Vereszky Pál Péter

Matematika alapszak, tanári szakirány

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Matematikai Intézet

A hiperboloidmodell

Szakdolgozat

Témavezető: Moussong Gábor

Geometria Tanszék

2010.

Tartalom

Bevezetés

A dolgozat célja a hiperbolikus síkgeometria hiperboloid modelljének bemutatása az alapvető struktúrától a ciklusokig, mely modell nem része a szokásos tanári tananyagnak.

Ebben a modellben jól alkalmazhatók a lineáris algebra eszközei, hatékony apparátust adnak a fogalmak bevezetéséhez és tételek bizonyításához. Az így bevezetett fogalmak és tételek akár konkrét számolásokhoz is könnyen használhatók.

A dolgozat a Bsc-s geometria (beleértve a hiperbolikus geometria Cayley-Klein-modelljét) és algebra tananyagra épít.

A dolgozat első részében a modell bevezetéséhez szükséges eszközök rövid algebrai előkészítését adjuk a szimmetrikus bilineáris függvényekről. A második részben bevezetjük a modellt mint geometriai struktúrát, definiáljuk az alapfogalmakat, bemutatjuk ezek alapvető geometriai és algebrai jellemzőit, végül bebizonyítjuk az izomorfiát a hiperboloid- és a Cayley-Klein-modell között. A harmadik részben a modellt mint hiperbolikus síkot tekintve mutatjuk be az egyenesek egymáshoz való viszonyát, a sugársorokat és a ciklusokat.

1. Szimmetrikus bilineáris függvények

Vegyünk egy V valós vektorteret. Definiálunk rajta egy $B: V \times V \to \mathbb{R}$ szimmetrikus bilineáris függvényt, vagyis minden $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ vektorra, és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ skalárra

$$B(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \alpha B(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \beta B(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$
$$B(\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) = \alpha B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \beta B(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \text{ és}$$
$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = B(\mathbf{v}, \mathbf{u})$$

Bár az itt elmondottakat csak 3 dimenzióra fogjuk alkalmazni, a definíciók és tulajdonságok általánosak, úgyhogy tegyük fel, hogy $\dim V = n$, ahol n tetszőleges természetes szám.
A szimmetrikus bilineáris függvényeknél meghatározó szereppel bírnak az elemek önmagukkal vett képei. Ezt a $q: V \times V \to \mathbb{R}$, $q(\mathbf{u}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ függvényt B kvadratikus alakjának nevezzük.
Ha minden $\mathbf{u} \in V$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ vektorra $q(\mathbf{u}) > 0$, akkor B-t pozitív, ha $q(\mathbf{u}) < 0$, akkor negatív definitnek nevezzük. Ha az egyenlőség is megengedett, vagyis $q(\mathbf{u}) \geq 0$ vagy $q(\mathbf{u}) \leq 0$, akkor B pozitív, illetve negatív szemidefinit. Ha van olyan $\mathbf{u}$, hogy $q(\mathbf{u}) > 0$, és van olyan $\mathbf{v}$, hogy $q(\mathbf{v}) < 0$, akkor B-t indefinitnek nevezzük.
Ha létezik olyan $\mathbf{u} \in V$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ vektor, melyre minden $\mathbf{v} \in V$ vektorra $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$, akkor B-t elfajulónak nevezzük.
Mivel az euklideszi skaláris szorzás egy pozitív definit bilineáris függvény, az egyszerűség kedvéért önkényesen általánosítunk néhány, a skaláris szorzással kapcsolatos elnevezést: egy B bilineáris függvény $B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ képét $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ (B szerinti) skaláris szorzatának fogjuk hívni, ha $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$, akkor $\mathbf{u}$-t és $\mathbf{v}$-t (B-re nézve) merőlegesnek fogjuk nevezni.

Egy $\mathbf{u}$ vektorra merőleges vektorok $\mathbf{u}^{\perp} = \{\mathbf{v} \in V : B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0\}$ alteret alkotnak V-ben. Rögzített $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ vektor mellett a $\varphi_{\mathbf{u}}: \mathbf{v} \in V \to B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}$ leképezés lineáris. Ennek magja pont $\mathbf{u}^{\perp}$. Képe $\{0\}$, ha **u** olyan, hogy minden **v**-re $B(\mathbf{u},\mathbf{v})=0$, egyébként $\mathbb{R}$. A dimenzió tétel alapján:

$$\dim \operatorname{Ker}\varphi_{\mathbf{u}} + \dim \operatorname{Im}\varphi_{\mathbf{u}} = \dim V, \text{ vagyis}$$
$$\dim \mathbf{u}^{\perp} + (0 \text{ vagy } 1) = n$$

tehát $\dim \mathbf{u}^{\perp} = n$ vagy $\dim \mathbf{u}^{\perp} = n-1$. Ha B nem elfajuló, vagyis ha nincs olyan nemnulla **u**, hogy $\operatorname{Im}\varphi_{\mathbf{u}} \cong \{0\}$, akkor $\dim \mathbf{u}^{\perp} = n-1$, minden nemnulla $\mathbf{u} \in V$-re.

Legyen $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \ldots, \mathbf{b_n} \in V$ bázis. Ekkor egy szimmetrikus bilineáris függvényhez egyértelműen hozzárendelhetünk egy mátrixot a következő módon:

$$M_B = \begin{pmatrix} B(\mathbf{b_1},\mathbf{b_1}) & B(\mathbf{b_2},\mathbf{b_1}) & \cdots & B(\mathbf{b_n},\mathbf{b_1}) \\ B(\mathbf{b_1},\mathbf{b_2}) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ B(\mathbf{b_1},\mathbf{b_n}) & \cdots & \cdots & B(\mathbf{b_n},\mathbf{b_n}) \end{pmatrix}, \text{ vagyis}$$

a mátrix *i.* oszlopának *j.* sorában $B(\mathbf{b_i},\mathbf{b_j})$ áll. A bilineáris függvény szimmetriája miatt a mátrix is szimmetrikus.
Megjegyezzük, hogy – rögzített bázis mellett – bármely $n \times n$-es szimmetrikus mátrix előáll ilyen módon, tehát bijektív kapcsolat van a szimmetrikus bilineáris függvények és a szimmetrikus mátrixok között.

Egy $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_k} \in \mathbb{R}^n$ vektorrendszert *B*-ortogonálisnak nevezünk, ha minden $i \neq j$-re $B(\mathbf{v_i},\mathbf{v_j})=0$. Ezzel kapcsolatban kimondunk egy tételt, amit nem bizonyítunk[1], de fontos lesz a későbbiekben:

Diagonalizálhatósági tétel. Bármely szimmetrikus bilineáris függvényhez létezik ortogonális bázis. Ha egy nemnulla skalárnégyzetű vektorokból álló vektorrendszer ortogonális egy nem elfajuló szimmetrikus bilineáris függvényre nézve, akkor ez egy lineárisan független rendszer, és kiegészíthető ortogonális bázissá.

Fontos a tételnél, hogy nem elég kikötni, hogy a vektorok nemnullák, az is kell, hogy nemnulla skalárnégyzetűek, ugyanis lehetségesek olyan vektorok, melyek önmagukra

[1] A tétel és bizonyítása megtalálható Freud Róbert: Lineáris Algebra (ELTE Eötvös Kiadó, 2006) c. tankönyvében (201. oldal, 7.2.3. Tétel).

merőlegesek. Ha ilyenből választanánk egyet, és mondjuk egy skalárszorosát, akkor ortogonális, de nem lineárisan független rendszert kapnánk.

Könnyen látható, hogy ha egy V-beli $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \ldots, \mathbf{b_n}$ bázis B-ortogonális, akkor M_B diagonális lesz. Nyilvánvaló továbbá, hogy ebben az esetben B pontosan akkor

pozitív definit, ha minden diagonális elem pozitív,

negatív definit, ha minden diagonális elem negatív,

pozitív illetve negatív szemidefinit, ha a diagonális elemek nemnegatívak illetve nem pozitívak,

indefinit, ha van pozitív és negatív elem is,

elfajuló, ha van 0 elem, tehát $\det M_B = 0$.

Egy szimmetrikus bilineáris függvényhez definiáltuk a hozzá tartozó kvadratikus alakot. Azonban egy kvadratikus alak is egyértelműen meghatározza a hozzá tartozó függvényt, hiszen ha $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$-nél $B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = q(\mathbf{u})$, akkor

$$q(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = B(\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + 2B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{v}, \mathbf{v}).$$

De $B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = q(\mathbf{u})$, és $B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = q(\mathbf{v})$, tehát

$$\mathrm{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}\big(q(\mathbf{u}+\mathbf{v}) - q(\mathbf{u}) - q(\mathbf{v})\big).$$

Látható, hogy a két fogalom közül mindegy, hogy melyiket használjuk, így a B-re értelmezett fogalmakat q-ra is átvezethetjük.
Kimondunk még egy fontos tételt a szimmetrikus bilineáris függvényekről, a bizonyítástól most is eltekintünk[2].

Sylvester-tétel. Ha egy szimmetrikus bilineáris függvény egy rá nézve ortogonális bázisra vonatkozó mátrixában

α darab pozitív,

β darab negatív,

γ darab 0 diagonális elem van,

akkor bármely más ortogonális bázisban felírva is ezek az α, β, γ értékek fognak szerepelni.

[2] A tétel és bizonyítása megtalálható Freud Róbert: Lineáris Algebra (ELTE Eötvös Kiadó, 2006) c. tankönyvében (208. oldal, 7.2.6. Tétel).

2. A modell bevezetése

2.1. A befoglaló tér

Vegyünk egy 3 dimenziós, valós V vektorteret. Vezessünk be rajta egy nem elfajuló kvadratikus alakot. Megvizsgálható, hogy ha pozitív definit kvadratikus alakot veszünk, akkor az euklideszi térrel izomorf teret kapunk, és a bilineáris függvényünk a szokásos skaláris szorzással lesz izomorf. Mivel a negatív definit kvadratikus alak egy pozitív definit -1-szerese, ezért nincs lényeges geometriai különbség a két eset között. Ha azonban egy indefinit kvadratikus alakot vezetünk be, akkor az euklideszitől geometriailag is gyökeresen különböző teret kapunk.

Vegyünk fel V-ben egy bázist. Innentől fogva beszélhetünk $\mathbb{R}^3$-ról, és a standard bázisról, hiszen ezzel lesz izomorf a vektorterünk.

Lássuk el $\mathbb{R}^3$-at azzal a q kvadratikus alakkal, melynél egy $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ vektorra $q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$. A továbbiakban az ehhez a kvadratikus alakhoz tartozó $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$ szimmetrikus bilineáris függvény által adott értéket fogjuk $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ skaláris szorzatának nevezni, és $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$-nal fogjuk jelölni.

