# Oktatási eszközök, játékok
# <SET>
Szakdolgozat

Készítette: Medve Noémi
Matematika BSc
tanári szakirány

Témavezető: Fried Katalin
Matematikatanítási és Módszertani Központ
főiskolai docens

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2010

# Tartalomjegyzék

# 1. Bevezetés

## 1.1. A *set* nevű kártyajátékról[1]

A set egy vonzó, gyorsasági-logikai játék. Habár a gyerekek körében népszerű – akik gyakran legyőzik a felnőtteket –, mégis olyan gazdag matematikai struktúrával rendelkezik, mint a véges affin és projektív terek kombinatorikája, vagy a hibajavító kódelmélet.

Az utóbbi években a furier-analízissel való meglepő kapcsolata segítségével lett megoldva egy, közvetlenül a sethez kapcsolódó alapkérdés (ezekre a szakdolgozatomban nem térek ki, mert a fentebb említett kérdéseket más módszerrel válaszoljuk majd meg), de számtalan ezzel kapcsolatos kérdés nyitott maradt.

A setet Marsha Jean Falco, egy populáció-genetikus 1974-ben találta ki. Az epilepsziáról folytatott tanulmányokat a German Shepherdsben, és a kutyák genetikai adatait vizsgálta. Úgy kezdte el jelölni ezeket az adatokat, hogy kártyákra különböző szimbólumokat rajzolt, és különböző motívumokat keresett az így feljegyzettek között.

Miután felismerte a lehetőséget, hogy ebből kiváló és kihívó játék lehet – valamint a barátai és családja is erre buzdították –, kifejlesztette és értékesíteni kezdte a kártyajátékot. Azóta nagy sikere van a setnek a matematikai közösségeken kívül és belül egyaránt.

# 2. A *set* játékszabálya

Hogy néznek ki a kártyalapok? Minden kártyán van egy ábra, aminek 4 jellemzője van. Minden kategória további három különböző lehetőséget tartalmaz. Az összes kártya egyedi, így $3^4 = 81$ kártyából áll a csomag.

A 4 jellemző a következő:

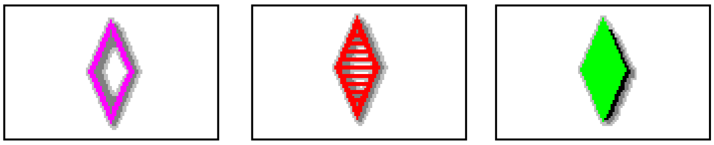
- szín (piros, zöld, lila)
- alak (ovális, rombusz, hullámos)
- darabszám (egy, kettő, három)
- telítettség (üres, satírozott, teli)

[1] Az irodalomjegyzékben szereplő [1] szabad fordítása alapján.

Egy set 3 kártyából áll. A 3 kártyának mind a 4 jellemzőjét külön-külön megvizsgáljuk, 1-1 jellemzőre nézve vagy teljesen egyformának kell lennie a 3 kártyának, vagy teljesen különbözőnek.

*Példák*

set:

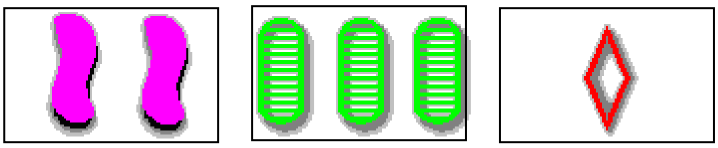


-szín: 3 különböző

-alak: 3 egyforma

-darabszám: 3 egyforma

-telítettség: 3 különböző



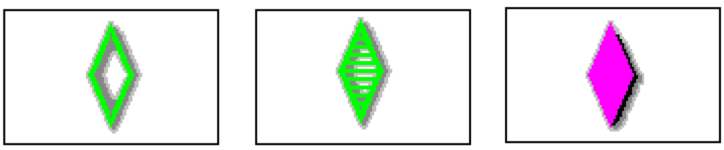
-szín: 3 különböző

-alak: 3 különböző

-darabszám: 3 különböző

-telítettség: 3 különböző

nem set:

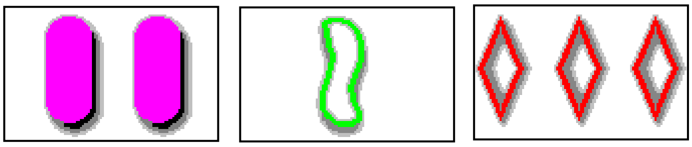


-szín: 2 zöld, 1 lila (!)

-alak: 3 egyforma

-darabszám: 3 egyforma

-telítettség: 3 különböző



-szín: 3 különböző

-alak: 3 különböző

-darabszám: 3 különböző

-telítettség: 2 üres, 1 teli (!)

$3\times4$-es téglalapot rakunk ki a kártyákból, színével felfelé az asztalra. Ha a 12 kártyalap között találunk setet, felvesszük és helyébe újabb 3 kártyát rakunk ki színével felfelé. Ha nem tartalmaz setet, akkor további 3 kártyát rakunk mellé és így már a 15 kártya közt keressük tovább a setet. (Annak a valószínűsége, hogy 15 kártya között nem lesz set kb. $1:1000$-hez.[2]) Ha találunk setet, felvesszük a szóban forgó 3 kártyát, de ekkor nem osztunk ki újat ezek helyére, így megint 12 kártyával folyik tovább a játék és addig tart, míg az összes kártya (81 db) el nem fogy az asztalról, vagy már nincs több set a megmaradt lapok között.

Az nyer, aki a játék végére a legtöbb setet gyűjti össze. (Meg mindenki más, aki gondolkodik a játék során, valamint az utána következő, settel kapcsolatos feladatokat megoldja.)

## 3. SET és diszkrét matematika[2]

John A. Dossey a diszkrét matematikai problémákat 3 fő csoportba sorolja. Az első a létezés problémája; létezik e megoldás vagy sem. A második kategória a számolási probléma, megmutatja, hogy hány megoldás létezhet a problémára az ismert módszerek segítségével. A harmadik az optimalizálás problémája, arra fókuszál, hogy megtaláljuk a megoldást az egyedi problémára. A set játék az első két problémát prezentálja. A létezés problémájának vizsgálatához minden tanuló felvesz 2 kártyát a játékmezőről és megvizsgálja, hogy létezik e olyan harmadik kártya, amelyik az előző kettővel setet

[2] A vastag betűvel szedett alcímek megegyeznek az irodalomjegyzék [2] számú, Mathematics Workbook egyes alcímeivel. Tartalmát tekintve szintén egyezik, szabad fordításban átvettem. A továbbiakban [2]-vel jelölöm.

alkot, és ha létezik, akkor hány ilyen harmadik kártya van. Ez a keresgélés, okfejtés és kommunikáció „matematikai légkört” teremt az osztályban. Könnyen belátható, hogy két kártya már egyértelműen meghatározza a harmadikat. Azoknak a tanulóknak, akik jártasabbak a kombinatorikában, lehet nehezebb kérdéseket is feltenni, pl. ha csak egy kártyát veszünk fel a pakliból, akkor hány lehetőségünk van ehhez az egy laphoz két kártyát választani?

Ehhez fel kell használnunk a korábbi megállapításunkat, miszerint két set-kártya egyértelműen meghatározza a harmadikat. 81 kártyából 3240 féleképpen választhatunk ki 2 kártyát, azaz $\binom{81}{2} = 3240$, és ehhez a harmadik már egyértelműen adódik. Mivel minden kártya ugyanannyi setben szerepel és 81 db kártya van, így $3240 : 81 = 40$. Tehát minden kártya 40 db setben szerepel (átfedésekkel).

A fenti feladat *másféleképp*:

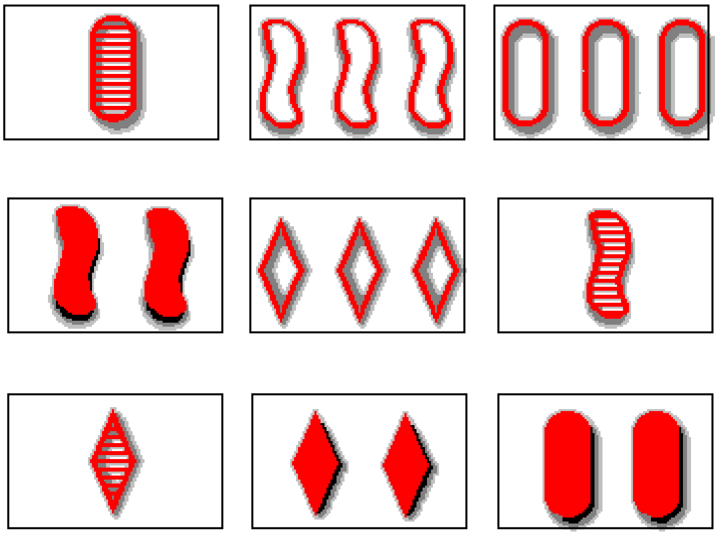
Kiválasztunk egy kártyát (a 81 lapból) és az a kérdés, hogy hány setben szerepel egy tetszőlegesen választott kártya. Emellé a maradék 80-ból még akármelyiket választhatjuk, a harmadikat pedig az előző két lap egyértelműen meghatározza, ez eddig 80 lehetőség. De így minden esetet kétszer vettünk, mivel a második és harmadik választás fordítva is lehetséges, ugyanis nem számít a sorrend, ha találunk egy setet, így $80/2$-t, azaz 40-et kapunk.

A jobb képességű középiskolai diákok talán azt is meg tudják mondani, hogy mi az a legmagasabb számú set, ami előállhat 9 kártyalap esetén. Az első helyre 9 kártyát választhatunk, a másodikra már csak 8-at, a harmadikat pedig szintén meghatározza az előző két lap $(9 \times 8)$. De a sorrend nem számít, ha setet találunk, így $(9 \times 8)/(3 \times 2) = 12$ a maximális setek száma 9 kártya esetén (szintén átfedéssel).

