i = 1,2,\dots,n$) középpontjait T csúcsainak választjuk, akkor egy r sugarú, n szirmú (nem elfajuló) körzőrózsát kapunk. Az alábbi, 2.1.59. Észrevételből pedig adódik az egyértelműség.
□

2.1.59. Észrevétel. Adott r sugár esetén az alábbiak közül pontosan az egyike teljesül:

(a) r egyértelműen meghatároz egybevágóság erejéig egy elfajuló körzőrózsát

(b) r egyértelműen meghatároz egybevágóság erejéig egy nem elfajuló körzőrózsát

(c) r nem határoz meg körzőrózsát.

Bizonyítás. A 2.1.56. Definícióban ismertetett eljárás szerint, ha K_0 és K_n azonos valamely n-re, akkor két esetet különböztethetünk meg, aszerint, hogy a körzőrózsa elfajuló vagy sem, melyek kizárják egymást. Ha viszont K_0 és K_n nem azonos valamely n-re, akkor a (c) esethez jutunk. □

2.2. A síkbeli körzőrózsák

2.2.60. Tétel. A síkon bármely r esetén a körzőrózsa mindig hatszirmú és nem elfajuló lesz.

Bizonyítás. Világos, hogy a síkon bármely r sugarú g körbe beleírható egy szabályos hatszög, melynek oldala éppen r hosszúságú. Ebből az 2.1.58. Észrevétel miatt, már következik, hogy bármely r esetén nem elfajuló hatszirmú körzőrózsát kapunk. □

Megjegyezzük, hogy a következő állítás, miszerint a körbe írt szabályos hatszög oldala egyenlő a kör sugarával, éppen az 1.1.1. Axióma egy helyettes axiómája.

2.3. A gömbi körzőrózsák

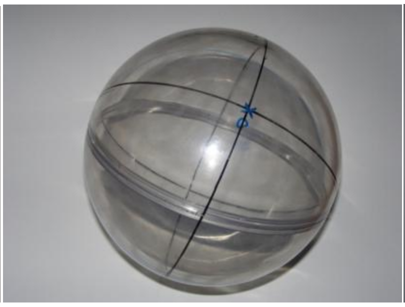
2.3.61. Tétel. A gömbön háromféle nem elfajuló körzőrózsa létezik, ezek három-, négy-, illetve ötszirmúak, ezekben az esetekben rendre az r értékei $\cos^{-1}(-1/3)$, $\pi/2$, és $\cos^{-1}(\sqrt{5}/5)$.

Bizonyítás. A 2.1.56. Definícióban ismertetett szerkesztési eljárás miatt a $K_{i-1}OK_i$ ($i = 1,2,\dots,n$) gömbháromszögek oldalai egyenlők. A síkon egyenlő oldalú háromszög esetén a szögek is egyenlők lesznek, ez a gömbi háromszögekre is igaz, lásd az 1.2.23. Tételt, tehát a $K_{i-1}OK_i$ háromszögek szabályosak. Nyilvánvaló, hogy a $K_{i-1}OK_i$ szögtől függ, hogy a körzőrózsa hány szirmú. (A síkbeli szabályos háromszög esetében, mivel minden szöge egyenlő és mivel minden háromszögre teljesül, hogy a belső szögek összege π, így következik, hogy a szögei egyértelműen meghatározhatóak, vagyis mindegyik $\pi/3$. A gömbön abból származik a probléma, hogy az Euler-féle háromszög belső szögeinek az összege nem állandó, ez az érték π és 3π között változhat.) Tekintsük a $K_{i-1}OK_i$ szabályos háromszöget, melynek egy tetszőleges belső szöge legyen α. A $K_{i-1}OK_i$ háromszög belső szögeinek az összege 3α, mely a $(\pi;\ 3\pi)$ intervallumba esik. Ebből következik, hogy $\alpha\epsilon(\pi/3; \pi)$. Az n szirmú, nem elfajuló körzőrózsa esetén teljesül, hogy $\alpha n = 2\pi$, ahol n természetes szám. Átalakítással nyerjük, hogy $\alpha = 2\pi/n$. Az $a_n = 2\pi/n$ szigorúan monoton csökkenő számsorozat $(n \geq 1, n \to \infty)$, így elég csak azokat az n-eket megvizsgálni, melyekre az α $\pi/3$ és π közé esik. Az $n = 2$, illetve $n = 6$ esetén az α rendre $\pi/3$ és π, ezért az $n = 3{,}4$ és 5 esetek lesznek a megoldások, vagyis három-, négy- és ötszirmú, nem elfajuló körzőrózsákról beszélhetünk. Az 1.2.27. Tételben szereplő egyenlet átalakításával az alábbi képletet kapjuk, mellyel az adott n-hez tartozó g kör sugarait kaphatjuk meg:

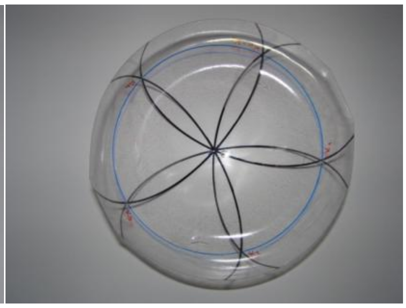
$$\cos r = \frac{\cos\alpha + (\cos\alpha)^2}{(\sin\alpha)^2}.$$

Az $n = 3{,}4$ és 5 esetén az α rendre $2\pi/3$, $\pi/2\,, 2\pi/5$, ezeket a képletbe való behelyettesítéssel kapjuk, hogy r rendre $\cos^{-1}(-1/3)$, $\pi/2$, és $\cos^{-1}(\sqrt{5}/5)$. □

4. kép: Háromszirmú nem elfajuló körzőrózsa



5. kép: Négyszirmú nem elfajuló körzőrózsa



6. kép: Ötszirmú nem elfajuló körzőrózsa

2.4. A gömbi elfajuló körzőrózsák

Ebben az alfejezetben azt a problémát vizsgáljuk meg, amikor valamilyen n-re teljesül K_n=K_0 a 2.1.34. Definícióban, de létezik olyan i $(i = 1{,}2, \dots, n)$, melyre létezik olyan K_k

($k = 0,1,2,..,n$), hogy $K_k \in (K_{i-1};K_i)$. Ez azt jelenti, hogy a szabályos $K_{i-1}OK_i$ háromszögek *nem egyszeresen fedik le az adott felszínt, hanem t-szeresen, ahol t> 1, t∈ℤ, és t a legkisebb szám melyre teljesül a feltétel*. (Az előbbi állítás helyett, a vele ekvivalens „t-szeresen fedi le a felszínt az elfajuló körzőrózsa" kifejezést is fogjuk használni.)

2.4.62. Tétel. Bármely olyan t és n egész esetén, melyre teljesül, hogy $(t,n) = 1$, és $2\pi t/n \epsilon(\pi/3;\pi)$, kivéve a $2\pi/3$, $\pi/2$, $2\pi/5$ értékeket, létezik a gömbön olyan elfajuló n szirmú körzőrózsa, mely t-szeresen fedi le az adott felszínt.

Bizonyítás. Legyen β a szabályos $K_{i-1}OK_i$ háromszög tetszőleges belső szöge. Az 2.1.57. Definícióból kiindulva tudjuk, hogy a szabályos háromszögek nem egyszeresen fedik le az adott felszínt. Legyen t az a tetszőleges egynél nagyobb, pozitív egész szám, ahányszorosan lefedik az adott felszínt a szabályos háromszögek. Ekkor nyilván teljesül: $\sum_{i=1}^{n} K_{i-1}OK_i\sphericalangle = (2\pi)t$. Vagyis egy n szirmú elfajuló körzőrózsa esetén teljesül: $n\beta = (2\pi)t$, $\beta\epsilon(\pi/3\,;\pi)$. Az $n\beta = (2\pi)t$ egyenlet átalakításával kapjuk, hogy $n\beta\,/\,t = 2\pi$, ahol n/t racionális szám, tehát β és π egymás racionális többszörösei. De vajon minden ilyen tulajdonságú β jó lesz megoldásnak? Tegyük fel, hogy $\beta = 2\pi v/w$, ahol v,w egészek, ezt az $n\beta = (2\pi)t$ egyenletbe helyettesítve $2\pi\, vn/w = (2\pi)t$ adódik, ahonnan $v\,/\,w = t\,/\,n$. Tehát, ha úgy választjuk meg az egynél nagyobb n és t egészeket, hogy $2\pi t/n\,\epsilon(\pi/3\,;\pi)$ teljesüljön, és t és n relatív prímek, akkor egy n szirmú elfajuló körzőrózsáról beszélünk. Mi történik, ha t és n nem relatív prímek? Miért volt szükséges kikötni, hogy $(t,n) = 1$ legyen? Ha nem tennénk ilyen kikötést, akkor előfordulhatna az az eset, hogy nem a legkisebb n értékére teljesül a $K_0 = K_n$ feltétel. Vagyis a sziromszám n valamelyik osztója lesz. A t érték nem lehet egy, mivel ekkor az $n\beta = 2\pi$ egyenlethez jutnánk, melyet a nem elfajuló körzőrózsáknál vizsgáltunk. Vegyük észre, hogy a t> 1 kikötés helyett elegendő három esetet kizárni, mégpedig az 2.3.61. Tétel bizonyításánál az α-ra kapott $2\pi/3$, $\pi/2$, $2\pi/5$ értékeket. Tehát minden $\beta\epsilon(\pi/3;\pi)$-re, ahol $\beta = 2\pi(t/n)$, n,t egészek, $(n,t) = 1$ és β nem a $2\pi/3$, $\pi/2$, $2\pi/5$ értékek valamelyikével egyezik meg, elfajuló n szirmú körzőrózsát kapunk. □