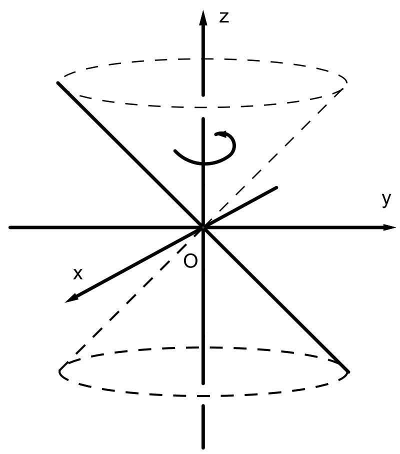
A függvény mátrixa a szokásos bázisban

$$M_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ lesz.}$$

Megjegyezzük azonban, hogy – bár nem euklideszi térről van szó – sokszor az euklideszi térben ismert és felépített fogalmakkal is fogunk dolgozni a szemléletesség, az ábrázolhatóság, néhol az egyszerűbb bizonyítás érdekében. Ez azért lehetséges, mert $\mathbb{R}^3$ a hozzárendelt kvadratikus alaktól természetesen nem változik meg, csak az $\mathbb{R}^3$ elemeihez és alakzataihoz rendelt értékek lesznek mások.

Vizsgáljunk meg néhány szembeszökő különbséget a szokásos euklideszi térhez képest. A szokásos bázisvektorok itt is ortogonális bázist alkotnak, de például az $(1,1,1)$ itt merőleges $(1,0,1)$-re. Továbbá léteznek olyan nemnulla vektorok, melyek önmagukra merőlegesek, például az $\left(1,1,\sqrt{2}\right)$. Ezeket a vektorokat (melyeknek a skalárnégyzete 0) izotróp vektoroknak nevezzük.

Vegyük az xz síkban azt az egyenest, mely x-szel és z-vel $\pi/4$ szöget zár be. Ha megforgatjuk ezt az egyenest a z tengely körül, akkor egy kúpfelületet söpör. Itt is érvényes a fenti megjegyzés, hiszen a tengelyekkel bezárt szög és a forgatás most euklideszi értelemben értendők.



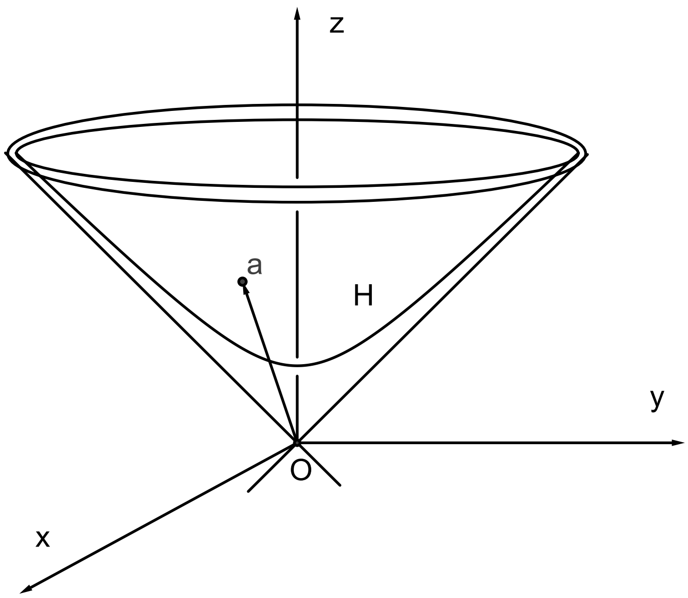
Az izotróp vektorok ezen forgáskúpfelület pontjaiba mutatnak, hiszen a $q(\mathbf{v}) = v_1^2 + v_2^2 - v_3^2 = 0$ egyenlet pontosan ezt a kúpot írja le. Mivel B nem elfajuló, minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ nemnulla vektorra $\mathbf{x}^\perp$ kétdimenziós altér, vagyis sík. Azokra a $\mathbf{v}$ vektorokra, és csakis azokra, melyek a fenti kúp pontjaiba mutatnak (vagyis $q(\mathbf{v}) = 0$) igaz, hogy $\mathbf{v} \in \mathbf{v}^\perp$.

A szokásos (pozitív definit) skaláris szorzással ellátott euklideszi térben természetes, hogy minden vektort lehet normálni. Itt ez nem így van, mert például az $e_3(0,0,1)$ bázisvektor hosszára a $\sqrt{q(e_3)} = \sqrt{-1} = i \in \mathbb{C}$ képzetes értéket kapnánk. Ez nem azt jelenti, hogy a normálás fogalmát ki kell zárnunk ebből a térből, de az értelmezési tartományát le kell szűkítenünk.

Az egységhosszúságú vektorok nem az euklideszi térben megszokott gömbfelület pontjaiba mutatnak, hanem (újból euklideszi értelemben) egy x valós tengelyű és z képzetes tengelyű hiperbola z tengely körüli megforgatásából adódó egyköpenyű hiperboloid pontjaiba, mivel a $q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$ egyenlet ezt a felületet határozza meg. Tehát az „egységgömb” itt nem egy korlátos felület lesz.

2.2. A modell alaphalmaza

Tekintsük a $H\colon x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1$ egyenletű felületet. Ez a felület egy kétköpenyű hiperboloid, melynek képzetes tengelye *x*, valós- és forgástengelye a *z* tengely, középpontja az origó, aszimptotikus kúpja a fenti, $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ egyenletű kúp. Ha kikötjük, hogy $z > 0$, akkor csak a felső köpeny marad. Ezen félhiperboloid pontjai alkotják a modellünket. Tehát $\mathbf{a} \in H \Leftrightarrow q(\mathbf{a}) = -1$ és $a_3 > 0$.



1. ábra A hiperboloid és az aszimptotikus kúp

Állítás: Legyen $\mathbf{a} \in H$. Ekkor $\mathbf{a}^{\perp}$ $T_{\mathbf{a}}H$ eltoltja, ahol $T_{\mathbf{a}}H$ a H félhiperboloid **a**-beli érintősíkja.

Bizonyítás: Tudjuk, hogy minden $\mathbf{a} \in H$-ra $a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 = -1$. Ez felfogható az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 1$ függvény zéróhalmazaként. Itt az egyszerűbb bizonyítás érdekében visszaugrunk az euklideszi fogalmakhoz, és felhasználjuk *f* **a**-beli érintősíkjának normálvektorát (tehát az érintősíkra euklideszi értelemben merőleges vektort): $\operatorname{grad} f(\mathbf{a}) = (2a_1, 2a_2, -2a_3)$. Ebből szintén az euklideszi tudásunk alapján kapjuk az érintősík egyenletét:

$$a_1x_1 + a_2x_2 - a_3x_3 = a_1^2 + a_2^2 - a_3^2$$

Mivel $\mathbf{a} \in H$, a jobb oldal -1-gyel egyenlő, vagyis

$$a_1x_1 + a_2x_2 - a_3x_3 = -1 .$$

$\mathbf{a}^\perp$-be azon $\mathbf{v}$ vektorok tartoznak, melyekre $B(\mathbf{a}, \mathbf{v}) = 0$, vagyis

$$a_1v_1 + a_2v_2 - a_3v_3 = 0 .$$

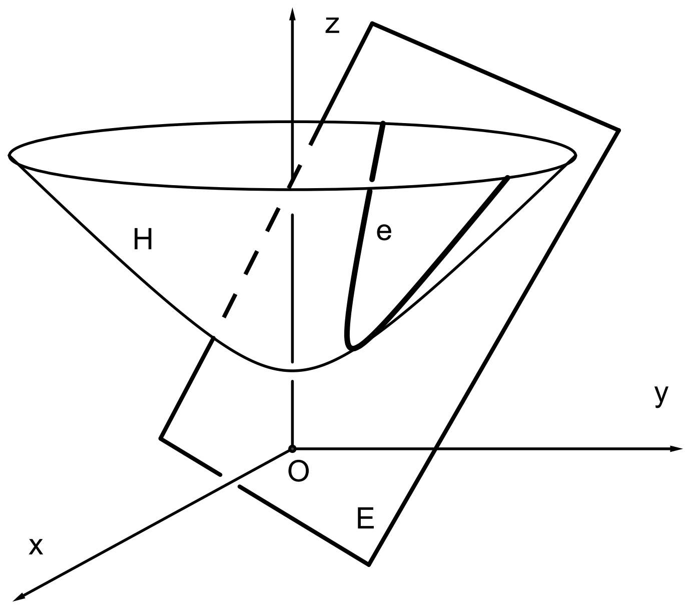
Ez valóban párhuzamos az érintősíkkal.

Mostantól az $\mathbf{a} \in H$-hoz tartozó $T_\mathbf{a}H$ érintősíkot azonosnak tekintjük ($-\mathbf{a}$-val való eltolás által) $\mathbf{a}^\perp$-sel. Ennek a megállapodásnak az az előnye, hogy az érintősíkot két dimenziós altérként kezelhetjük.

A Sylvester-tétel értelmében M_B diagonális elemeinek előjelei állandó számban szerepelnek bármely ortogonális bázisban felírva. Mivel minden $\mathbf{a} \in H$-ra $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = -1$ és $\mathbf{a} \notin \mathbf{a}^\perp$, ezért $\mathbf{a}^\perp$ pozitív definit skaláris szorzást örököl. Vagyis mivel a mi kvadratikus alakunk bármely ortogonális bázisában két pozitív és egy negatív skalárnégyzetű elem van, és ebből az ortogonális bázisból leválasztjuk a negatív skalárnégyzetű vektort, akkor a maradék két vektor egy két dimenziós teret határoz meg, amire leszűkítve a kvadratikus alakot ennek (diagonális) mátrixa már csak pozitív elemeket fog tartalmazni, vagyis az euklideszivel izomorf módon fog viselkedni. Ami számunkra fontos: egy ilyen pozitív definit altérben biztosan lehetséges normálni, illetve szöget definiálni a szokásos koszinuszos formulával.

2.3. Egyenesek

Vegyük azokat az origón átmenő síkokat, melyek belemetszenek a hiperboloidba. Egy ilyen E sík H-val vett metszetét fogjuk modellbeli e egyenesnek nevezni.



2. ábra Modellbeli egyenes

A hiperboloid síkmetszetei másodrendű görbék, az origón átmenő síkokkal vett nemüres metszetek két részből állnak, és nem elfajulók, ezért ezek hiperbolák. A H-val vett metszetek tehát hiperbolaágak. Megjegyezzük, hogy bármely két különböző modellbeli pontra egy és csak egy modellbeli egyenes állítható, amely a két pont helyvektora által kifeszített sík és a félhiperboloid metszete.

Egy modellbeli egyenest egyértelműen meghatározhatunk egy $\mathbf{a}$ pontjával, és egy $\mathbf{a}$ pontban felvett $\mathbf{v} \in \mathbf{a}^{\perp}$ érintővektorával, amit irányvektornak is nevezhetünk.

Mivel $q(\mathbf{a}) = -1$ (mert modellbeli pont), ezért $\mathbf{a} \notin \mathbf{a}^{\perp}$, mert ha $\mathbf{a}$ eleme lenne $\mathbf{a}^{\perp}$-nek, akkor $q(\mathbf{a}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 0$ lenne.

