Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Matematika Bsc

A végtelen fogalma a matematikában

Készítette*:* *Velkey Kristóf*

Konzulens: *Szentmiklóssy Zoltán*
egyetemi adjunktus

Budapest, 2011.

Tartalomjegyzék

I. Bevezetés

„Az ember által alkotott fogalmak közül különös érdeklődésre tarthat számot a végtelen fogalma, már csak azért is, mert csupa véges természetű tapasztalataink alapján egyáltalában kialakulhatott, ami nem is olyan magától értetődő. Megközelíteni csak gondolkodás útján lehet, közvetlen szemlélettel meg nem fogható…”[1]

A végtelen fogalma összefűződik a matematika főbb területeivel, az iskolai évek alatt ehhez képest méltatlanul keveset foglalkozunk vele.

Dolgozatom első fejezetében röviden áttekintem, hol jelenik meg a végtelen a matematika történetében, hogyan változott a fogalom megítélése, szerepe a matematikában. Az általános és középiskolai matematikai tananyagot vizsgálva észre vehetjük, hogy a végtelennel konkrétan alig foglalkozunk, viszont áttételesen a matematika sok területén fontos szerepet játszik. A végtelen fogalmának helyes használata után kutatva készítettem egy kérdőívet, melynek eredményei azt mutatják, hogy ahhoz képest, hány helyen jelenik meg a végtelen, sokan még sincsenek tisztában azzal, mi is a fogalom konkrét jelentése.

A középiskolai évek során érdemes egy rövid kitekintést tenni a végtelen halmazokra, felfedezni a végtelenek közti különbséget, jobban megismerkedni a végtelen fogalmával. Ennek egy tárgyalási módját részletezem a dolgozat második felében, majd megmutatom kitekintésünk halmazelméleti alapjait, melyeket középiskolában nem ismertetünk, de mindenképp szem előtt kell tartanunk a téma tanításakor.

[1] SAIN MÁRTON: *Nincs Királyi út.* Gondolat, Budapest, 1986. 768. old

II. Végtelen a matematika történetében

A végtelen fogalma évezredek óta foglalkoztatja az emberiséget. Megjelenik az eredetmondákban, filozófiai fejtegetések tárgya, a vallás és tudomány közösen osztozik rajta. Az antik tudósok nem egy-egy tudományterület szakértői voltak, hanem elsősorban filozófusok, gondolkodók. Így több irányból is eljuthattak a korlátlan, végtelen fogalmához: filozófiailag, csillagászatilag, vagy akár matematikailag is.

A végtelen gondolata szorosan összekapcsolódik az örökkévalósággal, mint az idő végtelenségével. Sokféle láttató erejű kép közül az egyik ókori keletről származó példázat így szól: *Egy gyémánt hegy csúcsára százévente egyszer leszáll egy madárka, s megköszörüli rajta a csőrét. Ha az a hegy teljesen elkopik, ekkor telik le egy pillanat az örökkévalóságból.*[2] De nem kell az ókorig visszanyúlni, hogy ilyen példát találhassunk, hazánk népdalkincsében is előfordul hasonló kép:

„Látod-e babám, látod-e babám, amott azt a nagy hegyet?
Még azt látod, még azt látod, én a tied nem leszek.
Azt a hegyet a zsebkendőmnek a négy sarkában is elhordom
Mégis az enyém, mégis az enyém leszel édes galambom."

Anaximandrosz, ókori görög filozófus először mondta ki a sejtést a világmindenség végtelenségéről, így próbálta megvilágítani a korlátlan fogalmát: *„Bárhol is áll a katona, lándzsáját ki tudja nyújtani még valamivel messzebbre."*[3]

A végtelennek kétféle megközelítése figyelhető meg: a végtelen nagy, határtalan mellett megjelenik a végtelen kicsi, a határtalan oszthatóság gondolata is. Ezen alapulnak az éleai Zénon híres paradoxonjai is: ezek közül egyik az „Akhilleusz és a teknős". Zénón a tér és idő korlátlan oszthatóságából kiindulva fogalmazza meg ezt a feladványt:[4]

> *Akhilleusz, a leggyorsabb görög, versenyt fut a nála lényegesen lassabb teknőssel, annak ez okból 100 láb előnyt adva. Akhilleusz pár pillanat alatt ott terem, ahonnan a teknős indult, azonban eddigre a teknős is haladt valamennyit. Akhilleusz egy újabb lépéssel ott terem, ám ezalatt a teknős ismét halad egy kicsit, és még mindig vezet. Akármilyen gyorsan is ér Akhilleusz oda, ahol a teknős egy pillanattal korábban volt, amaz mindig egy kicsit előrébb lesz.*

---

[2] N. JA. VILENKIN: *A végtelen kutatása*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1988. 8. old.
[3] N. JA. VILENKIN: Im. 7. old.
[4] RUZSA IMRE: *A matematika és a filozófia határán*. Gondolat, Budapest, 1968. 111. old.

Zénón érvelése azt látszik igazolni, hogy Akhilleusz sohasem fogja megelőzni, de még csak utolérni sem a teknőst. A paradoxon feloldása csak a XIX. században vált lehetségessé az analízis eszközeivel:

Tegyük fel az egyszerűbb számítás kedvéjért, hogy Akhilleusz kétszer olyan gyors, mint a teknős. A pálya pedig egy számegyenes, melynek nulla pontjából indul Akhilleusz, s 100-ról indul a teknős, tőle 100 lábnyira. Amire Akhilleusz oda ér ahonnan a teknős indult, addigra a teknős 50 lábbal arrébb cammog. Mire Akhilleusz odaér, a teknős ismét 25 lábnyit halad. Észrevehetjük, hogy a teknős mindig pont ugyanolyan távol lesz a 200 lábtól, mint Akhilleusztól. Amint a teknős eléri a kétszáz láb távolságot, előnye elfogy, s Akhilleusz utoléri. Ez alapján az az állítás, hogy Akhilleusz sosem éri utol a teknőst, annyit jelent, hogy a teknős sosem éri el a 200-at. Zénón gondolatai szerint végtelen sok olyan állomás van, amelyben a teknős még nem érte el a 200-at. Azonban a futás tetszőleges szakaszát tekintve, a megtett utak, s az ehhez szükséges idők összege is véges. Tehát sem távolságban, sem időben sincs szó végtelenségről, s ezzel a meggondolással fel is oldottuk a paradoxont.[5]

Arisztotelész fenntartásokkal viseltetett a végtelen iránt. Elismerte, hogy *„sok képtelenség következik a végtelen tagadásából is és a végtelen elismeréséből is."*[6] Két fajta végtelent különböztetett meg: az aktuális és potenciális végtelent, melyeket más szóval meglévő és keletkező végtelennek nevezhetnénk. A potenciális végtelen a dolgok vagy jelenségek olyan sorozata, amit minden határon túl lehet folytatni, vagyis mindig lehet nagyobb természetes számot mondani. Ezzel szemben aktuális végtelen például a természetes számok összessége, egy végtelen halmaz. Arisztotelész, s utána még sokan mások, tagadták az aktuális végtelen létezését, csak a potenciális végtelent fogadták el létező dolognak.

Ilyen nagyfokú bizonytalanság, s el nem fogadás miatt a végtelent mellőzni próbálták a matematika fogalomrendszeréből. Néha még olyan esetekben is, ahol az mai szemmel nyilvánvalónak tűnne. Euklidész például Elemek című összefoglaló művében belátja, hogy *„prímszámból prímszámok bármely adott sokaságánál több van"*, vagyis végtelen sok prímszám van, ezt mégsem mondja ki.[7]

Tétel: *Prímszámból prímszámok bármely adott sokaságánál több van*

Bizonyítás: *Legyenek adott prímszámok a, b, és c. Azt állítom, hogy több prímszám van, mint a, b, és c. Vegyük ugyanis a, b, c legkisebb közös többszörösét, s adjunk*

---

[5] RUZSA IMRE: Im. 141. old.
[6] N. JA. VILENKIN: Im. 15. old.
[7] EUKLIDÉSZ: *Elemek* Gondolat, Budapest, 1983. IX. 20. Tétel, 271.old.

hozzá 1-et. Az így keletkezett abc+1 vagy prímszám, vagy nem. Ha prím, akkor találtunk a, b, c-nél több prímet. Ha abc+1 nem prím, ekkor osztja valamely prímszám, legyen mondjuk g. Azt állítom, hogy g a, b és c egyikével sem azonos. Tegyük fel ugyanis indirekt, hogy az. a, b, és c osztják abc-t, tehát g is osztja abc-t. Viszont g abc+1-et is osztja, tehát osztja 1-et is. Ez ellentmondás, tehát g nem azonos a, b, c egyikével sem, s a feltétel szerint prím, tehát találtunk adott a, b, c prímeknél több prímet, s épp ezt kellett megmutatni.

Ha indirekt feltesszük, hogy véges sok prímszám van, egyből ellentmondásra jutunk, hisz bebizonyítottuk, hogy bármely adott sokaságánál több van, tehát ennél is több van.

A görögökön kívül más népek gondolkodóit is vonzotta a végtelen titokzatossága és rejtelmei. A hindu matematikában például először Ácsárja Bhászkárá írásában, a Sziddhánta Sirómani második kötetében jelenik meg a végtelen. A nullával való osztás problémájánál a következőket írja:[8]

„Az osztandó 3, az osztó 0. A hányados $\frac{3}{0}$*. Egy tört, amelynek a nevezője 0 egy végtelen mennyiséget jelent. Ilyen mennyiség, amelynek osztója 0, nem változik bármit adunk hozzá, vagy bármit vonunk ki belőle: aminthogy nem változtat helyet a végtelenben az örökké való Isten."*

Európában az antik civilizáció hanyatlásával a tudományok művelése is hanyatlani kezdett, a végtelen fogalma a misztikum, s a teológia területére került át. A reneszánsz korában újjáéledő tudományos világnak sok harcot meg kellett vívnia, mire lehetősége nyílt a természettudományos kérdéseket a vallástól elkülönítve vizsgálni. A görög eredmények kritikai vizsgálata során Arisztotelész aktuális végtelen tagadásáról szóló tanait is egyre többen kérdőjelezték meg. Ezek, a főként matematikai gondolatok nagy hatással voltak más tudományterületekre is. A számtalan más világ létezésének, s a világmindenség végtelenségének gondolata az aktuális, meglévő végtelenképpel egyenlő.