*Máshogy:*

9 alatt a 2 féle (36 db) pár lehet, ezek mindegyikéhez egy kártyát tudunk csak választani, hogy setet alkossanak. De ekkor minden kártyát háromszor számoltunk (mert mindhárom kártyát választjuk egyszer harmadiknak a másik kettő mellé), így $36/3 = 12$ set lehetséges.

Lássunk egy *példát* (1.ábra)[3]:



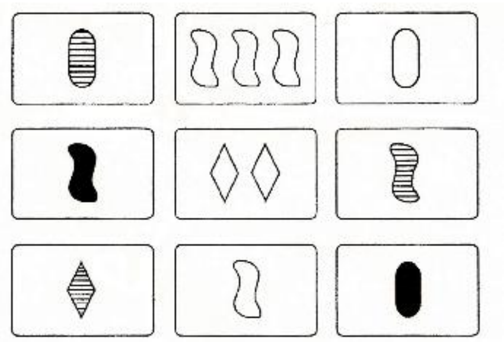
**1. ábra**

További *kérdések*:

• *Hány kártyából állna a pakli, ha minden kártyának 3 jellemzője lenne, 1-1 jellemzőt pedig 5 különböző opcióból lehetne kiválasztani?*

$5^3 = 125$ kártyából állna a csomag.

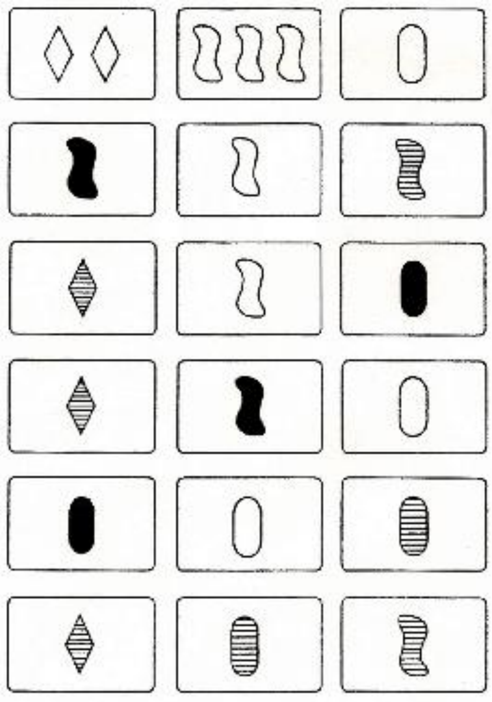
Egy egyszerűsített változata lehet a játéknak, ha a kártyák egyik tulajdonságát (itt a színt) kivesszük a kártya jellemzői közül, valamint 9-re csökkentjük az asztalra kirakott lapok számát és nem játsszuk végig a játékot. A feladat jelen esetben az, hogy találjuk meg mind a 6 setet a 2.ábrán.



**2. ábra**

[3] 1-16.ábrákat az Irodalomjegyzék [2], Mathematics Workbook ábrái közül vettem át.

A *megoldást* a 3.ábra mutatja:



különböző darabszám, egyforma telítettség, különböző alak

egyforma darabszám, különböző telítettség, egyforma alak

egyforma darabszám, különböző telítettség, különböző alak

egyforma darabszám, különböző telítettség, különböző alak

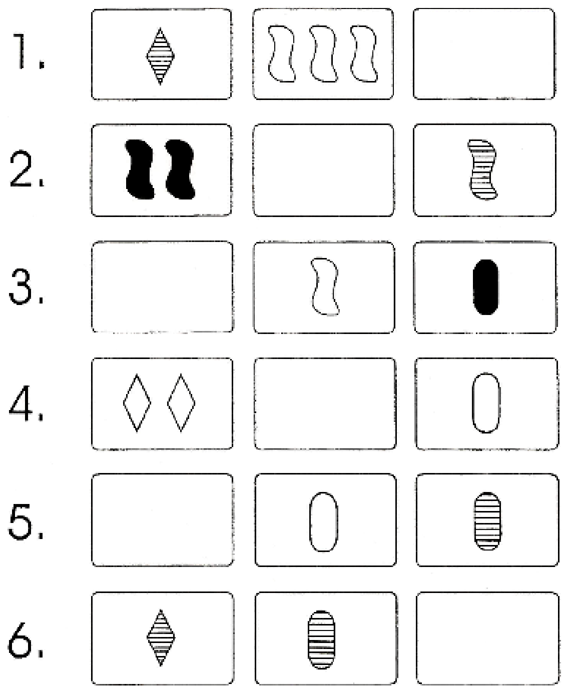
egyforma darabszám, különböző telítettség, egyforma alak

egyforma darabszám, egyforma telítettség, különböző alak

**3. ábra**

A 4.ábra szintén egy egyszerűsített változata látható a játéknak, ahol a 4. tulajdonságot, a színt nem kell figyelembe venni.

Rajzold meg a hiányzó kártyalapokat! Minden hármas alkosson setet!




***4. ábra***

*megoldás:*

1. 2 teli ovális
2. 3 üres hullámos
3. 1 satírozott rombusz
4. 3 üres hullámos
5. 1 teli ovális
6. 1 satírozott hullámos

## 4. Halmazelméleti alapfogalmak és a SET[2]

A set-játék kiváló lehetőség arra, hogy bemutassuk vele a halmazelméleti alapfogalmakat. Konkrét modellt ad a megértésre és ezen oktatási eszköz segítségével gyakoroltathatjuk a halmazműveleteket.

*Jelölések:*

C = csomag

P = piros

Z = zöld

L = lila

1 = egy alakzatot tartalmazó ábra

2 = két alakzatot tartalmazó ábra

3 = három alakzatot tartalmazó ábra

o = ovális

~ = hullámos

∧ = rombusz

Ü = üres

S = satírozott

T = teli

### 4.1. Számosság[2]

A halmaz egy bizonyos tulajdonsággal rendelkező elemek csoportja. A halmaz egyik alapvető jellemzője a számosság. A számosság egyszerűen a halmaz elemeinek számát jelenti. Egy X halmaz számosságának (, azaz elemszámának) jele: $|\mathrm{X}|$.

*Például* – a fenti jelöléssel – $|\mathrm{L}|$ jelöli a lila set-kártyák darabszámát.

$|\mathrm{L}| = 27$

$|\sim| = 27$

$|2| = 27$

### 4.2. Unió[2]

Az a halmazművelet, amikor két (vagy több) halmazt veszünk együttesen, azaz az „összeuniózott" halmazok elemeinek összességét nézzük. A legegyszerűbb esetben két halmaz uniójáról beszélhetünk, amikor a két halmaz elemeinek összességét vesszük.
jele: $\cup$

*Például* az $(\mathrm{L} \cup \sim)$ azon kártyák összességét jelenti, amelyek lilák *vagy* hullámosak. (Jelen esetben megengedő vagyról van szó, tehát a lapok vagy lilák, vagy hullámosak, vagy mindkettő.)
A számosságot 2 (vagy több) halmaz uniójára is tudjuk alkalmazni.

$|\mathrm{L} \cup \sim| = 27 + 27 - 9 = 45$

27 lila kártya van a pakliban és 27 hullámos. $27 + 27 = 54$ db kártya, de ebben az 54 kártyában kétszer szerepelnek, amik hullámosak is és lilák is, így azok számát (9 db) egyszer le kell vonni. Így $54 - 9 = 45$-öt kapunk.[4]

Ebben a példában már előkerül a szita-módszer is (ld. még $*$10.feladatot).
A módszer lényege, hogy segítségével meghatározzuk, hány, egy adott alaphalmazbeli elem van, mely a megadott szempontok mindegyike szerint rossz, azaz hány elemű a $C - \bigcup_{i=1}^{k} C_i$ halmaz. (Ahol $C$ az alaphalmaz, $i = 1, 2, ..., k$ pedig a nem kívánt tulajdonságok.)
Lássunk egy olyan feladatot, amelyikben konkrétabban nyomon követhető a szita-módszer alkalmazása!

[4] Innentől kezdve nem mutat egyezést [2]-vel, egészen a következő jelölésig. Valamint a feladatok sem egyeznek, az elve ugyanaz, de más szimbólumokkal.

$\bullet$ *Hány olyan kártyalap van a setben, amely nem piros, nem hullámos, nem teli és egynél több elemet tartalmaz?*

A szita-formulát alkalmazzuk, tehát

$$\left| C - \bigcup_{i=1}^{k} C_i \right| = |C| - \sum_{1 \le i \le k} |C_i| + \sum_{1 \le i < j \le k} |C_i \cap C_j| + \ldots (-1)^k |C_1 \cap \ldots \cap C_k| ,$$

így a megfelelő helyettesítésekkel

$81-(27+27+27+27)+\binom{4}{2}\cdot 9-\binom{4}{3}\cdot 3+\binom{4}{4}\cdot 1=19$ adódik, tehát 19 db nem egy elemet tartalmazó, nem piros, nem teli, nem hullámos lap van a pakliban.

### 4.3. Üreshalmaz[2]

jele: $\varnothing$

$(\mathrm{L} \cup \varnothing) = \mathrm{L}$

$|\mathrm{L} \cup \varnothing| = |\mathrm{L}|$

*Feladatok:*

a., Írd le szavakkal, mit jelent a kifejezés!

b., Mennyi a halmaz számossága?