Emiatt $\mathbf{a}^{\perp}$ és E egy origón átmenő egyenesben metszik egymást. Tehát $\mathbf{a}^{\perp}$-nek egyetlen olyan egyenese van, mely része E-nek, vagyis E felfogható $\mathbf{a}$ és egy erre az egyenesre illeszkedő $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{a}^{\perp}$ vektor által kifeszített síkként. Így ha adott egy **a** modellbeli pont, akkor bármely $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{a}}H$ irányában húzható egyenes (**a** és **v** lineárisan függetlenek, így bázist alkotnak), és csak egy egyenes húzható.

Két egyenes hajlásszögén az **m** metszéspontbeli **u** és **v** érintővektorok, vagy **u** és $-\mathbf{v}$ szögét értjük aszerint, hogy a szög legfeljebb $\pi/2$ legyen. Ezt megtehetjük, hiszen $\mathbf{m}^{\perp}$ pozitív definit kvadratikus alakot örököl.

2.4. Egyenesek paraméterezése

Az $e \subset H$ egyenest az $\mathbf{a} \in e$ ponttal és egy $\mathbf{v} \in \mathbf{a}^{\perp}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ vektorral határozhatunk meg. Az érintősíknál leírtak szerint **v**-t egységvektornak is választhatjuk (mert ha nem az, normáljuk).

Állítás: Legyen $\mathbf{a} \in H$, $\mathbf{v} \in \mathbf{a}^{\perp}$, $|\mathbf{v}| = 1$. Ekkor az **a**-n átmenő, **v** irányvektorú *e* modellbeli egyenes egy paraméterezése

$$\mathbf{r}(t) = (\operatorname{ch} t)\mathbf{a} + (\operatorname{sh} t)\mathbf{v}.$$

Bizonyítás: Mivel a modellbeli egyeneseket egy origón átmenő sík és a félhiperboloid metszeteként definiáltuk, azt kell megvizsgálnunk, hogy ez a görbe egyrészt része-e ennek a síknak, másrészt része-e a félhiperboloidnak, valamint hogy a metszet összes pontját tartalmazza-e.

Az *e*-hez tartozó *E* sík pont az **a** és **v** által kifeszített sík, $(\operatorname{ch} t)\mathbf{a} + (\operatorname{sh} t)\mathbf{v}$ pedig ezek lineáris kombinációja, vagyis a görbe benne lesz *E*-ben.

Ahhoz, hogy ellenőrizzük, hogy $\mathbf{r}(t)$ a modellben fut-e, a kvadratikus alakot kell megvizsgálni:

$$\begin{aligned} q(\mathbf{r}(t)) &= \langle (\operatorname{ch} t)\mathbf{a} + (\operatorname{sh} t)\mathbf{v}, (\operatorname{ch} t)\mathbf{a} + (\operatorname{sh} t)\mathbf{v} \rangle = \\ &= (\operatorname{ch}^2 t)\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + (\operatorname{sh}^2 t)\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = (\operatorname{sh}^2 t) - (\operatorname{ch}^2 t) = -1, \end{aligned}$$

hiszen $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = -1$, mert $\mathbf{a} \in H$, és $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 1$, mert $|\mathbf{v}| = 1$.

Tehát $\mathbf{r}(t)$ olyan pontokból áll, melyeken a kvadratikus alak értéke -1, így $\mathbf{r}(t) \subset H$.

Mivel az sh függvény értékkészlete $\mathbb{R}$, ezért minden valós szám előáll **v**-koordinátaként, így a hiperbolaág minden pontja szerepelni fog a görbén.

2.5. Távolság

A modellbeli pontokra definiálunk egy távolságformulát:

$$d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \operatorname{arch}\left(-\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle\right)$$

Rögzített $\mathbf{a} \in H$ pontnál a $T_{\mathbf{a}}H$ érintősík két féltérre osztja a teret (most $T_{\mathbf{a}}H$ -t nem tekintjük azonosnak $\mathbf{a}^{\perp}$ -sel, tehát $T_{\mathbf{a}}H = \mathbf{a}^{\perp} + \mathbf{a}$). A hiperboloid egésze az egyik féltérbe esik. A $\varphi_{\mathbf{a}} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \to B(\mathbf{a},\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ leképezés lineáris, melynek magja $\mathbf{a}^{\perp}$. Az ezzel párhuzamos affin síkok pontjaiban állandó a leképezés értéke. Egy ilyen párhuzamos affin sík $T_{\mathbf{a}}H$. Mivel $\mathbf{a} \in T_{\mathbf{a}}H$, és $\varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) = -1$, látható, hogy abban a féltérben lesz $\varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ negatív. Mivel a modell minden pontja a $T_{\mathbf{a}}H$ által elválasztott tér origót nem tartalmazó félterében van, minden $\mathbf{b} \in H$-ra $\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle \le -1$, tehát a formula jóldefiniált. Ha $\mathbf{a} \ne \mathbf{b}$, akkor $\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle < -1$.

A távolságformulára $\mathbf{a},\mathbf{b} \in H$ pontoknál teljesülnek a következők:

1. $d(\mathbf{a},\mathbf{b}) \ge 0$, mert arch értékei nemnegatívak.
2. $d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b},$ hiszen $\operatorname{arch}\left(-\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle\right) = 0 \Leftrightarrow -\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle = 1$

   $$\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle = -1 \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b}.$$
3. $d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = d(\mathbf{b},\mathbf{a})$ a skaláris szorzat szimmetriája miatt.

Tegyük fel, hogy $\mathbf{v}$ vektor egység hosszúságú. Egy $r(t) = (\operatorname{ch} t)\mathbf{a} + (\operatorname{sh} t)\mathbf{v}$ egyenes t_1, t_2 paraméterértékű pontjainak távolsága a következő lesz:

$$\begin{aligned} d\left(r(t_1), r(t_2)\right) &= \operatorname{arch}\left(-\langle r(t_1), r(t_2)\rangle\right) \\ \operatorname{ch}\left(d\left(r(t_1), r(t_2)\right)\right) &= -\langle r(t_1), r(t_2)\rangle \\ &= -\operatorname{ch} t_1 \operatorname{ch} t_2 \langle \mathbf{a},\mathbf{a}\rangle - \operatorname{sh} t_1 \operatorname{sh} t_2 \langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle \end{aligned}$$

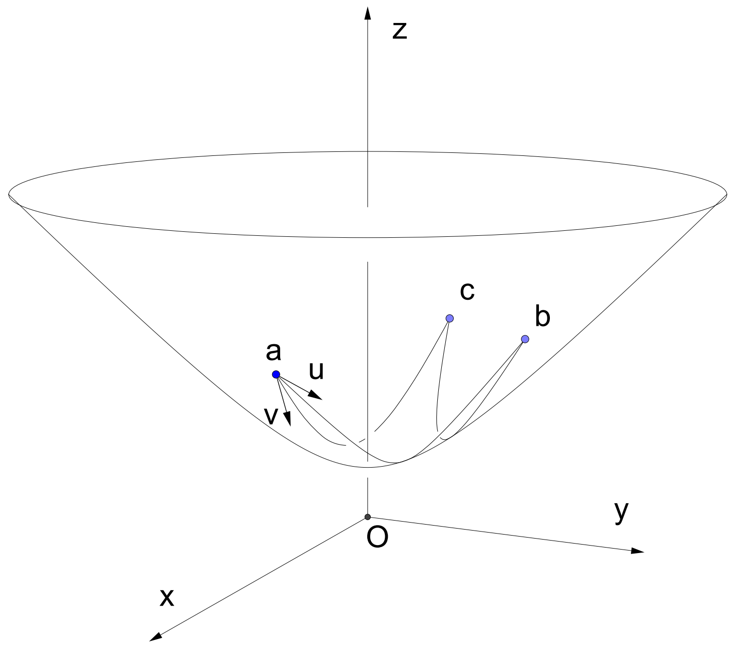
$\langle \mathbf{a},\mathbf{a}\rangle = -1,$ $\mathbf{v}$-ről feltehetjük, hogy $|\mathbf{v}| = 1,$ ekkor $\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle = 1,$ így

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}\left(d\left(r(t_1), r(t_2)\right)\right) &= \operatorname{ch} t_1 \operatorname{ch} t_2 - \operatorname{sh} t_1 \operatorname{sh} t_2 \\ &= \operatorname{ch}(t_1 - t_2) \\ d\left(r(t_1), r(t_2)\right) &= |t_1 - t_2|. \end{aligned}$$

Tehát az $r(t) = (\cosh t)\mathbf{a} + (\sinh t)\mathbf{v}$ paraméterezés természetes paraméterezés, azaz a görbe (esetünkben a modellbeli egyenes) bármely két pontjának távolsága a hozzájuk tartozó paraméterértékek távolságával egyenlő.

2.6. Koszinusztétel

Az euklideszi geometriával analóg módon definiálhatunk háromszögeket a modellünkben: három nem kollineáris pont a háromszög csúcsai lesznek, az őket összekötő modellbeli egyenesek két pont közötti szakaszai az oldalak. Legyen $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in H$ három nem kollineáris pont, vegyük **ab** és **ac** modellbeli egyenesek **a** pontbeli **u** és **v** normált irányvektorait úgy, hogy **b**, illetve **c** irányba mutassanak. Mivel $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{a}^{\perp}$, lehetséges a szögüket venni a szokásos formulával, mert $\mathbf{a}^{\perp}$ pozitív definit skaláris szorzást örököl. Ez a szög (nem feltétlenül **ab** és **ac** modellbeli egyenesek szöge) lesz a háromszög szöge az **a** csúcsban. A többi szöget ugyanezen eljárással definiáljuk.



3. ábra Modellbeli háromszög

Legyenek **u** és **v** a fenti, **a**-beli normált irányvektorok, az oldalak hosszai $d(\mathbf{b},\mathbf{c})=a,\ d(\mathbf{a},\mathbf{c})=b,\ d(\mathbf{a},\mathbf{b})=c$; α,β,γ legyenek a megfelelő csúcsoknál lévő szögek.

Tétel. A modellbeli háromszögekre a

$$\operatorname{ch} a=\operatorname{ch} b \operatorname{ch} c-\operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \cos \alpha$$

hiperbolikus koszinusztétel igaz.

Bizonyítás: Vegyük **ab** és **ac** egyenesek természetes paraméterezését:

$$r_1(t)=(\operatorname{ch} t)\mathbf{a}+(\operatorname{sh} t)\mathbf{u}$$
$$r_2(t)=(\operatorname{ch} t)\mathbf{a}+(\operatorname{sh} t)\mathbf{v}$$

Ekkor a természetes paraméterezés miatt $r_1(c)=\mathbf{b}$ és $r_2(b)=\mathbf{c}$, tehát

$$\mathbf{b}=(\operatorname{ch} c)\mathbf{a}+(\operatorname{sh} c)\mathbf{u}$$
$$\mathbf{c}=(\operatorname{ch} b)\mathbf{a}+(\operatorname{sh} b)\mathbf{v}$$

Vegyük **b** és **c** skaláris szorzatát:

$$\langle\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle=\langle(\operatorname{ch} c)\mathbf{a}+(\operatorname{sh} c)\mathbf{u},(\operatorname{ch} b)\mathbf{a}+(\operatorname{sh} b)\mathbf{v}\rangle=$$
$$=\operatorname{ch} b \operatorname{ch} c\langle\mathbf{a},\mathbf{a}\rangle+\operatorname{sh} b \operatorname{sh} c\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$$

Mivel $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{a}^{\perp}$, és $|\mathbf{u}|=|\mathbf{v}|=1$, ezért $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=\cos\alpha$. Továbbá

$$a=d(\mathbf{b},\mathbf{c})=\operatorname{arch}(-\langle\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle)$$
$$\operatorname{ch} a=-\langle\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle$$
$$-\operatorname{ch} a=\langle\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle.$$

Így tehát azt kapjuk, hogy

$$-\operatorname{ch} a=-\operatorname{ch} b \operatorname{ch} c+\operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \cos \alpha$$
$$\operatorname{ch} a=\operatorname{ch} b \operatorname{ch} c-\operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \cos \alpha\ .$$

Ezzel a tételt beláttuk.