A végtelen kérdésköre jelen van az újkori matematika ágaiban is, például:

Gerard Desargues bevezette az egyenes végtelen távoli pontjának és a sík végtelen távoli egyenesének fogalmát, megalapozva ezzel a geometria egyik új ágát, a projektív geometriát.[9]

A matematikai analízist, a differenciál- és integrálszámítást, különösen kezdetben, a végtelen kicsiny mennyiségekkel való számolás jellemezte.[10] A határérték megjelenése

---

[8] SAIN MÁRTON: Im. 371. old.
[9] SAIN MÁRTON: Im. 541. old.

tulajdonképpen a végtelen közelítés módszerének fogalommá alakítása, a végtelen megszelídítésével. A végtelen megjelenik több analízissel foglalkozó tudományos munka címében is, ezzel is utalva szoros kapcsolatukra: például John Wallis: A végtelen aritmetikája (1655)[11] vagy Euler: Bevezetés a végtelenek analízisébe (1748)[12].

Az analízisben megjelenő új fogalmakban a matematikusok használták a végtelent, azonban pontos matematikai definíciót csak évszázadok múltán, a halmazelmélet megteremtésével tudtak adni rá.[13] A Georg Cantor által kidolgozott új tudományág célja volt a matematika formalizálása, biztos alapra való felépítése. Érdekes módon egyszerre több matematikatudós jutott eredményekre ebbéli törekvésében.

Bernhard Bolzano cseh matematikus még a végtelen egyik paradoxonjának tekintette hogy egy végtelen halmazra, s annak végtelen részhalmazára megadható egy páronkénti megfeleltetés. Pár évvel később ugyanez a gondolat jelenik meg Richard Dedekind munkásságában: ezzel a tulajdonsággal lehet megkülönböztetni a véges halmazoktól a végteleneket, vagyis végtelen halmaznak azokat a halmazokat nevezzük, amelyeknek létezik olyan valódi részhalmaza, melyre adható teljes és egyértelmű megfeleltetés közte, s az eredeti halmaz között.

Erre példaként hozhatjuk a természetes számok halmazát, melynek egy részhalmaza a négyzetszámok halmaza, a két halmaz között egyértelmű megfeleltetést adunk, ha minden természetes számot megfeleltetünk a négyzetének:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots\ldots n$$
$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots\ldots n^2$$

Cantor nevéhez kötjük a halmazelmélet megteremtését, melyről a XX század elejének egyik legjelesebb német matematikusa, David Hilbert az 1900-as matematikai kongresszuson így nyilatkozott: *„Senki sem űzhet ki minket abból a paradicsomból, melyet Cantor teremtett nekünk."* Azonban ez a paradicsom majdnem hamvában holt eszmévé vált, hisz felmerültek komoly logikai ellentmondásai. Ezek közül a legelső, a felfedezőjéről elnevezett Burali-Fori paradoxon szerint: ha tekintjük az összes halmazok halmazát, akkor nyilván ennek a halmaznak a számossága a legnagyobb, vagy legalábbis ennél nagyobb számosság nem képzelhető el. Ez viszont ellenkezik Cantor azon megállapításával, hogy legnagyobb számosság nincs. Bertrand Russell amerikai matematikus mutatta meg, hogy egyáltalán nem is beszélhetünk az összes halmazok halmazáról.

---

[10] SAIN MÁRTON: Im. 663. old.
[11] SAIN MÁRTON: Im. 574. old.
[12] SAIN MÁRTON: Im. 576. old.
[13] SAIN MÁRTON: Im. alapján

Russell-paradoxon

Legyen $V = \{x : x = x\}$ *az összes dolgok halmaza. Ekkor ennek egy részhalmaza* $A = \{x \in V : x \notin x\}$. *Kérdés, vajon A eleme-e önmagának? Ha* $A \in A$ *akkor* $A \notin A$, *s ha* $A \notin A$ *akkor* $A \in A$. *Ezzel ellentmondásra jutottunk, vagyis nem beszélhetünk az összes dolgok halmazáról.*[14]

A Russell-paradoxonnak létezik egy közérthetőbb formája is, az ún. borbély paradoxon, amely így szól:

Egy laktanya borbélya a szolgálati szabályzatnak megfelelően csak azokat a katonákat borotválja, akik maguk nem borotválkoznak, de nem borotválhatja azokat, akik maguk borotválkoznak. Kérdés: önmagát megborotválhatja-e? Ha megborotválja magát, akkor olyan katonának számít, aki önmagát borotválja, tehát a szolgálati szabályzat megtiltja, hogy saját maga megborotválkozzon. Ha ennek megfelelően, nem borotválkozik, akkor olyan katonának számít, akit meg kell borotválnia. Bármit is tesz tehát: akár megborotválja magát, akár nem, vét a szabályzat ellen.[15]

Ezen felmerült problémákra sokan sokféle választ fogalmaztak meg: Például az intuícionizmus, mely főként Brouwer holland matematikus nevéhez köthető, célul tűzte ki a matematika biztos alapokon történő felépítését. Csak az van, amit meg lehet konstruálni: ez alapján kizárták az aktuális végtelen létét is, mivel egyszerre mindig csak véges sok elemét tudjuk megkonstruálni egy halmaznak, még ha ez határtalanul folytatható is – vagyis potenciálisan végtelen.[16]

A halmazelmélet axiomatizálásával sikerült kiküszöbölni ezen ellentmondásokat. Több használható axiómarendszer jött létre, többek között a Zermelo – Frankel illetve a Neumann – Bernays – Göddel axiómarendszer.

---

[14] KOMJÁTH PÉTER: *Halmazelmélet.* Budapest, 2007. ELTE egyetemi jegyzet alapján
[15] PÉTER RÓZSA: *Játék a végtelennel*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. 225. old.
[16] PÉTER RÓZSA: Im. 226. old.

III. A végtelen-fogalom megjelenése az általános és középfokú matematika oktatás során

Az iskolaévek alatt a diákok megismerkednek a végtelennel, sokszor támaszkodnak rá, mégsem esik konkrétan sok szó róla. Amint a következőkben látni fogjuk, a végtelen fogalom megjelenik a matematika majd minden területén, nemegyszer olyan összefüggésekben is, ahol nem is feltételeznénk.

III.1 Első találkozások a végtelennel

A gyerekek már fiatalon elsajátítják a számokat, egymás utáni felsorolásukat, azonban előbb csak a számok nevét tanulják meg, a jelentésük megértése évekig tartó folyamat. Édesanyám mesélte, mikor a húgomtól megkérdezték, hány orra van, ő azt felelte, öt. Ehhez hasonlóan előfordulhat, hogy öt dinnye több lehet egy gyermek számára, mint öt szem dió, hisz nem csak az elemek számát, hanem más szempontokat is figyelembe vesz. Piaget kísérletei megvilágították, hogy ekkor még nem alakul ki stabil számfogalom:[17]

> *Egyik kísérletében hat tojást, hat tojástartóban raktak egy gyerek elé, s a kérdésre, ugyanannyi tojás van-e mint tojástartó helyeslő választ kaptak. Azonban ha a tojásokat a tartókból kivéve s egy csoportba rakva megkérdezik, vajon elég tojás van-e az asztalon ahhoz, hogy minden tojástartóba jusson belőlük, de egyikbe sem több mint egy, tagadó választ kaptak a kérdésre. A két csoport megszámlálása után (6-6 darab) az előző kérdésre újból tagadó volt a válasz.*

Általános iskolába kerülve a gyerekek rendelkeznek már - egy általában ekkor még kialakulatlan - képpel a számokról. Az első tanév leghangsúlyosabb feladata a számfogalom megszilárdításáról szól, a számjegyek írása, illetve az összeadás és kivonás művelete mellett. Már ekkor is suttognak a végtelenről, sokan ismerik a szót magát, de még nem tudnak mit kezdeni vele: *ebben a korban kimeríthetetlen játék, hogy ki tud nagyobbat mondani. Például nagyobb számot: szépen növekednek a számok, amíg az egyik kisdiák beböki: végtelen. Itt nem ér véget a sor, mert a következő szemrebbenés nélkül rávágja: végtelen+1.* Ebből is érzékelhető, hogy számukra a végtelen is egy szám, csak megfoghatatlanul nagy. Ebben a kifejezésben ”végtelen+1” megjelenik a potenciális végtelen képe, amelyet már Arisztotelésznél is láttunk.

---

[17] RICHARD SKEMP: *A matematikatanulás pszichológiája*. Gondolat, Budapest, 1975. 204. old.

A tanulmányok előrehaladtával a szám fogalom egyre bővül, megjelennek a tízesek, százasok, ezresek. Ideális esetben a számfogalom legkésőbb harmadik-negyedik évfolyamos korra elszakad a képzelettől, vagyis a „3” már nem három almát vagy három lovat jelöl, hanem a „három” számot, háttérképzetek nélkül. A nagy számok, a helyiértékek fogalmának megjelenésével bármilyen határig elmehetnek. Az így kialakuló végtelen kép a potenciális végtelen: mindig lehet nagyobb számot mondani.

Mint észleljük, a végtelen többféle kontextusban megjelenik már alsó tagozatban is, a tananyagban nem esik róla konkrétan szó, mégis ott van a köztudatban: bármilyen nagy számot tudunk mondani, s még mindig lesz nála nagyobb, s a sorozatokat is bármeddig tudjuk folytatni.

Vannak olyan dolgok, amit szabad szemmel nem tudunk megszámlálni, mégis meg tudjuk becsülni a számukat. Egy nyájban a bárányok számát még megközelítőleg meg tudjuk becsülni. Előfordulhat azonban olyan eset is, amire nem tudunk pontos becslést adni, olyan végtelen soknak tűnik: a homokszemek száma a tengerparton, vagy a víz az óceánban. Mégsem szabad elfelejtenünk, hogy ezeknek a mennyisége is véges.

