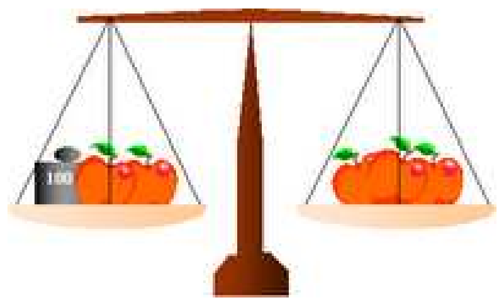
EÖTVÖS LÓRÁND TUDOMÁNY EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR
MATEMATIKA BSC
MATEMATIKA TANÁR SZAK

AZ ALGEBRA TANÍTÁSA JÁTÉKOKON KERESZTÜL ÁLTALÁNOS - ÉS KÖZÉPISKOLÁBAN

SZAKDOLGOZAT

2010./2011.



KÉSZÍTETTE: LACZKÓ ÁGNES
TÉMAVEZETŐ: SZEREDI ÉVA
FŐISKOLAI DOCENS
MATEMATIKATANÍTÁSI ÉS MÓDSZERTANI
KÖZPONT

Tartalomjegyzék

0.0 Témaválasztás indoklása

"Az egész gyermek olyan, mint egyetlen érzékszerv, minden hatásra reagál, amit emberek váltanak ki belőle. Hogy egész élete egészséges lesz-e vagy sem, attól függ, hogyan viselkednek a közelében."

(Rudolf Steiner)[1]

Tanárszakosként talán nem is annyira meglepő, hogy módszertanos szakdolgozatot írok, hiszen a tanítás során bármilyen tanárnak is készülnék, az egyik legfontosabb kérdés az, hogy milyen módszerrel szeretnék oktatni. Fontos, hogy tanárként megpróbáljuk a gyerekek érdekeit szem előtt tartani, és ennek megfelelően alkalmazni a módszereket. Az iskola mondhatni a második otthona a diáknak, így a szülei mellett a tanárok azok, akik a nevelésükben részt vesznek, és nem mindegy, hogy milyen módon teszik azt.

Igen fontosnak tartom, hogy már az egyetemi évek alatt is betekinthessünk a különféle módszerek elméletébe és tanításába, illetve hogy kiválaszthassuk a nekünk legmegfelelőbbet, legszimpatikusabbat, amellyel a legnagyobb sikert érhetjük el a gyerekeknél, hogy közelebb kerüljenek, megszeressék a matematikát, vagy éppen az adott tanítandó tárgyat.

Amikor én középiskolás voltam, még nem használtak kompetencia alapú oktatást az iskolánkban. Abban az időben kezdtek el tanfolyamokra, továbbképzésekre járni tanáraink, így én ezzel a módszerrel csak az egyetem második évében ismerkedhettem meg. Azonban mondhatni „első látásra beleszerettem". S ezt köszönhetem a *Digitális tananyagok az oktatásban* című órának, illetve Szeredi Éva tanárnőnek, aki „véletlenül" lett az Elemi matematika 1. tanárom - ugyanis az eredetileg meghirdetett tanár otthonmaradásra kényszerült. Nagyon szimpatikus volt az előadásmódja, az a módszer, amit alkalmazott, hogy minket még jobban munkára biztasson.

Már középiskolás koromban is éreztem, hogy kellene valami más módszer, amivel a diákoknak könnyebben lehetne matekot tanítani, tudván azt, hogy a tanulók nagy része nehéznek találja a matematikát. Amikor engem megkértek

[1] http://ttneni.spaces.live.com/

diáktársaim, hogy segítsek nekik, nem csak precíz megfogalmazásokkal, hanem szemléletesen is próbáltam megértetni velük a problémás feladatot, vagy fogalmat, aminek a matektanárom kevésbé örült, a diáktársaim azonban annál inkább, mert végre megértették az adott problémát. Bár ekkor még nem is hallottam erről a fajta tanítási módszerről, mégis bizonyos szinten sikeresen alkalmaztam.

Nagyon megörültem, amikor az egyetemen megtudtam, hogy igen is van ilyen módszer, melyet én is megtapasztalhatok néhány óra keretében. Ekkor már biztosan tudtam, hogy ha én tanítani fogok, ezt a módszert fogom alkalmazni. Tehát nem is volt kérdés, hogy miből fogom a dolgozatomat megírni.

Azt gondolom, hogy még így sem tanulunk eleget a különféle módszerekről, hiszen a Digitális tananyagok óra is csak a pedagógia keretek között választható óra volt, amit nem minden hallgató végzett el, tehát sokan nem is vettek részt olyan órán, amik ezzel a témával foglalkoznának. Bár egyre többet lehet olvasni a különféle módszerekről, de igazán ez még egy olyan rendszer, amely most kezdi kiforrni magát. Egyre több iskola alkalmazza, és egyre több pedagógus vesz részt ilyen fajta képzéseken. Úgy gondolom, hogy hamarosan alapvető oktatási forma lesz a magyar iskolákban, de ahhoz már szerintem az egyetem alatt is nagyobb hangsúlyt kellene fektetni rá, hogy a tanárként végzős hallgatók megismerjék ezt a fajta lehetőséget is. Remélem a mesterképzés keretein belül a pedagógiai órákon még több tanulmányt folytathatunk ebben a témában, és gyakorlatokon is részt vehetünk, hogy megtapasztalhassuk saját magunk is.

Szakdolgozatom témájául az algebra, és azon belül is az egyenletek tanítását választottam. Az algebra általános- és középiskolás éveim alatt is a kedvencem volt, ezért úgy döntöttem, hogy megfelelő témája lesz a dolgozatomnak, összekapcsolva a másik kedvencemmel, a módszertannal.

A gyerekeket a legjobban valamiféle játékkal lehet elcsábítani arra, hogy megtanuljanak új dolgot, megismerkedjenek új fogalommal. A játék során ezt a fogalmat nem csak megismerik, hanem megérthetik azt is, hogy mire jó, mire használható az adott fogalom. A játék azonban nem csak kicsi gyerekeknél működik. Minden ember egy picit gyerek is, ez igaz egy serdülő, vagy kamasz diákra, de akár egy egyetemista hallgatóra is. Nyilván nem ugyanazt a játéktípust kell alkalmazni, hanem vagy továbbfejleszteni az ő szintjükre, vagy kitalálni nekik is egy működőképes játékot. Lehet jutalmazni őket, s ezzel is inspirálni arra, hogy próbálkozzanak a feladatok megoldásával, gyakorlásával. A mai világban a tudományok olyan magas szintre fejlődtek, - és ez így fog haladni továbbra is – hogy az oktatás színvonalát is feljebb emelték a különféle interaktív tárgyakkal.

Szerettem volna már most – mielőtt tanár lennék - egy picit megismerni és bemutatni néhány játékot, melyek számítógépes verziója is elkészült. Olyan játékok, amelyek elősegítik a megértést a szemléltetéssel, könnyed kezelhetőséggel, átláthatósággal rendelkeznek. Olyan a nyelvezetük, amelyet minden korosztály megért. Ezek az eszközök a mai világban könnyen elérhetőek. Hiszen a gyerekek manapság már szinte a számítógépeken nőnek fel, korán megtanulják használni azt. Így az ilyen matematikai oktató programokat is szívesebben használják, mert digitálisan elérhetőek. Ráadásul ingyenesek, és az interneten is megtalálhatóak. Színesek, figyelemfelkeltőek, melyek könnyen felkeltik a gyerekek érdeklődését.

Mielőtt bemutatnám ezeket a játékokat, szeretnék egy áttekintést készíteni az egyenletekről, és az ezekhez vezető fogalmakról, algebrai ismeretekről. Fontosnak tartom, hogy legyen egy képem arról, hogy mik is azok az elemek, amelyek felépítik az algebra ezen területét akár általános, akár középiskolában, de akár még az egyetemen is. Ez az összefoglaló azt a célt szolgálja, hogy láthassuk, hogyan épülnek fel az egyenletek az apróbb részletektől kiindulva.

1.0 Bevezetés, célkitűzés

A dolgozatom célja az, hogy kicsit jobban megismerkedjek a módszertannal, olyan dolgokat olvassak, amelyek segítenek kicsit megkönnyíteni a tanítást az által, hogy játékokat használnak. Mindenekelőtt azonban szeretném összeszedni, és rendszerezni az általános-, középiskolás és egyetemen tanult algebra ismereteket az egyenletekkel kapcsolatban. Fontos, hogy átlássam ezt a tanmenetet, mert így olyan játékokat és módszereket is ki lehet találni, amelyek az évek során folyamatosan alkalmazhatóak, és csak abban kell módosítani, hogy a megfelelő tananyagot tartalmazzák.

A dolgozatom három nagyobb részre osztható. Az első rész egy áttekintés az általános- és középiskolában tanult algebra ismeretekről, főleg egyenletekhez kapcsolódóan. Az alsó tagozat első osztályától indul, teljesen a nyolcadik osztállyal bezárólag veszi át a tananyagot átfogóan. A felső tagozatos tananyagban kezdődik el igazán az egyenletekkel kapcsolatos fogalmak, megoldások ismertetése. Több példán is bemutatom az éppen tanult fogalmakat. Majd időben előrehaladva a középiskolás tanulmányok kerülnek előtérbe. Itt már komoly egyenletmegoldásokkal is foglalkoznak a diákok. A második rész az egyetemi anyagra épül, amelyben megpróbáltam összefoglalni azokat a dolgokat, amelyek egyenletek szempontjából fontosak lehetnek. Az utolsó rész pedig három játékot tartalmaz, amelyek az egésze kicsi gyerekeknek is segíthetnek már, hogy megismerkedjenek a nyitott mondatok, illetve egyenletek megoldásával, és az azokhoz kapcsolódó fogalmakkal.

2.0 Algebra tananyag elsőtől a középiskola tizenkettedik osztályáig

Az egyenletek tanítása nagyon sok matematikai fogalmat érint, amit az első osztálytól kezdve folyamatosan építünk, mélyítünk a tanítás során. Az egyenletek valójában speciális nyitott mondatok, melyek algebrai kifejezések egyenlőségére vonatkoznak.

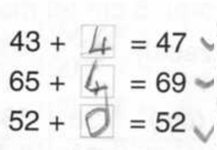
Az egyenletek tanításakor egy sor fontos és mély matematikai fogalommal találkoznak, ismerkednek már kezdetektől fogva a gyerekek. Ezek közül talán a legfontosabbak: az egyenlőség, a változó, a műveletek, műveleti tulajdonságok, egyenletek ekvivalenciája, igazsághalmaz, alaphalmaz. A következő részben azt nézem meg, hogyan építi fel ezeket a fogalmakat az alsó és felső tagozat, valamint a középiskola.

2.1 Nyitott mondatok az alsó tagozaton, az egyenletek tanításának alapjai

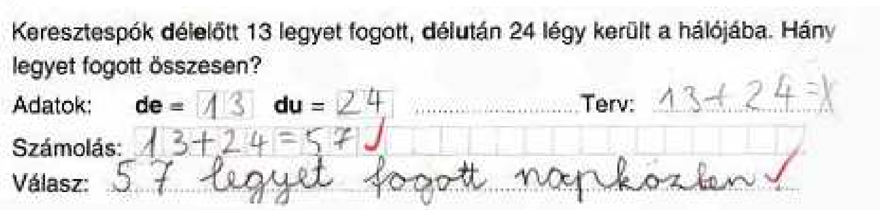
Az alsó tagozaton az egyenletekkel kapcsolatos fogalmak közül az egyenlőség, a változó és az egész számokkal végzett műveletek azok, amiket elkezdünk építeni.

Már az általános iskola első osztályában felmerül az a kérdés, hogy melyik a nagyobb, melyek egyenlők? A gyerekek nagyon ügyesen, szemléltetés segítségével nagyságrendbe tudják sorolni tanulótársaikat, megállapítják közülük kik egyforma magasságúak. Tovább fejleszthetik egyenlőségről való képüket az alapján, hogy az egyenlő dolgokat darabokra bontják, széthúzzák, felosztják, de tudják, hogy azok a dolgok ettől még egyenlők maradnak.