Nézzük meg, hogy $\beta\epsilon(\pi/3\,;\pi)$ esetén milyen r sugár fog a β-hoz tartozni. Az 1.2.32. Tételből és az 1.2.23. Tételből következik, hogy ha egy szabályos háromszög szögeinek az összege kisebb egy másik háromszög szögösszegénél, akkor az előbbi háromszög oldala kisebb a másik háromszög oldalánál. Vagyis a $(\pi/3\,;\pi)$ intervallumban β-nak minél nagyobb szöget választunk, annál nagyobb sugár fog hozzá tartozni, így ha ezt a hozzárendelést tekintjük, akkor egy szigorúan monoton növő függvényt kapunk. Ennek tükrében elegendő megvizsgálni az intervallum legkisebb felső és legnagyobb alsó korlátját, majd az ezekhez tartozó sugarak közötti értékek lesznek r lehetséges értékei. Az 1.2.27. Tétel segítségével tekintsük a $\cos r = (\cos\beta + (\cos\beta)^2)/(\sin\beta)^2$ képletet, $\beta = \pi/3$-ra $r = 0$ adódik értelemszerűen, viszont $\beta = \pi$ esetén $sin\pi = 0$ miatt az alábbi határértéket kell vizsgálnunk:

$$\lim_{\substack{\beta\to\pi-\\ \beta\in(\frac{\pi}{3};\pi)}} \frac{\cos\beta+(\cos\beta)^2}{(\sin\beta)^2} = -0{,}5.$$

Az $arccos$ függvény segítségével kapjuk, hogy r ebben az esetben $2\pi/3$. Tehát $\beta\epsilon(\pi/3\,;\pi)$-re $r\epsilon(0, 2\pi/3)$.

Nézzük meg, hogy az 2.4.62. Tételben ismertetett t/n milyen értékeket vehet fel. Vizsgáljuk a $2\pi t/n\,\epsilon(\pi/3\,;\pi)$ feltételt, és legyen az egyszerűség kedvéért $z = t/n$. Tehát z-re a következők a kikötések: $z\epsilon(1/6\,, 1/2)$, nem veheti fel $1/3$, $1/4$, $1/5$ értékeket, és emellett racionális szám. Felmerülhet a kérdés, hogy vajon az elfajuló körzőrózsák között mekkora a maximális sziromszám, illetve mekkora lehet maximálisan t. A sziromszám és t természetesen tetszőlegesen nagy lehet, betartva a feltételeket. Tudjuk, hogy $2t < n < 6t$. Válasszunk egy kellően nagy n-et, vizsgáljuk meg, hogy emellett t értéke mekkora lehet. A $t\,/\,n < 1\,/\,2$, vagyis $t/n = ((2/n)/n) - \varepsilon$ választás nyilván jó lesz, ahol ε tetszőlegesen kicsi (1/3-nál természetesen kisebb szám). Felírható az ε $1/g$ alakban, ahol g-nek minél nagyobbnak kell lennie, hogy t értéke elég nagy legyen. Mivel egy nyílt $(1/6,1/2)$ intervallumról van szó, nem lehet adott n mellett t értékét úgy megadni, hogy az maximális legyen. A $1/2$-$1/g$, $g \to \infty$ végtelen sorozatnak nincs maximuma, mivel az $1/2$-hez tart, de azt sosem éri el. Mivel z egy nyílt intervallumba esik, így az előzőhöz hasonlóan adott t mellett nincs n-nek sem minimuma, sem maximuma.

7. ábra: Egy 11 szirmú elfajuló körzőrózsa, *r*=97,16°.
A különböző színek *t* meghatározását segítik.

2.5. Parkettázás

Nem elfajuló körzőrózsa esetében a síkon a K_i pontok szabályos hatszög, míg a gömbön szabályos három-, négy-, illetve ötszög csúcsait határozták meg. Érdekes megvizsgálni, hogy ezekkel a sokszögekkel lehet-e parkettázni az adott felületet. A síkon a szabályos hatszöggel való parkettázás közismert, a gömb parkettázása három-, négy- és ötszögekkel már kevésbé. Néhány definícióval [12] röviden tisztázzuk a parkettázás és a (tiszta) mozaik fogalmát és néhány, a későbbiekben előforduló fogalmat, tételt [6] is megemlítünk.

2.5.63. Definíció. Egy felületen mozaik szerkesztésének, vagy másképpen egy felület parkettázásának nevezzük azt, amikor a felületet zárt, véges alakzatokkal hézagok és átfedések nélkül borítjuk be.

2.5.64. Definíció. Tiszta mozaiknak nevezzük azt a mozaikot, ahol a lefedő alakzatok mindannyian egybevágók.

2.5.65. Definíció. Szabályos testnek nevezzük az olyan konvex poliédert, amelynek élei, élszögei és lapszögei egyenlők.

2.5.66. Tétel. Öt szabályos test van, ezeket platóni testeknek is szokás nevezni. Ezek az alábbiak: tetraéder, hexaéder, oktaéder, dodekaéder, ikozaéder.

2.5.67. Tétel. Szabályos $\cos^{-1}(-1/3)$ oldalú gömbi háromszöggel ki lehet parkettázni a gömböt, méghozzá négy egybevágó darabbal.

E tétel bizonyításához felhasználjuk az alábbi tételt.

2.5.68. Tétel. Minden szabályos testhez egyértelműen létezik olyan pont, melynek a test csúcsaitól mért távolságai egyenlők.

2.5.67. Tétel bizonyítása. Tekintsünk egy tetraédert, mely az egységnyi sugarú gömbbe beleírható. Ilyen létezik, ugyanis minden tetraéder beleírható egy gömbbe (2.5.68. Tétel), zsugorítással, vagy nagyítással megkaphatjuk a kívánt méretet. Vetítsük ki a gömb középpontjából a tetraéder éleit a gömb felületére. Ekkor négy darab egybevágó háromszög keletkezik a gömbön. A tetraéder csúcsai a háromszögek csúcsainak felelnek meg. Az élek kivetítése során tényleg gömbi szakaszok keletkeznek, hisz a vetítés eredménye a gömb és egy olyan sík metszete, mely tartalmazza a gömb középpontját és a tetraéder egyik élét (pontosabban ennek a metszetnek a két csúcs közötti rövidebbik intervalluma). Megmutatjuk, hogy az így keletkezett gömbi háromszögek $\cos^{-1}(-1/3)$ oldalhosszúságúak. Legyenek a tetraéder csúcsai D_1, D_2, D_3, D_4, és legyen O a gömb középpontja. Ekkor vizsgáljunk meg egy tetszőleges D_nOD_{n+1} szöget ($n = 1,2,3$), ez a szög megegyezik (definíció szerint) a gömbre kivetített háromszögek oldalhosszaival. Szimmetriaokokból elegendő egy ilyen szöget tekinteni. Nem tudjuk még, hogy a kívánt feltétel mellett, miszerint a tetraéder egységsugarú gömbbe írható, milyen hosszúak az élei a testnek. Legyen a a tetraéder élének a hossza, ezt az értéket keressük, hogy megkaphassuk a $D_nOD_{n+1}= \gamma$ szöget. Vegyük a tetraéder egy tetszőleges lapját, legyen ez $D_1D_2D_3$. A $D_1D_2D_3$ háromszög magassága $\sqrt{3}a/2$. A $D_1D_2D_3$ háromszög szabályosságából adódik, hogy a háromszög magasságvonalai, súlyvonalai, szögfelezői és oldalfelező merőlegesei egybeesnek. Legyen P pont ezeknek az egyeneseknek a metszete, melyről tudjuk a súlyvonal tulajdonságaiból adódóan, hogy a magasságot 1:2 arányban osztja, vagyis két $a/(2\sqrt{3})$ és $a/\sqrt{3}$ hosszúságú szakaszra. Most tekintsük a D_1D_2O háromszöget, az O pontot vetítsük le a $D_1D_2D_3$ síkra merőlegesen, az így kapott pontot nevezzük T-nek. A TD_4D_1 háromszögre alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt, ekkor *d(T,D₄)*= $a\sqrt{(2/3)}$ adódik (ez a tetraéder magassága). Ha ugyanezt a tételt alkalmazzuk a TD_1O háromszögre is, akkor megkapjuk: $d(T,O) = \sqrt{(1 - a^2/3)}$. Tudjuk, hogy $d(T,D_4) - d(T,O) = 1$, hisz ez volt a kívánt feltétel. Az egyenletbe behelyettesítve a kapott értékeket, négyzetre emelésekkel és átrendezésekkel $a^2(3a^2 - 8) = 0$ adódik, amiből az $a > 0$ feltétel miatt az $a = 2\sqrt{(2/3)}$ megoldást kapjuk. A koszinusztételt alkalmazva a D_1D_2O háromszögre:

$$(2\sqrt{\frac{2}{3}})^2 = 2 - 2cos\gamma$$

egyenlethez jutunk, ahonnan $cos\gamma = -1/3$, vagyis $\gamma = cos^{-1}(-1/3)$, mely fokban kerekítve 109, 471°, vagyis a kívánt értéket kaptuk. Ez azt jelenti, hogy a tetraéder kivetítésénél a gömböt lefedtük véges alakzatokkal, melyek jelen esetben szabályos háromszögek, ezek hézagok és átfedések nélkül helyezkednek el, melyet a kivetítés biztosít, és a háromszögek oldalai $\cos^{-1}(-1/3)$ hosszúak. □

Az 2.5.67. tétel alapján gondolhatnánk arra, hogy a $\cos^{-1}(\sqrt{5}/5)$ oldalhosszú szabályos gömbi ötszöget a gömbbe írt dodekaéder gömbre való kivetítésével kaphatjuk meg, de ez az összefüggés nem áll fenn, hisz utóbbi esetben a gömbi ötszög oldalhossza $\cos^{-1}(\sqrt{5}/3)$. Ellenben igaz az, hogy a $\cos^{-1}(\sqrt{5}/5)$ oldalhosszú $K_iK_{i-1}O$ gömbháromszögekkel lehet parkettázni a gömböt, ugyanis egy ilyen gömbi háromszög épp megegyezik a gömbre kivetített ikozaéder lapjával, melynek oldala szintén $\cos^{-1}(\sqrt{5}/5)$ [17]. A test mindegyik csúcsába öt él fut, így mindkét esetben a gömbháromszögek egy tetszőleges belső szöge $2\pi/5$. Adódik, hogy húsz darab (az ötszirmú nem elfajuló körzőrózsáknál nyert) $K_iK_{i-1}O$ gömbháromszöggel le lehet fedni a gömböt.

2.5.69. Tétel. Gömbi $\pi/2$ oldalú négyzetekkel ki lehet parkettázni a gömböt, ehhez elegendő két egybevágó darab.

Bizonyítás. Triviális, hisz bármely főkört négy egyenlő részre osztva $\pi/2$ oldalú szakaszokat kapunk, melyek a négyszög oldalai. Egy főkör a gömböt két részre osztja, vagyis elegendő két ilyen négyszöget venni, melyeknek az oldalai és csúcsai bár egybeesnek, a sokszögek belseje a gömb különböző féltekéin helyezkedik el. □

Bebizonyítottuk, hogy a nem elfajuló körzőrózsák esetében kapott K_i pontok által alkotott szabályos három- illetve négyszögekkel lehet tiszta mozaikokat készíteni az adott geometriában. Felmerülhet a kérdés, hogy ezeken a K_i csúcsú szabályos sokszögeken kívül létezik-e más tiszta mozaik a gömbön, mely szintén szabályos sokszöget használ. Nyilvánvaló, hogy egy gömbbe írható szabályos test gömbre való kivetítéséből kapott szabályos sokszögek tiszta mozaikot alkotnak. A 2.5.66. Tétel szerint öt darab szabályos test van, a 2.5.68. Tétel szerint pedig mindegyik gömbbe írható, így a kivetítést el lehet végezni. A síkkal ellentétben a gömbön szabályos kétszögekről is beszélhetünk, melyeket kivetítés során nem kaphatunk meg, mivel az euklideszi térben nincsenek kétszögek. Ha egy β szögű kétszögre teljesül, hogy létezik olyan n egész, hogy $n\beta = 2\pi$, akkor a kétszöggel ki lehet parkettázni a gömböt. Mivel n tetszőlegesen nagy lehet, így végtelen sok fajta gömbkétszöggel lehet parkettázni. Ezen kívül még több további tiszta mozaik készíthető. Elég csak arra az esetre gondolni, amikor egy gömbi főkört osztunk n egyenlő részre, ekkor n csúcsú szabályos sokszöget nyertünk, s mivel ez egy félgömböt fed le, elegendő még egy ugyanilyen sokszög, és le is fedtük a gömböt hézagok és átfedések nélkül. A gömbi nem elfajuló körzőrózsánál kapott négyszöget is feldarabolhatjuk $K_{i-1}K_iO$ háromszögekre, mivel a négyszöggel lehet parkettázni, így ezekkel a gömbi háromszögekkel is lehet. Ekkor épp az oktaéder gömbre való kivetítését kapjuk.

Az összefüggő, síkbarajzolt gráfokra érvényes Euler tétele [6], mely szerint a tartományok száma + csúcsok száma = élek száma + 2. Ez a tétel a gömbön is érvényes.

2.5.70. Észrevétel. Az Euler tétel gömbön is igaz, vagyis ha parkettázzuk a gömböt véges sok sokszöggel hézagok és átfedések nélkül úgy, hogy c a csúcsok száma, l a lapok száma és e az élek száma, akkor teljesül, hogy: $l + c = e + 2$.

Bizonyítás. Tekintsük a gömbi sokszögek területét. Egy n oldalú, α_i szögű $(i = 1,..,n)$ sokszög területe: $T_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - (n-2)\pi$, mely átalakítva: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - n\pi + 2\pi$. Számítsuk ki ez alapján a gömböt fedő sokszögek összterületét. A $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - n\pi + 2\pi$ képletben először a csúcsoknál lévő szögeket adtuk össze, melyet a lefedésünkben úgy kapunk meg, hogy a csúcsoknál lévő összes szöget összeadjuk. A hézagmentes fedés miatt az egy csúcsnál lévő szögek összege 2π, s mivel c darab csúcsunk van, így ez az érték $2\pi c$ lesz. A képletben utána kivontunk annyiszor π-t, ahány éle volt a sokszögnek. A lefedésben tudjuk, hogy az élek száma e, s mivel a lefedésben egy él pontosan két sokszöghöz tartozik, összesen $2e\pi$-t kell levonnunk. Az eredeti képletben végül hozzáadtunk 2π-t az eddigiekhez, vagyis egy darab sokszög esetén mindig hozzá kell adni az előbbi értéket. A lefedés esetében viszont nem egy, hanem l darab sokszögről van szó, vagyis $2\pi l$-t kell még hozzászámolnunk. A teljes összeg tehát $2\pi c + 2\pi l - 2\pi e$. Mivel ez azonos a gömb felszínével $4\pi = 2\pi c + 2\pi l - 2\pi e$, ahonnan osztás és átrendezés után a kívánt egyenlőséget kapjuk. □

3. fejezet: Hozzáírt zárt körsorozatok

Ebben a fejezetben a gömbön, illetve a síkon azt vizsgáljuk meg, hogy egy tetszőleges r sugarú alapkör esetén lehet-e, és ha igen, hány darab r sugarú hozzáírt kört lehet rajzolni, melyek zárt körsorozatot alkotnak, vagyis úgy felvenni a köröket, hogy a szomszédosak érintsék egymást kívülről. Ez a probléma nagyon hasonlít a körzőrózsa problémájához. A síkon bármely r sugarú alapkör esetén mindig ugyanannyi körből áll a körsorozat. Érdekes viszont, hogy a gömbön nem minden sugár esetén lehet hozzáírt zárt körsorozatot találni, és a körök száma sem állandó.