1.) $|\mathrm{P} \cup 1|$

2.) $|\sim \cup 2|$

3.) $|\mathrm{Ü} \cup \mathrm{L}|$

4.) $|\mathrm{L} \cup 3|$

5.) $|1 \cup \mathrm{Z}|$

6.) $|\mathrm{Z} \cup \mathrm{o}|$

7.) $|\mathrm{o} \cup 2|$

8.) $|3 \cup \mathrm{P} \cup \sim|$

9.) $|\mathrm{Z} \cup 2 \cup \mathrm{S}|$

$*$10.) $|\mathrm{L} \cup 3 \cup \mathrm{T} \cup \mathrm{o}|$

*Megoldások* (b.): 1-7.: 45, 8-9.: 57, ∗10.: 65

### 4.4. Metszet[2]

Egy másik halmazművelet a metszet, ami két (vagy több) halmazt olyan módon „műveletez össze”, hogy veszi a két (vagy több) halmaz közös elemeit.

jele: $\cap$

Például $(P \cap 3)$ azon kártyák összességét jelenti, ahol a lapokra egyszerre igaz hogy piros *és* az, hogy 3 alakzatot tartalmaz 1-1 lap. A számosságot 2 (vagy több) halmaz metszetére is tudjuk alkalmazni.

$|Z \cap Ü| = 9$

27 zöld kártya van a pakliban, ezek $1/3$-a teli, $1/3$-a satírozott és $1/3$-a üres. Tehát $27:3=9$ olyan lap van a csomagban, ami zöld is és üres is.

$(P \cap \varnothing) = \varnothing$

$|P \cap \varnothing| = 0$

*Feladatok:*

a., Írd le szavakkal, mit jelent a kifejezés!

b., Mennyi a halmaz számossága?

1.) $|3 \cap \sim|$

2.) $|Ü \cap P|$

3.) $|L \cap S|$

4.) $|o \cap 1|$

5.) $|T \cap Z|$

6.) $|2 \cap Z|$

7.) $|S \cap 3 \cap \wedge|$

8.) $|Z \cap 2 \cap T|$

9.) $|P \cap (\sim \cup 1)|$

10.) $|Z \cup (2 \cap Ü)|$

*Megoldások* (b.): 1-6.: 9, 7-8.: 3, 9.: 15, 10.: 33

### 4.5. Komplementer[2]

Egy X halmaz komplementerén azokat az elemeket értjük, amik a legbővebb halmazba (itt: C) beletartoznak, de nem elemei az adott X halmaznak.

jele: $\overline{X}$

Például az L halmaz komplementer halmazán az összes olyan a pakliból való kártyát értjük, amely nem lila.

### 4.6. Kivonás[2]

jele: \

$A \setminus A = \emptyset$

$A \setminus \emptyset = A$

$\overline{L} = C \setminus L$

$|\overline{L}| = |C|-|L|$

*Feladatok:*

a., Írd le szavakkal, mit jelent a kifejezés!

b., Mennyi a halmaz számossága?

1.) $|\overline{\sim}|$

2.) $|\overline{T}|$

3.) $|\overline{2}|$

4.) $|\overline{L \cap 1}|$

5.) $|\overline{C}|$

6.) $|\overline{Z \cup o}|$

7.) $|\overline{L \cup Z}|$

8.) $|\overline{L \cup Z \cup P}|$

9.) $|\overline{(P \setminus 1) \cup (1 \setminus P)}|$

10.) $|\overline{1 \cap Z \cap T}|$

*Megoldások* (b.): 1-3.: 54, 4.: 72, 5.: $\emptyset$, 6-7.: 36, 8.: $\emptyset$, 9.: 45, 10.: 78

Láttuk, hogy a set kiváló a logikai készség fejlesztésére, vizuális percepció javítására, valamint halmazok témakörben nagyobb jártasságot adhatunk ezzel az eszközzel diákjainknak, továbbá kiváló a halmazelméleti alapfogalmak megismertetésére.

## 5. A játék egyszerűsítése[2]

A játékot egyszerűsíthetjük, ha az egyik tulajdonságot – pl. színt – nem vesszük figyelembe. Ebben az esetben mondjuk a zöld színű kártyákat kiválogatjuk és ebből képezzük az új, kisebb – 27 kártyából álló – paklit.

### 5.1. Általános iskola/1. osztály[2]

Kisebb paklit használjunk – ahogy a fentebb említett példában szerepel –, de a tulajdonságot variáljuk egyik játékról a másikra! Egyik játékban a gyerekek játsszanak pl. az üres kártyákkal, a másikban a zöldekkel, a harmadikban a hullámosakkal!
Ez a korosztály a 4 tulajdonság közül 2-re; a színekre és számokra könnyebben oda tud figyelni, mint a formákra és telítettségre. Célszerű a formákra egyszerűbb neveket adni nekik. (Egy javaslat: o = tojás, $\wedge$ = gyémánt, $\sim$ = felhő.) Így érthetőbbé válik a játék a kisebb gyerekek számára.

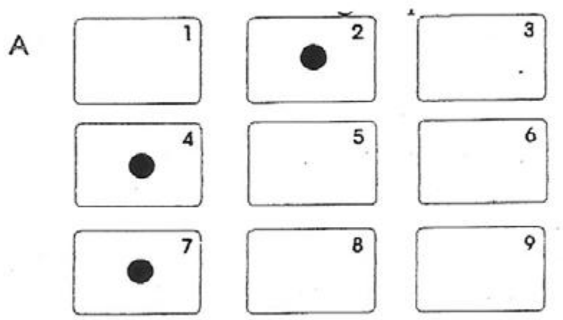
### 5.2. Koncentrációs problémával küzdő tanulók[2]

Arra az esetre is léteznek különböző játékverziók, ha a gyerekek nem tudnak huzamosabb ideig koncentrálni a játékra. Ez esetben is 27 kártyából álló csomagot állítunk össze, a fentiekhez hasonló módon. 2 kártyát húz a diák a pakliból, majd ennek a 2 kártyának egy tulajdonságát figyelembe véve kiválasztja a maradék pakliból, hogy mely kártyák alkotnak az előbbi kettővel setet (arra az egy tulajdonságra nézve). Majd nézi a második jellemzőjét az adott 2 kártyának és ehhez választ egy harmadikat, de már csak az előbb kiválogatott kártyák közül úgy, hogy setet kapjon erre (és az előző) tulajdonságra nézve is. Végül a harmadik tulajdonságot tekintetében választ az utóbb megmaradt kártyák közül, hogy setet kapjon. Így megkapja azt az egy lapot, ami a kezdetben kihúzott 2 lappal setet alkot.

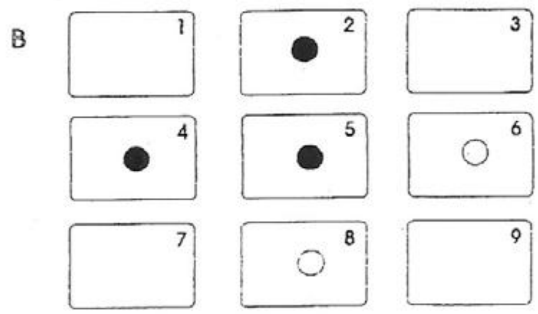
Egy picivel bonyolultabb változat, ha 2 kártyát kiválasztunk (a 27-ből), majd az összes kártyát felfelé fordítjuk. A három tulajdonságon az előzőek szerint haladunk végig, de most azokat a kártyákat fordítjuk le, amelyek nem alkotnak setet az előző 2 lappal. Végül szintén egy kártya marad, ami setet alkot az eredeti 2 kártyával.

## 6. SET és mátrixalgebra[2]

Az 5. és 6. ábra bemutatja, hogy hogy lehet set-kártyák segítségével bűvös négyzeteket készíteni, és mik a lehetséges megoldások. A feladat, hogy úgy pótoljuk ki a kártyákat a $3\times3$-as elrendezésben, hogy bűvös négyzetet kapjunk; azaz minden sorban, oszlopban és a két átlóban is setet adjon ki a 3-3 lap.




5. ábra

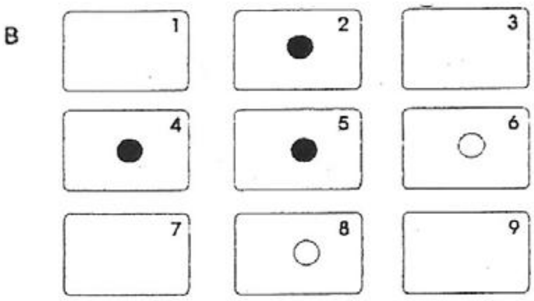



6.ábra

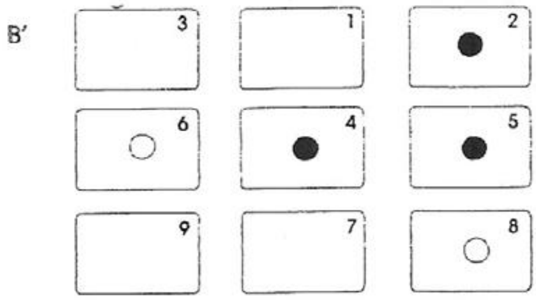
Mindkét feláláshoz 3 kártyát választunk úgy, hogy önmagukban még ne alkossanak setet. A három kártyából kettőt egy vonalba (egy sorba, vagy egy oszlopba) teszünk egymás mellé, egyet pedig az előző kettővel nem teszünk sem egy sorba, sem pedig egy oszlopba.

Az A esetben – mivel 2 kártya meghatározza a harmadikat a set szabályai miatt – rögtön tudjuk, mi kerül az 1-es mezőre, így a 3-at is, majd az 5-öt, stb.(8, 9, 6-ot.)