Az első és második osztályban megismerkednek a kicsi természetes számok írásával, az alapműveletek jeleivel. Ekkor már továbbfejleszthetik az egyenlőség használatát úgy, hogy számokat adnak össze és kiszámolják az értéküket. A szöveges feladatok megoldása során elkezdenek nyitott mondatokat írni a diákok. Többféle jelölést is használnak az ismeretlen mennyiség megjelenítésére, üres keretet, betűt. Íme két példa:



üres négyzetet használnak [2]



betűt is használnak az ismeretlen jelölésére [3]

Az ábrákon a 8 éves keresztlányom második osztályos matematika munkafüzetének részleteit láthatjuk. A második ábra szemlélteti azt, hogy a feladat mennyire alaposan rávezeti a szöveges feladatok megoldására a tanulókat. Először adatokat kér, alapbetűket és egyenlőséget használva – megkönnyítve ezzel a feladatot -, majd egy nyitott mondatot, melyet valamelyik alapművelet segítségével kell felírni. Készíteniük kell megoldási tervet, majd kiszámolni a megoldást, végül kell egy szöveges válasz is. Nekünk itt a

[2] Matematika 2. gyakorló, Első kötet, 33.
[3] Matematika 2. gyakorló, Második kötet, 106.

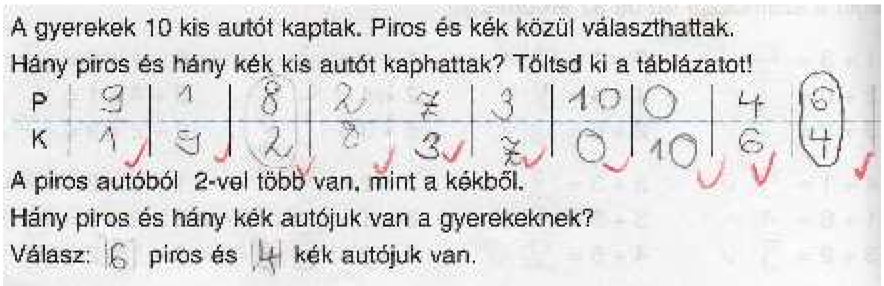
legfontosabb a nyitott mondat, melyet a feladat szövege alapján írhatnak fel. Már ilyen korán látják azt, hogy egy betű is jelölhet számot, akkor is, ha nem tudjuk a pontos értékét, azonban kíváncsiak vagyunk rá. A gyakorlások során egyszerűsödik a megoldás lejegyzése, de még felső tagozatban is fontos marad, hogy a leírásból kiderüljön a tanuló gondolatmenete.

Fontos feladat már a kezdetektől egy-egy szám többféle alakban való megadása.

Például: $7 = 5 + 2 = 4 + 3$

Olyan feladatokat is kapnak már korán, amelyekben (rejtetten) több változó is szerepelhet.

Lássunk egy példát:


A gyerekek 10 kis autót kaptak. Piros és kék közül választhattak.
Hány piros és hány kék kis autót kaphattak? Töltsd ki a táblázatot!

P	9	1	8	2	7	3	10	0	4	6
K	1	9	2	8	3	7	0	10	6	4

A piros autóból 2-vel több van, mint a kékből.
Hány piros és hány kék autójuk van a gyerekeknek?
Válasz: 6 piros és 4 kék autójuk van.

Igazából itt azt használják ki, hogy egy számot többféleképpen is megkaphatunk két szám összegeként[4]

Lassan előkészítésre kerülnek a szorzás és osztás fogalmai is. Ezek is szerepet kapnak az egyenlet megoldások során. Tapasztalják, hogy szorzás inverze az osztás, és fordítva, mint ahogyan azt az összeadás-kivonás párosnál látták. Egy ideig a szorzást még helyettesíthetik összeadással, de a szorzótábla folyamatos tanulása már segít, hogy ez elhagyható legyen. Addigra a gyerekekben is tudatosul, hogy egy számot valahányszor összeadunk, ugyanazt az eredményt kapjuk, mint ha megszoroztuk volna azzal a számmal.

Például: $15 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 5 \cdot 3 = 15$

Láthatjuk, hogy a 15-öt felírhatjuk öt darab hármas összegeként, de szorzatalakban is.

A négy alapművelet egyre alaposabb megismerésével bonyolódnak a szöveges feladatok is. Az egyenletek tanulásának nagyon fontos lépése, hogy a

4 Matematika 2. gyakorló, Első kötet, 6

gyerekek megtanulják a „Gondoltam egy számot” nevezetű feladatok megoldását.

> Lássunk egy példát: „Gondoltam egy számot. A szomszéd hozzáadott még egyszer annyit és még 6-ot. Felét meg még 1-et a Dunába dobtam. Így végül 4 maradt. Mit gondoltam?” [5]
>
> Hogyan gondolkodhat egy 8-9 éves gyerek? Általában hátulról indul el. Tudjuk, hogy 4 maradt, és azt úgy kaptuk, hogy valamiből elvettünk 1-et, tehát az a valami az 5 volt. Az ötről azt is tudjuk, hogy ez a fele, amit kidobtunk a Dunába. Márpedig az 5 a 10-nek a fele, ami még a kidobás előtt volt. Tudjuk, hogy valami kétszereséhez adtunk 6-ot, és így kaptuk a 10-et. Tehát az a valami nem lehet más, mint a 2.

Terítékre kerül a műveletek helyes sorrendje, meg kell tanulniuk, hogy a szorzás és az osztás első helyen szerepel, és csak az után jöhet az összeadás-kivonás páros. Megismerkednek a felcserélhetőségi tulajdonsággal is, amely szerint mindegy, hogy az első taghoz adom a másodikat, vagy a másodikhoz az elsőt, illetve az előbbivel szorzom az utóbbit, esetleg fordítva.

Például: $1 + 5 = 5 + 1$ $\qquad$ $2 \cdot 6 = 6 \cdot 2$

Harmadik osztályban már zárójelet tartalmazó feladatokkal is dolgoznak. Ez is bekerül a „Gondoltam egy számot” feladatokba, így vezeti rá a gyerekeket ennek használatára, és fontosságára. Foglalkoznak az összeg, különbség, szorzat, hányados változásaival is.

Ebben az évben bevezetésre kerül az egységtört fogalma. Alapfeladatuk az, hogy egy egészet egyenlő részekre osszanak. Megtanulják az egységtörtek többszöröseinek előállítását. Ehhez többféle szemléltetési lehetőségünk is van.

Óra segítségével való negyedelés szemléltetése

Negyedik osztályban tudatosítják igazából – amit már az előző évfolyamokban szemléletesen megtapasztalhattak - az összeadás-kivonás tulajdonságait, hogy mitől és hogyan változik az összeg, illetve különbség, és mikor marad változatlan. A tagok

5 Péter Róza – Gallai Tibor, Népszerű algebra, 9

felcserélhetősége és csoportosíthatósága is ekkor válik tudatossá. Hasonló a helyzet a szorzás-osztás jellemzőivel is, hogyan változik a szorzat, illetve hányados, valamint tapasztalatokat szereznek az összeg különbség szorzásáról, osztásáról (a disztributivitásról) is.

Ebben az időszakban nagyon fontos kialakítani a művelet végzés sorrendjének biztos ismeretét. Tapasztalatot szereznek arról, hogyan hagyhatnak el egy-egy pár zárójelet a nyitott mondatból. A zárójelfelbontást itt még nem tudjuk hatékonyan tanítani, hiszen addig, amíg a zárójelben csak számok vannak, addig a gyerekek el tudják végezni a benne lévő műveleteket, anélkül, hogy azt felbontanák. Éppen ez az oka annak, hogy a zárójelfelbontás szisztematikus tanítása csak az algebrai kifejezések bevezetése után kerül sorra.

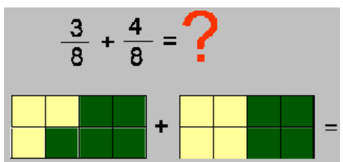
Ez a korosztály már eljut arra a szintre, hogy egy egyszerű nyitott mondatba behelyettesít, és el tudja dönteni, hogy a behelyettesített érték igazzá teszi-e a mondatot, vagy sem – része-e az igazsághalmaznak, megoldáshalmaznak, vagy sem. Bizonyos esetekben képesek az összes megoldást megkeresni, tapasztalják, hogy egy feladatnak lehet több megoldása is, és előfordulhat az is, hogy nincs megoldása az adott halmazon.

A nyitott mondatoknak egy részhalmazát alkotják az egyenletek. A továbbiakban már csak ezzel szeretnék részletesen foglalkozni.

Találkoznak már nem csak egy, hanem egyszerű kétváltozós egyenletekkel is, melyeket tervszerű próbálgatással, megsejtéssel és becsléssel meg lehet oldani és megtanulják kiválasztani a megfelelőt, egy-egy adott feladat megoldásához. Valamint a megoldásukat könnyen ellenőrizni is tudják.

Egyre nagyobb szerepet kap a szöveges feladat. Ezek megoldása többféle fontos kompetenciát fejleszt: a szövegértést, a problémamegoldó képességüket, valamint fontos szerepet játszik a műveletek értelmezése, összefüggések megfogalmazása, műveleti kapcsolatok konkretizálása területén is.

Továbbgondolásra kerül a korábban már tanult egységtört fogalma is. Sorra következik az egész és az egységtört viszonyának összehasonlítása. Megtanulják leolvasni, sorrendbe állítani és megkeresni az egyenlő nevezőjű tört alakú



Azonos nevezőjű törtek összeadása

számokat, illetve megismerkednek az alapműveletekkel is. Szintén nagy segítséget nyújt ebben a szemléltetés. A törtmennyiségeket színes rudakkal, tortamodellel, órával szemléltethetjük. Felhasználják a mértékegységek közötti átváltást is, például úgy, hogy rajzolnak egy 1 deciméter hosszú, és mondjuk 1 centiméter magas rudat, és felosztják ezt tíz egyenlő részre. Ebből beszíneznek hármat pirosra, négyet kékre, így láthatják a három illetve négy tized jelentését is, illetve kiszámolhatják, hogy ezeket a színezett részeket összeadva hetet kapunk, ami az egy deciméterhez képest hét tized. Ez a feladat gyakoroltatja az egyenlő részre osztást, a mértékegységek átváltását, a sorberendezést is, hiszen látják, hogy a három tized kisebb, mint a négy tized, illetve ha összeadják őket milyen eredményre jutnak.

2.2 Egyenletek a felső tagozaton, mérlegelv, szöveges feladatok

A felső tagozaton az egyenletekhez kapcsolódó fogalmak tovább bővülnek - a természetes számok körének kiterjesztésével, új műveletek bevezetésével, egyenletmegoldási technikák tanításával, az alaphalmaz, megoldáshalmaz fogalmának tisztázásával és az egyenletek ekvivalenciájáról szerzett tapasztalatokkal.

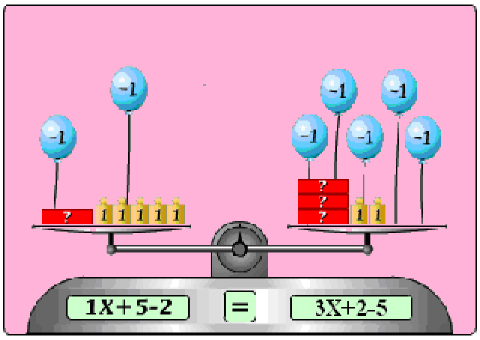
Az ötödik osztályban a negatív számok elmélyítésével kezdődnek az algebrai ismeretek. Megtanulják a negatív számok többféle előállítását, majd megismerkednek az abszolút érték és ellentett fogalmával is. A műveleti ismereteiket ez által már kibővítik az egész számok körére.

Felelevenítik az egységtörtek fogalmát, és amit eddig tanultak a törtekről. Megismerkednek a több egész egyenlő részekre osztásával. Elsajátítják az egyszerűsítés-bővítés fogalmát, s már nem csak az azonos nevezőjű törtekkel, hanem különbözőekkel is foglalkoznak. Fel kell ismerniük, hogy egy-egy törtnek többféle alakja is lehet. Ennél a témánál is megjelennek a negatív számok, melyek több figyelmet követelnek a használatuk során. Továbbá terítékre kerül a tizedes tört fogalma, egyszerűsítése, bővítése és kerekítése is. Megtanulnak összeadni, kivonni, szorozni és osztani is vele.

A hatodik osztály nagy hangsúlyt fektet az eddig tudás ismétlésére és főleg az elmélyítésére. Ebben kiemelt szerepet kapnak a törtekkel és tizedes törtekkel való műveletvégzések. Már megismerkedtek a törtek, illetve tizedes törtek egész számokkal való összeadásával, kivonásával, szorzásával, illetve osztásával. Most kibővítik ezt a tudást, egészszámot vagy törtet törttel való szorzással. Az osztáshoz szükség van a korábban már tanult reciprok fogalomra. Ugyan így elsajátítják az egész számok vagy tizedes törtek tizedes törttel való szorzását, osztását. S bevezetésre kerül a törttel való osztás, melyet törtek szorzására vezetünk vissza, míg a tizedes törtekkel való szorzás-osztást egész számok szorzására-osztására vezetjük vissza. Ismerniük kell a törtek előállítását tizedes tört alakban és fordítva, tizedes törtet két egész szám hányadosaként is megtanulnak felírni. Megismerkednek a racionális szám fogalmával.