III.2 Végtelen felső tagozatban

A felső tagozat elején kibővül a számfogalom – meghatározzuk a természetes, az egész, majd a racionális számok halmazát is. A törtszámok bővítésekor jó esetben a diákok is észreveszik, hogy az $\frac{1}{2}$-et sokféleképpen felírhatjuk:

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}=\frac{6}{12}=......$$

Ez a végtelenségig folytatható, s bármely törtszámra igaz, hogy végtelenül bővíthető. A törtszámok tizedes tört alakjukban is fontos szerepet kapnak az ötödikes tananyagban. A véges tizedes törtek mellett lesznek olyan törtszámok, amelyek átírását nem tudjuk befejezni. Például az $\frac{1}{3}$=0,333333333…. Bevezetésre kerül a végtelen, szakaszos tizedes tört fogalma, melynek számjegyei egy bizonyos ponttól fogva ismétlődnek. A törtszámokat megtanuljuk felírni tizedes tört alakban, majd szeretnénk ezt megoldani visszafelé is. Véges tizedes törteknél nincs nehéz dolgunk, hiszen mint mondjuk is 0,15 (tizenöt század) megegyezik $\frac{15}{100}$-al. Végtelen, szakaszos tizedes törtek esetén más módszerhez kell folyamodnunk, melynek hátterében a mértani sor és végtelen sor összege húzódik meg. Ennek szemléletes példája Péter Rózsa *Játék a végtelennel* című könyvéből vett csokoládépélda: [18]

> *Volt egy csokoládéfajta amit úgy akartak népszerűvé tenni, hogy szelvényt is csomagoltak a burkoló ezüstpapírba, és aki tíz ilyen szelvényt beszolgáltatott, az egy újabb tábla csokoládét kapott cserébe. Ha van egy ilyen tábla bontatlan csokoládém, mennyit ér az valójában?*
>
> *A csokoládéban van egy szelvény, aminek az értéke* $\frac{1}{10}$ *csokoládé, s az abban benne lévő szelvény* $\frac{1}{10}$*-e, ami így* $\frac{1}{100}$ *csokoládét ér, s a benne lévő szelvény* $\frac{1}{10}$*-ét. Ezt így folytathatnánk a végtelenségig, tehát egy bontatlan tábla csokoládém értéke tulajdonképpen:* $1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+....$ *csokoládét ér.*
>
> *Másrészt meg tudom mutatni, hogy a bontatlan csomag csokoládém pontosan* $1\frac{1}{9}$ *csokoládét ér. Ebből a csokoládé 1 egész, tehát a szelvény értéke* $\frac{1}{9}$ *csokoládé. Kilenc szelvényem egy csokoládét ér, ugyanis ha rendelkezem 9 szelvénnyel, bemehetek a boltba kérve egy csokoládét, amit a helyszínen szeretnék elfogyasztani, s a végén fizetek. Kibontva a csokoládét, már rendelkezem 10 szelvénnyel, amit a boltosnak átadva rendeztem a számlát. Így beláttam, hogy a csokoládém értéke* $1\frac{1}{9}$ *csokoládé, ami megegyezik a* $1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+....$ *végtelen összeggel.*

Ehhez hasonló eljárással tudom átírni a végtelen szakaszos tizedes törteket is tört alakba. Ezt a legegyszerűbb a diákoknak példákkal szemléltetni, a módszer így összegezhető: Az *a* tizedes törtben az ismétlődő számjegyek száma *n*. Vegyük *a* 10^n-szeresét, s vonjunk le belőle *a*-t. Az így megkapott $(10^n-1)a$ szám egy véges tizedes tört, amit átírunk tört alakba, s elosztva (10^n-1)-el megkapjuk a-t tört alakban.

Említésre kerülhetnek a végtelen, nem szakaszos tizedes törtek is, az irracionális számok első nevezetes tagjával azonban csak hetedik osztályban, a kör kerületének és területének meghatározásakor kerülünk közelebbi kapcsolatba. A kör kerületét a körbeírt s a kör köré írt szabályos sokszögek kerületével közelítjük, hiszen egyre több csúcsú ilyen sokszögek kerülete egyre jobban megközelítik, szűkebb határok közé szorítják a kör kerületét.

[18] PÉTER RÓZSA: Im. 106-107. old.

Egy konkrét körnél a számolásokat figyelve észrevehetjük, hogy a kör kerülete körülbelül 3,14-szerese lesz az átmérőjének. Ez a szám független az átmérőtől, egy állandó mennyiség, melyet csak közelítőleg tudunk megadni. Jeléül a görög abc π (pí) betűjét kapta, mely egy végtelen, nem szakaszos tizedes tört. A kör területét vizsgálva arra jutunk, hogy ez a sugár négyzetének π-szerese.

A négyzetgyök vonás bevezetésekor nyolcadik osztályban egy geometriai szemléletű problémából vezetünk le egy aritmetikai műveletet. A tankönyv[19] olyan négyzetek területét vizsgálja, melyek területe ismert, s az oldalak hosszát szeretnénk megállapítani. Egy 2 egység területű négyzet oldalát nem tudjuk a racionális számok halmazán megadni, ezért be kell vezetnünk egy új fogalmat: $\sqrt{2}$-nek nevezzük el azt a számot, aminek a négyzete 2 (a gyökvonás a hatványozás fordítottja). $\sqrt{2}$ értékét, π esetéhez hasonlóan, két oldalról közelíthetjük racionális számokkal, ezzel az eljárással egyre közelebb jutunk $\sqrt{2}$-höz. Tizedes tört alakja, végtelen, nem szakaszos, azaz nem racionális szám.

$1^2(=1)<2<2^2(=2)$	$1<\sqrt{2}<2$
$1,4^2(=1,96)<2<1,5^2(=2,25)$	$1,4<\sqrt{2}<1,5$
$1,41^2(=1,988)<2<1,42^2(=2,016)$	$1,41<\sqrt{2}<1,42$

Ehhez hasonlóan definiálhatjuk az összes pozitív racionális szám négyzetgyökét: Egy c pozitív szám négyzetgyökén a c egység területű négyzet oldalának hosszát értjük, ezt $\sqrt{c}$-vel jelöljük.

Felmerülhet a kérdés, hogy hol is van ebben a végtelen? A végtelen egyik legmegfoghatóbb példája a közelítés módszere, ahogy egy irracionális számot két oldalról racionális számokkal közelítünk. Ennek több eljárása ismert. Az előbb említett $\sqrt{2}$ közelítés első lépésben azt vizsgálja, hogy az irracionális szám melyik két egész szám közé esik. Ezt az egység hosszú intervallumot felosztja 10 egyenlő intervallumra, melyek közül az irracionális szám az egyikbe esik, ezt szintén 10 intervallumra osztjuk s így tovább. A közelítés háttere a Cantor axióma, miszerint minden egymásba skatulyázott intervallumsorozatnak van közös eleme.

Hasonló elven működik a korlátlan intervallumfelezési eljárás, ahol a keresett eredményről annyit tudok, hogy egy adott véges valós intervallumban van. Ezt az

[19] CZAHÓCZKI – CSATÁR – KOVÁCS – MORVAI – SZÉPLAKI – SZEREDI: *Matematika 8. osztály I. kötet* Apáczai kiadó, Celldömölk, 2004, 71. old.

intervallumot megfelezem, s a keresett eredményem legalább az egyikben lesz. Ezt az intervallumot szintén megfelezem s így tovább. Egymásba skatulyázott intervallumok végtelen sorozatát kapom meg így, melynek tudom, hogy eleme a keresett eredmény. Ez a módszer egyébként főként akkor használatos, ha nem pontos, hanem csak körülbelüli vagy kerekített értékre van szükségem. A metódusnak van egy diáknyelvre lefordított változata is, mégpedig:

Hogy hogyan fog a matematikus oroszlánt a szavannában?[20]

Két részre osztjuk a sivatagot, ha az egész sivatagban van oroszlán, akkor legalább az egyik felében szintén van. Kiválasztjuk az egyik ilyen fél sivatagot, a másik felét eldobjuk. A fél sivatagot ismét két részre osztjuk; az egyik részt (amiben van oroszlán) megtartjuk, a másik részt ismét eldobjuk. A felezgetést akkor hagyjuk abba, amikor a megmaradt sivatag darab már elég kicsi, vagyis a területe kevesebb a ketrecünk alapjának a területénél, és akkor ráborítjuk a ketrecet. Ezzel megfogtuk az oroszlánt. Amennyiben az oroszlán mozgó állapotban van, meg kell várnunk, míg nyugalmi állapotba helyezi magát.

A számok oszthatóságát vizsgálva, tapasztalataink általánosításával olyan szabályokat alkothatunk meg, melyeket a természetes számok halmazára értelmezünk. Ezek vizsgálatakor kerülnek bevezetésre a prímszámok. Ezek számáról a tankönyvben nem esik szó, az eratosztenészi szita segítségével viszont olyan módszert kapunk, amellyel újabb és újabb prímszámokat határozhatunk meg.

A legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös tanításakor könnyen felmerülhet a diákokban, hogy miért nem beszélünk legkisebb közös osztóról – hisz ez minden számpárnál 1 – vagy legnagyobb közös többszörösről. Könnyen megmutathatjuk, hogy bármilyen többszörösét vesszük a megadott számoknak, egészen biztosan vehetjük még például a kétszeresét, ami így még nagyobb lesz, hisz a természetes számoknak nincs felső korlátja.

Ezzel párhuzamosan a geometriában is megjelenik a végtelen, fogalmi szinten is. A Műszaki kiadó ötödikes tankönyve például, úgy próbálja megmutatni a síkot, mint egy papírlapot, melyet minden irányban végtelennek tekintünk.[21] Az Apáczai kiadó ötödikes tankönyvében, az előzőekhez hasonlóan úgy szemléltetik a síkot, mint egy téglalapot, melyet

---

[20] PÉTER RÓZSA: Im. 224. old. & KÓS GÉZA: Hogy fogjunk oroszlánt? http://www.komal.hu/cikkek/kg/oroszlan/oroszlan.h.shtml utolsó letöltés: 2011.05.23.