3.1. Hozzáírt körsorozat definiálása

3.1.71. Definíció. Két kör *kívülről érinti* egymást, ha egymás külsejében fekszenek, és ha pontosan csak egy olyan pont létezik, mely mindkét körhöz hozzátartozik.

3.1.72. Definíció. Egy O középpontú, r sugarú g alapkör (*l sugarú) hozzáírt zárt körsorozatán*, azokat az l sugarú k_i köröket értjük ($i = 1,2..,n$), melyek a g kört kívülről érintik, és bármely i-re a k_i és k_{i+1} körök, illetve a k_1 és k_n körök szintén érintik egymást kívülről úgy, hogy bármely két k_i körnek legfeljebb egy közös pontja van.

Ha teljesül a 3.1.72. Definíció, akkor szokás azt mondani, hogy a hozzáírt zárt körsorozat n darab (k_i) körből áll. Mint ahogy a fenti definícióban látható, a g kör sugara és a hozzáírt k_i körök sugarai nem feltétlenül egyeznek meg. Mi most azzal a speciális esettel fogunk foglalkozni, amikor az $l = r$ feltétel teljesül. Nyilvánvaló, hogy ha találunk egy g alapkörhöz megfelelő k_i köröket ($i = 1,2,..,n$), akkor valójában végtelen sok megoldást is találunk, O körüli középpontos forgatással. A mi szempontunkból fölösleges végtelen sok egybevágó esetet vizsgálni, ezért csak az egybevágóság erejéig egyértelmű esetekkel fogunk foglalkozni. A 3.1.72. Definícióban azért szükséges az alábbi kikötés: „úgy, hogy bármely két k_i körnek legfeljebb egy közös pontja van", mert például a gömbön előfordulhat, hogy egy k_k és egy k_{k+s} kör két pontban is metszik egymást úgy, hogy a definícióban leírt többi feltétel teljesül, itt $k, s \in \mathbb{N}$, $s > 1$, és a $k + s \leq n$. Az utóbb említett esetben a körzőrózsáknál is tárgyalt, egyfajta elfajulásról beszélhetünk. A síkon erről nincs értelme beszélni, a gömb geometriájában más a helyzet, ezért külön meghatározzuk ezt az esetet.

3.1.73. Definíció. . Egy O középpontú, r sugarú, g alapkör (*l sugarú) elfajuló hozzáírt zárt körsorozatán*, azokat az l sugarú k_i köröket értjük ($i = 1,2..,n$), melyek a g kört kívülről érintik, és bármely i-re a k_i és k_{i+1} ($i = 1,2,\dots,n-1$) körök, illetve a k_1 és k_n körök szintén érintik egymást kívülről úgy, hogy létezik legalább két olyan k_i kör, melyeknek pontosan két metszéspontja van.

Nyilvánvaló, hogy ha elfajuló hozzáírt körökről beszélünk, akkor nem csak két k_i kör lesz, melyek pontosan két pontban fogják egymást metszeni. Az elfajuló hozzáírt körök esetében is az egybevágóság erejéig egyértelmű esetekkel fogunk foglalkozni.

Ahogy a körzőrózsánál érdekes volt, hogy adott sugár esetén hány szirmú volt a körzőrózsa, itt is érdekes lesz megvizsgálni, hogy adott r sugarú g alapkörhöz az r sugarú hozzáírt zárt körsorozatának hány elem van, vagyis, hány darab körből áll, illetve egyáltalán lehet-e bármely sugár esetén hozzáírt zárt körsorozatról beszélni. Mivel a k_i köröket a középpontjaik adott sugár esetén meghatározzák, ezért ezeknek az O_i ($i = 1,2,\dots,n$) pontoknak az elhelyezkedését vizsgáljuk meg a következő alfejezetekben.

3.2. Hozzáírt zárt körsorozatok a síkon

3.2.74. Tétel. A síkon tetszőleges r sugarú g alapkörhöz létezik r sugarú hozzáírt zárt k_i körből ($i = 1,2,..,n$) álló körsorozat akkor és csak akkor, ha $n = 6$.

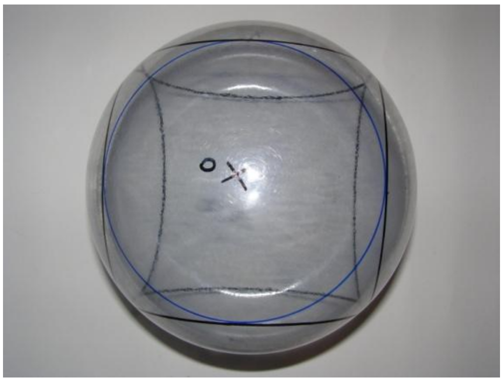
Bizonyítás. Tekintsük az O középpontú, r sugarú g alapkört. Mivel tudjuk, hogy bármely két érintő kör érintési pontja a két kör centrálisán helyezkedik el, így nyilvánvaló, hogy a keresett k_i körök középpontjai, az O középpontú, $2r$ sugarú h körön helyezkednek el. Jelöljük ki a h körön a k_1 kör O_1 középpontját. Mindegy, hogy melyik pontot választjuk O_1-nek, hisz egybevágóság erejéig egyértelműek a g-hez hozzáírt körök. A k_2 kör O_2 középpontja az O-tól és az O_1-től is $2r$ távolságra kell, hogy legyen, ezt két pont is teljesíti. Mindegy, hogy melyiket választjuk, mivel csak azt befolyásolja a döntésünk, hogy az óra járásával megegyező vagy ellenkező irányban vesszük fel a k_i köröket. Mint látható, a $2r$ sugarú h

körön egymástól $2r$ távolságra lévő pontokat keressük, vagyis visszavezettük az esetet a körzőrózsa problémájára. Így a 2.2.60. Tételt felhasználva tudjuk, hogy a keresett O_i ($=K_i$) $(i = 1,2,..,n)$ pontok léteznek, és bármely $2r$ esetén $n = 6$ teljesül. A h körön az O_1, O_2,..., O_6 középpontú, r sugarú körök rajzolásával a k_i köröket megkapjuk. □

Mint ahogy az előző bizonyításból látható, a feladat átfogalmazható az alábbi módon. Keressük a $2r$ sugarú körön azokat az O_i $(i = 1,2,..,n)$ pontokat, melyekre teljesül az alábbi: bármely i-re $d(O_i, O_{i+1}) = 2r$, ahol $i = 1,2,..,n-1$, és $d(O_1, O_n) = 2r$ is teljesül. Ez a feladat teljesen ekvivalens a 3.1.50. Definícióban megfogalmazott problémával.

3.3. Hozzáírt zárt körsorozatok a gömbön

3.3.75. Tétel. A gömbön egy r sugarú g alapkörhöz akkor, és csak akkor írhatók hozzá az r sugarú k_i körök, melyek zárt körsorozatot alkotnak, ha az r az alábbi értékek valamelyikét veszi fel: $\cos^{-1}(-1/3)/2$, $\pi/4$, és $\cos^{-1}(\sqrt{5}/5)/2$, ekkor rendre három, négy, illetve öt darab k_i kört kapunk.



8. kép: Az O középpontú $\pi/4$ sugarú g kör (kék színnel látható a képen) hozzáírt zárt körsorozata

Bizonyítás. A 3.2.74. Tétel bizonyítása teljes mértékben megállja a helyét a gömbön, ha a 2.2.60. Tétel helyett, gömbi megfelelőjét, a 2.3.61. Tételt használjuk fel, így adódik, hogy csak a fent említett sugarak esetén tudunk k_i köröket rajzolni g-hez, és ezek száma három, négy, illetve öt darab. Az r kiszámításához a 2.3.61. Tételben kapott eredményeket osztani kell kettővel, hisz itt a $2r$ sugarú h kör felel meg az ottani g alapkörnek. □

3.4. Elfajuló hozzáírt zárt körsorozatok a gömbön

Ebben a pontban azt az esetet vizsgáljuk, amikor létezik olyan i és olyan $s > 0$, hogy k_i és k_{i+s} két pontban is metszik egymást ($i + s \leq n$).

3.4.76. Tétel. Bármely olyan t és n egész esetén, melyre teljesül, hogy $(t, n) = 1$ és $2\pi t/n \,\epsilon (\pi/3\,;\pi)$, kivéve a $2\pi/3$, $\pi/2\,, 2\pi/5$ értékeket, létezik a gömbön olyan r sugarú g alapkör, melyhez létezik n darab r sugarú körből álló elfajuló hozzáírt zárt körsorozat.