A B esetben a 6-os és 8-as mezőn szereplő lapokat meg tudjuk mondani egyértelműen. De lássuk, hogyan tovább! Nincs több oszlop vagy sor, ahol már két elem adott lenne, ami meghatározná a harmadik lapot, így más módszer lesz célravezető ez esetben. Kétféleképpen oldható meg a feladat; próbálkozással, vagy egy mátrixalgebrában előforduló koncepciót használunk.




7. ábra




8.ábra

B-t (ld. 7.ábra) transzformáljuk a következő módon: a harmadik oszlopot az első oszlop elé tesszük, így kapjuk B'-t (ld. 8.ábra). (Mátrixalgebrában a sor- vagy oszlopcsere során negatív előjelet kap a mátrix.) Így a 4-ből és 8-ból meg tudjuk mondani 3-at, stb. Majd visszatranszformálva megkapjuk az eredeti feladat megoldását. A sor- és oszloptranszformációk során 4 további setet kapunk, ami a kiindulási ábrán (7.ábra) nem annyira egyértelmű. Továbbá minden sorban, oszlopban és átlóban van egy-egy set. Ezeken kívül a további 4 megoldás a következő: 1.) 2, 4, 9-es kártya; 2.) 2, 6, 7-es kártya; 3.) 1, 6, 8-as kártya; 4.) 3, 4, 8-as kártya – ez az összes 12 set 9 kártyára.

## 7. Bűvös négyzet[2]

• *De mindig létezik-e bűvös négyzet, ha a fent említett módon választunk ki és helyezünk el 3 kártyát, amelyek nem alkotnak setet?*

A fenti kérdésre Llewellyn Falco adott választ, az ő bizonyítását írom le:

darabszám$[X_1]$ szín$[X_2]$ alak$[X_3]$ telítettség$[X_4]$ $\in \{1,2,3\}$

Így az $x=[p,q,r,s]$ vektor $(\in \mathbb{F}_3^4)$ egyértelműen leírja az adott kártyalapot. $C_x$ jelölést használok arra a kártyára, melyre a darabszám$[X_1]$, szín$[X_2]$, alak$[X_3]$, telítettség$[X_4]$ és $x=[p,q,r,s]$.

Ha van 2 kártyám – ami egyértelműen meghatározza a harmadikat –, akkor azokat a következőképpen jelölöm: a két lap $C_a$ és $C_b$, a harmadik $C_{(ab)}$, ahol

$ab = (a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, a_4b_4)$.

A szabály a következő:

- ha $a_n = b_n$, akkor $b_n = x_n$
- ha $a_n \neq b_n$, akkor $b_n \neq x_n$ és $x_n \neq a_n$.

*Például:*

$1*1=1,\ 1*2=3,\ 1*3=2$

$[1,2,3,2]*[1,2,2,1]=[1,2,1,3]$

A fentebb leírtak tartják a set szabályait.

Most lássunk néhány tételt és bizonyítást, amire a továbbiakban szükségünk lesz a kérdésünk megválaszolásához!

i., $a_n * b_n = b_n * a_n$

*bizonyítás:*

2 eset:

- $a_n = b_n$

$1*1=1*1$

$1=1$

- $a_n \neq b_n$

$1*2=2*1$

$3=3$

(Ez azt mutatja, hogy minden két kártya egyértelműen meghatároz egy harmadikat, függetlenül attól, hogy az első két kártyát milyen sorrendben választottuk ki.)

ii., $(a_n * b_n) * c_n \neq a_n * (b_n * c_n)$

*bizonyítás:*

$(3*2)*1=3*(2*1)$

$1*1=3*3$

$1\neq 3$

iii., $(a_n * c_n) * (a_n * b_n) = a_n * (c_n * b_n)$

*bizonyítás:*

4 eset:

- $a_n = b_n = c_n$

$(1*1)*(1*1) = 1*(1*1)$

$1*1 = 1*1$

$1 = 1$

- $a_n = b_n,\ b_n \neq c_n$

$(1*2)*(1*1) = 1*(2*1)$

$3*1 = 1*3$

$2 = 2$

- $a_n \neq b_n,\ b_n = c_n$

$(1*2)*(1*2) = 1*(2*2)$

$3*3 = 1*2$

$3 = 3$

- $a_n \neq b_n \neq c_n$

$(1*2)*(1*3) = 1*(3*2)$

$3*2 = 1*1$

$1 = 1$

iv., $a_n * (a_n * b_n) = b_n$

*bizonyítás:*

2 eset:

- $a_n = b_n$

$1*(1*1) = 1$

$1*1 = 1$

$1 = 1$

- $a_n \neq b_n$

$$1*(1*2)=2$$
$$1*3=2$$
$$2=2$$

Most, hogy megnéztünk néhány tételt, amire szükségünk lesz, ismét vegyük szemügyre a $3\times 3$-as bűvös négyzetet!

Kezdésnek válasszunk 3 kártyát; *a, b, c*-t és helyezzük őket rendre a 7, 9, 5 helyekre!

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | $C_c$ | 6 |
| $C_a$ | 8 | $C_b$ |

Nézzük először a 8-as helyet, azt pl. *a* és *b* egyértelműen meghatározza, mi kerül oda. Ugyanígy az 1-es helyen *b* és *c*-ből, valamint a 3-as helyen *a* és *c*-ből rögtön adódik a megfelelő harmadik kártyalap.

| | | |
|---|---|---|
| $C_{bc}$ | 2 | $C_{ac}$ |
| 4 | $C_c$ | 6 |
| $C_a$ | $C_{ab}$ | $C_b$ |

Most nézzük hogy a 2-es helyre mi való! Egyrészt $C_{(ab)c}$-vel együtt a 3 lap set kell, hogy legyen, másrészt $C_{(bc)(ac)}$-vel együtt is setnek kell lennie – a bűvös négyzet szabályainak megfelelően.

Lássuk be, hogy $C_{(ab)c}$ és $C_{(bc)(ac)}$ egyenlő!

$(bc)(c(ab))=(ac)$ (?)
$c(b(ab))=ac$ (iii., és i., miatt)
$c(a)=ac$ (iv., és i., miatt)
$ac=ac$ (i., miatt)

| | | |
|---|---|---|
| $C_{bc}$ | $C_{c(ab)}$ | $C_{ac}$ |
| 4 | $C_c$ | 6 |
| $C_a$ | $C_{ab}$ | $C_b$ |

Töltsük ki az eddig még üresen maradt 4-es és 6-os helyeket is! Ekkor a következő bűvös négyzetet kapjuk:

| | | |
|---|---|---|
| $C_{bc}$ | $C_{c(ab)}$ | $C_{ac}$ |
| $C_{a(bc)}$ | $C_{c}$ | $C_{b(ac)}$ |
| $C_{a}$ | $C_{ab}$ | $C_{b}$ |

Így az összes sor, oszlop és átló setet alkot. Most csak az bizonyítjuk, hogy 4, 5, 6 setet alkot, a többi hasonló módon belátható.

| | |
|---|---|
| $a(bc)c = b(ac)$ | (?) |
| $b(bc) = c$ | (iv., miatt) |
| $a(bc)(b(bc)) = b(ac)$ | ( $b(bc) = c$ helyettesítéssel) |
| $(bc)(ab) = b(ac)$ | (iii., miatt) |
| $(bc)(ba) = b(ac)$ | (i., miatt) |
| $b(ca) = b(ac)$ | (iii., miatt) |
| $b(ac) = b(ac)$ | (i., miatt) |

Ez kitölti az egész bűvös négyzetet, de 4 setet még nem ellenőriztünk: 1, 6, 8; 3, 4, 8; 7, 2, 6; 9, 2, 4-et. Ezek közül elég az egyiket megnézni, mivel 1, 3, 7, 9 helyeket rekonstruálni tudjuk más sorrendben is – ugyanazon kezdeti feltételek mellett – és ugyanaz a bűvös négyzet jön ki (elforgatva).

*Bizonyítsuk be, hogy 1, 6, 8 setet alkot!*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $C_{bc}$ | $C_{c(ab)}$ | $C_{ac}$ | (bc)(ab)=b(ac)(bc) |
| $C_{a(bc)}$ | $C_{c}$ | $C_{b(ac)}$ | (ba)=b(ac) |
| $C_{a}$ | $C_{ab}$ | $C_{b}$ | b(ac)=b(ac) |

*Bizonyítsuk be, hogy 3, 4, 8 setet alkot!*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $C_{bc}$ | $C_{c(ab)}$ | $C_{ac}$ | (ac(a(bc))=ab |
| $C_{a(bc)}$ | $C_{c}$ | $C_{b(ac)}$ | (a(c(bc))=(ab) |
| $C_{a}$ | $C_{ab}$ | $C_{b}$ | a(b)=ab |

*Bizonyítsuk be, hogy 2, 7, 6 setet alkot!*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $C_{bc}$ | $C_{c(ab)}$ | $C_{ac}$ | a(c(ab))=b(ac) |
| $C_{a(bc)}$ | $C_{c}$ | $C_{b(ac)}$ | b(ba)(c(ba))=b(ac) |
| $C_{a}$ | $C_{ab}$ | $C_{b}$ | (bc)(ba)=b(ac) |
| | | | b(ac)=b(ac) |

*Bizonyítsuk be, hogy 9, 2, 4 setet alkot!*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $C_{bc}$ | $C_{c(ab)}$ | $C_{ac}$ | $b(c(ab))=a(bc)$ |
| $C_{a(bc)}$ | $C_c$ | $C_{b(ac)}$ | $(a(ab))(c(ab))=a(bc)$ |
| $C_a$ | $C_{ab}$ | $C_b$ | $(ac)(ab)=a(bc)$ |
| | | | $a(bc)=a(bc)$ |

## 8. SET és statisztika[2]

A számunkra fontos adatok, információk kiemelése és rendszerezése szintén fontos terület, a középiskolás tananyag részét képezi. Ennek gyakorlására kiváló lehetőséget biztosít a set, ha az asztalról már felszedett (észlelt) seteket csoportosítani szeretnénk.