[21] HAJDÚ SÁNDOR: *Matematika 5.* Műszaki kiadó, Budapest

minden irányban bármeddig növelünk.[22] Ugyanezen tankönyv II. kötetében ezt olvashatjuk ugyanerről a témáról: *A geometriában a tér, a sík és az egyenes alapvető halmazokat jelentenek, melyek végtelen sok pontból állnak.*[23]

Ezek a definíciók elvárják a diákoktól, hogy törekedjenek az elvont gondolkodásra, a matematikai modellek használatára. Kiindulásnak persze megfelelő a síkot egy végtelen papírlappal definiálni, azonban később a fogalomnak el kell szakadnia a példától. A geometriai vizsgálódások segítségével különbséget tehetünk a végtelen különböző előfordulásai közt, melyek mind másra vonatkoznak. A végtelen sok a darabszámra, a végtelen távol a távolságra, míg a végtelen nagy a területre vonatkozik. Megvizsgálhatjuk, hogy egy szakasz, egy egyenes, egy síklap és egy sík közül melyiknek van végtelen sok pontja, vagy végtelen távoli pontja.[24]

A függvények, s a derékszögű koordinátarendszer használata során szintén kapcsolatba kerülünk a végtelennel – hisz például egy lineáris függvény ábrázolásakor annak csak egy részét ábrázoljuk, tudva, hogy annak az ábrával nincsen vége.

III.3 Végtelen a középiskolai matematikai tanulmányokban

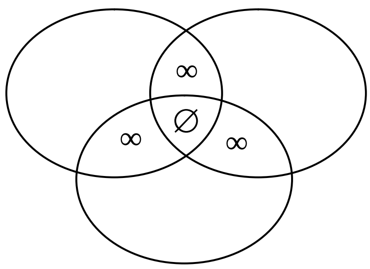
Középiskolában az általános iskolában tanultak elmélyítése, részletezése mellett, egyre nagyobb hangsúlyt kap a matematika formalizálása, letisztázása: definíciók, tételek, s ezek bizonyítása. A végtelen keresztül-kasul átfonja a matematikát, mindenütt ott van, azonban mégsem találkozunk vele. Nem tanítjuk, nem emeljük ki, sokfelé felhasználjuk, azonban mégsem fordítunk kellő hangsúlyt rá. A diákok végtelen képe jó szándékkal is bizonytalannak mondható. A végtelen megjelenik a valós, s egyéb számkörök mindennapos használatában, a geometriában, a függvényekben. Szakkörön, vagy fakultáción szó esik a sorozatok határértékéről, differenciál- és integrálszámításról is, mely témakörök a végtelen közelítésen alapulnak. A halmazok témakörében is közvetlenül foglalkozunk a végtelennel, hisz megjelennek a végtelen halmazok.

A halmazelmélet felépítésekor megjelennek a halmazok méretére vonatkozó kérdések. Egy halmaz véges, ha elemeinek számát egy természetes számmal megadhatjuk. Ennek segítségével definiáljuk a végtelen halmazokat is: egy halmaz végtelen, ha nem véges, vagyis

[22] CZAHÓCZKI – CSATÁR – KOVÁCS – MORVAI – SZÉPLAKI – SZEREDI: *Matematika 5. osztály I. kötet*, Apáczai kiadó, Celldömölk, 2005, 62.old.
[23] CZAHÓCZKI – CSATÁR – KOVÁCS – MORVAI – SZÉPLAKI – SZEREDI: *Matematika 5. osztály II. kötet*, Apáczai kiadó, Celldömölk, 2005, 3.old.
[24] CZAHÓCZKI – CSATÁR – KOVÁCS – MORVAI – SZÉPLAKI – SZEREDI: *Tanári kézikönyv a Matematika 5. osztály I. kötetéhez*, Apáczai kiadó, Celldömölk, 2009, 78.old.

elemeinek számát nem adhatjuk meg egy természetes számmal. Végtelen halmazra példaként megjelennek a különböző számkörök: természetes, egész, racionális és valós számok. Ugyanígy említhetünk geometriai példát is: egy adott ponttól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkon. A tankönyvek[25] főként a véges halmazok használatára helyezik a hangsúlyt. Végtelen halmazokkal főként a számköröket, részhalmazaikat vizsgálva kerülhetünk kapcsolatba. Ezek közük kiemelnék egy nehezebb feladatot:

Adjuk meg a természetes számok három olyan részhalmazát, amelyekre teljesül, hogy bármely kettő közös részének végtelen sok eleme van, de a három halmaz metszete üres.[26]



Megoldás: *Legyen a három halmazunk A, B, és C. A és B metszete legyen mondjuk azon természetes számok, amelyek 1-re végződnek. A és C metszete legyenek azon természetes számok, melyek utolsó számjegye 2, B és C metszete pedig az előzőekhez hasonlóan legyen a 3-ra végződő természetes számok. Ha ez alapján megadjuk A-t, B-t és C-t: A={1-re és 2-re végződő természetes számok} B={1-re és 3-ra végződő természetes számok} és C={2-re és 3-ra végződő természetes számok}, akkor a természetes számok ezen három részhalmazára teljesül, hogy bármelyik kettőnek a metszete végtelen sok elemet tartalmaz, míg a mindhárom halmaz metszete üres. Természetesen ugyanezzel a gondolatmenettel többféle megoldás megadható.*

Ugyanehhez a témához kapcsolódva, a már az általános iskola alsó tagozata óta ismert számegyenes fogalmát újból összekötjük a valós számokkal: a számegyenes minden pontjához tartozik egy valós szám, és minden valós számhoz tartozik egy pont a számegyenesen. A számegyenesen különböző félegyeneseket, intervallumokat adhatunk meg. A félegyeneseket olyan intervallumoknak tekintjük melyeknek egyik végpontja adott, a másik pedig vagy mínusz, vagy plusz végtelen. Amikor megjelennek ezek a jelölések, fontos tudatosítani a diákokkal, hogy ez nem egy hagyományos értelembe vett intervallum, hisz a határként megadott ∞ szimbólum épp azt jelzi, hogy nincs határa. ∞ csak egy szimbólum, s nem egy megfoghatatlanul nagy szám. Ki kell emelni, hogy ezért is írunk a végtelen

[25] KOSZTOLÁNYI – KOVÁCS – PINTÉR – URBÁN – VINCZE: *Sokszinű matematika 9-12.* Mozaik kiadó,Szeged
[26] KOSZTOLÁNYI – KOVÁCS – PINTÉR – URBÁN – VINCZE: *Sokszinű matematika 9.* Mozaik kiadó,Szeged 2003, 28.old. 12. feladat

szimbólum mellé nyitott intervallum jelet: például: $[0,\infty[$ intervallum a nemnegatív valós számokat jelenti.

Betűket már felső tagozaton is használtunk, például algebrai kifejezések leírására, mely ismeretlent, határozatlant, vagy változót is jelölhet. Ezek segítségével általánosíthatjuk gondolatainkat, adott adatok nélkül is számolhatunk. Ha változóként tekintünk rá, s az alaphalmazunk egy végtelen halmaz, akkor egy egyszerű kifejezéssel végtelen sok számot adhatunk meg. Például egy feladatban a diák így már könnyen válaszolhat arra a kérésre, hogy adjuk meg az összes pozitív egész számot, amely 4-el osztva 1-et ad maradékul.[27] Válasza: 4k+1, ahol $k \in \mathrm{N}$. Gyakran nem elégszünk meg feladat megoldásánál egy helyes válasszal, hanem az összes megoldást keressük. Az itt elvárt általánosítási képesség segítségével a végtelen számhalmazon láthatunk be valamit. Ilyen feladat például: *igaz-e hogy két szomszédos pozitív egész szám mindig relatív prím?*[28]

A prímszámokkal foglalkozva bebizonyítjuk, hogy végtelen sok prím van, Euklidészhoz hasonlóan, indirekt bizonyítást adva rá. (Lásd előbb.)

A számok normálalakjának segítségével nagyon nagy, s nagyon kicsi mennyiségeket is le tudunk írni, könnyen számolhatunk velük. Olyan dolgokról is megközelítő képet adhatunk, amikről eddig a diákoknak megfoghatatlan képe volt. *Például, vegyünk egy tonna búzát. A búzaszemek száma megbecsülhetetlennek, szinte végtelennek látszik, azonban, ha tudjuk, hogy egy szem búza tömege átlagosan mennyi, közelítő értéket adhatunk arra, hogy egy tonna búza hány búzaszemből is állhat.*[29]

Az egyenletek, egyenlőtlenségek témakörében előfordulhat, hogy egy egyenlőtlenségnek végtelen sok megoldása van. A diákok is egyre magabiztosabban bánnak így a fogalommal, a megoldást többféleképpen tudják megadni: ábrázolva grafikusan, intervallummal megadva, esetleg jelekkel leírva: $x \leq 3$.

Felsőbb osztályokban a lineáris függvényeken túl megjelennek más, speciálisabb függvények is, mint például a parabola, vagy a négyzetgyök függvény. Legérdekesebb a hiperbola függvény képe: az $\frac{1}{x}$ függvény a nulla pontban nincs értelmezve, de negatív és pozitív irányból közelítve mínusz illetve plusz végtelenbe tart. Ennek megértéséhez magasabb szintű absztrakciós készség szükséges.

[27] KOSZTOLÁNYI – KOVÁCS – PINTÉR – URBÁN – VINCZE: *Sokszinű matematika 9.* Mozaik kiadó,Szeged 2003, 35.old. 3. feladat
[28] KOSZTOLÁNYI – KOVÁCS – PINTÉR – URBÁN – VINCZE: *Sokszinű matematika 9.* Mozaik kiadó,Szeged 2003, 70.old. 4. feladat
[29] KOSZTOLÁNYI – KOVÁCS – PINTÉR – URBÁN – VINCZE: *Sokszinű matematika 9.* Mozaik kiadó,Szeged 2003, 45.old. 1. feladat

A szimmetriák vizsgálatakor felmerül a kérdés, milyen alakzatnak hány szimmetriatengelye, szimmetria-középpontja van. Vajon van-e olyan alakzat, amelynek végtelen sok szimmetriatengelye van? Rövid gondolkodás után a diákok könnyen találnak ilyen alakzatot: a kört. A középpontos szimmetriáknál is felmerül ez a kérdés: Van-e olyan ponthalmaz, amelynek végtelen sok szimmetria-középpontja van?[30] Erre keresve a választ érdemes elindulni abból, vajon van-e olyan alakzat, amelyiknek kettő, vagy annál több van. Ebben az esetben a szimmetria-középpontok egymásra vett képei is szimmetria-középpontok, tehát ha kettő legalább van, akkor végtelen sok van. Ilyen ponthalmazra a legegyszerűbb példa az egyenes.