2.7. Háromszög-egyenlőtlenség

A modellbeli háromszög-egyenlőtlenség egyszerűen következik a koszinusztételből. Tudjuk, hogy $\cos\alpha > -1$, így a koszinusztétel egyenletének jobb oldalát becsülhetjük a

$$\operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \cos\alpha < \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c + \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c$$

egyenlőtlenséggel. Így a koszinusztételből a

$$\operatorname{ch} a < \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c + \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c$$

egyenlőtlenséget kapjuk. A hiperbolikus függvényekre vonatkozó addíciós tétel szerint

$$\operatorname{ch} b \operatorname{ch} c + \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c = \operatorname{ch}(b+c),$$

ezt alkalmazva a

$$\operatorname{ch} a < \operatorname{ch}(b+c)$$

egyenlőtlenséghez jutunk, amiből a ch függvény szigorú monotonitása miatt következik, hogy

$$a < b + c.$$

Vagyis minden $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \in H$ nem kollineáris pontokra

$$d(\mathbf{a},\mathbf{c}) < d(\mathbf{a},\mathbf{b}) + d(\mathbf{b},\mathbf{c}).$$

Ha $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ (ebben a sorrendben) kollineárisak, akkor egyenlőség áll fenn.

2.8. Egybevágóságok

A modellbeli egybevágóságokkal csak érintőlegesen foglalkozunk.

Belátható, hogy minden egybevágóság lineáris leképezés. Vegyük a tér $A:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezéseit. Mivel $\mathbf{a},\mathbf{b} \in H$ pontok távolságát a $d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \operatorname{arch}\left(-\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle\right)$ formulával definiáltuk, azok a lineáris leképezések lesznek távolságtartók, amelyek megtartják a skaláris szorzatot:

$$\langle A\mathbf{a}, A\mathbf{b}\rangle = \langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle.$$

Ezek a kvadratikus alakot is megtartják:

$$\langle A\mathbf{a}, A\mathbf{a}\rangle = \langle \mathbf{a},\mathbf{a}\rangle$$
$$q(A\mathbf{a}) = q(\mathbf{a}).$$

Mivel a modellt alkotó félhiperboloid olyan **a** pontokból áll, melyekre $q(\mathbf{a}) = -1$, ezek a transzformációk önmagába fogják mozgatni, a következő megszorítással:
A modell a kétköpenyű hiperboloidnak csak a pozitív köpenyéből áll, ezért ki kell zárnunk az egybevágóságokból azokat a leképezéseket, melyek megcserélik a köpenyeket. Ezt úgy érhetjük el, hogy a harmadik bázisvektor előjele nem változik a transzformáció során, vagyis *A* mátrixában $a_{33} > 0$.

2.9. Izomorfia a Cayley-Klein-modellel

Eddig nem esett szó arról, hogy a hiperboloid modellen milyen struktúrát is hoztunk létre. Ahhoz ugyanis, hogy belássuk, hogy ezen a modellen valóban a Bolyai-Lobacsevszkij-féle geometria működik, meg kéne vizsgálnunk az axiómák teljesülését. Mivel ez túl hosszadalmas és nehéz, egyszerűbb ehelyett azt az utat követni, hogy a hiperbolikus geometria egy másik modelljével (melyre már ismerjük az axiómák teljesülését) látunk be izomorfiát. Mi a Cayley-Klein-modellel fogjuk ezt megtenni.
A hiperbolikus síkgeometria Cayley-Klein-féle modellje egy projektív síkon vett nyílt körlemez belső pontjaiból áll. Az egyenesek a körlemez határának pontjait összekötő nyílt szakaszok (húrok). Ha *A,B* a modell két pontja, és a rájuk illeszkedő nyílt húr határa *C,D* (nem modellbeli pontok), akkor *A* és *B* távolságát a $d(A,B) = \frac{1}{2}\ln\left|(ABCD)\right|$ Cayley-féle formula adja meg, ahol (*ABCD*) a négy pont kettősviszonyát jelöli. A Cayley-Klein-modell más jellemzőivel itt nem foglalkozunk, ennyi elegendő az izomorfia belátásához.

Térjünk vissza a mi modellünkhöz. Tekintsük $\mathbb{R}^3$-ban az $S: z = 1$ síkot. Kibővítjük ezt a síkot projektív síkká: közönséges pontjaiba az $[a,b,1] \in \mathbb{R}^3$ meghatározó vektorok mutatnak ($a,b \in \mathbb{R}$), és hozzávesszük a $[c,d,0] \in \mathbb{R}^3$ alakú ideális pontokat ($c,d \in \mathbb{R}$ nem mindkettő nulla).
Ez a sík az aszimptotikus kúpot egy egységsugarú körben fogja metszeni, hiszen

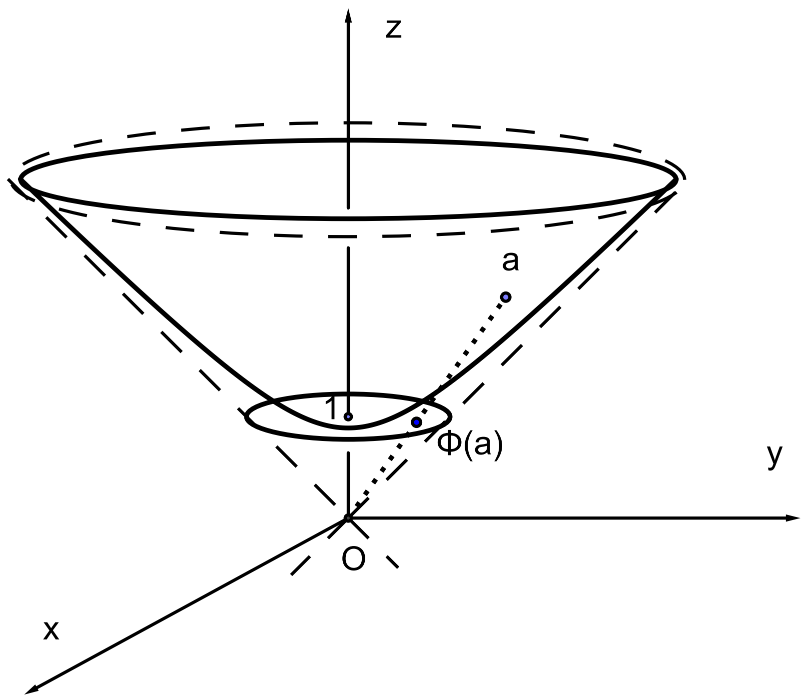
$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \text{ a kúp egyenlete,}$$

$$z = 1 \text{ a sík egyenlete,}$$

$$\text{metszetük } x^2 + y^2 = 1.$$

Ennek a körnek a belseje, vagyis a $K : z = 1,\ x^2 + y^2 < 1$ nyílt körlemez lesz a Cayley-Klein-féle sík.

Legyen $\Phi : H \to S$ origó középpontú vetítés. Tudjuk, hogy az origón átmenő egyenesek egyetlen pontban metszik a félhiperboloidot, és egyetlen pontban a síkot. Ha $\mathbf{a} \in H$, akkor $\Phi(\mathbf{a}) \in K$, hiszen a kúp egyrészt teljes egészében tartalmazza a félhiperboloidot, másrészt a félhiperboloid sosem éri el a kúpot, de tetszőlegesen megközelíti azt, így **a** nem képződhet a körvonalra, sem a körvonalon kívülre. Hasonlóan, ha $\mathbf{b}' \in K$, akkor biztosan létezik egy $\mathbf{b} \in H$ ősképe, hogy $\Phi(\mathbf{b}) = \mathbf{b}'$. Tehát Φ bijektív leképezés *K* és *H* között.



4. ábra A középpontos vetítés

A *H*-beli egyeneseket origón átmenő síkok metszeteiként definiáltuk. Ezen modellbeli egyenesek pontjainak vetítőegyenesei benne lesznek az őket kimetsző síkban. Tehát a

modellbeli egyenesek képe az őket kimetsző sík és K metszete lesz, vagyis K egy nyílt húrja, ami egyenes a Cayley-Klein-modellben. Tehát a leképezés egyenestartó.
A következőkben belátjuk, hogy a modellünkben definiált távolságformula a vetítés során a Cayley-féle távolságformulába megy át. Az itt következő tételben és bizonyításban a H-n bevezetett távolságformulát d_H, a K-n (mint Cayley-Klein-modellen) értelmezett Cayley-formulát d_K fogja jelölni.

Tétel. Minden $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in H$-ra $d_H(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = d_K(\Phi(\mathbf{a}), \Phi(\mathbf{b}))$.

Bizonyítás: Legyen $d_H(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = d$.

Legyen $\mathbf{w}$ az $\mathbf{a}$ pontban normált érintővektor $\mathbf{b}$ irányban. Ekkor az $\mathbf{ab}$ egyenes paraméterezése:

$$r(t) = (\operatorname{ch} t)\mathbf{a} + (\operatorname{sh} t)\mathbf{w}, \text{ ahol}$$
$$r(0) = \mathbf{a} \text{ és } r(d) = \mathbf{b}.$$

Vegyünk fel két vektort a következőképpen:

$$\mathbf{u} = \mathbf{a} + \mathbf{w}$$
$$\mathbf{v} = \mathbf{a} - \mathbf{w}$$

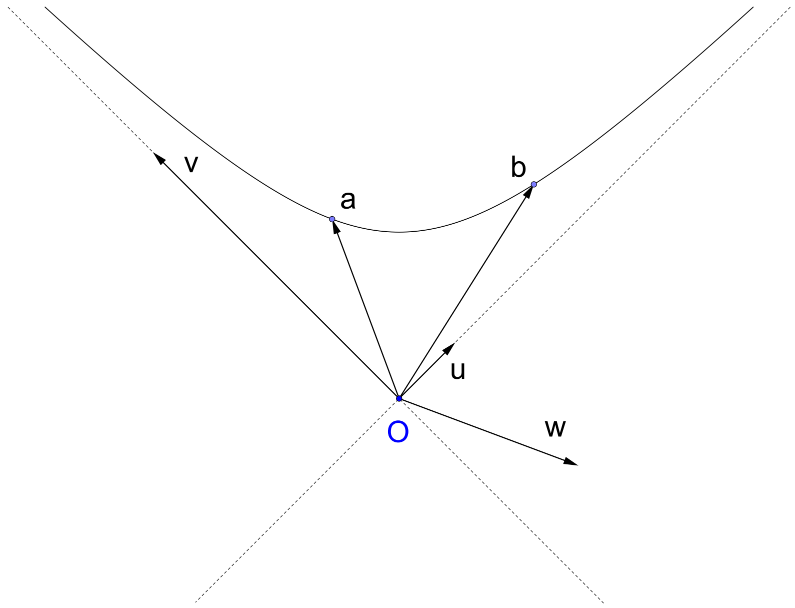
Mindkét vektor az $\mathbf{ab}$ modellbeli egyenes síkjában fekszik, hiszen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{w}$ lineáris kombinációi. Továbbá látható, hogy az aszimptotikus kúpon fekszenek, mivel skalárnégyzetük 0:

$$q(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{a} + \mathbf{w}, \mathbf{a} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = -1 + 0 + 1 = 0,$$

ugyanis $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = -1$, mert $\mathbf{a} \in H$, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{w} \rangle = 0$, mert $\mathbf{a} \perp \mathbf{w}$ és $\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = 1$, mert $|\mathbf{w}| = 1$.