Kiadhatjuk a diákoknak egy újabb feladatként, hogy csoportosítsák az egyforma, illetve különböző tulajdonságokra nézve a talált seteket számuk szerint (, azaz hogy a 4 tulajdonság közül hány egyforma, hány különböző az adott setben és az így nyert csoportok közül melyikbe hány set került a játék során), majd ha ezzel készen vannak, játék végén pótolják ki a hiányzó kategóriákkal, amik a játék során nem kerültek elő. Ekkor az alábbiakat kapják:

*Megoldás:*

set-kategóriák:

<u>1 különböző:</u>

| különböző: | egyforma: |
|---|---|
| 1.) szín | alak, darabszám, telítettség |
| 2.) alak | szín, darabszám telítettség |
| 3.) darabszám | szín, alak, telítettség |
| 4.) telítettség | szín, alak, darabszám |

<u>2 különböző:</u>

| különböző: | egyforma: |
|---|---|
| 1.) szín, alak | darabszám, telítettség |
| 2.) szín, darabszám | alak, telítettség |
| 3.) szín, telítettség | alak, darabszám |
| 4.) alak, darabszám | szín, telítettség |
| 5.) alak, telítettség | szín, darabszám |

| | |
|---|---|
| 6.) darabszám, telítettség | szín, alak |

<u>3 különböző:</u>

| különböző: | egyforma: |
|---|---|
| 1.) alak, darabszám, telítettség | szín |
| 2.) szín, darabszám telítettség | alak |
| 3.) szín, alak, telítettség | darabszám |
| 4.) szín, alak, darabszám | telítettség |

<u>4 különböző:</u>

| különböző: | egyforma: |
|---|---|
| 1.) szín, alak, darabszám, telítettség | $\emptyset$ |

További *feladatok*, amiket meg lehet beszélni a játszma után:

a., Megtaláltuk-e mindegyik kategóriát? (Valóban 4 kategória van-e?) Az egyes kategóriákon belül megtaláltuk-e az összes esetet? (Mi ennek kiszámítási módja?) Az adott játék során melyik kategória hány százalékát tette ki a játék során előforduló összes seteknek a saját csoportban?

b., Nézzük meg több játékra is a statisztikát! (Könnyen észreveszik a diákok, hogy több esetet vizsgálva jobban hasonlítanak eredményeik a társaik által kapottakéhoz.)

c., Az egyes set-kategóriák hány setet tartalmaznak? Melyik a valószínűbb; hogy olyan setet találunk, amelyben a három lap 2 tulajdonságra nézve azonos, vagy olyat, amelyben 1 tulajdonság azonos, a másik 3 pedig különböző?
A setek hány százalékát teszik ki az egyes set-kategóriák (ha nem egy konkrét játékot nézünk, hanem az összes lehetséges setet egy pakliban)?

*Megoldás:*

| 0 egyforma tulajdonságú set | | |
|---|---|---|
| $(81\times 2^4):3!=216$ | $(216:1080)\times 100\rightarrow$ | 20% |
| 1 egyforma tulajdonságú set | | |
| $(81\times\binom{4}{1}\times 2^3):3!=432$ | $(432:1080)\times 100\rightarrow$ | 40% |
| 2 egyforma tulajdonságú set | | |
| $(81\times\binom{4}{2}\times 2^2):3!=324$ | $(324:1080)\times 100\rightarrow$ | 30% |
| 3 egyforma tulajdonságú set | | |
| $(81\times\binom{4}{3}\times 2):3!=108$ | $(108:1080)\times 100\rightarrow$ | 10% |

Annak valószínűsége, hogy 3 különböző tulajdonságú setet találunk; 0,4. Annak pedig, hogy 2 tulajdonságra nézve azonos a set; 0,3 a valószínűsége. Tehát valószínűbb, hogy 3 különböző tulajdonságú setet találunk.

## 9. *További kérdések*[2]

• *Hány set lehet az egész pakliban (visszatevéssel)?*

Mivel 2 lap már egyértelműen meghatározza a harmadikat, amivel setet alkot, ezért az a kérdés, hogy 81 kártyalapból hányféleképpen tudunk kiválasztani 2 lapot.

Ezt $\binom{81}{2}=3240$ féleképp tehetjük meg. Ekkor minden setet háromszor számoltunk. (Ha egy konkrét setet nézünk, akkor mindhárom kártyáját választjuk egyszer harmadikként.) Ezért a kapott részeredményt még el kell osztani hárommal, így $3240:3=1080$ set van az egész pakliban, ha egy lapot többször is felhasználhatunk.

*Másképp:*

Minden set 3 lapból áll. Elsőnek 81 kártyát választhatunk, másodiknak már csak 80-at, mert az előzőleg választott kártyát már nem vehetjük, harmadiknak pedig már csak 1-et választhatunk, mivel az előző 2 lap már egyértelműen meghatározza a harmadikat. Így $81\times 80\times 1=6480$-at kapunk. De egy set esetén mindegy, hogy a setet alkotó három kártya közül melyiket választottuk elsőnek, másodiknak illetve harmadiknak. Tehát, ha a választás sorrendjét nem vesszük figyelembe $6480:3!=1080$-at kapunk végeredményül.

• *Átlagosan hány setet tartalmaz véletlenszerűen kiválasztott 12 kártyalap?*

Annak a valószínűsége, hogy 2 laphoz olyan harmadikat húzzunk, mellyel együtt setet alkot, $1/79$, mert $81-2=79$ kártya közül csak egy olyan van, ami az előzőleg kiválasztott 2 lappal setet eredményez. 12 lapból 3-at pedig $\binom{12}{3}=220$ féleképp választhatunk ki, így átlagosan $1/79\times 220\approx 2,78$ setet tartalmaz véletlenszerűen kiválasztott 12 kártyalap.

• *A játék végén maradhat pontosan 3 kártya?*

Tekintsük az egész pakliban a figurák számát! 27 lapon van 1 figura, 27 lapon 2 figura és szintén 27-en 3 figura, azaz $1\times 27+2\times 27+3\times 27=162$ figura van összesen a csomagban.

Minden egyes alkalommal, ha setet találunk, vagy különbözőek a darabszámok, ekkor $1+2+3=6$ figura esik ki a játékból, vagy egyformák a darabszámok, ekkor pedig vagy 3 db 1 figurát tartalmazó, vagy 3 db 2 figurát, vagy 3 db 3 figurát tartalmazó kártya esik ki. Minden esetben osztható a játékból eltávolított kártyák száma 3-mal. Így a játékban maradt figurák számát a következőképp írhatjuk fel: 162-*k,* ahol *k* a játékból már kiesett figurák száma és $k\equiv 0 \pmod 3$. Így mivel $3|162$ és $3|k$, ezért $3|162-k$ is igaz, tehát az utolsó 3 lapon a figurák számának összege 3-mal osztható kell, hogy legyen, ami viszont csak úgy lehetséges, ha darabszámra nézve 3 egyforma, illetve 3 különböző kártyánk van. Tehát a darabszámra nézve a maradék 3 kártya setet alkot.

Ugyanez érvényes a másik 3 tulajdonságra is és végül azt kapjuk, hogy a 4 tulajdonság közül egyik sem „rontja el” a setet, tehát a maradék három kártya is setet alkot, így nem lehetséges, hogy a játék végén pontosan 3 kártya marad az asztalon.

• *Ha 2 tulajdonságot rögzítünk, hány kártyát tudunk kiválasztani úgy, hogy a 9 kártya között ne legyen set? Adjunk példát 4 kártyára! 5 kártyát ki lehet-e setmentesen választani?*

Vegyük a kártyáknak csak két tulajdonságát (mondjuk a színt és a darabszámot)! Ekkor a következő táblázatba foglalva tudjuk felírni őket (9.ábra):

| 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|
| | | | ovális |
| • | | | rombusz |
| | | | hullámos |

**9. ábra**

Láthatjuk, hogy a 3 kártya akkor alkot setet, ha a mátrixban egy vonalban; oszlopban, sorban, illetve átlóban helyezkedik el. (Beleértve az utolsó példát is, ahol oszlopcserék után szintén megkapjuk, hogy egy vonalra esik a 3 pont.)

*Példák* setre (10-13.ábra):

| 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|
| • | | | ovális |
| • | | | rombusz |
| • | | | hullámos |

**10.ábra**

| 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|
| | | | ovális |
| | | | rombusz |
| • | • | • | hullámos |

**11.ábra**

| 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|
| | | • | ovális |
| | • | | rombusz |
| • | | | hullámos |

**12.ábra**

| 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|
| | • | | ovális |
| | | • | rombusz |
| • | | | hullámos |

**13.ábra**

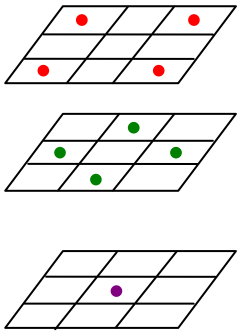
A következő mátrix (14.ábra) példát ad arra, hogy hány kis négyzetet tudunk kitölteni anélkül, hogy a fent említett módok egyikén se alkosson egy vonalat a 3 pont. (Hogy ennél több pont felvétele nem lehetséges, ld. később.)

| 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|
| • | | • | ovális |
| | | | rombusz |
| • | | • | hullámos |