Számsorozatokat olyan szabályokkal alkotunk, melyek alapján a sorozat végtelen sok tagja kiszámítható. Ehhez hasonlóan a Pascal háromszög vagy a Fibonacci sorozat képzésekor egy algoritmust adunk meg, ez adja meg az újabb elemek képzésének szabályát. Ez a folyamat a végtelenségig folytatható. A Fibonacci sorozat megjelenése egy szöveges feladathoz köthető, amelyet a XIII. századi olasz matematikus, Fibonacci (eredeti nevén Leonardo Pisano) fogalmazott meg így:

Hány pár nyúlra szaporodik egy év alatt a kezdeti egy pár, ha a nyulak 2 hónap alatt válnak ivaréretté, és ezután minden pár minden hónapban egy új párnak ad életet?

A hatványfogalom kiterjesztésével bevezetjük az irracionális hatványokat. Korábbi tanulmányainkból tudjuk, hogy az irracionális számokat két oldalról közelíthetjük racionális számokkal, itt ugyanígy közelítünk, csak a kitevőben. A kitevőt értelmeztük a valós számok halmazára, így megkapva az exponenciális függvényt. Az egyenletek, egyenlőtlenségek megoldásához nyújtanak segítséget a közelítő módszerek, például az előbbiekben már említett intervallumfelezés.

[30] KOSZTOLÁNYI – KOVÁCS – PINTÉR – URBÁN – VINCZE: *Sokszínű matematika 9.* Mozaik kiadó,Szeged 2003, 216.old.

IV. A végtelen halmazokról

IV.1 A végtelen halmazok vizsgálata a középiskolában I.

A középiskolában tanult halmazelmélet „naív halmazelmélet” melyet annak tudatával taníthatunk, hogy tudjuk, a halmazelmélet axiomatizálásával kiküszöböltük a naív szemlélet hibáit.

A véges és végtelen halmazok közti különbség bevezetésekor érdemes a konkrét mindennapi példákból kiindulva általánosítani. Ha megkérjük a diákokat, segítségükkel nagyon sok halmazt össze tudunk szedni a valós életből. Érdemes felsorolni néhányat, például az osztályközösségből: {azok, akik nyáron születtek}, {barna szeműek}, {lányok}. Ugyanígy persze megadhatjuk {az iskola tanulói} vagy {Miskolc lakosai} halmazát is. Itt minden halmaznak meg tudjuk adni az elemszámát, pontosan hány elemből áll. Megjegyzés: *Nehezebb dolgunk van, ha ekkor egy szemfülesebb tanuló felveti például a {homokszemek} halmazát, vagy egy hasonló halmazt, aminek konkrétan nem tudjuk megadni a számát, még megközelítőleg se, hisz a homokszemek nagyon sokan vannak.*

A mindennapi példákról átevezhetünk matematikai vizekre, matematikai példákat kérve a tanulóktól. A {100 osztói} vagy a {kétjegyű számok} halmazának meg tudjuk adni az elemei számát. Azonban ha a {páros számok} vagy az {egész számok} halmazát tekintjük, már nem tudunk megadni olyan számot, ami pontosan az elemeik száma, hisz végtelen sok páros szám van.

Egy halmazt végesnek nevezünk, ha elemeinek számát egy természetes számmal meg tudjuk adni. Ebből kiindulva egy halmaz végtelen, ha nem véges, tehát elemeinek számát nem lehet megadni egy természetes számmal. Végtelen halmazokra sok-sok példát tudunk adni, érdemes felírni az órán is néhányat, illetve a diákokat újabb végtelen halmazok keresésére sarkallni. A végtelen halmazok vizsgálatával csiszolhatjuk a diákok gondolkodási, s elvonatkoztatási készségeit.

A természetes számok végtelen sokan vannak, hisz mindig tudok még nagyobb számot mondani. Érdemes összehasonlítani ezt más végtelen halmazokkal. Mi van több, páros vagy páratlan szám? Páros szám, vagy természetes szám? Természetes, vagy egész szám? A gyanútlanabbak rávágják, persze, hogy természetesből több van, mint párosból, hisz még ott vannak a páratlanok is, s hasonlóan az egész számoknál még a negatívok is, tehát ha rákérdezünk, hogy mennyivel vannak többen, a végeshez szokott összehasonlítások alapján megkaphatjuk, hogy kétszer annyian vannak a természetes számok, mint a párosok.

Ennek a problémakörnek a vizsgálatára készítettem egy kérdőívet, amellyel arra keresem a választ, vajon milyen végtelen kép él az emberek fejében, egyáltalán van-e használható végtelen képük.

IV.2 A köznapi végtelen-kép vizsgálat kérdőíve

Az összeállított kérdőív kérdései két nagyobb csoportra bonthatók: a számhalmazok közti összefüggésekre és a síkbeli alakzatok pontjainak számára vonatkozó kérdésekre. [31]A kérdőív összeállítása során el szerettem volna kerülni, hogy visszatérjenek egyik-másik kérdésre, ugyanis arra voltam kíváncsi, milyen kép él a válaszadóban a végtelenről, s nem arra, hogy kitöltés közben milyen gondolatai támadnak.

A kérdőívet a google-dokumentumok kérdőívkészítőjével készítettem el, ide érkeztek be a válaszok is. A felmérés nem reprezentatív, főként ismerősi körben terjesztettem, családi, cserkész, néptáncos, és kollégiumi listákon keresztül. A kitöltők túlnyomó többsége egyetemista. Külön nem továbbítottam a kérdőívet a szaktársaimnak, matematikus listára, úgy éreztem, ez a mintát nagyon eltorzítaná, hisz nem a felsőfokú matematikai tanulmányokat folytató diákok végtelenről alkotott képét szándékoztam megvizsgálni.

A feltett kérdések az előbbiekben említett két kérdéskört járták körül. Az előzőekben közöltek szerint a kérdések vegyítve kerültek feltevésre. A teljes kérdőívet a dolgozat 1. számú melléklete tartalmazza. A kérdőív elején nemre, korra, és végzettségre vonatkozó adatokra a differenciáltabb értékelhetőség érdekében kérdeztem rá.

Számhalmazokhoz köthető kérdések

Melyikből van több, páros vagy páratlan számból?

A kérdést főként felvezető kérdés, a páros és páratlan számok „ismerősek” mindenki számára. Azoknak, akik gondolnak a végtelennel, a kérdés egyértelmű. Akik a végeshez szokott minták alapján akarják eldönteni ezt a kérdést, azt várom, hogy szintén ugyanannyinak gondolják számukat. Azonban előfordulhat az is, hogy ezeket az embereket összezavarja a 0. A páros számok, úgy tűnhet, eggyel többen vannak.

Melyikből van több, páros vagy természetes számból?

---

[31] Amikor a kérdéssort összeállítottam, először a két csoportot jól elkülönítve akartam vizsgálni, a kérdéseket két külön csokorba szedve. Ezt a kérdőívet teszteléskeppen kitöltettem néhány hozzátartozómmal, s a tapasztalataim, s az ő véleményük alapján arra jutottam, szerencsésebb, ha a kérdéseket teljesen összekavarva, szinte rendszertelenül teszem fel. Kiderült ugyanis, hogy például a 16 éves húgom a kérdéseken végighaladva a közepe felé vissza akart ugrani az elejére, hogy módosítsa a válaszait. Kitöltés közben jött rá, hogy első gondolatai nem biztos, hogy helyesek.

A kérdés feltevésekor nem definiáltam kellőképpen, hogy a páros számokról a természetes, vagy az egész számok körében beszélek. Ez persze a helyes eredmény szempontjából lényegtelen, hisz így is, úgy is ugyanannyi van belőlük, mint a páros számokból. A hibás válaszok vizsgálatakor ezt figyelembe kell vennem, hiszen ha csak a természetes számkörben előforduló páros számokról beszélek, akkor a logikus helytelen válasz az lenne, hogy a természetes számok vannak többen, míg ha a negatív párosokat is figyelembe veszem, a megoldás már teljesen más gondolatmenetet kíván. Ugyanis véges halmazokhoz szokott gondolkodásmóddal úgy tűnhet, hogy a természetes számok kb. kétszer annyian vannak, mint a nemnegatív párosok. Ehhez hozzá kell számítani a negatív páros számokat is. Ilyen meggondolások alapján előfordulhat, hogy valaki a helyes eredményt (ugyanannyi) hibás megközelítéssel éri el.

Melyikből van több, páratlan vagy pozitív egész számból?

Ez a kérdés az előzőt ismétli meg, ezzel célom annak kiszűrése volt, hogy az előző két kérdéssel együtt véve lesz-e olyan, aki önellentmondáshoz jut.

Melyikből van több, természetes vagy egész számból?

Azok számára, akik az előző kérdésekre helyesen válaszoltak, ez a kérdés sem fog nehézséget okozni. Ugyanúgy két egyenlő számosságú végtelen halmazról beszélünk. Azok, akik csak véges alapon gondolkodnak, most valószínűleg az egész számokat teszik meg többnek. A kérdés érdekes, a vizsgálat szempontjából azonban várhatóan nem ad új információt.

Melyikből van több, egész számból vagy racionális számból?

A számegyenesre ránézve úgy látszik, hogy az egész számok, s a racionálisak is végtelen sokan vannak, de a racionális számok többnek tűnnek, sűrűn vannak a számegyenesen, míg az egész számok csak elszórt pontok hozzájuk képest.

Melyikből van több, racionális vagy irracionális számból?

Ez a kérdés vízválasztó. Itt az eddig helyesen válaszolók két csoportra bomlanak. Vannak, akik tisztában vannak a megszámlálhatóan és nem megszámlálhatóan végtelen közti különbséggel, s vannak, akik nincsenek. Az emberek fejében a valós számok meg nem számlálhatósága könnyebben rögzül, mint az ebből következő irracionális számoké.