Hasonlóan látható, hogy $q(\mathbf{v}) = 0$.

Ebből következik, hogy – az $\mathbf{ab}$ modellbeli egyenest most mint hiperbolát tekintve – $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ az aszimptotákon fekszik. Tehát $\mathbf{u}$-t és $\mathbf{v}$-t mint S-beli meghatározó vektorokat véve $[\mathbf{u}], [\mathbf{v}]$ K határának abba a két pontjába mutatnak, melyet $\Phi(\mathbf{ab})$ összeköt.



5. ábra Az egyenes síkja

Tekintsük most **u**-t és **v**-t bázisnak az egyenes síkjában. Ekkor $\mathbf{a}=\frac{1}{2}(\mathbf{u}+\mathbf{v})$ és $\mathbf{w}=\frac{1}{2}(\mathbf{u}-\mathbf{v})$.

Felírhatjuk **a**-t és **b**-t **u** és **v** kombinációjaként:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}&=\frac{1}{2}(\mathbf{u}+\mathbf{v})\\ \mathbf{b}&=\frac{1}{2}\cosh d\,(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\frac{1}{2}\sinh d\,(\mathbf{u}-\mathbf{v})=\\ &=\frac{1}{2}(\cosh d+\sinh d)\,\mathbf{u}+\frac{1}{2}(\cosh d-\sinh d)\,\mathbf{v}\end{aligned}$$

Írjuk fel $[\mathbf{u}],[\mathbf{v}],[\mathbf{a}],[\mathbf{b}]\in S$ kettősviszonyát ebben a bázisban:

$$([\mathbf{u}][\mathbf{v}][\mathbf{a}][\mathbf{b}])=\left(\frac{1/2}{1/2}\right):\left(\frac{1/2\cosh d-\sinh d}{1/2\cosh d+\sinh d}\right)=$$

$$=\frac{\cosh d+\sinh d}{\cosh d-\sinh d}=\frac{\frac{e^{d}+e^{-d}}{2}+\frac{e^{d}-e^{-d}}{2}}{\frac{e^{d}+e^{-d}}{2}-\frac{e^{d}-e^{-d}}{2}}=e^{2d}$$

Mivel a középpontos vetítés centruma az origó, $[\mathbf{a}]=[\Phi(\mathbf{a})]$ és $[\mathbf{b}]=[\Phi(\mathbf{b})]$.

Vegyük $\Phi(\mathbf{a})$ és $\Phi(\mathbf{b})$ Cayley-féle távolságát:

$$d_K\left(\Phi(\mathbf{a}),\Phi(\mathbf{b})\right)=\frac{1}{2}\left|\ln\left([\mathbf{u}][\mathbf{v}][\mathbf{a}][\mathbf{b}]\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\ \ln\left(e^{2d}\right)\ \right|=\frac{1}{2}\cdot 2d=d$$

Ezzel a tételt beláttuk.

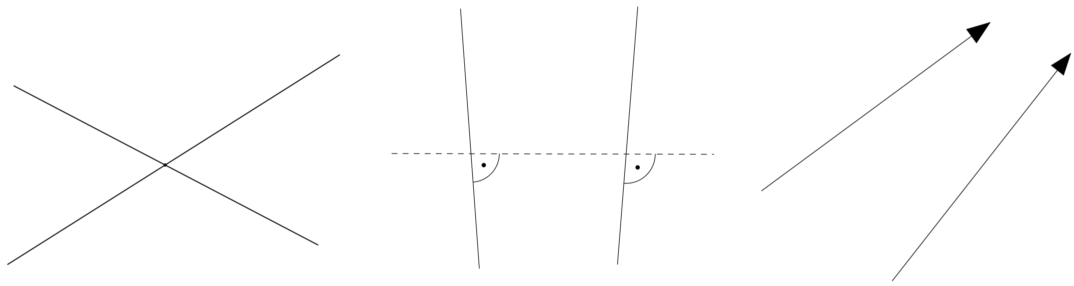
Ebből az következik, hogy a két modell izomorf, vagyis a hiperboloid modellen a Bolyai-Lobacsevszkij-féle geometria érvényes.

3. Hiperbolikus geometria a modellen

3.1. Egyenesek egymáshoz való viszonya

Ismeretes, hogy a hiperbolikus síkgeometriában egymáshoz képest háromféleképpen helyezkedhet el két különböző egyenes:

1. metsző egyenesek: van közös pontjuk
2. ultraparallel egyenesek: van közös merőlegesük
3. parallel egyenesek: nincs közös pontjuk és nincs közös merőlegesük.



1. **2.** **3.**

Azt, hogy csak ezek az esetek léteznek, és ezek egymást kizárják, nem bizonyítjuk. A pontos származtatás a hiperboloidmodell-beli bemutatásból fog látszani.
A metsző egyenesek esete ugyanaz, mint az euklideszi geometriában.
Az ultraparallel egyeneseknél pontosan egy olyan egyenes létezik, amire mindketten merőlegesek. A közös merőleges mentén van egy legkisebb távolságuk, ami aztán mindkét irányban végtelenig nő.
A parallel egyenesek „egy irányban” párhuzamosak, ebben az irányban tetszőlegesen megközelítik egymást, a másik irányban távolságuk végtelenig nő.
(Az „egyenesek távolsága” kifejezést itt csak a szemléletesség kedvéért használjuk, nem definiáljuk pontosan, körülbelül a következőt értjük rajta: két pont egy irányba, azonos sebességgel fut a két egyenesen, az őket összekötő szakasz hossza a távolság.)

A mi modellünkben az egyeneseket origón átmenő síkok és a félhiperboloid metszeteiként definiáltuk. Mielőtt rátérnénk a modellbeli egyenesek egymáshoz való viszonyának hiperbolikus osztályozására, vizsgáljuk meg ezeket a síkokat.

Az aszimptotikus kúpfelület három részre osztja a teret: benne a negatív, rajta a nulla, rajta kívül a pozitív skalárnégyzetű vektorok vannak. Az origón átmenő síkok (kétdimenziós alterek) valamilyen kvadratikus alakot (ami az $\mathbb{R}^3$-ra bevezetett kvadratikus alak adott síkra vett megszorítása) örökölnek. Mivel a teljes téren értelmezett indefinit kvadratikus alak diagonális mátrixában két pozitív és egy negatív elem szerepel, a kétdimenziós alterekre leszűkített kvadratikus alakok pozitív definitek, indefinitek vagy pozitív szemidefinitek lehetnek.

Az olyan alterekre, melyekben csak pozitív skalárnégyzetű nemnulla vektorok szerepelnek, a kvadratikus alak leszűkítése pozitív definit lesz, az olyanokra, melyekben szerepel pozitív és negatív skalárnégyzetű vektor is, indefinit. Geometriailag: azok a síkok, melyek a kúpon kívül vannak (egyetlen közös pontjuk vele az origó) pozitív definit, azok, melyek belemetszenek indefinit skaláris szorzást örökölnek. A fennmaradó esetekben, tehát ha sík érinti a kúpot, elfajuló pozitív szemidefinit kvadratikus alak öröklődik. Ezek lesznek az izotróp vektorokra merőleges vektorokat tartalmazó alterek.

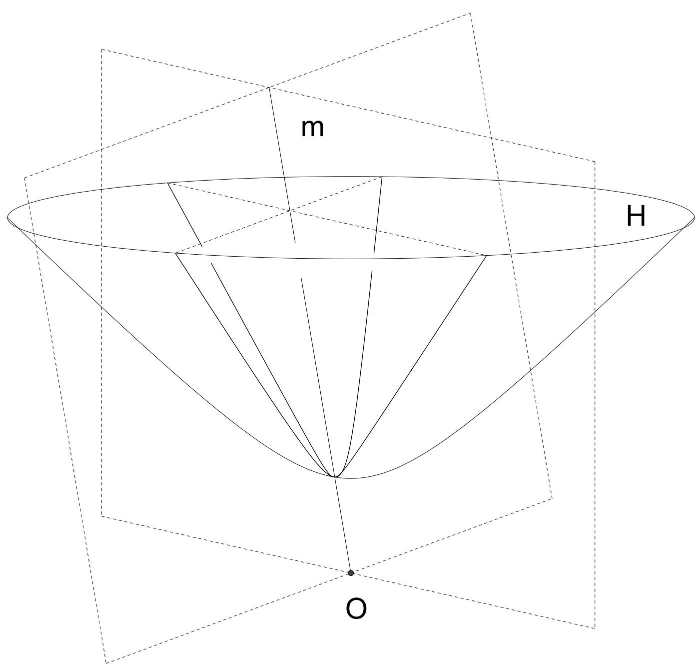
Negatív definit skaláris szorzást nem örökölhet kétdimenziós altér, mert az eredeti kvadratikus alak diagonális mátrixában csak egy negatív elem szerepel. Szemléletesen: nincs olyan origót tartalmazó sík, amit az aszimptotikus kúp teljes egészében tartalmazna. Negatív szemidefinit skaláris szorzást sem örökölhet két dimenziós altér, mert nincs olyan sík, ami csak a kúpon belüli (negatív skalárnégyzetű) és a kúpra illeszkedő (nulla skalárnégyzetű) vektorokból állna.

A diagonalizálhatósági tétel alapján egy nem elfajuló kvadratikus alakot öröklő kétdimenziós E altérhez (a skalárszorostól eltekintve) egyértelműen hozzárendelhetünk egy (az indefinit skaláris szorzás szerinti) $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ normálvektort. Ugyanis a kétdimenziós altérben találhatunk ortogonális bázist, és ha a bázisvektorok között nem lehet nulla skalárnégyzetű, akkor biztosan kiegészíthetők háromdimenziós ortogonális bázissá. Tehát egy origót tartalmazó sík normálvektora olyan vektor lesz, melynek a sík a merőleges kiegészítő altere.