Ebben a korban az egyenlet, egyenlőtlenség helyett a nyitott mondat kifejezést használjuk. A számhalmazon megadott nyitott mondatok ezeknek egy részét képezik. Ezeknek az igazsághalmazát többféle módon is kereshetjük – próbálgatással, majd később lebontogatással.

Azonban van egy másik módszer is, amit alkalmazhatunk a megoldások során, ez pedig a mérlegelv. Amely nagyon fontos, hiszen nagyon jól szemlélteti azokat az átalakításokat, amelyek elvégzése során az egyenletek megoldáshalmaza nem változik. Nézzünk ismét egy feladatot, mégpedig az eddig is használt „Gondoltam egy számot” típusút.



Mérlegelv szemléltetése kétkarú mérleggel, melyen jól láthatóak a különféle előjelek, illetve nemek

Példa:

„Gondoltam egy számot, vettem a 9-szeresét, ebből elvettem 180-at, és így éppen a gondolt szám maradt.”[6]

Ha ismét hátulról indulunk el, akkor tudjuk, hogy a számhoz, amit keresünk 180-at adva a szám kilencszeresét kapjuk. Azonban itt egy olyan helyzetbe jutunk, ahonnan nem tudunk tovább haladni.

6 Péter Rózsa – Gallai Tibor, Népszerű algebra, 14

Mivel ez a feladat a mérlegelvnél található, egyértelmű, hogy alkalmaznunk kell a megengedett műveleteket. Mik is ezek? Mindkét oldalhoz ugyan annyit adunk, vagy veszünk el, ha a rajta lévő mennyiségeket valahányszorosára növeljük, vagy valahányad részére csökkentjük. Arra kell odafigyelni, hogy ha az egyik oldalon elvégeztük a műveletet, akkor tegyük meg ugyan ezt a másik oldalon is. Ezzel a tudással már újra nekirugaszkodhatunk a feladatunknak. Mindkét oldalon van a gondolt szám, de az egyik oldalon 9-es szerepel, míg a másik oldalon csak egymagában áll. Az egyedülálló ismeretlen vegyük el, de figyeljünk, hogy mindkét oldalból. Ekkor tudjuk, hogy 8 ismeretlen lesz egyenlő 180-nal. Most ismét alkalmazzunk megengedett műveletet, mégpedig mindkét oldalt változtassuk a nyolcadára. Ekkor láthatjuk, hogy az ismeretlenünk nem más, mint 22,5.

Miért jobb tehát a mérlegelv a lebontogatásnál? Láthattuk, hogy lebontogatással, vagy visszafelé gondolkodással zsákutcába jutottunk, azonban a mérlegelv tökéletesen alkalmazható ilyen esetekben.

Ha az egyenletbe az alaphalmaz minden elemét behelyettesítve igaz állítást kapunk, akkor azt azonosságnak nevezzük. Ebben az esetben az igazsághalmaz megegyezik az alaphalmazzal. Ha minden elem behelyettesítésével hamis állításhoz jutunk, akkor az egyenletnek nincs megoldása.

A hetedik osztály a hatványozással indul. Megismerkedhetnek nulla és az ettől különböző pozitív természetes szám kitevőjű hatványokkal és azok azonosságaival is. Illetve némi betekintést is kapnak a negatív kitevőjű hatványokba. Fő feladatuk, hogy fel tudják írni ezeket azonos tényezők szorzataként, illetve tudjanak egyenlő tényezőkből álló szorzatot hatványalakba felírni. A hatványozás elmélyítése fontos szerepet játszik, hiszen ezzel alapozzák meg a későbbi másod, sőt még később a többed fokú egyenletek megoldását.

Korábban már áttekintettük, hogy hogyan tudunk különféle nyitott mondatokat és egyenleteket megoldani. Hetedik osztályban már olyan feladatokat is kapnak a diákok, amiben nem egy, hanem több tagban is szerepelnek változók, és ahhoz, hogy az egyenletet meg tudják oldani, ezeket a változókat össze kell vonni.

$$3x + 5 - 6x + 8 + 7x - 2 = 3x - 6x + 7x + 5 + 8 - 2 = 4x + 11$$

Hetedik osztályos korukra a diákok már több egyenletmegoldó módszert is megismerhettek. Most összegzem az eddig tanultakat.

Lebontogatással ismerkedtünk meg legelőször.

Példa:

$$\frac{5x+4}{3} + 10 = 3$$

Melyik az a szám, amelyhez 10-et adva 3-at kapunk?

$$\frac{5x+4}{3} + 10 = 3 \quad \Rightarrow \quad \square = 3 - 10 = -7$$

Melyik az a szám, amelyet 3-mal osztva -7-et kapunk?

$$\frac{5x+4}{3} = -7 \quad \Rightarrow \quad \square = (-7) \cdot 3 = -21$$

Melyik az a szám, amelyhez 4-et adva -21-et kapunk?

$$5x + 4 = -21 \quad \Rightarrow \quad \square = -21 - 4 = -25$$

Melyik az a szám, amelynek az 5-szöröse -25?

$$5x = -25 \quad \Rightarrow \quad \square = \frac{-25}{5} = -5$$

Ezzel a módszerrel azonban nem tudunk minden egyenletet megoldani.

Tanultunk egy másik módszert is, a mérlegelvet.

Példa: $5x + 3x - 7 = 20 + 2x - 9$

Összevonjuk az egynemű kifejezéseket.

$$8x - 7 = 2x + 11$$

Mindkét oldalból levonunk 2x-et.

$$6x - 7 = 11$$

Mindkét oldalt növeljük 7-tel.

$$6x = 18$$

Mindkét oldal hatodát vesszük.

$x = 3$

Igazából hasonló módon csináljuk mindkét módszert.

Az egyenletek megoldásakor arra törekszünk, hogy az egyik oldalon csak az ismeretlen, a másik oldalon pedig csak egy szám maradjon. Ezért az egyenlet mindkét oldalához ugyanazt a számot vagy kifejezést adhatjuk hozzá, illetve mindkét oldalból ugyanazt a számot, illetve kifejezést vonhatjuk ki, és mindkét oldalt ugyanazzal a nullától különböző számmal szorozhatjuk, illetve oszthatjuk. A lépések elvégzése során az egyenlet egyre egyszerűbb lesz, végül eljutunk egy olyan egyszerű egyenlethez, amelyről közvetlenül leolvashatjuk a megoldást. Az egyenlet megoldását más szóval az egyenlet gyökének is szoktuk nevezni. Azt is megfigyelhetjük, hogy az egyenlet gyöke a megoldás során kapott valamennyi új egyenletnek is gyöke lesz.

Nyolcadik osztályban folytatódik a matematika nyelvére való lefordítás, mégpedig szöveges feladatok segítségével. Már eddig is nagyon fontos szerepet játszottak a szöveges feladatok. Egy adott szöveg alapján maguknak kell lefordítani a matematika nyelvére a problémát, s ezekből az adatokból felírni az egyenletet. Azonban érdemes a megoldás előtt egy becslést adni a várható eredményre, így elkerülhetőek a nagyobb tévedések. A megoldás után pedig célszerű ellenőrizni az eredményt, hogy valóban megfelel-e a feladat feltételeinek. Végül egy szöveges válasszal teljessé tehetjük a feladat megoldását.

Nincs olyan általános recept, amely minden szöveges feladat megoldására alkalmazható lehetne. Azonban van néhány módszer, melyeket nem árt elsajátítani, hiszen sok esetben alkalmazható. Lássuk most ezeket néhány példán keresztül.

Példa:

1. Pista kétféle bélyegből 12 db-ot vett 400 Ft értékben. A bélyegek mindegyike 17 Ft vagy 45 Ft értékű volt. Hány darabot vett Pista az egyik fajta bélyegből, és hányat a másikból?

Megoldás:

Ha a 17 Ft-os bélyegek száma x

akkor a 45 Ft-os bélyegek száma $12 - x$

A 17 Ft-os bélyegek értéke $17\,x$

a 45 Ft-os bélyegek értéke $45\,(12 - x)$

A kétféle bélyeg értéke összesen $17\,x + 45\,(12 - x)$

Pista 400 Ft-ot fizetett, így $17\,x + 45\,(12 - x) = 400$

$$17\,x + 54 - 45\,x = 400$$

$$140 = 28\,x$$

$$5 = x$$

Tehát Pista a 17 Ft-os bélyegből 5 db-ot, a másikból pedig 7 db-ot vásárolt.

2. Egy bélyegautomatában összesen 770 Ft van 20 Ft-osokban és 50 Ft-osokban. Háromszor annyi 20 Ft-os van benne, mint 50 Ft-os. Hány darab van az egyes érmékből az automatában?

Megoldás:

Ha az 50 Ft-osok száma x

akkor a 20 Ft-osok száma $3\,x$

Az 50 Ft-osok értéke $50\,x$

a 20 Ft-osok értéke $20 \cdot 3\,x$

Az automatában lévő pénz éréke összesen 770

Ez az egyenlet írható fel $50\,x + 20 \cdot 3\,x = 770$

$$110\,x = 770$$

$$x = 7$$

Tehát az 50 Ft-osok száma 7, a 20 Ft-osoké 21.

3. Egy kétjegyű számban 3-szor annyi tízes van, mint egyes. Ha a szám jegyeit felcseréljük, 36-tal kisebb számot kapunk. Melyik ez a kétjegyű szám?

Megoldás:

Tegyük fel, hogy az egyesek helyén áll x

ekkor a tízesek helyén $3\,x$

A kétjegyzű szám $10 \cdot 3x + x$

A számjegyek felcserélésével kapott szám $10x + 3x$

Az eredeti szám 36-tal nagyobb

$$10 \cdot 3x + x - 36 = 10x + 3x$$
$$31x - 36 = 13x$$
$$18x - 36 = 0$$
$$x = 2$$

A kétjegyű szám a 62.

A példákon láthatjuk, hogy nem csak a kész egyenletet írtuk fel, hanem az egyes részleteket is. Fontos az is, hogy feltüntessük a változók jelentését szöveggel. Sokat segíthet, ha egy kiválasztott értékre kipróbálják, hogy teljesíti-e a szövegben előírt feltételeket, és ennek a számolásnak a menetét követve írják fel az egyenletet. Sokszor segít a rajz, vagy táblázat is. Fontos megjegyezni, hogy az ellenőrzést nem a felírt egyenlet alapján tesszük, hanem a feladat szövege segítségével.

Hetedik osztályban bevezetésre került a hatványozás, most új anyagként a gyökvonás kerül terítékre. Tapasztalatokat szereznek és megalapozzák a középiskolában részletesebben tanult négyzetgyökvonás műveletét. Fontos, hogy lássák a hatványozás és a négyzetgyökvonás fogalmai közti kapcsolatot. Betekintést nyerhetnek az irracionális számok világába is.

Az általános iskola megtanítja az alapműveleteket, a hatványozást, a négyzetgyökvonás alapjait, a zárójelezés használatát, az egyszerű, elsőfokú egyenlet megoldásának módszereit.

2.3 Középiskolás algebrai ismeretek

A középiskolában az egyenletekről szerzett ismereteket bővítjük - a magasabb fokú, illetve nem csak algebrai egyenletek megoldásával, az egyenlet értelmezési tartományának, ekvivalens átalakításoknak a mélyebb vizsgálatával.

A diákok a számkörökről való ismeretüket kibővítik az irracionális számok alaposabb megismerésével. Megfigyelik, hogy racionális és irracionális számok összeadása, szorzása esetén végeredmény melyik számkörhöz tartozik. A valós számokkal és azok tulajdonságaival - kommutativitás, asszociativitás és disztributivitás - már megismerkedtek az általános iskolás évek folyamán. A műveletek sorrendjével is tisztában vannak. Nyolcadik osztályban már sok mindent tudnak algebrai átalakításokról, megismerkedtek a kiemeléssel, és találkoztak néhány más szorzattá alakítási módszerrel. Fontos szerepe lesz a korábban már tanult egész kitevőjű hatványozásnak, hiszen hamarosan bevezetésre kerülnek a másodfokú egyenletek.