Bizonyítás. Az 2.4.62. Tétel bizonyítása teljes mértékben átvihető. Az egyértelműség kedvéért közöljük a bizonyítás elejét, a későbbiekben pedig ugyanazokat a lépéseket kell végrehajtani, mint a már közölt bizonyításban. Az eddigiek alapján könnyen látható, hogy a két probléma tulajdonképpen azonos. A bizonyítást így kezdhetjük: legyen β a szabályos O_iOO_{i+1} háromszög tetszőleges belső szöge. Mivel vannak egymást két pontban is metsző körök, így az adott felületet nem egyszeresen fogják lefedni, legyen ez a tetszőleges egynél nagyobb természetes szám t, vagyis a körök középpontjaiból és O-ból képzett O_iOO_{i+1} háromszögek t-szeresen fedik le a gömb felszínét. Ekkor nyilván teljesül: $\sum_{i=1}^{n} O_iOO_{i+1}\!\!< \; = (2\pi)t,$ ahol O_{i+1}:=O_1. Vagyis n darab körből álló elfajuló hozzáírt zárt körsorozat esetén teljesül az alábbi: $n\beta = (2\pi)t,$ ahonnan $\beta = (2\pi)t/n,$ továbbá $\beta\epsilon(\pi/3;\pi)$. Innentől szó szerint átvihető az 2.4.62. Tétel bizonyítása. □

Összefoglalva, a körzőrózsánál bemutatott probléma, vagyis *olyan sokszög keresése, melynek a körülírt körének a sugara megegyezik a sokszög oldalhosszával*, a hozzáírt zárt körsorozat problémája is egyben. Amikor az elfajuló esetekről beszéltünk, szintén ugyanaz a kérdés állt fent, mint a körzőrózsa elfajuló eseteinél, vagyis *olyan zárt töröttvonal keresése, melynek a csúcsai egy körön helyezkednek el, és az oldalai megegyeznek az adott kör sugarával*.

További lehetőség, hogy megvizsgáljuk, hogy egy adott r_1 sugarú kör esetén, milyen r_2 oldalhosszú szabályos sokszögek léteznek, melyek az adott körbe beírhatóak, másképp fogalmazva, adott r_1 sugarú kör esetén, milyen r_2 sugarú hozzáírt zárt körsorozat létezik. Továbbá az elfajuló eseteket is megvizsgálhatjuk. Érdekes lehet még egy adott sugarú körbe beírt körsorozatot tekinteni, hogy milyen sugár esetén következik be, hogy a szomszédos körök amellett, hogy az alapkört érintik belülről, emellett egymást is érintik. Utóbbihoz kapcsolódóan közlünk egy igen szép euklideszi tételt:

3.4.77. Steiner tétele. [7] Ha két nem koncentrikus kör úgy helyezkedik el, hogy az egyik a másik belsejébe esik, továbbá olyan köröket veszünk fel, amelyek sorjában egymást is és az eredeti két kört is érintik, akkor előfordulhat, hogy az érintő körök sorozata bezárul, *n* körből álló gyűrűt kapunk, amelyben az utolsó kör érinti az elsőt. Ebben az esetben a gyűrű első körének minden olyan kört választhatunk, amely érinti az eredeti két kört, vagyis a kezdő kör helyzetétől független.

Utóbbiakban felsorolt variációk lehetőségek a témakör kibővítésére, esetünkben csak azoknak az eseteknek a vizsgálata volt a cél, amikor az alapkörnek és a k_i köröknek a sugarai megegyeznek.

4. fejezet: Pedagógiai vonatkozások: szerkesztések

Ebben a fejezetben a már tárgyalt körzőrózsáról, és a hozzáírt zárt körsorozatokról lesz szó pedagógiai kontextusban. Utóbbiakban említett problémák már az általános iskolában is felmerülhetnek, elsősorban a sík geometriájában, meg lehet próbálni ugyanakkor, a gömb geometriájában is megvizsgálni ezeket a kérdéseket a diákokkal, természetesen más és más szinteken, korosztályhoz és képességekhez mérten. A körzőrózsa az egyik legegyszerűbb játék, amit a gyerekek, diákok a körző megismerkedésének alkalmával kipróbálhatnak, játszhatnak, s mindezt úgy tehetik meg, hogy az elvét sem kell, hogy ismerjék. Ez a témakör egy bizonyos szinten (szerkesztés szintjén) mindenki számára bemutatható, megfogható. Szerkesztési kérdésekkel fogunk foglalkozni, illetve alkalmazást is mutatunk a problémakörre, mellyel még inkább felkelthetjük a diákok érdeklődését.

4.1. Szerkesztések

Ebben az alfejezetben a gömbi körzővel és gömbi vonalzóval végezhető geometriai szerkesztések közül mutatunk be néhányat. Röviden áttekintjük a szerkesztési lépéseket. A szerkesztéshez legyenek megadva adatok, melyek (a gömbön) a pontok, főkörök és körök egy tetszőleges, rögzített rendszere. Feltesszük, hogy legalább két pont mindig meg van adva. Az adatokat már megszerkesztett pontoknak, főköröknek és köröknek tekintjük, és minden szerkesztési lépésben a megszerkesztettek halmazát bővítjük. A következőekben felsoroljuk az elemi szerkesztési lépéseket: megszerkeszthető (1) két különböző pontra illeszkedő gömbi egyenes (ez átellenes pontpár esetén nem lesz egyértelmű) (2) adott pont körüli, megszerkesztett távolsággal egyenlő sugarú kör (3) két főkör átellenes metszéspontjai (4) egy kör és egy azt metsző főkör mindkét metszéspontja (5) egymást metsző körök mindkét metszéspontja. Szerkesztésnek nevezzük az elemi lépések véges egymásutánját, melynek eredménye a megszerkesztett pontok, főkörök, körök halmaza. Azt mondjuk, hogy egy alakzat megszerkeszthető az adatokból, ha létezik olyan szerkesztés, amelynek az eredménye tartalmazza az alakzatot.

Ahogy említettük gömbi körzővel és gömbi vonalzóval elvégezhető szerkesztéseket vizsgálunk. A szerkesztések kapcsán a legalapvetőbb kérdés az, hogy mely alakzatok szerkeszthetőek meg és melyek nem. Az ilyen jellegű kérdéseknél adott válaszok általában nem foglalkoznak részletesen azzal, hogy a szerkesztés a két segédeszközzel hogyan is zajlik. Mi is csak annyiban fogjuk kiemelni a gömbi vonalzó és körző szerepét, illetve a rajzgömböt, hogy világossá váljon, hogy milyen eszközökről van egyáltalán szó, illetve milyen alapvetőbb szerkesztésekre használhatók. A diákok számára rendkívül érdekes lehet ezeknek az eszközöknek a használata, illetve a gömbfelületre való rajzolás. Míg sík esetében a tanuló könnyen tud kísérletezni, egy sejtés pontos rajza segítheti munkáját, addig a gömbön e rajzgömb-készlet nélkül, ha nem rendelkezik jó térlátással, nehezebben boldogul. A különböző kísérletek során a diák az egyes esetektől eljuthat az általánosig. A rajzok elkészítéséhez nagy segítséget nyújt egy műanyag gömb, mely egy műanyagból készült tóruszon helyezkedik el. Lemosható tollal dolgozva bármikor letörölhetjük rajzunkat, és készíthetünk helyette egy másikat. Segédeszközök: gömbi vonalzó, mellyel főköröket és főköríveket, gömbi körző, mellyel egy adott pont körüli két meglévő pont közti távolsággal megegyező sugarú kört rajzolhatunk, utóbbinak egy segédeszköze a középpontkereső, mely arra szolgál, hogy a körző hegye ne csússzon el a gömbfelületen. A készlethez még hozzátartozik egy gömbi szögmérő is, mellyel a szögek nagyságát is mérhetjük, illetve erre a gömbi vonalzó is jó szolgálatot tesz, hisz a gömbvonalzó skálázott. A mi szempontunkból a gömbi vonalzó, melyet két adott ponton átmenő egyenes húzására használunk, illetve a gömbi körző lesz fontos.

9. kép: Rajzgömb készlet

Gömbi szakaszfelező merőleges szerkesztése: legyen adott egy AB szakasz a gömbön. Válasszunk, egy $C\epsilon(A,B)$ pontot úgy, hogy a $d(AC)$ távolság a szakasz felénél nagyobb legyen. Vegyük fel az A, illetve B középpontú $d(AC)$ sugarú k_a és k_b köröket. Ezeknek a köröknek két metszéspontja is lesz, legyenek ezek M_1 és M_2. Az M_1 és M_2 pontokra illeszkedő főkör épp a keresett egyenes lesz. (Megjegyzés: az M_1 és M_2 pontok abban az esetben nem illeszkednek egyértelműen egy gömbi egyenesre, ha átellenes pontpárt alkotnak. Ez az eset csak akkor állna fenn, ha $\pi/2$ sugarú körökkel körzőztünk. Mivel $d(AC) < \pi/2$, hiszen $d(AB) \leq \pi/2$, így ez az eset nem lehetséges.)