**14.ábra**

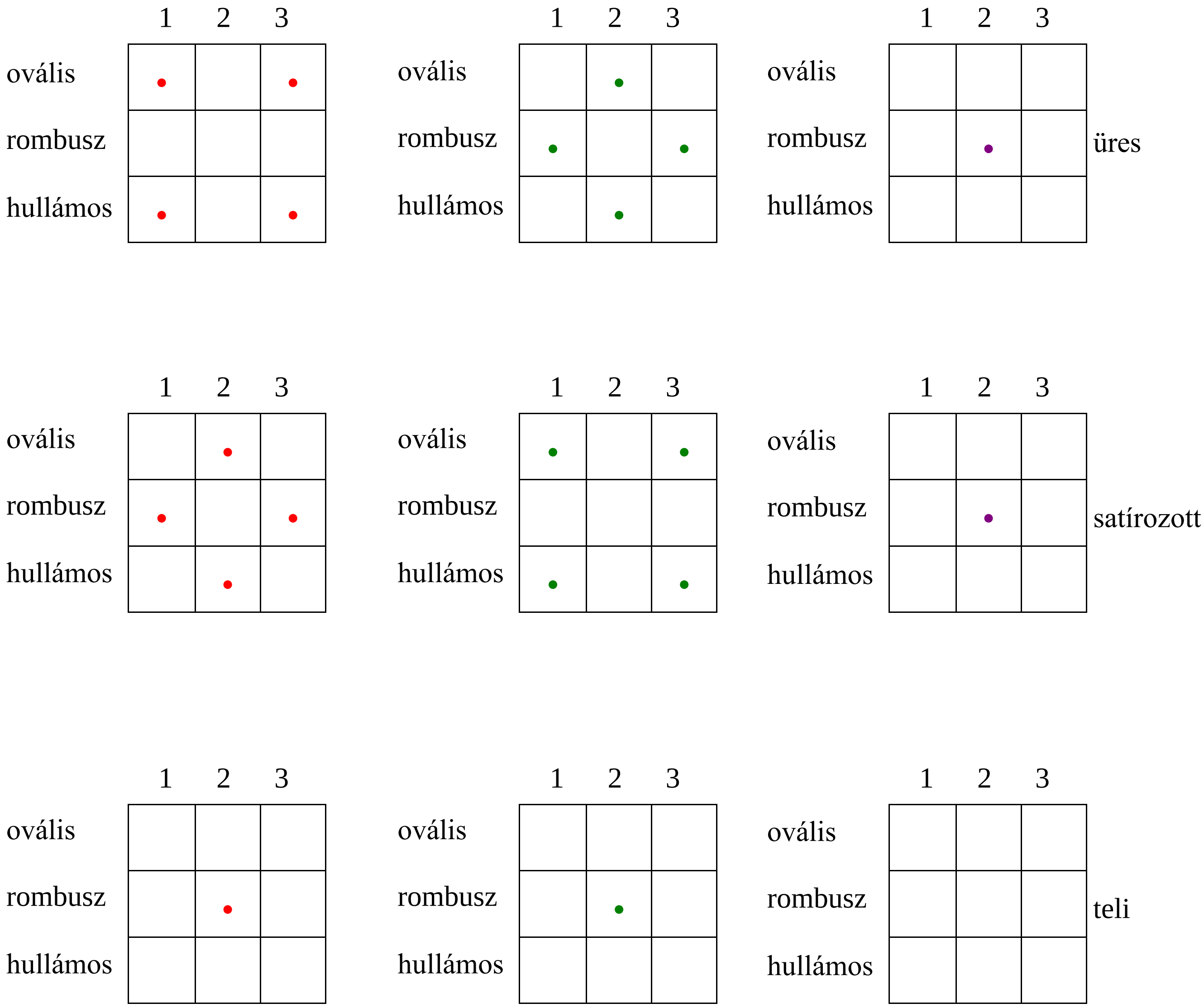
• *Három tulajdonságra nézve (,azaz ha egy tulajdonságot rögzítünk) ki lehet-e választani az így kapott 27 kártyából 9-et, hogy ne alkosson setet semelyik 3 lap?*
*És 10-et?*

Most hozzáadjuk a harmadik tulajdonságot, pl. a színt. Az alábbi 3 mátrixot pedig 3D-ben képzeljük el úgy, hogy a $3\times3$-as táblák rendre egymás alatt, egymással párhuzamosan helyezkedjenek el, ahogy a 15.ábra mutatja.



**15.ábra**

A 16.ábra is ezt mutatja be, de itt a síkokat egymás mellé helyezve ábrázoljuk:




**16.ábra**

• *Bizonyítsuk be, ha 2 tulajdonságot rögzítünk (pl. lila és üres), akkor az ilyen módon kiválasztott 9 db kártya közül akárhogy választunk ki 5-öt, mindig lesz benne set! (ld. az Állítás után)*[5]

• *Bizonyítsuk be, ha van 10 kártya, ami egy tulajdonságra nézve egyforma (pl. mind zöld), akkor mindenképp van benne set! (ld. az Állítás után)*[5]

**Állítás**[2]

21 kártya már biztosan tartalmaz setet.

**Bizonyítás**[1]6

Van a kérdésre egy szép geometriai válasz. Vegyünk egy három elemből álló nem-setet $F_3$ és tekintsük az $F_3^4$ vektorteret! Minden pont felírható az $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ alakban, ahol minden koordináta 1,2, vagy 3. Így minden kártya megfeleltethető egy számnégyesnek. Pl. a kettes lila teli hullámos kártya a $(2,1,3,2)$, és fordítva. Ezzel a megfeleltetéssel 3 kártya akkor és csak akkor alkot setet, ha kollineárisak.

Legyen $\alpha, \beta, \gamma$ $F_3$ három eleme. $\alpha+\beta+\gamma=0$ akkor és csak akkor, ha $\alpha=\beta=\gamma$, vagy $\{\alpha,\beta,\gamma\}=\{0,1,2\}$. Ez azt jelenti, hogy $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok (továbbiakban: *a*, *b*, és *c*) minden koordinátájukra nézve vagy azonosak, vagy különbözőek, tehát $a+b+c=0$. Ez azt jelenti $F_3^4$ felett, hogy $a-b=b-c$, így a 3 pont kollineáris. Vegyük észre, hogy ez az okoskodás igaz $F_3^d$ (bármely *d*)-re is!

Összegzés:

*affin kollineáris szabály:*

$F_3^d$-ben a 3 pont akkor és csak akkor kollineáris, ha $a+b+c=0$. Definiáljunk egy *d* részhalmazt $F_3^d$-ben, ami nem tartalmaz egyenest és a következőt kérdezzük;

*ekvivalens kérdés:*

Mi a részhalmaz maximális mérete $F_3^4$-ben? Ezt a kérdést számítógép nélkül először Giuseppe Pellegrino válaszolta meg 1971-ben. (Megj.: ez három évvel a set

[5] A két feladat [2]-ből származik, az általam közölt megoldást Benjamin Lent Davis és Diane Maclagan adta meg.

[6] A bizonyítást [1]-ben közlik (itt szintén szabad fordítás következik), az Állítással ekvivalens kérdést pedig Giuseppe Pellegrino válaszolta meg.

feltalálása előtt volt.) Ő valójában egy jóval általánosabb kérdést oldott meg, a „projektív set" kérdését.

*„projektív set":*

A set-kártyáknak négy tulajdonsága van, de ugyanúgy vizsgálhatjuk 3 tulajdonságra is (pl. csak a zöld kártyákat nézzük), vagy akár 5 tulajdonságra is (pl. illatosított kártyákkal játsszuk, három különböző illatanyaggal). Általában definiálhatunk egy *d* dimenziós affin set-játékot úgy, hogy minden kártyát egy $F_3^d$-beli pontnak feleltetünk meg egyértelműen, ahol egyazon sethez tartozik 3 kártya, ha a nekik megfelelő pontok kollineárisak. Egy halmaz maximálisan lehetséges méretét maximális halmaznak hívjuk. A maximális halmaz mérete *d*-től függ. Jelöljük ezt a számot $a_d$-vel, az ismert értékeket pedig az alábbi táblázat foglalja össze!

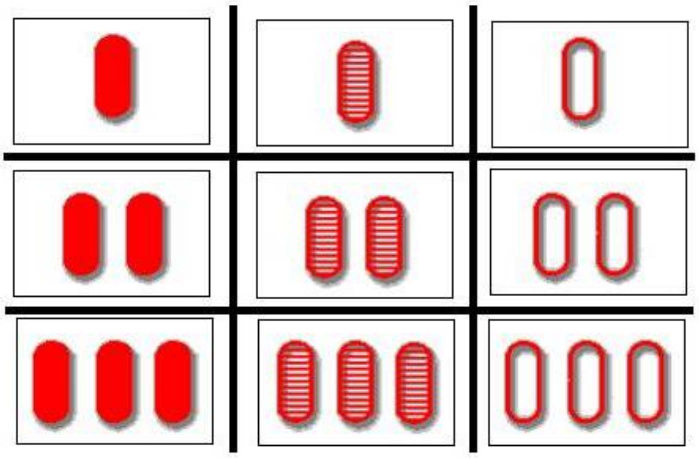
| ***d*** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***a<sub></sub>*** $a_d$ | 2 | 4 | 9 | 20 | 45 | $112 \leq a_6 \leq 114$ | ? |

$a_d$ maximális értékét 4 dimenzió fölött kimerítő számítógépkutatásokkal lehet megtalálni. Yves Edel, Sandy Ferret, Ivan Landjev és Loe Storme mostanában adott egy megoldást 5 dimenzióra.