Az algebrai kifejezés fogalmát már felső tagozat elkezdi megalapozni. Középiskolában már csoportosítják az algebrai kifejezések fajtáit, több szempont alapján is. Az első a bennük szereplő változók száma szerinti megkülönböztetés. Vannak egyváltozós és többváltozós kifejezések. Korábban az egyenletekben elsősorban algebrai egész kifejezéssekkel találkoztak, de középiskolában már megoldanak algebrai törtkifejezéseket tartalmazó egyenleteket is. Egy fontos csoportosítási szempont az egész kifejezések körében a fokszám szerinti megkülönböztetés. Az egytagú kifejezés fokszámán a benne szereplő változó tényezők darabszámát értjük.

Például: $\boldsymbol{a\,b^2 = a\,b\,b}$, ennek a fokszáma 3, hiszen annyi ismeretlen szerepel benne.

Az algebrai egész kifejezések fokszáma a tagok fokszámai közül a legmagasabbal megegyező.

Egy nagyon fontos egyenlet típussal is megismerkedhetünk ebben az osztályban, mégpedig az abszolút értékes egyenlettel. Ehhez azonban ismernünk kell az abszolút érték fogalmát. Tudjuk, hogy pozitív szám abszolút értéke önmaga, negatív számé pedig a szám ellentettje, tehát az is pozitív. Nulla abszolút értéke természetesen nulla. Az abszolút értékes egyenletek tartalmazzák egy vagy több kifejezés abszolút értékét

Szintén fontos jelentőséggel bírnak a törtes egyenletek, ahol a nevezőben is feltűnhet változó. Azaz azokat az egyenleteket vizsgáljuk, amelyek tartalmaznak algebrai törtkifejezéseket. Itt azonban egy nagyon fontos lépéssel kell kezdenünk az egyenlet megoldását, mégpedig az értelmezési tartomány megadásával. Az értelmezési tartomány az alaphalmaz azon legbővebb részhalmaza, amelyen az egyenletben szereplő kifejezések értelmezve vannak. Ha mégis elmaradna a tartomány megadása a megoldás előtt, akkor nagyon fontos, hogy a megoldás(oka)t ellenőrizzük. Nézzünk egy példát a törtes egyenlet megoldására.

Példa: $\frac{4x^2-16}{(x+2)^2}=3$

Az értelmezési tartomány megállapítása: az egyenlet bal oldala nincs értelmezve, ha a tört nevezője 0, azaz $(x+2)^2=0$. Egy szám négyzete pontosan akkor 0, ha maga a szám is 0, azaz $x+2=0$. Tehát a törtkifejezés nincs értelmezve az $x=-2$ esetén. Tehát az egyenlet megoldásait az ℝ\{-2} halmazon keressük.

Átalakítjuk az egyenlet bal oldalát: a számlálóban kiemeljük a 4-et, és szorzattá alakítunk a nevezetes azonosság segítségével, majd egyszerűsítjük a törtet.

$$\frac{4x^2-16}{(x+2)^2}=\frac{4(x^2-4)}{(x+2)^2}=\frac{4(x-2)(x+2)}{(x+2)^2}=\frac{4(x-2)}{(x+2)^1}=\frac{4x-8}{x+2}$$

Az egyszerűsítés ekvivalens átalakítás volt, hiszen előre tettünk már egy kikötést. Eredeti egyenletünk tehát ekvivalens az alábbi egyenlettel: $\frac{4x-8}{x+2}=3$

A kikötés miatt most $x+2$ -vel való szorzás ekvivalens átalakítás. Tehát eredeti egyenletünk ekvivalens a $4x-8=3(x+2)$ egyenlettel az értelmezési tartományon.

$$4x-8=3(x+2)$$

$$4x-8=3x+6$$

$$x-8=6$$

$$x=14$$

Az egyetlen megoldás az $x=14$, hiszen a feladat megoldása során az ℝ\{-2} halmazon ekvivalens átalakításokat végeztem.

Most, hogy már megismerkedhettünk az egyváltozós és többváltozós kifejezésekkel, meghatározhatjuk az egyenletrendszer fogalmát is. Megismerkedhetünk például a kétismeretlenes egyenletrendszerekkel. A megoldásuk során általában az egyik egyenletből fejezzük ki az egyik ismeretlent, majd ezt behelyettesítjük a másik egyenletbe, és megoldjuk. Miután megkaptuk az eredményt, visszahelyettesítjük az első egyenletből következtetett kifejezésbe, így megkapjuk a másik ismeretlent is.

Például: $$\left.\begin{array}{l} 2x - y = 9 \\ 3x + 2y = 10 \end{array}\right\}$$

Lássunk egy megoldást is rá:

Az első egyenletből kifejezzük az y-t: $y = 2x - 9$

Majd behelyettesítjük ezt a második egyenletbe.

$$3x + x - (2x - 9) = 10$$

$$3x + 4x - 18 = 10$$

$$7x = 28$$

$$x = 4$$

Felhasználva az y-ra kapott összefüggést, kiszámíthatjuk az y értékét:

$$y = 2x - 9 = 2 \cdot 4 - 9 = -1$$

Tehát a kétismeretlenes egyenletrendszer megoldási módja, ha az egyik ismeretlen kifejezzük valamelyik egyenletünkből, majd újra behelyettesítjük a másikba. Azonban az is jó megoldáshoz vezethet, ha mindkét egyenletből kifejezzük az egyik ismeretlent, majd egyenlővé tesszük őket, ekkor egy egyismeretlenes egyenletet kapunk, ami már megoldható eddigi tudásunk alapján. A harmadik módszer már kicsit több tapasztalatot igényel. Ennek a célja, hogy kiküszöböljük az egyik ismeretlent. Ennek több módja is lehet, például egyikből kivonjuk vagy hozzáadjuk a másiknak valamilyen többszörösét úgy, hogy egy ismeretlen kiessen. Ekkor már csak egy ismeretlenünk marad, amit szintén megoldhatunk

Tizedik osztályban megismerkednek a másodfokú egyenletek megoldóképletével. A valós együtthatójú egyenletnek nulla, egy vagy két gyöke is lehet. A másodfokú egyenlet megoldóképletét a teljes négyzetté való kiegészítéssel vezethetjük le.

$a x^2 + b x + c = 0$ ahol a,b,c valós együtthatók, c konstans

Mivel $a \neq 0$, ezért oszthatunk vele.

$$x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{c}{a} = 0$$

Átrendezzük.

$$x^2 + \frac{b}{a}\,x = \frac{-c}{a}$$

A bal oldalt teljes négyzetté átalakítjuk úgy, hogy hozzáadunk egy konstans, mégpedig a $\left(\frac{b}{2\,a}\right)^2$ -t.

$$x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{b^2}{4\,a^2} = \frac{b^2}{4\,a^2} - \frac{c}{a}$$

A bal oldal az $x + \frac{b}{a}$ négyzete, a jobb oldalt közös nevezőre hozzuk.

$$\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4\,a\,c}{4\,a^2}$$

Mindkét oldalból négyzetgyököt vonunk.

$$\mathrm{abs}\left(x + \frac{b}{2\,a}\right) = \frac{\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{\mathrm{abs}(2\,a)}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Kivonunk $\frac{b}{2\,a}$ mindkét oldalból

$$x = -\frac{b}{2\,a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

Ez tehát a másodfokú egyenlet megoldóképlete.

A megoldóképletben található egy négyzetgyökös kifejezés, melyet külön megvizsgálhatunk. A négyzetgyökjel alatt álló kifejezést hívjuk az egyenlet diszkriminánsának, ennek előjelétől függ az egyenlet megoldásainak a száma. Tehát a gyök alatti részt vizsgálva három esetet különböztethetünk meg.

Első eset:

$b^2 - 4\,a\,c < 0$, ekkor az egyenletnek nincs valós gyöke

Második eset:

$b^2 - 4\,a\,c = 0$, ekkor az egyenletnek egy valós gyöke van.

Harmadik eset:

$b^2 - 4ac > 0$, ekkor az egyenletnek két valós gyöke van.

Másodfokú egyenlet megoldását megkaphatjuk szorzattá alakítással is, azaz megadjuk a gyöktényezős alakját. Ebből az alakból közvetlenül is látszani fog, hogy mikor lesz az egyenlet egyenlő nullával. Vagy úgy, hogy az első tag lesz egyenlő nullával, vagy pedig a második.

Példa: $2x^2 - 3x - 2 = 0$

$$2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 2) = 0$$

Ebből az alakból láthatjuk, hogy az egyik gyök $x = -\frac{1}{2}$, a másik pedig $x = 2$.

A másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói között fennálló összefüggéseket. Ezeket Viète-féle formuláknak nevezzük. Jelöljük az egyenlet gyökeit y-nal és z-vel. a,b,c pedig az egyenlet valós együtthatói.

Ekkor: $y + z = -\frac{b}{a}$ $\quad yz = \frac{c}{a}$

A két gyök összege megegyezik az első fokú tag ellentétes előjelű együtthatója és a második tag együtthatójának hányadosával, valamint a két gyök szorzata megegyezik a konstans és a másodfokú tag együtthatójának

Az eddigi ismeretek alapján a tizedikesek betekintést kaphatnak a magasabb fokszámú egyenletekbe is. Az egyetemen láthatjuk, hogy harmadfokú egyenleteknek még van megoldóképlete, a negyedfokút pedig vissza tudjuk vezetni harmadfokú egyenletre, de az ötöd és ennél magasabb fokszámú egyenleteknek nem létezik megoldóképlete. Vannak azonban olyan speciális magasabb fokú egyenletek, melyeket meg tudunk oldani. A megoldások során arra törekszünk, hogy az egyenlet fokszámát csökkentsük, olyan szintre, hogy az ismert képletek használatával megoldhatóak legyenek. Fontos még azt is megjegyeznünk, hogy egy n-edfokú egyenletnek legfeljebb n valós megoldása létezhet, vagy ennél kevesebb.

Még egy jelentős egyenlet típussal is megismerkednek a középiskola második osztályában a diákok, mégpedig a négyzetgyökös egyenlettel. Ezek megoldása során arra törekszünk, hogy az egyenletből a négyzetgyökös kifejezéseket kiküszöböljük. Ezt általában négyzetre emeléssel tehetjük meg.

Ebből a típusból általában olyan feladatokat kapnak, amelyek másodfokúra visszavezethetők. Általában a köbgyökös feladatok magasabb fokú egyenletekre vezetnek, de vannak olyan speciális esetek, ahol különféle trükkök segítségével másodfokúra tudjuk visszavezetni az egyenletet. Lássunk egy trükkös példát:

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}+x}+\sqrt[3]{\sqrt{5}-x}=\sqrt[3]{\sqrt{5}\cdot 5}$$

Köbre emeljük mindkét oldalt:

$$\sqrt{5}+x+3\sqrt[3]{\left(\sqrt{5}+x\right)^2}\sqrt[3]{\sqrt{5}-x}+3\sqrt[3]{\sqrt{5}+x}\sqrt[3]{\left(\sqrt{5}-x\right)^2}+\sqrt{5}-x=5\sqrt{5}$$

Felhasználjuk az alábbi összefüggést:

$$3a^2b+3ab^2=3ab(a+b)$$

$$\sqrt{5}+x+\sqrt{5}-x+3\sqrt[3]{5-x^2}\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+x}+\sqrt[3]{\sqrt{5}-x}\right)=5\sqrt{5}$$

Ha rendezzük az egyenletet, kiesnek az elejéről az x-ek, kivonunk két gyök ötöt, illetve leosztjuk hárommal mindkét oldalt:

$$\sqrt[3]{5-x^2}\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+x}+\sqrt[3]{\sqrt{5}-x}\right)=\sqrt{5}$$

A zárójelben visszakaptuk az eredeti egyenletünk jobb oldalát, így ennek megfelelően behelyettesítjük

$$\sqrt[3]{5-x^2}\sqrt[3]{\sqrt{5}\cdot 5}=\sqrt{5}$$

.

$$\sqrt[3]{(5-x^2)\cdot 5\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

Ismét köbre emelünk:

$$25\sqrt{5}-5\sqrt{5}x^2=5\sqrt{5}$$

Csupa ekvivalens átalakítással jutottunk el egy másodfokú egyenlethez, hiszen mindkét oldal köbre emelése is ekvivalens átalakítás. Ezért az egyenletünknek valóban legfeljebb két megoldása lehet.

Leosztjuk mindkét oldalt $5\sqrt{5}$-tel:

$$5 - x^2 = 1$$

Rendezzük az egyenletet:

$$x^2 = 4$$

Végül gyököt vonunk:

$$x = \pm 2$$

Ezek a megoldások valóban helyes megoldásai az egyenletünknek.