Mint látható, az euklideszi síkon látott szakaszfelező merőleges szerkesztésének eljárása a gömbön is érvényes. Hasonló a helyzet szögfelező, szögmásolás esetében is. Ahogy a síkon működött, a szögfelező szerkesztésének a felhasználásával tudunk egy adott egyenes adott pontjából az egyenesre merőleges egyenest szerkeszteni a gömbön.

Nem ilyen egyszerű viszont adott körhöz adott külső pontból húzott érintő szerkesztése. A problémát az okozhatja, hogy a síkon használatos szerkesztés kihasználja a Thalesz-tételt, mely a gömbi geometriában nem érvényes. Az alábbiakban közlünk egy Arkhimédésztől származó tételt, mely mindkét geometriában megállja a helyét.

4.1.78. Tétel. [11] Legyen adott egy O középpontú r sugarú k kör és egy P külső pont. A P ponton átmenő, a kört érintő főköröket úgy szerkeszthetjük meg, hogy:

(1) felvesszük az O körüli $d(OP)$ sugarú l kört

(2) legyen $OP \cap k = M$

(3) felvesszük az M ponton áthaladó, OP főkörre merőleges e gömbi egyenest

(4) legyen $e \cap l = \{K, L\}$

(5) felvesszük az OK és OL gömbi egyeneseket

(6) legyen $OK \cap k = E$, és legyen $OL \cap k = F$

(7) végül vesszük az EP és FP főköröket, melyek a keresett érintők lesznek.

Egy gömbi háromszög polárháromszögének a szerkesztésénél fontos tudni, hogy hogyan szerkesszük meg egy főkör pólusát. Mivel egy ponton áthaladó egyenesek mind merőlegesek a pont polárisára; illetve egy főkörre állított merőleges gömbi egyenesek egy pontpáron mennek keresztül, a főkör pólusain, a szerkesztés már magától értetődő. Összefoglalva, egy adott főkör pólusait úgy kapjuk meg, hogy a főkörre állítunk két merőleges gömbi egyenest, melyeknek vesszük a metszetét. Egy pont átellenes pontját, bármely két a ponton keresztül menő főkörök kimetszik. Egy átellenes pontpár szakaszfelező merőlegese a két pont polárisa. Ha adott egy e gömbi egyenes és egy rajta fekvő K pont, akkor K-ban az e gömbi egyenesre állított merőleges főkört könnyű e pólusainak a segítségével megszerkeszteni, ugyanis ha az már megszerkesztett, akkor rájuk és a *K*-ra illeszkedő főkört kell venni.

Egy példán bemutatjuk, hogyan lehet a gömbön háromszirmú gömbi nem elfajuló körzőrózsát rajzolni úgy, hogy körzőnkkel bármekkora $\pi/2$-nél nem nagyobb sugarat körzőnyílásba tudunk venni. Ezt nem nevezhetjük szerkesztésnek, viszont a rajzgömb-készlettel ismerkedő diákoknak jó feladat lehet. (A gömbi vonalzó skálázása miatt fokokban közöljük.)

1. lépés: Jelöljünk ki egy tetszőleges *O* pontot a gömbön.
2. lépés: Az *O* pont átellenes O^* pontját tekintsük, és szerkesszük meg a 70,529° sugarú O^* középpontú g kört.
3. lépés: Válasszunk egy tetszőleges K_0 pontot a g körön, és szerkesszük meg a k_1 kört, melynek középpontja K_0^*, mely a K_0 pont átellenes pontja, sugara pedig szintén 70,529°.
4. lépés: A k_1 kör és a g kör két pontban is metszik egymást, legyen ezek közül az egyik K_1. Most szerkesszük meg a K_1^* (K_1 átellenes pontja) középpontú 70,529° sugarú k_2 kört.
5. lépés: A k_2 kör és a g kör K_0 ponton kívüli metszéspontja legyen K_2, és vegyük fel a K_2^* középpontú, mely a K_2 átellenes pontja, 70,529° sugarú k_3 kört. Ekkor a k_3 kör és a g kör K_2 ponton kívüli metszéspontja legyen K_3, mely éppen K_0 ponttal esik egybe, vagyis készen vagyunk a körzőrózsával.

Ennél a szerkesztésnél az a könnyen megoldható probléma áll fenn, mely az eszköztárból ered, hogy nem tudjuk körzőnyílásba venni a 109,471°-ot, mivel nagyobb, mint 90°. Mivel a gömbön egy tetszőleges X középpontú *r* sugarú kör szerkesztése esetén, valójában két kör is keletkezik, mégpedig utóbbin kívül, egy *X'* középpontú π-*r* (180°-r) sugarú kör, így a megoldás könnyen adódik.

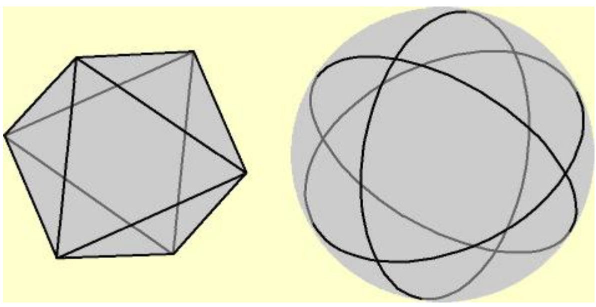
A következő alfejezetben példát láthatunk arra, hogyan lehetne megszerkeszteni a háromszirmú gömbi nem elfajuló körzőrózsát a platóni testek segítségével.

4.2. Platóni testekből nyert szabályos gömbi mozaikok szerkesztése

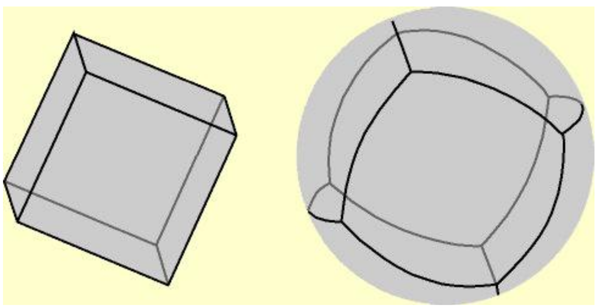
*Gömbi platóni test*eknek nevezzük azokat a mozaikokat, melyeket a gömbbe írt (euklideszi térben értelmezett) platóni testek gömbre való kivetítéséből nyerünk. Ezeket a mozaikokat meg lehet szerkeszteni úgy is, hogy nem egyenként szerkesztjük meg a tiszta mozaik szabályos sokszögeit, hanem főkörök segítségével, illetve egy már megkapott gömbi platóni testből kiindulva. Az alábbiakban közölt szerkesztési eljárásoknál főképp ez a cél. Annak ellenére, hogy a kivetítésből egyértelműen adódik, megjegyeznénk, hogy a vetítés során a lapok száma, élek száma, csúcsok száma, ezeknek a viszonyaik, illetve az oldallapok szabályossága nem változik.

A **gömbi oktaéder**hez jutunk három darab páronként merőleges főkör szerkesztésével [12]. A feladat lényegében annyi, hogy négy darab szabályos gömbi háromszöggel kell parkettázni a gömböt úgy, hogy egy csúcsba négy él fusson. A már bemutatott oktánssal való parkettázás eleget tesz ennek, melynek oldalai páronként merőlegesek egymásra.

A **gömbi hexaédert** úgy szerkeszthetjük meg, hogy vesszük a gömbi oktaéder oldallapjainak súlypontjait, majd ezeknek a háromszögeknek a súlypontjait összekötjük a mellette fekvő háromszögek súlypontjaival [12]. A nyolc súlypont, mint csúcs nyilván jó lesz, mert az összekötő szakaszok mentén egyenlő távolságra helyezkednek el. Szabályos gömbi háromszögek esetében a súlyvonal egybeesik a szögfelezővel és az oldalfelező merőlegessel, az 1.2.38. Tételből adódik, hogy jelen esetben a súlypont a háromszög oldalaitól egyenlő távolságra van, s mivel mindegyik háromszög oldala egyben tükörtengely is, a mellette fekvő háromszög és közte, így a két „szomszédos” súlypont közti távolság nyilván kétszerese a súlypont és a háromszög oldala közti távolságnak, vagyis az oldalak egyenlő hosszúak lesznek. Mivel minden csúcsba három él fut, melyek egymással ugyanakkora szöget zárnak be, így a test lapjainak a szögei is ugyanakkora nagyságúak lesznek.