Két modellbeli hiperbolikus egyenes egymáshoz való viszonyát legkönnyebben az őket kimetsző síkok egymáshoz való viszonyával jellemezhetjük. Mivel a síkok átmennek az origón, biztosan metszik egymást, méghozzá egy origón átmenő egyenesben.

Legyenek $e_1, e_2 \subset H$ hiperbolikus egyenesek, E_1 és E_2 az őket kimetsző síkok, *m* a két sík metszésvonala, **m** ennek egy irányvektora. Fontos megjegyezni, hogy e_1 és e_2 modellbeli hiperbolikus egyenesek, *m* pedig közönséges $\mathbb{R}^3$-beli egyenes. E_1 és E_2 normálvektorai legyenek $\mathbf{n}_1$ és $\mathbf{n}_2$.

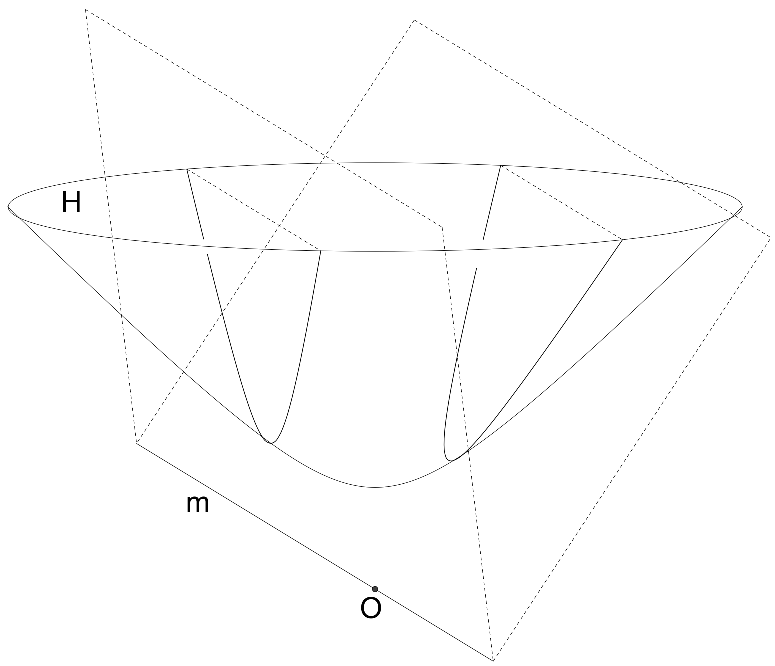
1. Ha a metszésvonal belül van az aszimptotikus kúpon (vagyis döfi a hiperboloidot), akkor a két hiperbolikus egyenes metsző helyzetben van, metszéspontjuk a metszésvonal félhiperboloidon vett döféspontja. Ebből következik, hogy a $\mathbf{c} \in H$ metszéspontba mutató vektor illeszkedik az *m* metszésvonalra. Mivel $\mathbf{n}_1$ és $\mathbf{n}_2$ is merőleges a metszésvonalra, $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \in \mathbf{c}^\perp$. e_1 és e_2 szögén a $\mathbf{c}^\perp$-beli **u** és **v** irányvektoraik által meghatározott szöget értjük. Mivel $\mathbf{u} \in E_1$ és $\mathbf{v} \in E_2$, ezért $\mathbf{n}_1 \perp \mathbf{u}$ és $\mathbf{n}_2 \perp \mathbf{v}$. Tehát e_1 és e_2 szöge egyenlő $\mathbf{n}_1$ és $\mathbf{n}_2$, vagy (hasonlóan az egyeneseknél definiált szöghöz) $\mathbf{n}_1$ és $-\mathbf{n}_2$ szögével, úgy, hogy legfeljebb $\pi/2$ legyen.



6. ábra Metsző egyenesek

2. Ha a metszésvonal kívül van a kúpon, akkor a két egyenes ultraparallel helyzetben van, nem metszik egymást. Ennek bizonyításához olyan t hiperbolikus egyenest keresünk, mely e_1-re és e_2-re is merőleges. Ha $t \perp e_1$, akkor $T \perp E_1$, vagyis $\mathbf{n}_1 \in T$. Hasonlóan $\mathbf{n}_2 \in T$. Tehát T csak az $\mathbf{n}_1$ és $\mathbf{n}_2$ által kifeszített altér lehet. Mivel $m \in E_1$ és $m \in E_2$, ezért $\mathbf{m} \perp \mathbf{n}_1$ és $\mathbf{m} \perp \mathbf{n}_2$. Ebből látszik, hogy az $\mathbf{n}_1$ és $\mathbf{n}_2$ által kifeszített altér $\mathbf{m}^{\perp}$-sel azonos. A metszésvonal kívül van a kúpon, tehát $\mathbf{m}$ pozitív skalárnégyzetű. Ebből következik, hogy $\mathbf{m}^{\perp}$ indefinit kvadratikus alakot örököl, ezért valóban belemetsz a félhiperboloidba, és hiperbolikus egyenest ad meg. Mivel $\mathbf{m}^{\perp}$ létezése egyértelmű, t létezése is egyértelmű.

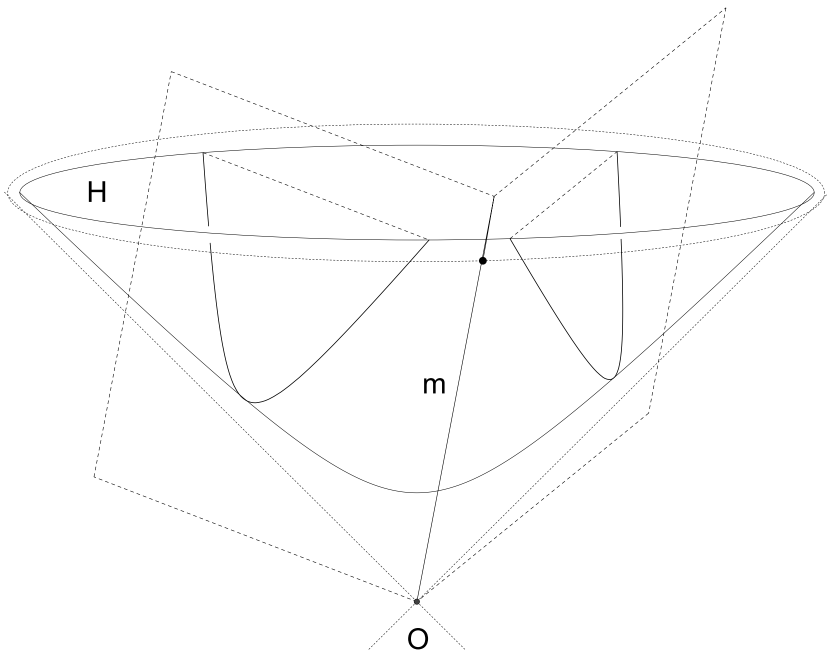
   Összefoglalva: két modellbeli egyenesnek pontosan egy közös merőlegese lehet, ez akkor és csak akkor létezik, ha a hiperbolikus egyeneseket kimetsző síkok metszésvonala az aszimptotikus kúpon kívül van, ekkor a közös merőlegest kimetsző sík a metszésvonal merőleges-kiegészítő altere.



7. ábra Ultraparallel egyenesek

3. Ha a metszésvonal az aszimptotikus kúpra illeszkedik, akkor azt állítjuk, hogy a hiperbolikus egyenesek parallel helyzetben vannak. Ekkor nyilván nem metszik

egymást, hiszen a metszéspontot mind a két síknak tartalmaznia kéne, tehát a metszésvonalon kéne lennie. Nem lesz közös merőlegesük a következők miatt: ha *m* az aszimptotikus kúpra illeszkedik, akkor **m** irányvektora izotróp vektor, vagyis $\mathbf{m} \in \mathbf{m}^{\perp}$ és $q(\mathbf{m}) = 0$. Ekkor $\mathbf{m}^{\perp}$ elfajuló kvadratikus alakot örököl, hiszen lesz benne olyan nemnulla vektor (**m** skalárszorosai), ami minden $\mathbf{v} \in \mathbf{m}^{\perp}$ vektorra merőleges. Erről fentebb megállapítottuk, hogy pozitív szemidefinit kvadratikus alakot örököl, így nem tartalmaz negatív skalárnégyzetű vektort, tehát nem metsz bele a kúpba.



8. ábra Parallel egyenesek

3.2. Tükrözések a modellben

A későbbiekben bemutatandó ciklusok leírásához előbb szükségünk van a modellbeli tükrözések leírására.

Legyenek $\mathbf{x},\mathbf{u}\in\mathbb{R}^3$, $q(\mathbf{u})\neq 0$ vektorok. Ekkor **x** felbontható egy **u**-val párhuzamos, és egy **u**-ra (indefinit értelemben) merőleges **v** vektor összegére. Az **u**-val párhuzamos komponenst a következőképpen kapjuk meg:

$$\mathbf{x}=\lambda\mathbf{u}+\mathbf{v}$$
$$\mathbf{x}-\mathbf{v}=\lambda\mathbf{u}$$

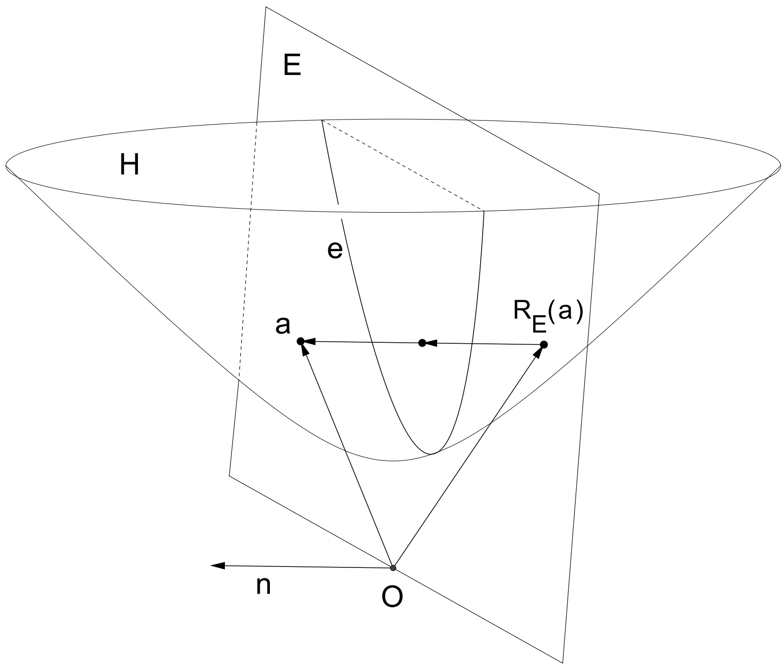
vegyük mindkét oldal **u**-val vett skaláris szorzatát:

$$\langle\mathbf{x}-\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle=\lambda\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle$$
$$\langle\mathbf{x},\mathbf{u}\rangle-\langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle=\lambda\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle$$
$$\frac{\langle\mathbf{x},\mathbf{u}\rangle-0}{\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle}=\lambda,$$

tehát az **x** vektor **u**-val párhuzamos komponense az $\dfrac{\langle\mathbf{x},\mathbf{u}\rangle}{\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle}\mathbf{u}$ vektor lesz.