Létezik néhány általánosítása a setnek. Pl. más formát, színt, telítettségi fokot, vagy darabszámot hozzá tudunk venni a már meglévőkhöz. Ha ilyen módon készítjük el a kártyákat, akkor a kártyalapoknak megfeleltetett pontok $F_4^4$-beliek. Néhány új lehetőséget is meg kell ekkor vizsgálnunk a set szabályaival kapcsolatban. Kártyák egy kollekciója akkor set, ha az összes tulajdonságra nézve vagy egyforma, vagy különböző, illetve ha a lapokat reprezentáló pontok kollineárisak. $(H,\{x,y\} \subset H \cap C)$-ben létezik 4 pont, ami egy egyenesre esik, így megkövetelhetjük, hogy 3, de azt is hogy 4 kollineáris pont feleljen meg egy setnek. Hogy leszűkítsük a kérdést, most csak $F_3^d$-ben vizsgálódunk.

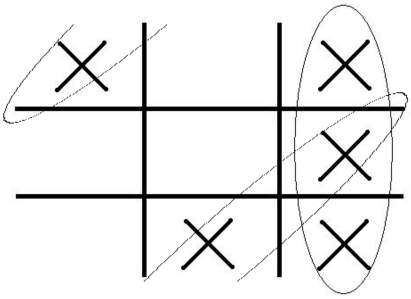
Be tudjuk bizonyítani grafikusan, a következő sémát használva. Tekintsük először a 2 dimenziós esetet, ahol $d = 2$. A set egy könnyített verziója, amikor csak 2 tulajdonságot veszünk figyelembe (pl. csak a piros ovális kártyákat nézzük).

Az $F_3^2$ vektorteret grafikusan egy $3\times3$-as tic-tac-toe táblával tudjuk szemléltetni. (ld. 17.ábra)[7]



**17.ábra**

Vegyük egy $S$ részhalmazát $F_3^2$-nek és a táblán jelöljük X-szel azokat a kártyákat, amelyeket tartalmazza $S$. Erre mutat egy példát a 18.ábra.

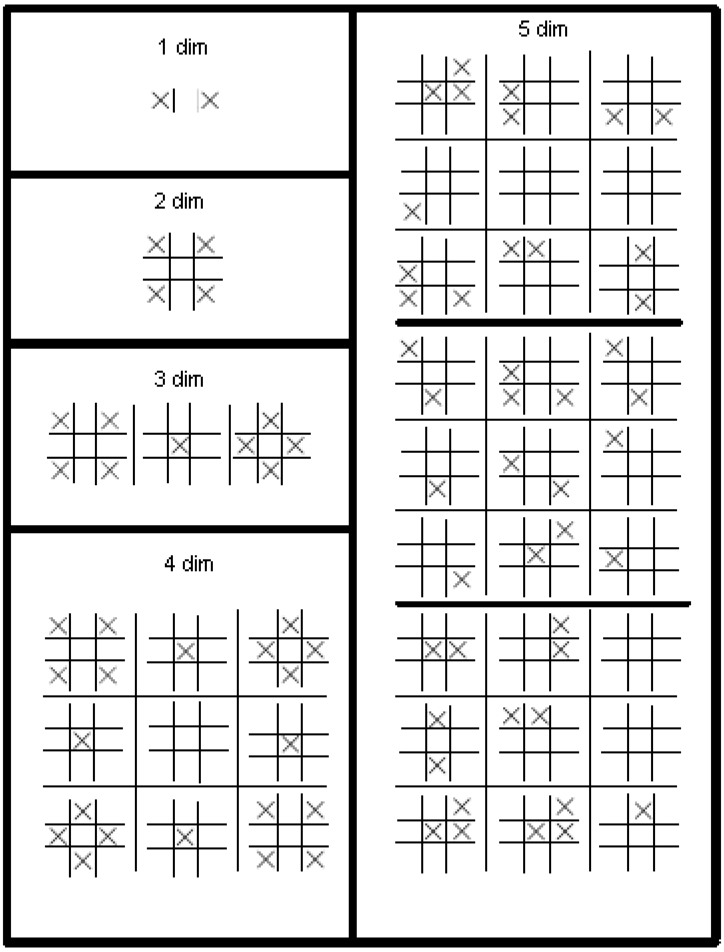


**18.ábra**

Néhány set függőlegesen, vízszintesen, vagy átlósan helyezkedik el (, mint a tic-tac-toe játék nyertesének X-ei), néhány viszont „körbe öleli” a táblát. (ld. 18.ábra)

A 19.ábra néhány alacsonyabb dimenziójú maximális set nélküli példát mutat.

[7] A 17-22.ábra az Irodalomjegyzékben szereplő[1]-ben jelent meg.

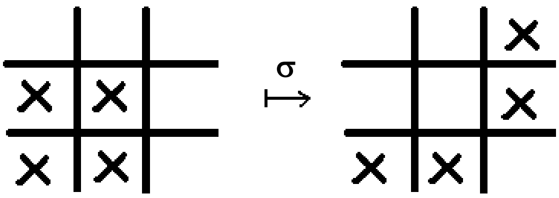



**19.ábra**

Nem csak a fenti megoldások léteznek, hanem ezek $F_3^d$-beli permutációi is új megoldásokat adnak. Az $F_3^d$-beli permutációk a 3 dimenziós nem-setet nem-setbe, pontosabban egyenest egyenesbe visznek és egy ilyen permutációt affin transzformációnak nevezünk. Egy másik leírása az affin transzformációknak, hogy olyan $F_3^d$-beli permutációk, melyre

$$\sigma(\upsilon) = A\upsilon + b,$$

ahol *A* egy $d \times d$-es invertálható mátrix $F_3$-beli elemekkel, *b* pedig $F_3^d$ egy tetszőleges vektora és $\upsilon \in F_3^d$ vektor. Azt mondjuk, hogy két nem-set hasonló típusú, ha létezik affin transzformáció, ami egyiket a másikba viszi. Például legyen az affin transzformáció $\sigma(x, y) = (-x - y, -x + y - 1)$ és $(x, y)$ vektor $\in F_3^2$. Egy 2 dim nem-setből másik 2 dim nem-set lett $\sigma$-t alkalmazva. Ezt mutatja a 20.ábra, ahol a középső négyzetet vesszük origónak.




**20.ábra**

Az már ismert, hogy 5 és magasabb dimenzió esetén egyetlen megoldás van. Ha egy affin transzformáció a nem-setet önmagába viszi, akkor azt szimmetrikus transzformációnak nevezzük. (Bár az ábráról nem nyilvánvaló, az 5 dim-nak van néhány szimmetriája. A szimmetriacsoportot arra használhatjuk, hogy lecsökkentsük a vizsgálandó esetek számát.)

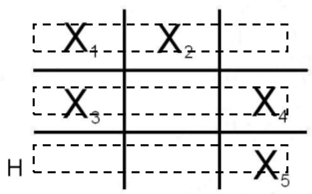
Az alábbiakban Donald Knuth set-elmélete következik, amelyre szintén szükség lesz az Állításunk belátásához.

**Tétel (1)**[1]

*2 dimenzióban legföljebb 4 pont található úgy, hogy semelyik 3 ne essen egy egyenesre.*

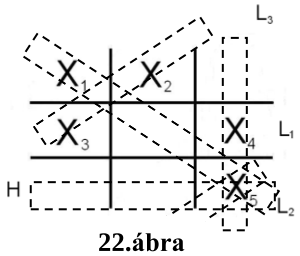
**Bizonyítás**

Indirekt módon bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy létezik 5 kollineáris pont 2 dimenzióban, $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$. Az $F_3^2$ síkot fel tudjuk bontani 3 párhuzamos vízszintes egyenes uniójára, ahogy a 21.ábra mutatja.




**21.ábra**

Minden egyenes legföljebb 2 pontot tartalmaz. Ezért van 2 vízszintes egyenes, ami 2 pontot tartalmaz és egy egyenes, *H*, amelyik pontosan egy pontot tartalmaz. Legyen ez a pont $x_5$. Pontosan 4 egyenes van a síkban, amelyik tartalmazza az $x_5$ pontot, ezeket jelöljük $H, L_1, L_2, L_3$-mal (22.ábra).



**22.ábra**

Míg a $H$ $x_1, x_2, x_3, x_4$ közül egyiket sem tartalmazza, addig a skatulya-elv miatt 2 ezek közül a pontok közül, $x_r$ és $x_s$ rajt kell, hogy legyen $L_i$-n. Így $L_i$ tartalmazza $x_r, x_s$ és $x_5$ pontokat, tehát van 3 kollineáris pont, ami ellentmond a feltevésünknek.□

Hasonló módszerrel számíthatjuk ki a maximális pontok számát 3 dimenzióban is.

**Tétel (2)**[1]

*3 dimenzióban maximálisan 9 pont van, hogy semelyik 3 nem esik egy egyenesre.*

**Bizonyítás**

A bizonyítás megint indirekt módon történik. Tegyük fel, hogy létezik 10 pont 3 dimenzióban, hogy semelyik 3 nem esik egy egyenesre. Az $F_3^3$ teret 3 párhuzamos síkra osztjuk. Mivel a sík metszetei a térrel 2 dimenziós alterek, ezért az előző bizonyítás értelmében nem lehet olyan 2 dimenziós altér, amely 4-nél több pontot tartalmaz. Ez azt jelenti, hogy a legkevesebb pontot tartalmazó sík 2, vagy 3 pontot tartalmaz, ha ez 4 pontot tartalmazna, akkor összesen 12 pontunk lehetne. Hívjuk ezt a síkot *H*-nak, 2 dim-ban legalább 7 pontunk van, $x_1, ..., x_7$, amely nem eleme *H*-nak. Legyen *a* és *b* *H*-nak két pontja. Pontosan 4 sík van $F_3^3$-ban, amely egyszerre tartalmazza *a* és *b* pontokat, ezeket jelöljük $H$, $M_1$, $M_2$, $M_3$-mal. Mivel *H* nem tartalmazza $x_1, ..., x_7$ pontokat a skatulya-elv miatt van egy olyan $M_i$, amelyik 3 pontot tartalmaz, ezeket jelöljük $x_r$, $x_s$, $x_t$-vel. Így $M_i$ összesen 5 pontot tartalmaz, ami ellentmond az előző tételnek [Tétel(1)].□

**Tétel (3)** [1]

*3 dimenzióban maximálisan 9 pont van, ami nem esik egy egyenesre.*

**Bizonyítás**

A bizonyítás megint indirekt módon történik. Feltesszük, hogy létezik egy 10 pontot tartalmazó $C$ altér a térben úgy, hogy közülük semelyik 3 nem esik egy egyenesre. Az $F_3^3$ teret 3 egymással párhuzamos sík uniójára $H_1$, $H_2$, $H_3$-ra osztjuk különböző módokon. Egy ilyen felosztásból adódik a következő számhármas:

$\{|C \cap H_1|, |C \cap H_2|, |C \cap H_3|\}$,

ezt nevezzük el „rendetlen” hipersík hármasnak. Mivel 2 dim-ban maximum 4 pont van $(a_2 = 4)$, így a lehetséges hipersík hármasok $\{4,4,2\}$ vagy $\{4,3,3\}$ lehetnek, más nem. Legyen

$a$ = a $\{4,4,2\}$-es hipersík hármasok száma,

$b$ = a $\{4,3,3\}$-as hipersík hármasok száma.