10. kép: Oktaéder és gömbi oktaéder



11. kép: Hexaéder és gömbi hexaéder

A **gömbi tetraéder** segítségével megkaphatjuk a gömbi háromszirmú nem elfajuló körzőrózsákat. Szerkesztésének menete: először egy gömbi hexaédert szerkesztünk, aminek kiválasztjuk az egyik oldallapját, azon pedig két átellenes csúcsot. Az oldallappal szemközti lapon jelöljük meg azt a két csúcsot, amely a már kiválasztott csúcsokkal nem szomszédos. Kössük össze mindegyik megjelölt, kiválasztott csúcsot a többi kiválasztott csúccsal [12]. Csakugyan gömbi tetraédert kapunk, hisz az euklideszi térben a hexaéder egymáshoz csatlakozó lapátlói tetraédert határoznak meg [6], melynek csúcsai a kocka csúcsai közül kerülnek ki, vagyis ha a hexaéder gömbbe írt volt, akkor a tetraéder is az lett (a kocka magában foglalja értelemszerűen a tetraédert), így kivetíthetjük a gömbfelületre, a két eljárás a két geometriában ugyanaz.

A **gömbi dodekaéder** segítségével tizenkét darab szabályos ötszöggel parkettázhatjuk a gömböt. Szerkesszük meg azt az a oldalú *ABC* szabályos gömbi háromszöget, melynek az oldalhossza megegyezik (ugyanazon a gömbön értelmezett) gömbi hexaéder oldalhosszával. Legyen *ABC* gömbháromszög súlypontja *S*. Ekkor az *S* pont és az *AS, BS, CS* szakaszok éppen a dodekaéder egy csúcsával és a belőle kiinduló három élével feleltethetőek meg. Ha figyelembe vesszük, hogy a gömbi dodekaéder lapjai szabályos ötszögek, továbbá, hogy egy tetszőleges csúcsából három él indul, melyek egymással $2\pi/3$ (120°) szöget zárnak be, illetve minden éle a testnek egyforma hosszú, hisz platóni testről beszélünk, akkor a gömbi test többi csúcsának a megszerkesztése az *AS, BS, CS* szakaszokból nem okoz gondot [12]. Ennél a szerkesztési eljárásnál tényleg dodekaéderhez jutunk, hisz tizenkét darab szabályos ötszöget kapunk, és az élek hosszai $\cos^{-1}(\sqrt{5}/3)$ (41,81°), melyet az alábbiakban bizonyítunk. A gömbi hexaéder élei $\cos^{-1}(1/3)$ (70,529°), ugyanis m élhosszúságú (egységsugarú gömbbe beírható) euklideszi hexaéder lapátlójának a fele $m/(\sqrt{2})$, a Pitagorasz-tétel alkalmazásával a $(m/\sqrt{2})^2 + (m/\sqrt{2})^2 = 1$ egyenlethez jutunk, melyből következik, hogy $m = 2/(\sqrt{3})$. Koszinusztételt felhasználva - ugyanis arra vagyunk kíváncsiak, hogy a hexaéder középpontjából az m hosszúságú éle, milyen szögben látszik- a $\cos\gamma = \frac{2-(2/\sqrt{3})^2}{2}$ egyenlőséghez jutunk, melyből kapjuk, hogy a gömbi hexaéder élének a hossza $\mathrm{a} = \cos^{-1}(1/3)$ (70,529°), mely jelen esetben megegyezik az *AB*, *BC*, *CA* szakaszok hosszával. Mivel az *ABC* gömbháromszög szabályos, így a súlyvonalak a háromszöget egybevágó háromszögekre bontják (1.2.32. Tétel (c)), következésképpen a súlyvonalak jelen esetben egybeesnek a szögfelezőkkel, és az oldalfelező merőlegesekkel. Az 1.2.36. Tétel felhasználásával, *S* pont az *ABC* háromszög körülírt körének a középpontja is egyben, tehát $AS = BS = CS$. (Az 1.2.32. Tételt alkalmazva kapjuk, hogy *ABS*, *BCS*, *CAS* háromszögek egybevágóak.) Az 1.2.27. Tételt felhasználva az *ABC* szabályos gömbháromszög szögei:

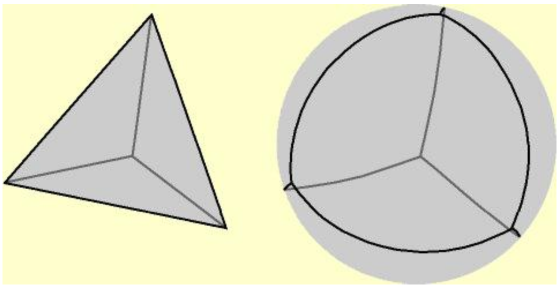
$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\cos(\cos^{-1}(1/3)) - (\cos(\cos^{-1}(1/3)))^2}{(\sin(\cos^{-1}(1/3)))^2}\right) = \cos^{-1}(1/4).$$

Az 1.2.28. Tételt alkalmazva az *ABS* háromszögre:

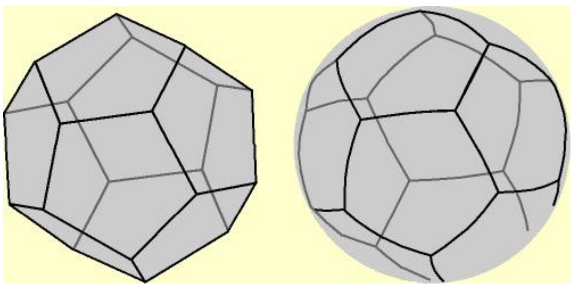
$$d(AS) = \cos^{-1}\left(\frac{\cos(\frac{1}{2}\cos^{-1}(1/4) + \cos\left(\frac{1}{2}\cos^{-1}(1/4)\right)\cos(2\pi/3))}{\sin(\frac{1}{2}\cos^{-1}(1/4))\sin(2\pi/3)}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{5/2}}{2} - \frac{\sqrt{5/2}}{4}}{\frac{\sqrt{3/2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) =$$

$$cos^{-1}(\sqrt{5}/3).$$

Ugyanis $SAB\sphericalangle = ABS\sphericalangle = (\cos^{-1}(1/4))/2$ a szögfelezők miatt, illetve $BSA\sphericalangle = 2\pi/3$. Vagyis az ismertetett szerkesztési eljárással gömbi dodekaédert szerkeszthetünk.

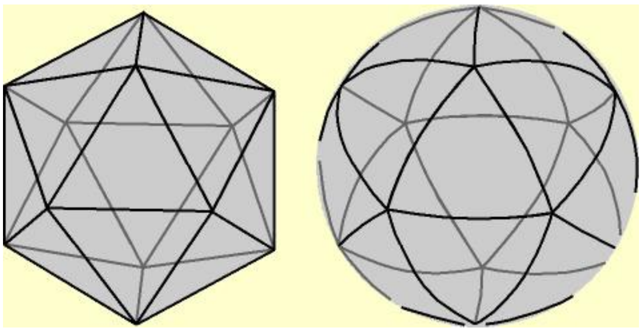


12. kép: Tetraéder és gömbi tetraéder



13. kép: Dodekaéder és gömbi dodekaéder

A **gömbi ikozaéder** szerkesztésénél induljunk ki egy gömbi dodekaéderből, melynek szerkesszük meg az oldalfelező merőlegeseit, melyek a gömbi dodekaéder lapjainak a középpontjában találkoznak. Ezek a találkozási pontok a gömbi ikozaéder csúcsainak felelnek meg, az oldalfelező merőlegesek pedig a kívánt test éleinek [12]. Ez a szerkesztés jó lesz, hisz tudjuk, hogy az ikozaéder szabályosságából következik, hogy lapközéppontjai dodekaédert határoznak meg [6]. Ha mindezt egy gömbbe helyezzük, és kivetítjük, akkor látni fogjuk, hogy ugyanez a szerkesztési mód megállja a helyét a gömbi geometriában is.