Nézzünk egy olyan négyzetgyökös példát, ahol a megoldás kulcsa az, hogy új ismeretlent vezetünk be:

$$\sqrt{x + 2 + 4\sqrt{x-2}} + \sqrt{x + 7 - 6\sqrt{x-2}} = 5$$

Először is kikötjük, hogy **x≥2.**

Bevezetésre kerül az új ismeretlen: $\sqrt{x-2} = a$, $x - 2 = a^2$

Az $x + 2 = a^2 + 2$ és $x + 7 = a^2 + 9$, ezeket behelyettesítjük:

$$\sqrt{a^2 + 4 + 4a} + \sqrt{a^2 + 9 + 6a} = 5$$

Teljes négyzetet kapunk mind a két gyök alatt:

$$\sqrt{(a+2)^2} + \sqrt{(a-3)^2} = 5$$

$$\mathrm{abs}(a+2) + \mathrm{abs}(a-3) = 5$$

Ekkor három esetet kapunk:

I. $a < -2$

Mivel $\sqrt{x-2} = a$ és tudjuk, hogy a nem lehet negatív, ezért ez az esetet nem kell megvizsgálnunk, mert ilyen neme lehetséges.

II. $-2 \leq a < 3$

$$a + 2 - a + 3 = 5$$

Azonosság, tehát [-2;3) intervallumban helyes megoldások vannak. Ebből az intervallumból csak a nemnegatív számok jöhetnek szóba.

III. $a \geq 3$

$$a + 2 + a - 3 = 5$$

$$2a = 6$$

$a = 3$

Ez helyes megoldás.

Tehát **a** a [0;3] zárt intervallumból kerülhet ki.

Így: $2 \leq x \leq 11$.

Korábban már definiáltuk a valós számok egész kitevőjű hatványait. Majd megismerkedtünk a négyzetgyök és n-edik gyök fogalmával. Illetve megismerték ezeknek a műveleteknek az azonosságait is.

Középiskola harmadik osztályában szeretnénk ezt a tudást kiterjeszteni a racionális számok körére. Ezek alapján a hatványozást kiterjesztjük racionális kitevőre is, annak megkövetelésével, hogy az eddig megtanult azonosságok továbbra is fennálljanak. Ezt a követelményt permanencia-elvnek nevezzük.

Még egy fontos egyenlet típussal ismerkedhetünk meg, mégpedig az exponenciális egyenletekkel. Amelyek megoldása során arra törekszünk, hogy az egyenlet mindkét oldalán azonos alapú hatványok álljanak. Ha ez sikerül, akkor ebből következik az exponenciális függvény monotonitása miatt, hogy a kitevők is egyenlők lesznek. Így kapunk egy már ismert egyenletet, amit megoldhatunk a tanult módszerekkel.

Példa: $5^{x+1} = (5^2)^{x-2}$

$5^{x+1} = 5^{2x-4}$

Az exponenciális függvény szigorú monoton növekedése miatt:

$x + 1 = 2x - 4$

$x = 5$

Előfordul, hogy a megoldás során szükség lehet logaritmus művelet alkalmazására. A logaritmus a hatványozás inverz művelete. A logaritmikus egyenletek megoldása során alkalmazzuk a logaritmus azonosságait, így azonos alapú logaritmusokat hozunk létre mindkét oldalon. A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt a két kifejezés logaritmusa akkor egyenlő, ha a kifejezések is egyenlőek. A kikötések is nagyon fontosak a megoldás során.

Példa: $\log_2 x + \log_2 3 = \log_2 15$

Az egyenletnek akkor van értelme, ha x > 0.

$\log_2(x \cdot 3) = \log_2 15$

felhasználva a két logaritmus összegére vonatkozó azonosságot

Mivel a logaritmusfüggvény szigorúan monoton, ezért:

$$3x = 15$$

$$x = 5$$

A tizenkettedik évfolyam igazából már csak az ismétlésre, illetve az eddig tanult algebra elmélyítésére összpontosít.

3.0 Egyetemi algebra tanulmány egyenletek szempontjából

Ebben a részben szeretném az egyetemen tanult algebrai ismereteket rendszerezni, ahogyan azt az általános- és középiskolás részben is megtettem. Az egyetemen legelsőnek megtanult algebrai gondolattal kezdeném, mégpedig a komplex számokkal. A komplex számok halmazának bevezetése kibővíti az eddig tanult számkörökön tanult műveleteket, megoldás halmazokat, sokkal több egyenletünknek lehet megoldása ezen a halmazon. Szeretném az egyenletekhez kapcsolódó fogalmakat, tételeket bemutatni bizonyítás nélkül.

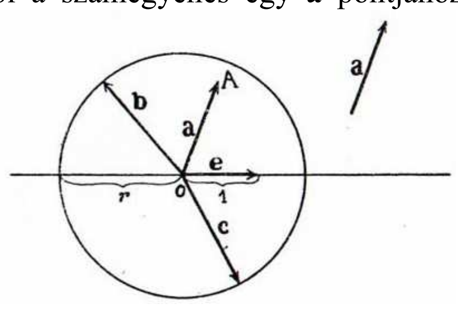
3.1 Komplex számok bevezetése

Első sorban szeretném áttekinteni a számokról szóló ismereteket. ”Számon ugyanis alsó és középfokú iskolai tanulmányaink során egyre bővebb tartalmú jelentéssel bíró fogalmat értettünk. Eleinte a szám az állandó továbbszámlálással keletkező 1, 2, 3, … természetes számsor valamelyik tagját jelentette számunkra. Később megismerkedtünk a törtszámokkal, majd a zérussal, valamint a negatív egész és törtszámokkal is. Végre középiskolás korunkban a hosszúságmérés problémájával foglalkozva azt tapasztaltuk, hogy az addig említett racionális számokkal tudjuk teljesen pontosan megadni. Az összes racionális és irracionális számok együttvéve a valós számok halmazát alkotják. Ez már több szempontból kielégítőnek látszott, azonban vannak olyan másodfokú egyenletek, amelyeknek még az összes valós számok halmazában sincs megoldása. Most látni fogjuk, hogy a valós számok halmazát már csak egy lépésben kell tovább bővítenünk, hogy olyan számsokasághoz jussunk el, amely algebrai vizsgálataink szempontjából teljesen kielégítő. Az így nyert számokat komplex számoknak fogjuk nevezni…”.[7]

Tehát a következőkben szeretnénk kibővíteni a valós számok halmazát úgy, hogy a négyzetgyökvonás minden esetben elvégezhető legyen. A komplex számok szemléletes bevezetéséhez előbb tekintsük át a valós számok ábrázolását.

Fogjuk fel a racionális számokat a számegyenes egy jól meghatározott pontjaként. Az **a** racionális számnak megfelelő pontot úgy kapjuk meg, ha a 0-t ábrázoló ponttól **a** távolságra eső pontot keressük meg az egyenesünkön. Az **a** szám képe jobbra, illetve balra esik a 0 ponttól, attól függően, hogy pozitív vagy negatív előjelű volt. Az összes racionális számok képei sűrűn lepik be a számegyenesünket, de nem fedik le teljesen. Azon a részen, ahol nincs lefedve a számegyenes, olyan hosszúságokat találunk, amelynek értékét egyetlen racionális szám sem adja meg pontosan. Ezek az irracionális számok. Így mondhatjuk azt, hogy a számegyenes minden pontja egy szám, amely lehet egy ismert racionális, vagy egy irracionális szám. Ezzel kiterjesztettük a racionális számok halmazát egy bővebb halmazzá, a valós számok halmazára, így a számegyenes teljesen lefedhető lesz.

A valós számoknál már láthattuk a szemléletes ábrázolást és bővítést. Ugyan ezt az elméletet fogjuk felhasználni a valós számok halmazát komplex számok halmazára való kibővítésénél is. Mivel láthatjuk, hogy nincs hely további új számok részére a számegyenesen (hiszen a valós számok lefedik azt). Ezért a továbbgondolást már csak úgy folytathatjuk, ha a számegyenesről kilépünk a síkba, és a sík összes pontjaiban fedezzük fel az új számokat, pontosabban azok geometriai képét. Mégpedig hasonló módon, ahogy a valós számoknál is láthattuk, azaz a zérust ábrázoló O pontból a számegyenes egy **a** pontjához rendelünk vektort. Az **a** pont, illetve a vektor hossza és iránya rögzítve van, tehát párhuzamosan eltolható az irány és hosszúság megtartásával. A számot ábrázoló vektor hossza a szám abszolút

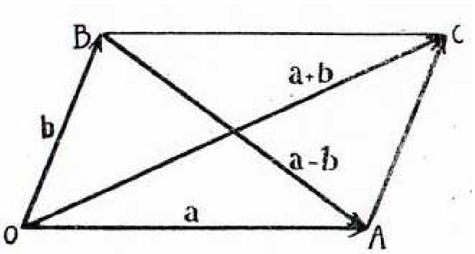


[7] SzeleTibor, Bevezetés az algebrába, 13. o

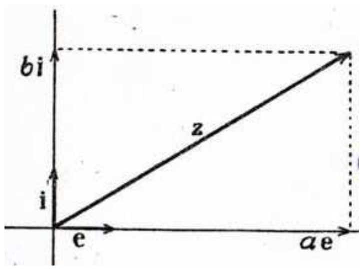
értéke lesz, ugyan úgy, ahogy a valós számok esetében is. Tehát a sík valamely számának abszolút értéke az a nemnegatív valós szám, amely a számot ábrázoló pontnak a zérusponttól való távolságát adja meg. Egy szám abszolút értéke csak akkor lesz nulla, ha a szám maga a zérus. Ha azonban **r** egy pozitív szám, akkor azok a számok, amelyeknek abszolút értéke **r**, ezek éppen az O pont körüli **r** sugarú körvonal pontjai. A komplex számok halmazán, tehát végtelen sok számnak lehet ugyanakkora abszolút értéke.

Ezek után az összeadást és a szorzást is könnyen definiálhatjuk. Az összeadás hasonló módon működik, ahogyan azt a valós számoknál láthattuk.

A sík tetszőleges a = <u>OA</u> és b = <u>OB</u> vektorainak $a + b$ összegén azt az <u>OC</u> vektort értjük, amelynek a C végpontját a b vektorral egyenlő, de A-ba eltolt kezdőpontú <u>OB</u> = <u>AC</u> vektor végpontja jelöli ki. Tehát a vektorok „egymásutánrakásával" kapjuk a két vektor összegét, de ugyanígy alkalmazhatjuk a paralelogramma-szabályt is, miszerint az <u>OA</u> és <u>OB</u> vektorok összegét az OACB paralelogramma <u>OC</u> átlóvektora adja meg. A kivonás az összeadásból következik.



Két vektor szorzatánál nézzük azt az esetet, amikor az egyik vektor valós szám. A **c** valós számnak és a tetszőleges a vektornak szorzatán azt a vektort értjük, amelynek hosszúsága |**c**| |a|, iránya pedig megegyező, illetve ellenkező a irányával attól függően, hogy **c>0**, illetve **c<0**. A szorzat értelmezése teszi lehetővé a tetszőleges z = <u>OZ</u> vektor felírását a Z pont koordinátáinak segítségével. Húzzunk az O ponton keresztül merőleges egyenest a valós számegyenesre, és jelöljük ezen az egyenesen a felfelé mutató egységvektort i-vel. Ekkor a sík tetszőleges z = <u>OZ</u> vektora: $z = ae + bi = a+bi$, ahol e a valós számegyenes egységvektora, a és b valós számok pedig éppen a Z pont koordinátái az O kezdőpontú derékszögű koordináta-rendeszerben. A **z** szám valós részének nevezzük az **a**-t, képzetes részének pedig **b**-t. (Ha **b**=**0**, akkor valós számról beszélünk.)



A valós számok halmaza kibővíthető az összes **a+bi** alakban írható számok halmazává, ahol **a** és **b** minden lehetséges valós számot jelentenek. Ezekkel a számokkal úgy számolhatunk, mint kéttagú algebrai kifejezésekkel, miközben **i**-t puszta jelnek tekintjük, amelyre igaz: $\mathbf{i^2 = -1}$. Tehát nézzük meg két ilyen szám egyenlőségét, összegét és szorzatát:

a+bi = a'+b'i akkor és csak akkor, ha **a = a'** és **b = b'**

(a+bi) + (a '+b'i) = (a+a') + (b+b')i

(a+bi) (a'+b'i) = (aa'-bb') + (ab'+a'b)i.