Hány különböző módon lehet felosztani $F_3^3$-at 3 különböző hipersík uniójára? Egyfelől létezik $a+b$ felosztás, másfelől vannak egyenesek, amelyek átmennek az $F_3^3$-beli origón és átdöfik az összes hipersíkot. Ezek számát a következőképpen kapjuk meg. Minden nem nulla pont meghatároz egy egyenest az origón át és a nem nulla pontok száma $3^3 - 1 = 26$. Mivel minden vonal 2 nem nulla pontot tartalmaz, így $26/2 = 13$ egyenes megy át az origón. Ezért $a + b = 13$.

Hogy $a$-ra és $b$-re további egyenleteket kapjunk, számoljuk meg hány 2 dimenziós sík van, amelyek a következő párokból állnak: $(H, \{x, y\} \subset H \cap C)$, ahol $H$ sík. Ellenőrizhetjük, hogy pontosan 4 sík van, amelyik tartalmazza a különböző pontpárokat. Van $4 \cdot \binom{10}{2} = 180$ (2 dim) sík. Másfelől minden $\{4,4,2\}$-es hipersík hármashoz $\binom{4}{2} + \binom{4}{2} + \binom{2}{2} = 13$ sík, és minden $\{4,3,3\}$-as hipersík hármashoz $\binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \binom{3}{2} = 12$ sík tartozik. Tehát

$$13a + 12b = 180.$$

Az egyedüli megoldása ennek a diofantikus egyenletnek $a = 24,\ b = -11$. Ezzel ellentmondásra jutottunk, mivel $a$ és $b$ nemnegatív.□

Az előző bizonyításban szükségünk volt arra, hogy összeszámoljuk a 2 előre lefixált pontot tartalmazó hipersíkokat. Hogy alkalmazhassuk ezt a módszert 4 dimenzió esetén is, szükségünk van arra, hogy megoldjuk a probléma általánosítását. Definiáljuk $k$-t egy vektortér $k$-dimenziós affin altereként.

**Tétel (4)** [1]

*A hipersíkok száma, amely tartalmaz egy lefixált $k$-as ponthalmazt $F_3^d$-ben, a következőképp adódik:*

$$\frac{3^{d-k}-1}{2}.$$

**Bizonyítás**

Legyen $K$ egy olyan $k$-as halmaz, amely tartalmazza az origót. Az

$$F_3^d \to F_3^d \mid K \cong F_3^{d-k}$$

hozzárendelés egy bijekciót ad $F_3^d$ azon hipersíkjai között, amelyek tartalmazzák $K$-t és $F_3^{d-k}$-k között, amelyek tartalmazzák az origót. Minden hipersíkot, ami tartalmazza az origót, egy nem nulla normálvektorral lehet leírni és pontosan 2 nem nulla normálvektor határoz meg egy hipersíkot. Ezért a nem nulla vektorok számát még el kell osztani 2-vel. Így $3^{d-k}-1$ nem nulla vektor van, ezért $(3^{d-k}-1)/2$ hipersík tartalmazza az origót.

Most alkalmazzuk a Tétel (3)-at $a_4$ kiszámítására!

**Tétel (5)** [1]

*Maximálisan 20 pont választható ki 4 dimenzióban úgy, hogy semelyik 3 ne essen egy egyenesre.*

**Bizonyítás**

A bizonyítás indirekt módon történik. Tegyük fel, hogy létezik 21 pont $\in C$, ami megfelel a kritériumnak. Legyen $x_{ijk}$ az $\{i,j,k\}$ hipersík hármasainak száma $C$-ben. Mivel a 3 dimenziós esetben $a_3 = 9$ pont, ezért csak 7 lehetséges hipersík hármas van: $\{i,j,k\} = \{9,9,3\}$, $\{9,8,4\}$, $\{9,7,5\}$, $\{9,6,6\}$, $\{8,8,5\}$, $\{8,8,7\}$, $\{7,7,7\}$.

A lehetőségek száma, ahányféleképp három párhuzamos hipersík uniójára oszthatjuk $F_3^4$-et, egyenlő az origón át húzható egyenesek számával $F_3^4$-ben, azaz $(3^4-1)/2 = 40$.

$$(1) \qquad x_{993} + x_{984} + x_{975} + x_{966} + x_{885} + x_{876} + x_{777} = 40.$$

Hogy más egyenletet is kapjunk $x_{ijk}$-ra, számoljuk meg, hány különböző, két lefixált pontot tartalmazó hipersík van, amelyek a $(H,\{x,y\} \subset H \cap C)$ párokból állnak, ahol $H$ hipersík. Felhasználva a Tétel (4)-et azt kapjuk, hogy az egy rögzített pontpárt tartalmazó hipersíkok száma 13. Így $13 \cdot \binom{21}{2} = 2730$ db 2 pontot tartalmazó hipersík van. A Tétel (3) szerint

$$\left[\binom{9}{2}+\binom{9}{2}+\binom{3}{2}\right]x_{993} + \ldots + \left[\binom{7}{2}+\binom{7}{2}+\binom{7}{2}\right]x_{777}$$

2 pontot tartalmazó hipersík van. Kiszámolva az összes együtthatót, a következő formulát kapjuk

$$(2) \qquad 75x_{993} + 70x_{984} + 67x_{975} + 66x_{966} + 66x_{885} + 64x_{876} + 63x_{777} = 2730.$$

Hogy még egy újabb egyenletet kapjunk $x_{ijk}$-ra, számoljuk össze, hány olyan 3 pontot tartalmazó hipersík van, amelyikre $(H,\{x,y,z\} \subset H \cap C)$, ahol $H$ hipersík. $(x,y,z) \subset C$ és $x$, $y$ és $z$ nem kollineáris. 4 hipersík van, ami tartalmaz 3 különböző, nem kollineáris pontot, így $4 \cdot \binom{21}{3} = 5320$ db 3 pontot tartalmazó hipersík van összesen. A két pontos hipersíkhoz hasonló számítással a következőt kapjuk:

$$(3) \qquad 169x_{993} + 144x_{984} + 129x_{975} + 124x_{966} + 122x_{885} + 111x_{876} + 105x_{777} = 5320.$$

Így van 3 egyenletünk 7 változóra, így általában végtelen megoldásunk lehet. Szerencsére minket csak a nemnegatív megoldások érdekelnek. Az (1) egyenlet 693-

szorosát adjuk hozzá a (3) egyenlet 3-szorosához, majd vonjuk ki a (2) egyenlet 16-szorosát[8]! Így a következő adódik:

$$5x_{984} + 8x_{975} + 9x_{966} + 3x_{885} + 2x_{876} = 0.$$

Az egyetlen nemnegatív megoldása az egyenletnek, ha

$$5x_{984} = 8x_{975} = 9x_{966} = 3x_{885} = 2x_{876} = 0.$$

De a (2) egyenletből kivonva az (1) egyenlet 63-szorosát

$$12x_{993} + 7x_{984} + 4x_{975} + 3x_{966} + 3x_{885} + x_{876} = 210.$$

Ebből azt kapjuk, hogy $12x_{993} = 210$, így ellentmondásra jutottunk, mivel $x_{993}$ egész szám kell, hogy legyen.□

A set a gyerekek körében (is) nagy mennyiségű érdekes kérdést vet föl minden szinten, így a diákok játszva sajátíthatják el a kombinatorika alapjait. A tanulóknak fejlődik a matematikai látásmódjuk, érvelésmódjuk a játék során – mindez észrevétlenül, azért, hogy fejlesszék játékstratégiájukat. A kártya azt a célt is szolgálja, hogy a tanulóknak fejlessze az absztrakt gondolkodását. A játék kitűnő környezetet teremt a problémamegoldásra és a deduktív okfejtésre a diszkrét matematika területén, amelyre a diákoknak szükség van a középiskolai tanagyag elsajátítása során (is).[2]

[8] Javítás: itt az eredeti cikkben, [1]-ben 6-szoros szorzó szerepel a 16 helyett.

# Irodalomjegyzék

[1] Benjamin Lent Davis, Diane Maclagan: The Card Game SET!, The Mathematical Intelligencer, Volume 25, Number 3, 2003., ISSN: 0343-6993

[2] http://www.setgame.com/

[3] Falco, Marsha. (1988). SET® : The Family Game of Visual Perception. Fountain Hills, AZ: Set
Enterprises, Inc.
National Council of Teachers of Mathematics. (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics . Reston, VA: NCTM.

[4] http://2n1.org/applets/set/

[5] www.nytimes.com/set