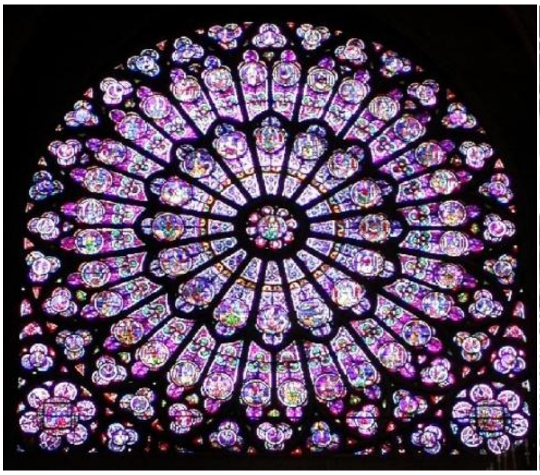


14. kép: Ikozaéder és gömbi ikozaéder

4.3. Alkalmazás

Érdemes megemlíteni, hogy a körzőrózsák, a körzőrózsákhoz hasonló alakzatok, különböző parkettázások megjelennek a művészetben is. Síkbeli körzőrózsákat figyelhetünk meg az építészetben (rózsaablakok), gömbi parkettázások pedig a kupoláknál jelennek meg.

A gótikus művészetben, mely a 12. század közepén jelenik meg, az épületszerkezeti újításoknak köszönhetően a különböző épületek falazataiban jókora ablakokat, felületeket nyithattak meg. Az óriási méretű ablakok a templomok belső tereinek megvilágításán javítottak, mellesleg az akkori középkori felfogás szerint, a fény szimbolikus jelentéssel is bírt. Mint ahogy az egyik úttörő is, Suger apát, akinek a nevéhez fűződik a templomokban a színes üveg felhasználása, szívesen alkalmazta a színes üvegablakokat. A ciszterci rendet, mely látványosan törekedett arra, hogy a fényűzésből kivonja magát, már a 11.században megalapították. A 16. képen az egyik apátsági templomuk látható, melynek elöl lévő ablaka hat részre van felosztva. A kor kör alapú üvegablakait általában egybevágó körcikkekre osztották fel.



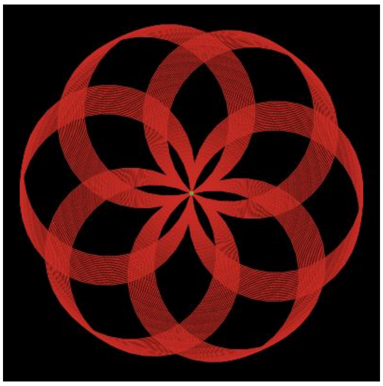
15. kép: Notre-Dame üvegablaka

16. kép: Bélapátfalva – Apátsági templom

17. kép: Pantheon belseje

Többfajta kupola is létezik, minket főképp a félgömb alakú kupola érdekel, amilyen a Pantheon belseje is (Kr. u. 118-125), mely a 17. képen látható, ahol gömbi négyszögekre osztották fel a félgömböt.

Megemlíthetjük még az eszkimó kunyhókat, illetve a kaleidoszkópot (18. kép), és a régi iránytűk felosztását is.



18. kép: Kaleidoszkóp

Összefoglalás

Definiáltuk a nem elfajuló körzőrózsát és leírtuk kapcsolatát az adott sugarú körbe beírt olyan szabályos sokszögekkel, melyek oldalhossza megegyezik az adott sugárral. Az elfajuló körzőrózsát olyan zárt töröttvonalakkal tudtuk leírni, melyek csúcsai egy adott sugarú körön helyezkednek el, és oldalai megegyeznek az adott kör sugarával. Láttuk, hogy a síkon a nem elfajuló körzőrózsa és a hozzáírt zárt körsorozat esetében is független a probléma a sugár hosszától, hisz minden esetben hatszirmú körzőrózsát, illetve hat darab k_i körből álló sorozatot kapunk. Az euklideszi síkon nem volt értelme az elfajuló eseteket vizsgálni. A gömbön háromféle nem elfajuló körzőrózsa létezik, ezek három-, négy-, illetve ötszirmúak, hasonló eredményt kaptunk a hozzáírt zárt körsorozat esetében is: háromféle sugár esetén lehet ugyanolyan sugarú k_i köröket rajzolni a g alapkörhöz, hogy hozzáírt zárt körsorozatot kapjunk, mégpedig az elfajuló körzőrózsák esetében kapott sugarak felével. A gömbi elfajuló körzőrózsáknál a racionalitás kapott szerepet, a 2.4.62. Tétel kimondja, hogy minden olyan, t/n alakú ($(t,n) = 1$) racionális számhoz, mely $(1/3;1)$ intervallumba esik, és nem $2/3$, $1/2$, $2/5$ létezik n szirmú elfajuló körzőrózsa, mely t-szeresen fedi le az adott felszínt. Hasonló tétel adódott a hozzáírt zárt körsorozat problémájára is. A sík esetében a nem elfajuló körzőrózsánál kapott K_i pontok alkotta szabályos síkidommal lehet parkettázni a síkot. Érdekes volt megfigyelni, hogy a nem elfajuló háromszirmú körzőrózsa összefüggésbe hozható a tetraéderrel, ugyanis az így keletkezett K_i pontok alkotta háromszöggel való parkettázás lehetséges a gömbön, és éppen a gömbi tetraédert kapjuk meg vele. A gömbön szabályos sokszöggel való parkettázások száma végtelen, még akkor is, ha csak a tiszta mozaikokat tekintjük (pl.:gömbkétszögek). Láttunk példákat a körzőrózsára, parkettázásra a művészetben, például üvegablakok és kupolák díszítésénél.

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani konzulensemnek, Lénárt Istvánnak a dolgozat tartalmával kapcsolatos tanácsaiért, hasznos észrevételeiért, s amiért felhívta a figyelmemet a rajzgömb használatára.

Irodalomjegyzék

[1] Coxeter, H. S. M.: A geometriák alapjai. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973.

[2] Csikós Balázs: Gömbi geometria. In: Új matematikai mozaik. Szerk.: Hraskó András. Typotex Kiadó, Budapest, 2002. pp. 337-373.

[3] Egyetemes művészettörténet. Park Kiadó, Budapest, 2004. Szerk.: Imre Györgyi, Putnoky Istvánné, Révy Katalin, Varga Zsuzsa

[4] Egyetemes művészettörténet. Építészet, szobrászat, festészet. Napraforgó Könyvkiadó, Budapest, 2003. Szerkesztette: Campos Jiménez Mária

[5] Grand Unification: http://www.grandunification.com/hypertext/Platonic_Spheres.html

[6] Hajós György: Bevezetés a geometriába. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1971.

[7] Hraskó András: Geometriai tételek a harmadrendű görbe csoporttulajdonságával összefüggésben. http://www.cs.elte.hu/phd_th/Hrasko.pdf

[8] Kálmán Attila: Nemeuklideszi geometriák elemei. A Bolyai-Lobacsevszkij-féle hiperbolikus geometria és a Riemann-féle (egyszeres és kétszeres) elliptikus geometria vázlatos ismertetése. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.

[9] Laczkovich Miklós - T. Sós Vera: Analízis I. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2005.

[10] Lánczos Kornél: A geometriai térfogalom fejlődése. A geometriai fogalmak fejlődése Püthagorasztól Hilbertig és Einsteinig. Gondolat Kiadó, Budapest, 1976.

[11] Lénárt István: Nem-euklideszi geometriák az iskolában I.-II. című előadásának jegyzete

[12] Lénárt István: Sík és gömb. Nem-euklideszi kalandok a rajzgömbön. Múzsák Kiadó Kft, 1997.

[13] Sain Márton: Nincs királyi út! http://mek.niif.hu/05000/05052/pdf/index.html

[14] Szőkefalvi Nagy Gyula: A geometriai szerkesztések elmélete. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968.

[15] The MacTutor History of Mathematics archive: http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/

[16] Todhunter, Isaac: Spherical Trigonometry. Macmillan, London, 1863. http://books.google.com/books?id=8M02AAAAMAAJ&pg=PA1&dq=todhunter+sphere&hl=hu&cd=2#v=onepage&q&f=false

[17] Wolfram MathWorld: http://mathworld.wolfram.com/PlatonicSolid.html
http://mathworld.wolfram.com/Tetrahedron.html

Képek forrásai

1. és 3. kép: Spaces of Constant Curvature
http://www.pitt.edu/~jdnorton/teaching/HPS_0410/chapters/non_Euclid_constant/index.html

2. kép: File:Regular digon in spherical geometry.png
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Regular_digon_in_spherical_geometry.png

4-8. képek: saját képek

9. kép: http://www.sulinet.hu/matek/lenart/felhivas.htm

10-14. képek: Platonic Spheres
http://www.grandunification.com/hypertext/Platonic_Spheres.html

15. kép: www.panoramio.com/photos/original/4934778.jpg

16. kép: www.hevestour.hu

17. kép: www.roma-antica.co.uk/custom/Pantheon.jpg

18. kép: http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/Kaleidoscope