Az osztás is mindig egyértelmű eredménnyel elvégezhető az összes komplex számok halmazán.

A komplex számok teste sokkal több nevezetes tulajdonsággal rendelkeznek, mint a racionális, vagy valós számok teste. Szeretnék még egy fogalmat, a komplex szám konjugáltjának fogalmát bemutatni. A **z = a+bi** komplex szám konjugáltján a $\mathbf{\underline{z} = a\text{-}bi}$ komplex számot értjük.[8] Tehát egy komplex számból a konjugáltját a képzetes rész előjelének ellenkezőjére változtatásával nyerjük. Két komplex szám akkor és csak akkor konjugáltja egymásnak, ha szimmetrikusan fekszenek a valós számegyenesre vonatkozólag. Azért fontos fogalom ez, mert egy komplex számnak és konjugáltjának összege és szorzata is valós szám.

$$\mathbf{z+\underline{z} = (a+bi) + (a-bi) = 2a}$$

$$\mathbf{z\underline{z} = (a+bi)\,(a-bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2}$$

A valós számok körében nem mindig volt elvégezhető művelet a gyökvonás. Azonban a komplex számok halmaza már lehetővé teszi, hogy a negatív számok gyökeit is megtaláljuk.

$$\pm\sqrt{-a} = \pm\sqrt{a\,(-1)}\ \ 0 = (\pm\sqrt{a})\,\sqrt{-1}\ \ 0 = \pm\sqrt{a}\ \text{¡}$$

Láthatjuk tehát, hogy a negatív valós számnak is van négyzetgyöke, kettő is. Azonban a komplex számok halmazában ennél több is igaz, mégpedig, hogy bármely 0-tól különböző komplex számnak pontosan n különböző n-edik gyöke van. (A zérus kivétel, hiszen neki csak egyetlen n-edik gyöke van, önmaga.)

[8] a konjugáltat felülhúzással jelöljük, azonban nem találtam rá szimbólumot

3.2 Algebrai egyenletek, egyenletrendszerek

Az algebrának egy fontos fejezetét jelentik az algebrai egyenletek elmélete. Most elérkezett az idő, hogy megadjuk az algebrai egyenlet pontos definícióját. Legyen $f(x)$ egy polinom valamely T test fölött, azaz $f(x)$□$T[x]$. Az $f(x)=0$ alakú egyenletet T fölötti algebrai egyenletnek nevezzük. Az olyan z (□$T[x]$) elemet, amelyre $f(z)=0$, az egyenlet gyökének, vagy megoldásának nevezzük. Az egyismeretlenes n-edfokú algebrai egyenleg általánosan így vehető fel: $\mathbf{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0}$, ahol a_i□T; $a_0 \neq 0$.

Két egyenlet ekvivalensnek nevezünk, ha egyiknek minden megoldása a másiknak is megoldása, és fordítva. Ha egy egyenlet mindkét oldalán olyan algebrai átalakítást végzünk, hogy a kapott egyenlet az eredetivel ekvivalens, akkor ekvivalens átalakításról beszélünk. Ilyen például, ha az egyenlet mindkét oldalán álló polinomhoz hozzáadunk egy polinomot, vagy mindkét oldalt megszorozzuk egy nullától különböző elemmel. Az ekvivalens átalakítások segítségével az előbbi egyenletünket egy új alakban írhatjuk fel:

$$\mathbf{x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n = 0},$$

ezt az alakot az egyenlet normált alakjának nevezzük.

Már korábban is láthattuk, hogy ha ekvivalens átalakításokat hajtunk végre egymás után, akkor megkaphatjuk az egyenlet megoldását. Az egyenletek ekvivalenciája függhet attól is, hogy melyik test alaphalmazban keressük a megoldásaikat.

Az algebrai egyenletek gyökei nincsenek mindig abban a testben, amelyikből az együtthatók valók. Ideje megfogalmaznunk az algebra alaptételét, ami a következő képen szól: minden, legalább elsőfokú komplex együtthatós egyismeretlenes algebrai egyenletnek mindig van megoldása a komplex számok testében.

Az egyismeretlenes egyenletekhez hasonlóan vezethetjük be a többismeretlenes algebrai egyenletrendszerek fogalmát. Legyen adva m számú $f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ polinom valamely T test fölött. Az

$$\mathbf{f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0}$$

$$\mathbf{f_m(x_1, \ldots, x_n) = 0}$$

alakú egyenlőségrendszert algebrai egyenletrendszernek nevezzük. Az egyenletrendszer megoldásainak halmaza nyilvánvalóan az egyes egyenletek megoldásaiból álló halmazok metszete. Az egyenletrendszereknél is beszélhetünk ekvivalens átalakításokról. Ilyen például ha két egyenletet felcserélünk, vagy az egyik egyenlet többszörösét hozzáadjuk egy másik egyenlethez.

Mikor egyenlettel, vagy egyenletrendszerrel foglalkozunk, mindig meg kell vizsgálni néhány dolgot. Például, hogy megoldható-e az egyenlet, vagy egyenletrendszer az adott T testben, vagy van-e ennek feltétele, hogyan kapjuk a megoldásokat és hogy a kapott értékek tényleg megoldások-e, minden lehetséges megoldást megkaptunk-e?

3.3. Irreducibilitás

Az algebra alaptétele szerint bármely

$$\mathbf{f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0} \ (a_i \in C)$$

polinomhoz van olyan z_i komplex szám, amelyre $f(z_1) = 0$ teljesül. Mivel $f(z_1) = 0$, azért

$$\mathbf{f(x) = f(x) – f(z_1) = a_0(x^n - z_1^n) + a_1(x^{n-1} – z_1^{n-1}) + \ldots + a_{n-1}(x-z_1).}$$

A jobb oldal minden tagja előállítható olyan szorzatként, melynek egyik tényezője $x\text{-}z_1$, azaz van olyan, ugyancsak komplex együtthatós $f_1(x)$ polinom, amelyre $\mathbf{f(x) = (x-z_1)f_1(x)}$, más szóval $\mathbf{(x-z_1)|f(x)}$. Ez azt jelenti, hogy z_1 az $f(x)$ polinomnak a zérushelye.

Az előző állítás megfordítása is igaz, ebből következik a alábbi tétel: Az $f(x)$ ($\in C[x]$) polinomnak akkor és csakis akkor zérushelye z_1, ha $\mathbf{(x- z_1) \mid f(x)}$, azaz ha van olyan $f_1(x)$ polinom, amelyre $\mathbf{f(x) = (x- z_1)\ f_1(x)}$. Ha $f_1(x)$ legalább elsőfokú, akkor teljesen hasonló meggondolással adódik, hogy van olyan z_2 komplex szám, amelyre $\mathbf{f_1(x) = (x-z_2)\ f_2(x)}$ teljesül. Ezt az eljárást addig ismételjük, míg nem az alábbi polinomhoz jutunk: $\mathbf{f(x) = a_0\ (x-z_1)\ (x-z_2)\ \ldots\ (x-z_n)}$, ami azt jelenti, hogy minden, legalább elsőfokú komplex együtthatós polinom a komplex számok teste fölött elsőfokú polinomok szorzatára bontható. Tehát láthatjuk, hogy a komplex együtthatós polinomok között csak az elsőfokúak lehetnek irreducibilisek.

Az algebra alaptételének egy következménye az is, hogy az n-edfokú komplex együtthatós polinomnak legfeljebb n különböző, multiplicitással számolva pedig pontosan n zérushelye van.

3.4 Lineáris egyenletrendszer

A lineáris egyenletrendszer tetszőleges T test fölött az

$$\begin{aligned}
\mathbf{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1},\\
\mathbf{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2},\\
\ldots\\
\mathbf{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m}
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$$

alakokban írható, ahol m, n 0-tól különböző természetes szám, az a_{ik} együtthatók (nem mind nulla) és a c_i konstansok a T test elemei, az x_k-k pedig ismeretlenek (i = 1, …, m, k = 1, …, n). Az első alakot általános alaknak, míg a másodikat mátrix alaknak hívjuk (Ax = B).

Speciális eset, ha n = m, azaz ugyan annyi egyenlet szerepel, mint amennyi ismeretlen, ezt szabályos lineáris egyenletrendszernek nevezzük. Az egyenletek függetlenek egymástól, azaz egyiket sem lehet a többiből algebrai átalakításokkal levezetni. Ennek feltétele, hogy az A mátrix determinánsa nem lehet 0.

Ha m=1 és n>1, azaz egy egyenletünk van, és több ismeretlen szerepel (zérustól különböző együtthatókkal), akkor végtelen sok megoldást nyerünk, hiszen az ismeretlenek helyébe egy kivételével bármilyen számot helyettesíthetünk. Egyetlen ismeretlen értéke az egyenletből mindig kiszámítható (persze csak ha az együtthatója nem nulla).

Ha m>1, akkor a rendszer összes megoldását úgy adhatjuk meg, hogy az egyes egyenletek megoldásai közül kiválasztjuk azokat a megoldásokat, amelyek minden egyenletet kielégítenek.

Az m<n esetén végtelen sok megoldást, míg az m>n esetén egyetlen megoldás sem szokott lenni, de ez nem mondható el minden esetre. De az is előfordulhat, hogy n=m-mel, még sincs megoldás.

Azt láthatjuk, hogy az egyenletrendszer megoldhatósága, illetve a megoldások száma és azok kiszámítása függ attól, hogy van-e összefüggés a rendszer egyenletei között, azaz, hogy a baloldalon álló kifejezések között van-e oylan, amelyik előáll néhány másik lineáris kombinációjaként. Ha van, akkor az a kérdés, hogy a jobb oldalon álló konstans is előáll-e megfelelő konstansok ugyanilyen lineáris kombinációjaként. Ha nem áll fenn a megfelelő összefüggés a jobb oldalon, az egyenletrendszerünknek nem lesz megoldása. Ha mindkét oldalon fennáll az összefüggés, akkor lesz olyan egyenlet a rendszerben, amelyet a többi egyenlet közös megoldásainak bármelyike kielégít, tehát ezt az egyenletet el is hagyhatjuk.

Lineáris egyenletrendszereket a legegyszerűbb a Gauss-elimináció segítségével megoldani. Ennek lényege, hogy a mátrixban alsó vagy felső lépcsős alakot hozzunk létre, azaz az átló alatt vagy fölött csak 0-ák álljanak. Minden mátrix ekvivalens átalakításokkal lépcsős alakra hozható.

Ekvivalens átalakítás:

- egy nem nulla számmal való szorzás
- az egyik egyenlethez egy másik egyenlet valahányszorosát hozzáadhatjuk
- felcserélhetjük az egyenleteket.

Példa: $x-2y+3z=1$

$2x+y+z=-3$

$-x+2y-2z=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 1 & -3\\ -1 & 2 & -2 & 0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 3 & 1\\ 0 & 5 & -5 & -5\\ -1 & 2 & -2 & 0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 3 & 1\\ 0 & 5 & -5 & -5\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

Létrejött a lépcsős alak, alatta csak 0-k vannak. Ebből már könnyen leolvashatóak az eredmények: $z=1$

$5y-5z=-5 \quad 5y=0 \quad y=0$

$x-2y+3z=1 \quad x=-2$

Ha a főátló fölött is kinulláznánk mindent, még jobban látható lenne az eredmény. Hiszen ekkor függetlenek lennének egymástól az egyenletek.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$x = -2 \quad y = 0 \quad z = 1$$

3.5 Cramer-szabály

Tekintsük az előző részben már feltüntetett lineáris egyenletrendszert, annak is a speciális esetét, mégpedig a szabályosat. Ennek a szabályos lineáris egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van, mégpedig:

$$x_1 = \frac{A_1}{A}, x_2 = \frac{A_2}{A}, \dots, x_n = \frac{A_n}{A}.$$

Feltéve, hogy A nem 0.

A a mátrix determinánsa, A_k-n pedig azt a determinánst értjük, amelyet A-ból a k-adik oszlopnak a rendszer jobboldalán álló szabad tagok oszlopával való kicserélés útján kapunk.

3.6 Magasabb fokú egyenletek és polinomok

Korábban már láthattuk, hogy az egyismeretlene n-ed fokú algebrai egyenlet hogyan oldható meg, sőt kimondtuk az algebra alaptételét is, miszerint a komplex együtthatós egyismeretlenes algebrai egyenletnek mindig van megoldása a skomplex számok testén.