Melyikből van több, természetes vagy valós számból?

A kérdés a kétféle végtelen közti különbségek alapkérdése. Előfordulhat, hogy lesznek olyan emberek, akik az előző kérdésekre helytelen választ adtak, de erre jól válaszoltak. A véges gondolkodásból kiinduló szemlélet erre vezet.

Síkbeli alakzatok pontjainak számát összehasonlító kérdések

Melyiknek van több pontja, egy 2 cm hosszú szakasznak vagy egy 10 cm hosszú szakasznak?

Aki nem tudja, hogy bármely szakasznak végtelen sok pontja van, az egész biztosan a hosszabb szakaszt választja. Akik ennek az ismeretnek a birtokában vannak, azok közül is sokan úgy érzik, hogy a hosszabb szakasznak több pontja van. Becsapja őket a véges szemlélet, amely amint már sokszor láttuk, nem alkalmazható a végtelenre. [32]

Melyiknek van több pontja, egy 5 cm hosszú szakasznak vagy egy félegyenesnek?

Ez a kérdés az előzőnél egy lépéssel megy tovább. Egy zárt alakzatot hasonlítunk össze egy nyílttal, amely kimondottan a végtelenbe tart. Sokakat összezavarhat, még ha azt látják is, hogy különböző szakaszoknak ugyanannyi pontjuk van, ezt azonban félegyenesekre, egyenesekre nem általánosítják.

Melyiknek van több pontja, egy 1 cm sugarú körvonalnak vagy egy 1 cm oldalú négyzetnek?

Ez a kérdés becsapós. Zárt alakzatokról beszélünk, így a két alakzatot „kihajtogathatom" egy-egy szakasszá. Ezeknek egész biztosan ugyanannyi pontjuk lesz, mint az eredeti alakzatoknak. Sokan azonban beleesnek a csapdába, s nem veszik ezt észre, összehasonlítják a két alakzatot, miközben hasonlóan az előző kérdésekhez, ugyanannyi pontjuk van. Lehetnek, akik kiszámolják a kerületet, s az alapján döntenek.

Melyiknek van több pontja, a (0,1) vagy a (50,100) intervallumnak?

A kérdést már más megfogalmazásban feltettük, a két különböző hosszú szakasz összehasonlításakor. Az intervallumokkal való meghatározás miatt mégis gondot fog okozni, tán olyanoknak is, akik az előbbiekben jól válaszoltak.

Melyiknek van több pontja, a (0,1) vagy a [0,1] intervallumnak?

Az előző kérdést tekinthetjük rávezetésnek erre a kérdésre. A zárt intervallumnak szemmel láthatóan két plusz pontja van, 0 és 1. Hogy hat ez a pontjaik számára?

[32] Ezt a feltevésemet megerősítette az egyik barátommal folytatott beszélgetésem. A saját megvallása szerint, látja, miért van ugyanannyi pontja a két szakasznak, azonban nem fér a fejébe, hogy is van az, hogy ha a 10 cm hosszú szakasznak része a 2 centi hosszú, hogyan lehetne akkor ugyanannyi pontjuk?

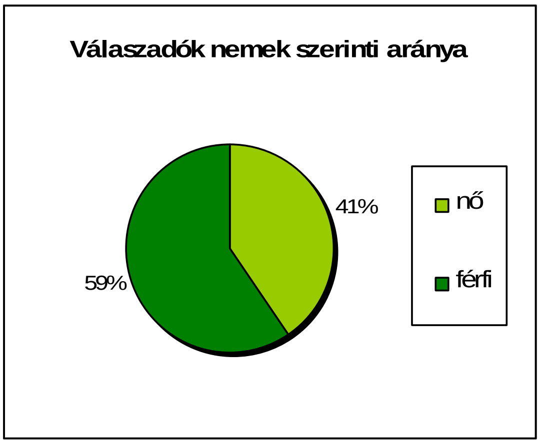
Természetesen nincs sok behatással rá, hisz végtelen+2 is végtelen. Azok, akik ezt nem látják, minden bizonnyal a [0,1] intervallumot fogják megadni helyes válaszul.

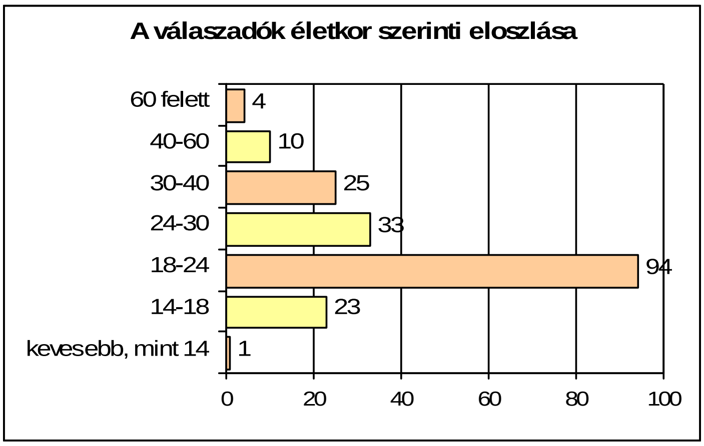
Melyiknek van több pontja, egy 1 cm hosszú szakasznak vagy egy egyenesnek?

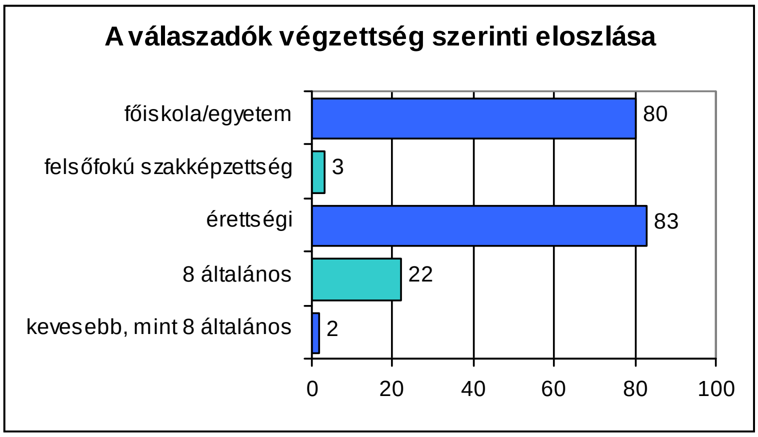
A másik téma záró kérdéséhez hasonlóan ez a kérdés is az egyik szemléletes példája a végtelen tulajdonságainak. Előkerülhet, akár középiskolában is példaként, hogy az egység hosszú szakasznak ugyanannyi pontja van, mint az egyenesnek.

IV.3 A köznapi végtelen-kép vizsgálat eredményei

A kérdőívre 191 válasz érkezett. Az elemzés előtt ismét fontos hangsúlyozni, hogy a minta nem reprezentatív, ismeretségi köröm egy részéről nyújt képet. A válaszadóktól három személyes adatot kérdeztem: nemüket, életkorukat és iskolai végzettségüket. A válaszadók végzettségére és az életkorára vonatkozó kérdésre adott válaszok között szoros kapcsolat van. Az ismerősök életkora szinte pontosan meghatározza a végzettségüket. Az érettségivel rendelkezők majdnem mind tovább tanulnak, a jövőben várhatóan diplomát szereznek.







Az alábbi táblázat összegzi a beérkezett válaszokat. A táblázatban pirossal kiemelve jelöltem a helyes megoldások százalékos arányát.

	első állítás	második állítás	elsőből	másodikból	ugyanannyi	nem tudom
Melyikből van több?	páros számból	Páratlan számból	10%	1%	**88%**	1%
	páros számból	természetes számból	12%	32%	**54%**	2%
	páratlan számból	pozitív egész számból	15%	19%	**64%**	2%
	természetes számból	egész számból	14%	35%	**51%**	1%
	egész számból	racionális számból	9%	46%	**42%**	3%
	Racionális számból	irracionális számból	12%	**42%**	35%	11%
	természetes számból	valós számból	7%	**54%**	36%	3%
Melyiknek van több pontja?	(0,1) intervallumnak	(50,100) intervallumnak	1%	27%	**63%**	9%
	(0,1) intervallumnak	[0,1] intervallumnak	9%	35%	**47%**	8%
	egy 2 cm hosszú szakasznak	egy 10 cm hosszú szakasznak	0%	25%	**75%**	0%
	egy 5 cm hosszú szakasznak	egy félegyenesnek	6%	32%	**59%**	3%
	egy 1 cm hosszú szakasznak	egy egyenesnek	4%	34%	**58%**	4%
	egy 1 cm sugarú körvonalnak	egy 1 cm oldalú négyzetnek	15%	18%	**63%**	4%

Az összesített adatsorokból a következő megállapításokat tehetjük:

- *Páros szám - páratlan szám*: Erre a kérdésre született a legtöbb helyes megoldást (88%). Ez nem a végtelen számosság ismeretét jelzi, mert aki "végesen" gondolkozott és nullát hibásan nem tekintette páros számnak, akkor is helyes választ adhatott. A páros számok 10 %-os jelölése azt jelzi, hogy a nullát páros számnak tekintve, pontosan "1-gyel több" páros szám van, mint páratlan.
- *Páros szám - természetes szám*: Az 54% azt mutatja, hogy a többség a végtelen fogalommal tisztában van. A természetes szám fogalom ismeretének hiánya jelenthette azt a 12%-ot akik szerint páros számból van több.