Legyen $e\subset H$ hiperbolikus egyenes, E az őt kimetsző sík, **n** az E sík normálvektora. Mivel E belemetsz H-ba, $\langle\mathbf{n},\mathbf{n}\rangle\neq 0$. Ekkor $E=\mathbf{n}^{\perp}$. Egy $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$ E-re vett tükörképét **x** vektor **n**-nel párhuzamos komponensének kétszeri kivonásával kapjuk meg, vagyis:

$$R_E:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ \mathbf{x}\mapsto R_E(\mathbf{x})=\mathbf{x}-2\frac{\langle\mathbf{x},\mathbf{n}\rangle}{\langle\mathbf{n},\mathbf{n}\rangle}\mathbf{n}\,.$$



9. ábra Modellbeli tükrözés

R_E lineáris leképezés, ugyanis ha $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^3$, $\lambda\in\mathbb{R}$, akkor

$$R_E(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\mathbf{x}+\mathbf{y}-2\frac{\langle\mathbf{n},\mathbf{x}+\mathbf{y}\rangle}{\langle\mathbf{n},\mathbf{n}\rangle}\mathbf{n}=\mathbf{x}+\mathbf{y}-2\frac{\langle\mathbf{n},\mathbf{x}\rangle+\langle\mathbf{n},\mathbf{y}\rangle}{\langle\mathbf{n},\mathbf{n}\rangle}\mathbf{n}=$$

$$=\mathbf{x}-2\frac{\langle\mathbf{n},\mathbf{x}\rangle}{\langle\mathbf{n},\mathbf{n}\rangle}\mathbf{n}+\mathbf{y}-2\frac{\langle\mathbf{n},\mathbf{y}\rangle}{\langle\mathbf{n},\mathbf{n}\rangle}\mathbf{n}=R_E(\mathbf{x})+R_E(\mathbf{y}),\text{ és}$$

$$R_E(\lambda\mathbf{x})=\lambda\mathbf{x}-2\frac{\langle\lambda\mathbf{x},\mathbf{n}\rangle}{\langle\mathbf{n},\mathbf{n}\rangle}\mathbf{n}=\lambda\mathbf{x}-2\frac{\lambda\langle\mathbf{x},\mathbf{n}\rangle}{\langle\mathbf{n},\mathbf{n}\rangle}\mathbf{n}=\lambda\left(\mathbf{x}-2\frac{\langle\mathbf{x},\mathbf{n}\rangle}{\langle\mathbf{n},\mathbf{n}\rangle}\mathbf{n}\right)=\lambda R_E(\mathbf{x}),$$

tehát R_E műveletartó.

R_E-t kétszer egymás után végrehajtva visszakapjuk az eredeti pontot:

$$R_E(R_E(\mathbf{x}))=R_E(\mathbf{x})-2\frac{\langle R_E(\mathbf{x}),\mathbf{n}\rangle}{\langle\mathbf{n},\mathbf{n}\rangle}\mathbf{n}=\mathbf{x}-2\frac{\langle\mathbf{x},\mathbf{n}\rangle}{\langle\mathbf{n},\mathbf{n}\rangle}\mathbf{n}-2\frac{\left\langle\mathbf{x}-2\frac{\langle\mathbf{x},\mathbf{n}\rangle}{\langle\mathbf{n},\mathbf{n}\rangle}\mathbf{n},\mathbf{n}\right\rangle}{\langle\mathbf{n},\mathbf{n}\rangle}\mathbf{n}=$$

$$=\mathbf{x}-2\frac{\langle\mathbf{x},\mathbf{n}\rangle+\left\langle\mathbf{x}-2\frac{\langle\mathbf{x},\mathbf{n}\rangle}{\langle\mathbf{n},\mathbf{n}\rangle}\mathbf{n},\mathbf{n}\right\rangle}{\langle\mathbf{n},\mathbf{n}\rangle}\mathbf{n}=\mathbf{x}-2\frac{\langle\mathbf{x},\mathbf{n}\rangle+\langle\mathbf{x},\mathbf{n}\rangle-2\frac{\langle\mathbf{x},\mathbf{n}\rangle}{\langle\mathbf{n},\mathbf{n}\rangle}\langle\mathbf{n},\mathbf{n}\rangle}{\langle\mathbf{n},\mathbf{n}\rangle}\mathbf{n}=$$

$$=\mathbf{x}-2\frac{0}{\langle\mathbf{n},\mathbf{n}\rangle}\mathbf{n}=\mathbf{x}$$

Ha $\mathbf{x}\in E$, akkor **x** fix pont:

$$R_E(\mathbf{x}\in E)=\mathbf{x}-2\frac{\langle\mathbf{x},\mathbf{n}\rangle}{\langle\mathbf{n},\mathbf{n}\rangle}\mathbf{n}=\mathbf{x}-2\frac{0}{\langle\mathbf{n},\mathbf{n}\rangle}\mathbf{n}=\mathbf{x}$$

R_E megtartja a skaláris szorzatot, minden $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^3$-ra

$$\langle R_E(\mathbf{x}),R_E(\mathbf{y})\rangle=\left\langle\mathbf{x}-2\frac{\langle\mathbf{x},\mathbf{n}\rangle}{\langle\mathbf{n},\mathbf{n}\rangle}\mathbf{n},\mathbf{y}-2\frac{\langle\mathbf{y},\mathbf{n}\rangle}{\langle\mathbf{n},\mathbf{n}\rangle}\mathbf{n}\right\rangle=$$

$$=\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle-2\frac{\langle\mathbf{y},\mathbf{n}\rangle}{\langle\mathbf{n},\mathbf{n}\rangle}\langle\mathbf{x},\mathbf{n}\rangle-2\frac{\langle\mathbf{x},\mathbf{n}\rangle}{\langle\mathbf{n},\mathbf{n}\rangle}\langle\mathbf{y},\mathbf{n}\rangle+4\frac{\langle\mathbf{x},\mathbf{n}\rangle\langle\mathbf{y},\mathbf{n}\rangle}{\langle\mathbf{n},\mathbf{n}\rangle^2}\langle\mathbf{n},\mathbf{n}\rangle=$$

$$=\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$$

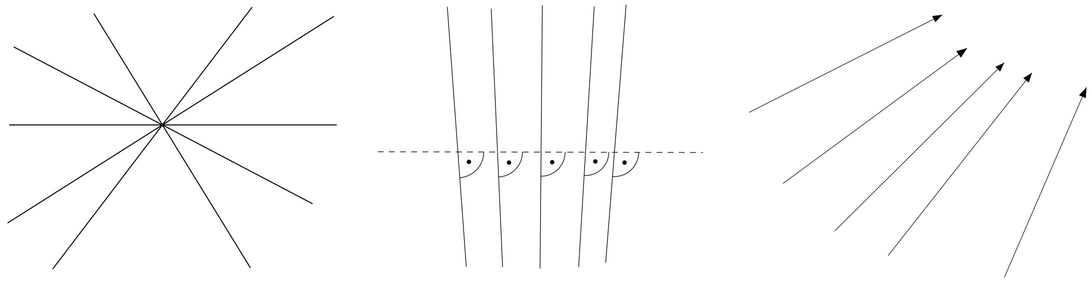
Ebből nyilvánvaló, hogy R_E a kvadratikus alakot is megtartja. Mivel E minden pontja fix, nyilvánvaló, hogy R_E nem cseréli meg a hiperboloid köpenyeit, tehát ha $\mathbf{a}\in H$, akkor $R_E(\mathbf{a})\in H$.

Egy modellbeli *e* egyenesre való tükrözésen az őt kimetsző síkra való tükrözés *H*-ra vett leszűkítését értjük. Megjegyezzük, hogy R_e egybevágóság a modellben, hiszen a skalárszorzattartás miatt a *H*-beli távolságot is megtartja.

3.3 Sugársorok

Az egyenesek háromféle helyzete szerint háromféle sugársor létezik a hiperbolikus geometriában:

1. metsző sugársor: egy közös pontban metsző egyenesekből
2. ultraparallel sugársor: egy közös merőlegesre illeszkedő egyenesekből
3. parallel sugársor: egy irányban párhuzamos egyenesekből.



1. **2.** **3.**

Egy pontot, egy egyenest vagy egy irányt (azaz irányított egyenest) megadva létezik egy rá illeszthető sugársor, ami lefedi a teljes síkot. Vagy ezzel ekvivalens megfogalmazásban: a sík bármely pontjából egyértelműen húzható egy rajta átmenő, adott sugársorhoz tartozó egyenes (feltéve hogy a pont nem a metsző sugársor tartópontjával azonos, de ez is csak az egyértelműséget korlátozza).

A mi modellünkben a sugársorokat az olyan síksorok, melyek tartóegyenese tartalmazza az origót, azon síkjai metszik ki *H*-ból, melyek egyáltalán belemetszenek. A modellbeli sugársorokat a síksorok tartóegyenesének az aszimptotikus kúphoz viszonyított helyzetével jellemezhetjük:

1. Ha a tartóegyenes belül van a kúpon, a rá fektethető síkok pontosan a H-n vett döféspontra illeszkedő metsző sugársort metszik ki a modellből.

2. Ha a tartóegyenes kívül van az aszimptotikus kúpon, akkor a síkok pontosan a tartóegyenes egy irányvektorának merőleges kiegészítő altere által kimetszett hiperbolikus egyenesre merőleges ultraparallel sugársort metszik ki H-ból.

3. Ha a tartóegyenes alkotója az aszimptotikus kúpnak, a rá illeszkedő síkok pontosan egy irányvektorának irányában párhuzamos parallel sugársort metszik ki H-ból.

3.4. Ciklusok

Vegyünk egy sugársort és egy tetszőleges pontot a hiperbolikus síkon. Tükrözzük ezt a pontot a sugársort alkotó összes hiperbolikus egyenesre. Az így kapott görbét ciklusnak nevezzük.

A háromféle sugársorhoz háromféle ciklus létezik:

1. metsző sugársor: kör (a metszésponttól azonos távolságra lévő pontok)
2. ultraparallel sugársor: hiperciklus („távolságvonal”: a közös merőlegestől azonos távolságra lévő pontok)
3. parallel sugársor: paraciklus.

Megjegyezzük, hogy a hiperciklus nem egyenes (ahogy azt az euklideszi síkon megszoktuk). Megengedünk nulla sugarú kört is (arra az esetre, ha a ciklus alapjául szolgáló pontot a metsző sugársor tartópontjának választjuk), illetve nulla távolságú hiperciklust, ami az ultraparallel sugársor közös merőlegesével lesz azonos.

Egy sugársorhoz tartozó összes ciklus lefedi a teljes síkot, illetve ha két – ugyanazon sugársorhoz tartozó – ciklus különböző, akkor nincs közös pontjuk.