Már középiskolás korban megismerkedtek a gyerekek az n = 2, azaz a másodfokú egyenletekkel a valós számok halmazán. Ugyan ez a megoldóképlet lesz igaz a másodfokú egyenletekre a komplex számok halmazán is, annyiban lesz több, hogy a megoldások is a komplex számok köréből kerülhetnek ki.

Több matematikus foglalkozott azzal, hogy a harmadfokú egyenletek megoldására is létre lehet-e hozni megoldóképletet ami sikerült is.

Nézzük meg a harmadfokú egyenlet megoldóképletét! Általánosan a normális alakja a következő:

$$\mathbf{x^3 + ax^2 + bx + c = 0.}$$

A másodfokú egyenlet megoldásának képletét a teljes négyzetre való kiegészítés ötlete adta, így célszerű itt is a teljes köbre való kiegészítést megpróbálni.

Általános harmadfokú egyenlet 0-ra rendezve: $a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d = 0$

Az áttekinthetőség érdekében osszunk le a–val: $x^3 + \frac{b}{a}\,x^2 + \frac{c}{a}\,x + \frac{d}{a} = 0$

Írjuk át ilyen alakba:

$$\left(x + \frac{b}{3\,a}\right)^3 + \left(x + \frac{b}{3\,a}\right)\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3\,a^2}\right) + \frac{d}{a} + \frac{3\,b^3}{27\,a^2} - \frac{b\,c}{3\,a^2} = 0$$

Helyettesítsünk: $y = x + \frac{b}{3\,a}$

$$p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3\,a^2}$$

$$q = \frac{d}{a} + \frac{3\,b^3}{27\,a^3} - \frac{b\,c}{3\,a^2}$$

(1.) Ekkor: $y^3 + p\,y + q = 0$

Legyen: $y = u + v$

Ebből: $y^3 = (u + v)^3 = u^3 + 3\,u^2\,v + 3\,u\,v^2 + v^3$

(2.) Átrendezve: $(u + v)^3 - 3\,u\,v\,(u + v) - (u^3 + v^3) = 0$

Az (1.) és (2.)-t összevetve: $-p = 3\,u\,v$

és $-q = u^3 + v^3$

A két egyenletből u-t kiküszöbölve: $v^6 + q\,v^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$

Ugyan így v-re is.

Ez egy másodfokú egyenlet, aminek gyökei: $v^3, u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$

$$y = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Mi a helyzet a negyedfokú egyenletekkel? A negyedfokú egyenletek algebrai úton szintén megoldhatóak.

Azonban a magasabb fokú egyenletek algebrai úton történő megoldása nem ilyen egyszerű. Több matematikus foglalkozott a magasabb fokú egyenletek megoldására való képlet megtalálásával, főleg az ötödfokú egyenletek foglalkoztatták őket. Megoldóképletet nem találtak, azt azonban bebizonyították, hogy az ötödfokú egyenletekhez nem adható megoldóképlet, csupán gyökvonással.

Természetesen vannak olyan speciális egyenletek, amelyeket szintén meg lehet oldani behelyettesítéssel, vagy megfelelő átalakításokkal, netán visszavezetésekkel.

4.0 Játékok az algebra tanításában

Most szeretnék bemutatni három játékot. Mindhárom játék kicsi kortól az érettségiig játszható és mindegyik alkalmas arra, hogy az egyenletekkel kapcsolatos fogalmak körében – például az értelmezési tartomány, a változó, a grafikus egyenlet, egyenlőtlenség megoldás, stb. területén - mélyebb megértésre juttassa a gyerekeket.

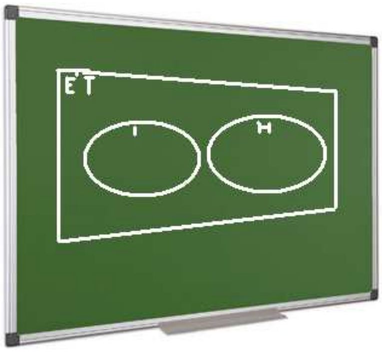
Az első két játék egyenlőtlenségekkel foglalkozik, amelyek tanítása elválaszthatatlan az egyenletek tanításától.

Az első két játéknak elkészült a szoftver változata is, melyet az interneten is megtalálhatunk. Ennek segítségével szeretném bemutatni a játékok működését, és célját. (A két program megtalálható a dolgozat mellékletében található CD-n.)

4.1 A láda rejtélye

Mielőtt megmutatnánk hogy, hogyan kell nyitott mondatot, vagy egyenletet megoldani, nagyon fontos, hogy a gyerekek tisztában legyenek az értelmezési tartomány fogalmával, mi az igazsághalmaz, és mit tekintünk változónak. Arra, hogy megtanulják az értelmezési tartomány elemeit szétválogatni aszerint, hogy kielégítik az egyenletet, azaz igazzá teszi, avagy sem. Ennek a célnak az elérésére, ez a játék nagyon jó szemléltetési eszköz.

Veszünk egy edényt, vagy sapkát, amelybe kártyákat teszünk. A kártyán szerepelnek egész számok. Minden gyerek húz a sapkából egy-egy kártyát. Első körben felírjuk a nyitott mondatot a táblára, és az üres helyére egyesével beragasztják a húzott kártyát. Később elég lesz a füzetükben is feljegyezni ezt, mert így elég hosszadalmas. A feladat az, hogy a kártyán lévő számot behelyettesítve átgondolják, hogy az a szám, az adott nyitott mondatot igazzá, vagy hamissá teszi-e. Majd ennek megfelelően felragasztják a kártyát a táblán látható diagram megfelelő karikájába. Ha igazzá tette a mondatunkat, akkor az I-vel jelölt karikába ragasztják, hagy nem tette igazzá, akkor a H-val jelöltbe ragasztják kártyájukat. Minden gyerek húzott, tehát egyesével elvégzik ezt a táblánál. Ha készen vannak, akkor összegezzük a látottakat, akár sorba is állíthatjuk a számokat, hogy jobban látható legyen, mely számokra vált igazzá mondatunk, és mik azok a számok, amik nem elégítették ki a feladatot. Meg kell vizsgálni azt is, hogy azok a számok, amik nem kerültek fel a táblára, illetve a sorba állításnál nem szerepelnek, azok hol helyezkednek el a mondat igazzá tétele szempontjából.

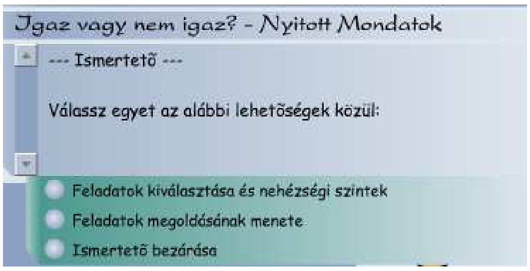


A játék során kialakul egy kép arról, hogy mit nevezünk értelmezési tartománynak, mi az igazsághalmaz, és mit tekintünk változónak. Kiinduló halmaznak tekintjük a sapkát, amelyből egész számokat húzunk ki. Az elemei között lehetnek olyanok, amelyeket behelyettesítve a nyitott mondatnak nincs értelme. Ezek az elemek nem tartoznak bele a nyitott mondat értelmezési tartományába. Értelmezési tartományon az alaphalmaz azon elemeit értjük, amelyeken a művelet elvégezhető. S ha elvégeztük, megkapjuk, hogy igazzá vagy hamissá tette az adott szám a mondatunkat. Ha igazzá tette, akkor ezek a számok fogják alkotni a nyitott mondat igazsághalmazát – megoldáshalmazát. Azok az elemek, amelyek nem tartoznak az igazsághalmazba, hamissá teszik mondatunkat. A változót a játékban az üres hely jelképezi, amit egy betűvel is megjelölhetünk, és aminek a helyére beillesztjük – behelyettesítjük az értelmezési tartomány elemeit.

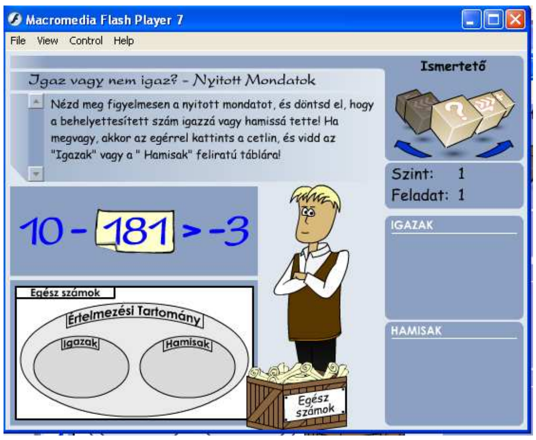
Ezt a játékot már minden korosztálynál tudjuk játszani. Kicsi előkészületet igényel, de a gyerekek szívesebben gondolkodnak így, tehát megéri a fáradtságot. Ráadásul az, hogy megismerkednek minden új algebrai művelet előtt az értelmezési tartománnyal, nagy szerepet játszik majd a függvényábrázolás, s annak elemzésekor is.

Most szeretném bemutatni a játék számítógépes program változatát is részletesebben.

A program nagyon emberbarát, mindent részletesen leír, hogyan tudok nehézséget választani, mi a feladatok megoldásának menete. A jobb felső sarokban található gombok segítenek nehézségi szintet választani, illetve új feladatokat is kérhetünk. De visszatérhetünk egy-egy feladatra többször is. Nézzük meg a feladat megoldásának meneteit lépésekben!



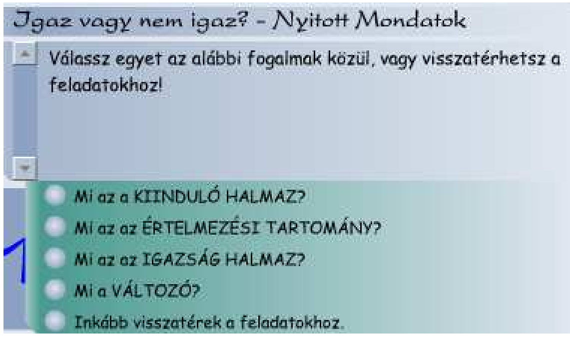
Induljunk a legkönnyebb szinten. Első körben kapunk egy nyitott mondatot, ahogyan az ábrán is láthatjuk, melyben van fehér lyuk. A mi táblás játékunkban azt egy üres hely jelölte. Van egy ládánk, - amiről a játékot is elneveztem – amelyben számkártyák vannak, hasonlóan a mi sapkánkhoz. Ha rákattintunk a ládára, egy kártyát ad a kezünkbe és mi beilleszthetjük a nyitott mondat fehér lyukára kattintva. Ekkor az a feladatunk, hogy eldöntsük ez a szám igazzá, vagy hamissá teszi a relációt. Adott esetben hamis, tehát rákattintunk a számkártyánkra, majd a jobb oldalon található „Hamisak" táblára. A program beírja a számot a halmaz a megfelelő helyére és a táblára is. Ha esetleg rosszul



válaszolnánk, segítőkész emberünk csúnyán fog nézni, s elkezd villogni a tábla, így gyorsan tudunk korrigálni. A kártyák húzogatását bármeddig ismételgethetjük. Ha meguntuk a feladatot, több lehetőséget is felkínál a program. Választhatunk új nyitott mondatot, nehezíthetünk a feladatokon, de akár fogalom magyarázatokat is kérhetünk a halmazra kattintva. Nézzük az utóbbi eshetőséget!

Négy fogalom magyarázatát kérhetjük tőle, ezek a következőek:

- kiinduló halmaz
- értelmezési tartomány
- igazsághalmaz
- változó



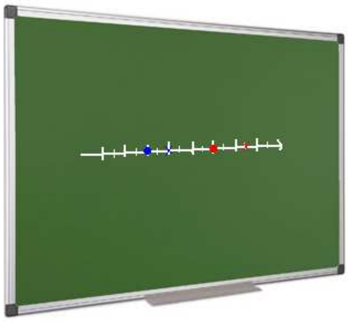
A fogalmak magyarázatait már a táblánál játszható feladatnál elmondtam. A program is ezt a struktúrát és magyarázatot követi.

A játék megállja a helyét igazán kicsiknél, második osztályosoknál, de az idő előrehaladtával más korosztály is megtalálja a neki megfelelő szintű feladatokat. A program bemutatása során az ábrán egy egyszerű kivonást kellett elvégezni, de a nyolc évesek már szorozni is tudnak, így az eggyel nehezebb szintű nyitott mondatokat is el tudják végezni. Nehezebb szinteken már szerepel abszolút érték és négyzetre emelés is. A programot tovább lehetne fejleszteni úgy, hogy valóban minden korosztály megtalálja a neki való algebrai feladatokat. Például szerepelhetne közötte gyökvonás, logaritmus, amik felső tagozatban és középiskolában problémát szoktak jelenteni.