- *Páratlan szám – pozitív egész szám*: Vagy az egyiket, vagy a másikat szinte ugyanannyian választották (15% - 19%). Attól függően, hogy a páratlan számokat az egész számok, vagy a természetes számok közt tekintjük.
- *Természetes szám – egész szám:* A válaszok százalékos aránya hasonló a második kérdéshez. Ez mutatja, ki nem ismeri a fogalmakat (14%+1%), kik azok, akik véges szemlélet alapján válaszoltak a kérdésre (35%), s kik azok, akik ismerik és használják a végtelen fogalmát (51%).
- *Egész szám – racionális szám:* Ez az egyetlen kérdés, ahol egy hibás opciót többen választottak (46%), mint a helyes választ (42%). A racionális számok látszatra sokkal többen vannak, mint az egész számok.
- *Racionális szám – irracionális szám:* Az irracionális számkört kevesebben ismerik, 11% azon válaszadók aránya, akik a kérdésre „nem tudom”-mal válaszoltak. Meglepő az, hogy több helyes válasz érkezett, mint, ha mindkét számhalmazt ugyanannyinak tekintenénk.
- *Természetes szám – valós szám:* A valós számhalmaz a középiskolai oktatásban gyakrabban megjelenik, biztosabb ismeretekkel rendelkeznek róla. Helyes választ adhattak azon kitöltők is, akik véges szemlélettel válaszoltak a kérdésre.
- *(0,1) intervallum – (50,100) intervallum:* Az intervallumokat láthatóan sokan nem ismerik (9%). A válaszadók majd kétharmada látta, hogy mindkettőnek egyenlően végtelen sok pontja van.
- *(0,1) intervallum – [0,1] intervallum:* Itt láthatóan kevesebben válaszoltak helyesen. Sokakat összezavarhatott, hogy úgy tűnik a zárt intervallumnak kettővel több pontja van.
- *2 cm hosszú szakasz – 10 cm hosszú szakasz:* Erre a kérdésre mindenki logikus választ adott, 25% összemérte a két szakaszt, a 75% pedig tudta, hogy mindkettőnek egyenlően végtelen sok pontja van.
- *5 cm hosszú szakasz – félegyenes:* A kérdés feltevésénél tett sejtésemet igazolták az adatok. Sokakat összezavarhatott, hogy egy zárt szakasz egy végtelenbe tartó vonallal hasonlítunk össze.
- *1 cm hosszú szakasz – egyenes:* Megerősíti az előző kérdésre beérkezett válaszokat, hisz hasonló kérdésre szinte teljesen ugyanolyan arányokat kaptunk.
- *Körvonal – négyzet:* összehasonlítva a két zárt szakaszra beérkezett válaszokkal, látható, hogy sokakat megzavart a matematikai tartalom és a nem látható összemérhetőség.

A táblázat egyes oszlopaiban szereplő eredményeket a következőkkel foglalhatjuk össze:

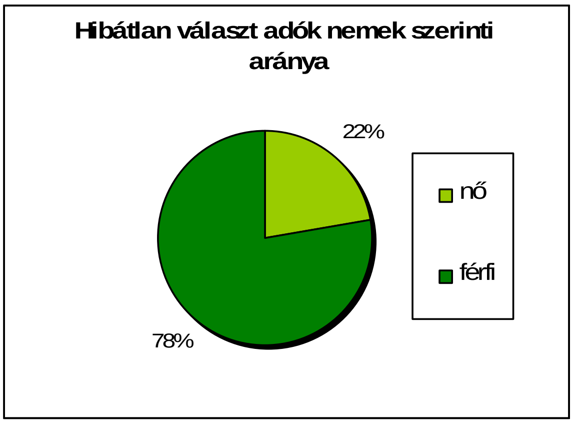
- ***„Ugyanannyi”:*** Két kérdésre (racionális-irracionális, egész-valós) adott válasz kivételével ezt kellett volna jelölni a többi 11 esetben. A helyes válaszok aránya nagyon jelentős szóródást mutat, 42% - és 88% között mozog. Több válaszadónál a racionális számok számosságánál jelenik meg a megszámlálható és a nem megszámlálható halmazok számosságának megkülönböztetése, így ennek aránya legkevesebb (42%). A legtöbb helyes válasz a páros és páratlan számok összehasonlításánál született. Véges számfogalommal rendelkezők közül is sokan helyes választ adtak, mert feltételezhetően a nullát nem tekintették párosnak, így pont "ugyanannyi" van, hiszen párba állíthatók. A számfogalomhoz kapcsolódó kérdések közül a páros-természetes és a természetes-egész összehasonlítása közel egyező arányt mutat (51% - 52%), amely reálisan jelzi azok arányát, akik érzik a véges és végtelen számosság közötti különbségeket. A két esetben, ahol az "ugyanannyi" válasz helytelen volt, 35% és 36% volt az ezt a hibás választ adók aránya. Ezt jelölték azok is, akik ismerik a végtelen fogalmát, de nem különböztetik meg a számosságukat. Érdekes a két intervallumhoz kapcsolódó kérdésre adott helyes válaszok közötti 16%-os eltérés (63%, illetve 47%). Több helyes választ kaptunk arra a kérdésre, amely "ötvenszer annyi", míg a másik csak "kettővel több". Itt pontosan a "kettővel több" megfoghatósága jelentette azt, hogy látszólag több pontja van a [0,1] intervallumnak, mint a (0,1) intervallumnak. Ugyanez jelentkezik a szakaszoknál, félegyeneseknél is. Két szakaszt össze tudunk hasonlítani, mindkettő végtelen pontot tartalmaz még akkor is, ha ötször olyan hosszú a szakasz. Ezt a 75%-os arány mutatja. A félegyenes és az egyenes, szakasszal történő összehasonlítása megbontja ezt az egységet, hiszen nem csak ötszöröse, hanem végtelen, amely köznapi szemlélettel nem lehet egyenlő az adott (belátható) hosszúságú szakasszal. Ez a gondolatmenet mutathatja a végtelent ismerő, de végeshez ragaszkodó emberek gondolkodását. Érdekes, hogy két véges hosszúságú szakasz összehasonlítása 12%-kal rontja a helyes válaszok arányát, ha összemérhetők a szakaszok, de azonnal nem látjuk ennek arányát (kör és négyzet).
- ***„Egyik vagy másik*”:** Az összemérhetőség működik, hiszen két kérdés kivételével az egyik lehetőséget jelentősen többen választották. A páratlan és pozitív egész számok összehasonlítása során gondot jelenthetett, hogy a páratlan számoknál nem volt megkötött a számok előjele, így az értelmezés közötti különbség adhatja a közel azonos számú jelölést (15%-19%). Az 1 cm sugarú körvonal pontjainak illetve az 1 cm oldalú négyzet pontjainak számosságára adott válaszok nem követik a két zárt szakaszra adott válaszok

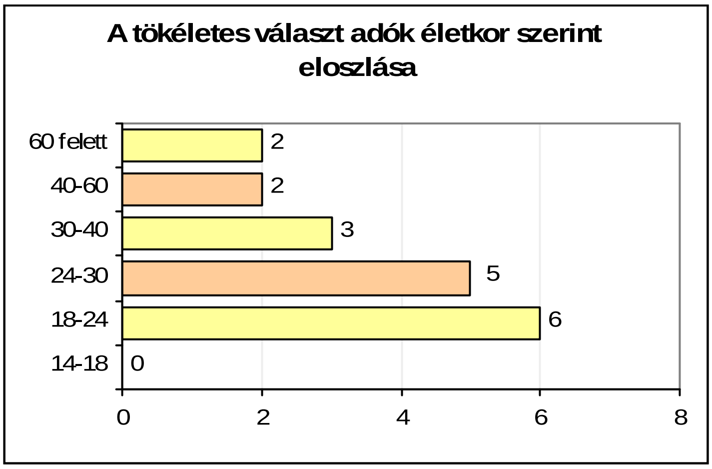
arányát, hanem egyenletesen oszlanak meg a két válasz között. Ez a matematikai tartalomnak tudható be, amelyben a sugár az átmérő, a kerület, a négyzet oldala okozhatott félreértést.

- ***„Nem tudom”:*** A számfogalommal kapcsolatos kérdésekkel nem mérhető a fogalmak pontos ismerete, de a racionális számok megjelenéséig csekély (1% - 3%) arányban vannak azok, akik nem tudnak dönteni az adott kérdésről. Az irracionális számok kérdésére adott 11%-os "nem tudom" válasz azt mutatja, hogy ezt a számfogalmat többen nem ismerik. Viszont a valós számok ismeretét mutatja, hogy ismét 3 %-ra csökken ez az arány. A nyílt és zárt intervallum magyarázó szöveggel történő használata is nehézséget okozott a válaszadók 8% - 9%-nak. A szakaszt mindenki magabiztosan kezeli, a félegyenes, egyenes és az alakzatok kerülete már a válaszadók 4%-nál problémát jelent.

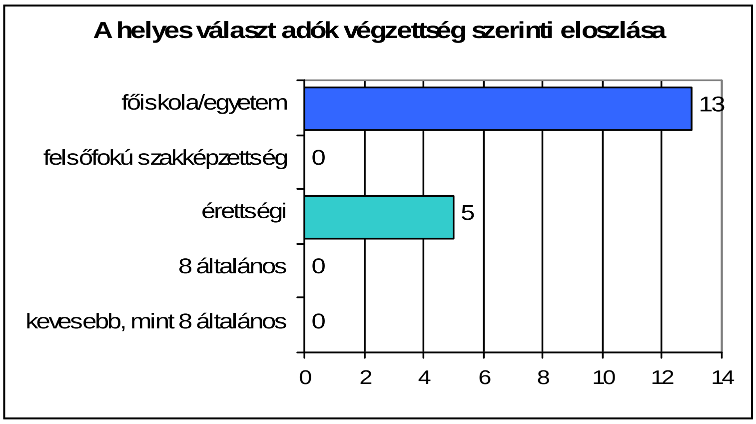
Az egyes válaszadókat a kérdőív alapján a következőképpen csoportosíthatjuk és jellemezhetjük:

- ***A helyesen válaszolók*** mind a végtelen fogalmát, mind a végtelen halmazok számosságán belüli megkülönböztetést helyesen értelmezik. Ezt azok alkalmazhatták helyesen, akik magasabb szinten foglalkoztak a matematikával. Az összes kérdésre 18 fő válaszolt helyesen. Ez az összes adat 9,4%-a. A helyes választ adók nemek szerinti aránya jelentősen eltér az összes válaszadók nemek szerinti arányától. 18 év alattiak között nem született helyes megoldás. Az iskolázottság meghatározó tényező a tökéletesen válaszolók között.