Vizsgáljuk meg a ciklusokat a hiperboloidmodellben. Vegyünk egy S H-beli sugársort. Legyen ennek e az egyik tetszőleges egyenese, E az e-t kimetsző sík, $\mathbf{n}$ az E-hez tartozó normálvektor, m az S-et kimetsző síksor tartóegyenese, $\mathbf{m}$ ennek egy irányvektora. Vegyünk egy $\mathbf{a} \in H$ pontot.

Bontsuk fel **a**-t egy m-re illeszkedő **u**, és egy erre merőleges **v** vektorra úgy, hogy $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{a}$. Tükrözzük **a**-t minden e-re, vagyis – a tükrözés definíciója szerint – minden E-re. A tükrözés művelettartó, ezért $R_E(\mathbf{a}) = R_E(\mathbf{u}) + R_E(\mathbf{v})$. Mivel $\mathbf{u} \in m$, ezért $\mathbf{u} \in E$ minden E-re, tehát $R_E(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$. Tudjuk, hogy $\mathbf{n} \in \mathbf{u}^{\perp}$ minden **n**-re (mert $\mathbf{u} \in m$, és $\mathbf{n} \perp m$ minden **n**-re), és $\mathbf{v} \in \mathbf{u}^{\perp}$, mert így definiáltuk. Ebből látszik, hogy $R_E(\mathbf{v}) \in \mathbf{u}^{\perp}$, minden E-re. $R_E(\mathbf{a}) = \mathbf{u} + R_E(\mathbf{v})$, azaz $R_E(\mathbf{a}) \in (\mathbf{u}^{\perp} + \mathbf{u})$ minden E-re.

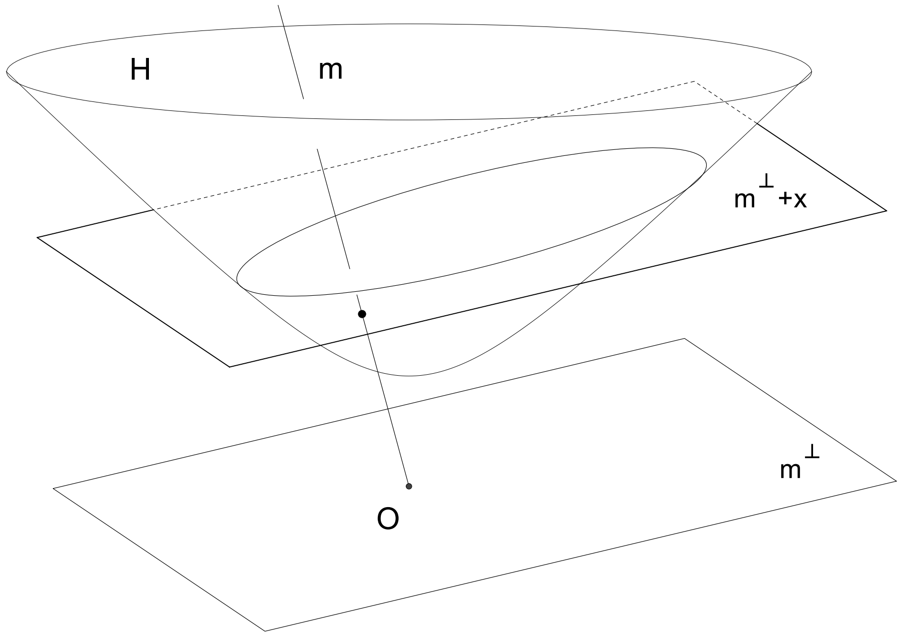
Tehát az $\mathbf{a} \in H$ ponthoz és az S H-beli sugársorhoz tartozó ciklus $\mathbf{m}^{\perp}$ **a**-t tartalmazó eltoltjának H-val vett metszetében fog futni. Mivel bármely $\mathbf{a}' \in (\mathbf{u}^{\perp} + \mathbf{u})$-hoz létezik E, hogy $E \cap H = e \in S$, és $R_E(\mathbf{a}) = \mathbf{a}'$, ezért pontosan ez a metszet fogja alkotni a ciklust. (Belátható, hogy az $\mathbf{a} - \mathbf{a}'$ normálvektorú sík ez az E sík.)

A fentiekből látható, hogy egy m tartóegyenesű síksor által kimetszett sugársorhoz tartozó összes ciklus az $(\mathbf{m}^{\perp} + \mathbf{x}) \cap H$ alakban áll elő bármely $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ vektorra, ha a metszet nem üres.

Itt kitérünk a hiperboloid síkmetszeteire. A hiperboloid másodrendű felület, ezt egy affin síkkal metsszük el. Vagyis egy másodfokú és egy inhomogén lineáris egyenletű felület metszetének egyenletét keressük. Ez – a metsző síkban felvett koordinátarendszerben – másodfokú egyenletű görbe lesz. A másodrendű görbék osztályozási tétele szerint egy ilyen görbe ellipszis, hiperbola, parabola vagy elfajuló másodrendű görbe lehet. A hiperboloid nem tartalmaz egyenest, így a ciklusok ellipszisek, hiperbolák, parabolák vagy egyetlen pontból állók lehetnek (az üres metszeteket nem tekintjük ciklusnak).

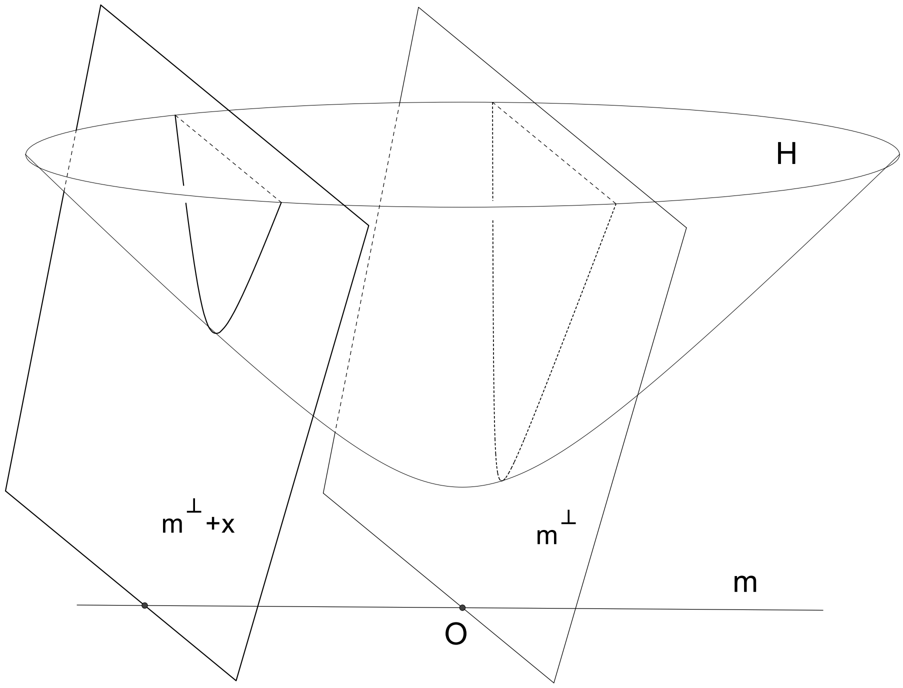
Ezek alapján megvizsgálhatjuk, hogy milyen alakúak lesznek a ciklusok az egyes sugársortípusoknál.

1. A metsző sugársoroknál $\mathbf{m}^{\perp}$ eltoltjai korlátos halmazokat metszenek ki a (teljes, $q(\mathbf{x}) = -1$ egyenletű) hiperboloidból, amikről tudjuk, hogy ellipszisek. Ha a pozitív köpenybe metszenek bele, akkor kapjuk a hiperbolikus sík köreit. (Beleértve a kizárólag a tartópontból álló ciklust.) A hiperbolikus körök tehát – a befoglaló térből nézve – vagy ellipszisek, vagy egyetlen pontból állnak (megjegyezzük, hogy speciális esetben euklideszi értelemben vett körök is lehetnek).



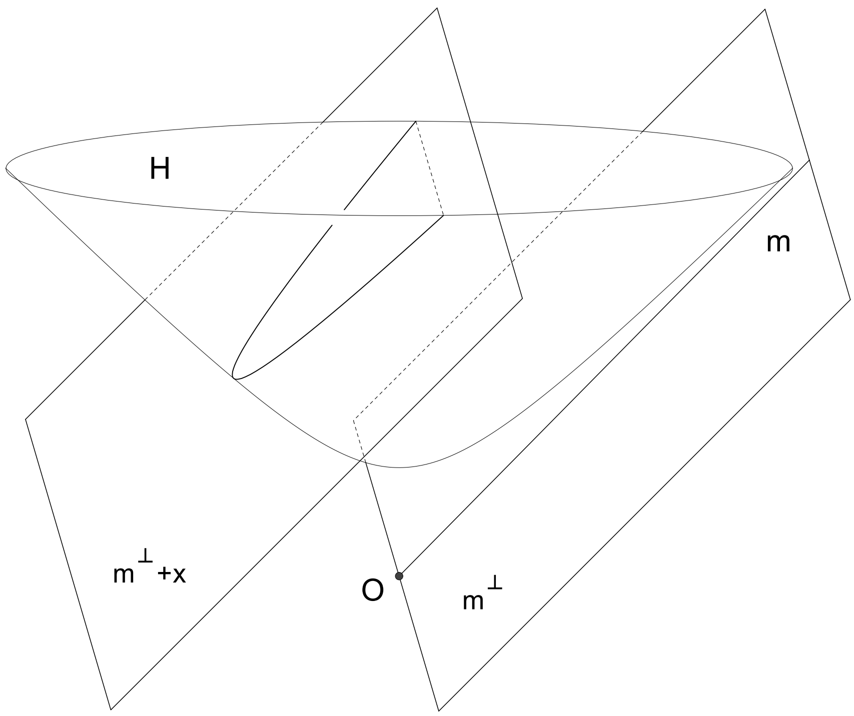
10. ábra Hiperbolikus kör

2. Az ultraparallel sugársoroknál $\mathbf{m}^{\perp}$ eltoltjainak metszetei a teljes hiperboloiddal két darabból állnak, vagyis hiperbolák. A *H*-val vett metszetek – vagyis a hiperciklusok – hiperbolaágak. Fontos megjegyezni, hogy a hiperciklusok – annak ellenére, hogy az egyenesekhez hasonlóan hiperbolaágak – nem egyenesek, mert nem alterek, hanem affin síkok metszik ki őket. Ez alól kivétel a közös merőleges.



11. ábra Hiperciklus

3. A parallel sugársoroknál $\mathbf{m}^{\perp}$ eltoltjainak metszetei a teljes hiperboloiddal nem korlátosak, és egy darabból állnak, tehát a paraciklusok parabolákat alkotnak.



12. ábra Paraciklus

A fentiekből könnyen adódik az a hiperbolikus geometriai tétel, mely szerint a sík bármely három különböző pontjára egy és csak egy ciklus illeszkedik. Ugyanis a hiperboloid három különböző pontja nem illeszkedhet egy $\mathbb{R}^3$-beli egyenesre (a hiperboloid nem tartalmaz egyenest), így egyértelműen meghatároznak egy affinsíkot, melynek metszete H-val ciklust fog adni.