4.2 Számegyenes színezés

A második játék is a fent már említett fogalmak elmélyítésére szolgál. Annyiban különbözik a két játék, hogy nem halmazt használunk szemléltetésnek, hanem számegyenest színezünk – ahogy a játék neve is mutatja.

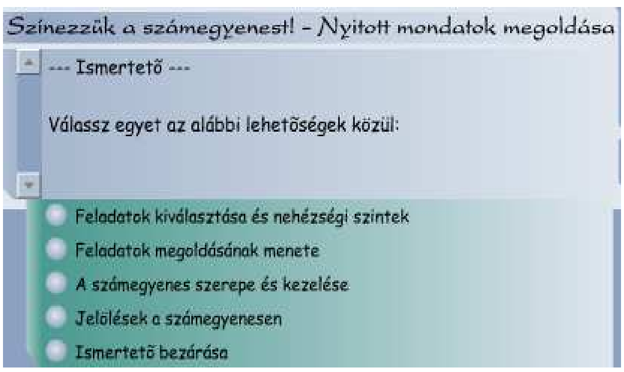
Teljesen hasonlóan indul a feladat, mint azt az előzőekben láthattuk már. Szükségünk van egy sapkára, melybe cédulákat helyezünk el. A gyerekek egyesével húznak a sapkából, és kezdésnél mondjuk itt is kiragaszthatják a cédulát a táblán felírt nyitott mondat változója helyére. Meg kell gondolniuk, hogy az adott szám igazzá, vagy hamissá teszi a nyitott mondatot, esetleg nem is lehet értelmezni ott. Ha eldöntötték, hogy a húzott



szám kielégíti-e a nyitott mondatunkat, akkor megkeresik a számot és a megfelelő színű krétával a táblán lévő számegyenesre rajzolják az x-et. Kék x-szel a hamisat, pirossal a pirosat ábrázoljuk, tömött karikát használunk arra, ha határszámot találunk, és sima karikát akkor, ha nem értelmezzük ott a kapott függvényt. Ha mindenki kint volt a táblánál, lesz egy egyenesünk piros és kék x-ekkel és karikákkal, akkor megpróbálhatjuk kitalálni a be nem színezett intervallumok pontjainak színeit is. Először is a határpontok (az egyenlőséget adó pontok) helyét kell megkeresnünk, illetve azokat a pontokat, amelyekben a kifejezésben szereplő függvények valamelyike nem folytonos). Fontos tapasztalat, hogy a határpontokat, illetve a szakadási pontokat összekötő intervallumok minden pontja ugyanolyan színű.

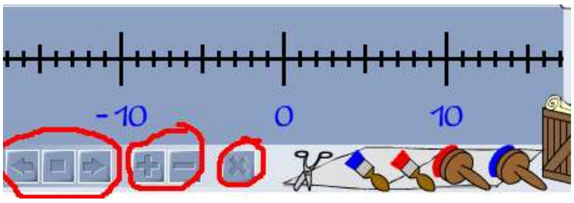
Ennek a játéknak szintén van számítógépes programja, amelyben szintén színezni kell a számegyenes megfelelő pontjait. Szeretném ennek a működését is ismertetni.

A programunk hasonló elven működik, mint az előbb látott program, a grafikájuk teljesen megegyezik. Ugyan úgy segítségünkre van barátunk lábánál a ládával, a jobb felső sarokban szintén tudunk szintet és feladatot módosítani is. Szintén kaphatunk fogalommagyarázatot, azonban ezeket nem írom le újra. Annyiban történt persze



változás, hogy halmaz helyett számegyenesünk lett, illetve van egy eszköz palettánk is.

Ez a játékprogram azonban picit több magyarázatra szorul, hiszen fel kell tüntetni, hogy miképpen lehet használni az eszközöket, hogyan tudunk minden számot megtalálni a számegyenesen. Illetve milyen jelölés típusok vannak.



Nézzük szépen sorban őket! A számegyenes alatt találhatunk három csoportban gombokat. Ezek arra szolgálnak, hogy tudjunk lejjebb és feljebb mozogni a pozitív és negatív számok körében. Tehát jobbra, vagy balra haladhatunk a megfelelő irányba mutató nyíllal. Ha hosszan kattintunk a nyílra, sokkal gyorsabban megtalálhatjuk a számot. Ha nincs kedvünk keresgélni, a két nyíl közötti gombot megnyomva oda ugrik az egyenesen a megfelelő számhoz. A + gomb felnagyítja a számegyenest, így sokkal jobban lehet tizedes törteket ábrázolni, a – gomb pedig kicsinyíti az egyenest, így sokkal több számot láthatunk egyszerre. Ha meguntuk a behelyettesítgetést, és kíváncsiak vagyunk, hogy a számegyenes többi pontja milyen színű lesz, akkor kattintsunk az x gombra, s a program kiszínezi az egyenest, ahogyan azt mi is tettük a táblánál.

Most nézzük végig a játék menetét! Hasonlóan indul a feladat, kapunk egy nyitott mondatot, a ládára kattintva kapunk cetlit és az fehér lyukra helyre illesztjük kattintással. Ekkor feladatunk ismét az, hogy eldöntsük, igazzá vagy hamissá tett-e az az állításunkat, esetleg egyik sem. Ha igazzá tette, akkor piros vékony ecsettel teszünk egy pöttyöt a cetlin szereplő szám helyére az egyenesen, ha hamissá, akkor kék vékony ecsettel végezzük el ezt a műveletet. Itt is lehetnek számok, amikre nincs értelmezve a nyitott mondat, akkor van egy ollónk, amellyel készíthetünk egy lyukat a számegyenes megfelelő pontjánál. Lesznek olyan számok is, amelyek pont a piros és kék számok között helyezkednek el, ezeket határszámoknak neveztük el. Ha ez a szám igazzá teszi a nyitott mondatot, és ez az első ilyen, akkor azt nagy piros ecsettel tudjuk bejelölni, hasonlóan működik a másik esetben is, ha hamissá teszi ez a határszám a mondatunkat, akkor nagy kék ecsettel dolgozunk.

A képen láthatjuk, hogy néhány számot jelöltünk az egyenesen, van közte olyan, ami pont határszám, s innentől kezdve piros lesz az egyenesünk addig, amíg a másik piros határszámot el nem érjük. a többi rész kék lesz, hiszen nem teszik igazzá mondatunkat. Ezzel a képpel bemutatásra kerül az x gomb használata is.

Ennél a programnál is ugyan azok a feladat típusok találhatóak meg, mint az előzőekben látottnál. Azonban ezt a játékot sokkal jobban ki lehet használni a felső tagozatos és középiskolás diákoknál.

4.3 Fogócska

Ez a játék már sokkal inkább kapcsolódik az egyenletmegoldásokhoz. Talán ez lenne a legmegfelelőbb játék a mérlegelv bevezetése előtt, hiszen az már sokkal jobban érezteti a gyerekekkel, hogy ha mondanak néhány számot példának és nem megfelelőek, akkor milyen irányba gondolkodjanak tovább, hogyan módosítsák azt.

A játék arról szól, hogy van egy egyenletünk, és van két kártyánk, az egyikre felírjuk kékkel az egyenlet bal oldalát, a másikra pirossal a jobboldalát. A kártyákat egy-egy ember fogja a kezében úgy, hogy rajta kívül senki sem láthatja. A többi gyerek sorban számokat mond, s mind a két kártyatartónak meg kell mondani, hogy a számot behelyettesítve milyen értéket vesz fel a kezükben lévő függvény. Addig mondják sorba a számokat, amíg olyan számot nem találnak a diákok, amire a két kártya értéke megegyezik. A cél az, hogy minél kevesebb kérdéssel megadják ezt a számot. A játékot nem csak addig játsszuk, amíg találunk egy számot, amely kielégíti mindkét oldalt, hanem több ilyet is kereshetünk. Fontos megértetni a gyerekekkel, hogy vannak olyan egyenletek, amelyeknek nem is lesz ilyen megoldása, vannak olyanok, amiknek több megoldása lesz, (1, 2, …), esetleg végtelen sok. A játékot érdemes a helyettesítési értékek grafikus ábrázolásával is kisérni. Az így kialakuló ábrák segíthetnek abban, hogy a gyerekek megjósolják a lehetséges megoldások számát.

Tovább bonyolíthatjuk a feladatot, - ha már elsajátították a menetét és a struktúráját – ha a számok mondogatása közben készítünk egy táblázatot és feljegyezzük a kapott kék és piros értékeket is a táblánál. A feladatuk az, hogy a táblázat alapján megpróbálják kitalálni a hozzárendelési szabályt, ezt megkönnyíti, ha a táblázat mellett figyeljük az eltéréseket.

Nézzünk egy példát!

Legyen az egyenletünk a $2x + 3 = x - 4$

x	**2x+3**	**x-4**	**eltérés**
2	7	-2	9
3	9	-1	10, nőtt
0	3	-4	7, csökkent
-7	-11	-11	0

Láthatjuk, hogy -7-nél lesz az egyenletünk azonos. A mondott számból és a kapott értékből ki lehet találni a hozzárendelési szabályt. Már három szám elég hozzá.

A feladat a fogócska nevet azért kapta, mert mondunk számokat, s mind a két függvénynek lesznek ez által felvett értékei, mi azonban azt a számot szeretnénk, amikor ezek az értékek megegyeznek. Tehát addig kergetjük a számot, amíg el nem fogjuk – a fogócska nyelvén fogalmazva. Találgatunk, próbálkozunk, ha figyeljük az értékek változását a számokhoz képest, az eltérések rávezetnek, hogy melyik irányba haladjunk. Akár mondhatnánk azt is, hogy ha növekedik az eltérés, akkor azt mondjuk, hogy hidegszik, ha csökken az eltérés, akkor mondhatjuk, hogy melegszik a keresés– mint a hideg-meleg játékban.

Ezt a játékot felső tagozatban játszhatjuk a gyerekekkel, akár lehet őket ösztönözni is, hogy aki elsőként megfejti a hozzárendelési szabályt, az valamilyen jutalmat kap. Lehet első, másod, de akár magasabb fokú egyenletekkel is játszani, de ezt csak később, a középiskolás évek alatt érdemes.

5.0. Irodalomjegyzék

Csatár Katalin, Matematika Kézikönyv, 6. osztály, II. kötet, Apáczai Kiadó Celldömölk, 2004

Csatár Katalin, Matematika Tankönyv, 6. osztály, II. kötet, Apáczai Kiadó Celldömölk, 2004

Csatár Katalin, Matematika Kézikönyv, 7 osztály, II. kötet, Apáczai Kiadó Celldömölk, 2004

Csatár Katalin, Matematika Tankönyv, 7. osztály, II. kötet, Apáczai Kiadó Celldömölk, 2004

Csatár Katalin, Matematika Kézikönyv, 8. osztály, I. kötet, Apáczai Kiadó Celldömölk, 2004

Csatár Katalin, Matematika Tankönyv, 8. osztály, I. kötet, Apáczai Kiadó Celldömölk, 2004

Csatár Katalin, Matematika Tankönyv, 9. osztály, I. kötet, Apáczai Kiadó Celldömölk, 2009

Csatár Katalin, Matematika Tankönyv, 9. osztály, II. kötet, Apáczai Kiadó Celldömölk, 2009

Sain Márton, Matematika történeti ABC, Tankönyvkiadó, 1978

Scherlein Márta, Dr. Hajdu Sándor, Novák Lászlóné, Matematika 2. Gyakorló, Első kötet, Műszaki Könyvkiadó Kft., 2008

Scherlein Márta, Dr. Hajdu Sándor, Novák Lászlóné, Metmatika 2. Gyakorló, Második kötet, Műszaki Könyvkiadó Kft., 2008

Szele Tibor, Bevezetés az algebrába, Tankönyvkiadó, 1967

Urbán János, Matematikai logika példatár, Műszaki könyvkiadó, 1987

Dr. Szendrei János, Algebra és számelmélet, Tankönyvkiadó, 1986

Péter Rózsa – Gallai Tibor, Népszerű algebra, Műveltség könyvtára, Művelet népkönyvkiadó, 1954

http://digitus.itk.ppke.hu/~b_novak/dmat/gauss-hallg_04.pdf

http://ttneni.spaces.live.com/

http://www.kfki.hu/~rozoli/letoltesek/matek/algebra/

http://www.typotex.hu/index.php?page=animaciok#autonavi_2

6.0 Melléklet

2 játékprogramot tartalmazó CD