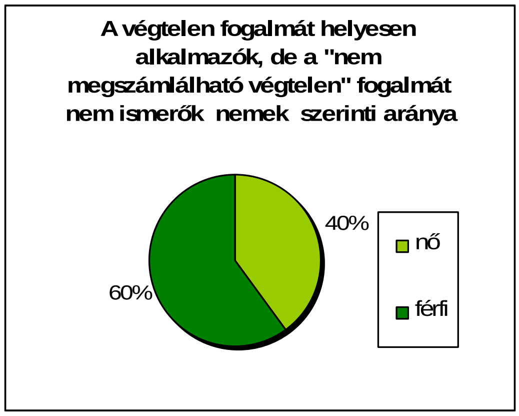


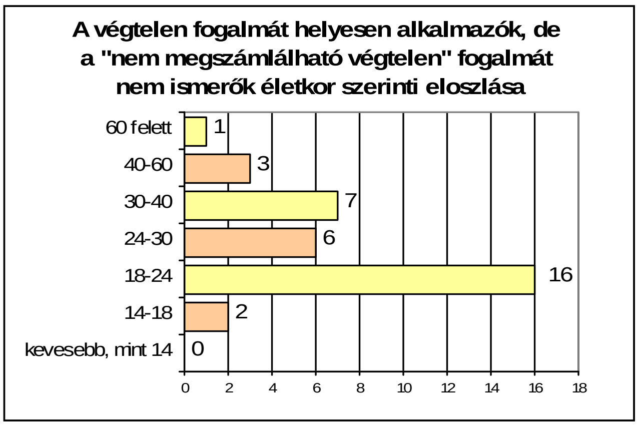
60 felett	2	11%
40-60	2	11%
30-40	3	17%
24-30	5	28%
18-24	6	33%
14-18	0	0%
kevesebb, mint 14	0	0%



főiskola/egyetem	13	72%
felsőfokú szakképzettség	0	0%
Érettségi	5	28%
8 általános	0	0%
kevesebb, mint 8 általános	0	0%

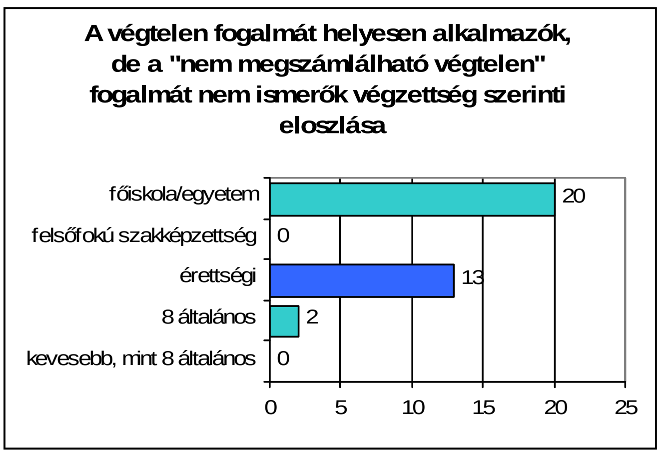
- ***A végtelen fogalmát tudatosan használó*** 35 fő, minden kérdésre azt válaszolta, hogy a két végtelen halmaz számossága megegyezik. A megszámlálhatóan végtelen és nem megszámlálhatóan végtelen halmazokat nem különböztették meg. A nők aránya ebben a csoportban megegyezik az összes választ adók arányával. A 23 középiskolás diákból ketten ismerik pontosan a véges és a végtelen halmazok számossága közötti különbséget.



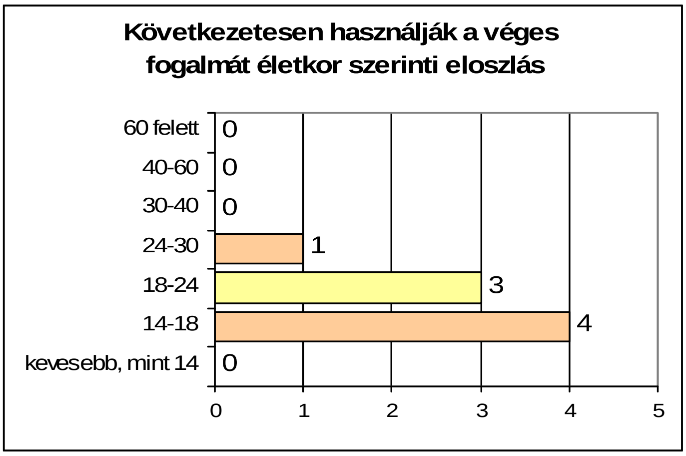


60 felett	1	3%
40-60	3	9%
30-40	7	20%
24-30	6	17%
18-24	16	46%
14-18	2	6%
kevesebb, mint 14	0	0%

főiskola/egyetem	20	57%
felsőfokú szakképzettség	0	0%
Érettségi	13	37%
8 általános	2	6%
kevesebb, mint 8 általános	0	0%

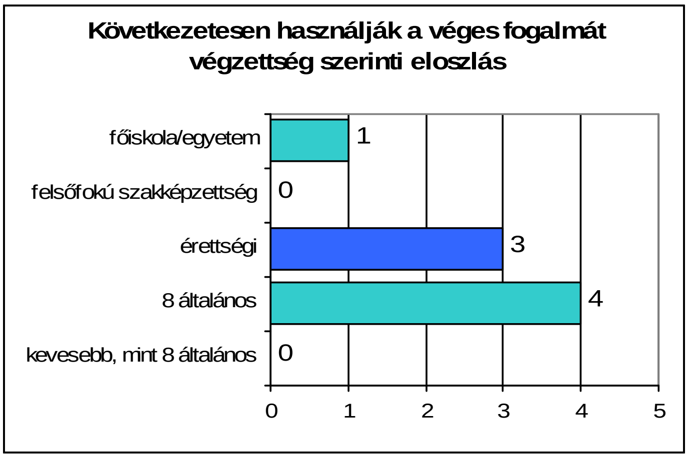


- Az előző két csoportba nem sorolható 138 válaszadó közül ***8 fő logikusan és következetesen*** hasonlítja össze a kérdésben szereplő állításokat**.** A végtelen fogalmát nem ismerik, de a "több", a véges, az összemérhető válaszok minden kérdésben logikusan követhetőek. Ebben a csoportban nem jelennek meg az "ugyanannyi" és a "nem tudom" válaszok. A konkrét válaszok is megjelenhetnének pl.: kétszer annyi szám van, kettővel több pontja van, ötször annyi pontja van... A 23 középiskolás közül 4 diák (17%) végtelen fogalma egyáltalán nem alakult ki.



60 felett	0	0%
40-60	0	0%
30-40	0	0%
24-30	1	13%
18-24	3	38%
14-18	4	50%
kevesebb, mint 14	0	0%

főiskola/egyetem	1	13%
Felsőfokú szakképzettség	0	0%
Érettségi	3	38%
8 általános	4	50%
kevesebb, mint 8 általános	0	0%



- A maradék 131 fő közös jellemzője, hogy ***a végtelen fogalmát nem használja következetesen***. A válaszok elemzésének további lehetőségét a felmérésben használt kétféle kérdés adhatja. A számhalmazok számosságára és az alakzatok pontjainak számosságára vonatkozó kérdéseket közösen kezelve az alábbi adatokat kaphatjuk.
    - 16 fő a számhalmazok esetében használja, azonban a ponthalmazok esetében nem mindig látja az összehasonlítandó halmazok végtelenségét.
    - 14 fő a ponthalmazok esetében jól alkalmazza, a számhalmazok esetén bizonytalan a végtelen halmazok megítélésében.

- 23 fő a számhalmazok esetében egyáltalán nem használja a végtelen fogalmát. Közülük hárman a ponthalmazoknál minden esetben használják a végtelen fogalmát.
- 21 fő a ponthalmazok esetében a végtelent egyáltalán nem használja. Véges szemlélet szerint hasonlítja össze őket. Közülük senki sem használja a számhalmazoknál a végtelen fogalmát.

IV.4 A végtelen halmazok vizsgálata a középiskolában II.

A végtelen fogalmának használata, mint az előző eredményekből kitűnik, elég nagy zavart kelt sokak fejében. Ezzel a témakörrel az iskolaévek során nem kell foglalkozni, nem a tanterv része, mégis érdemes belepillantani a végtelen kérdéskörébe. Színesíti a gondolkodást, s megtanít egy másféle gondolkodásmódot.

Hogy érdemes a kérdéskört előtérbe helyezni és megvizsgálni? Semmiképp sem szabad egyből a lovak közé csapni, definiálni a főbb fogalmakat, például, a végtelenek közti különbözőségeket, s erre példákat adni. A téma tárgyalásakor célszerű kerülni a számosság kifejezést, hisz ennek definiálása meghaladja a középiskolai kereteket, helyette például a nem teljesen helyénvaló „több eleme van" kifejezés használható. A diákokkal együtt gondolkodva építsük fel a témát, ez sokkal több élményt, a felfedezés örömét nyújthatja. Ne felejtsünk el emellett a diákokat engedni egyedül gondolkozni, dolgozni sem. Érdemes az előző pontokban elemzett kérdéseket körüljárni.

Vizsgált halmazaink mind végtelen sokan vannak. Első ránézésre a nem negatív páros számok tényleg kevesebbnek tűnnek, mint a természetes számok, hisz csak minden második természetes szám páros. Ha azonban párba állítom őket, kitűnik, hogy ezt meg tudom úgy tenni, hogy minden páros számot, s minden természeteset felhasználok. Vehetem ugyanis a természetes számokat, s mindegyiknek legyen a párja a saját kétszerese. Ezek pont az összes páros szám lesznek. Tehát mégis ugyanannyi páros, mint természetes szám van, hisz párba állítottam őket!

Hasonló módon, ha meg tudom adni két végtelen halmaz elemeinek egyértelmű párba állítását, akkor a két halmaz elemeinek száma megegyezik. A természetes számok ugyanannyian vannak, mint a pozitív egész számok, könnyen párba állíthatók: minden természetes számhoz rendeljem hozzá a nála eggyel nagyobb egész számot.

Amennyiben ezt mindenki így látja, itt be is fejezhetnénk a kérdés tárgyalását, hisz ha mindegyik végtelen sok, akkor ugyanannyi elemük van, s feleslegesek a további kutatások. Azt, hogy mégis értelme van a további munkának, megmutathatjuk azzal, ha belátjuk a valós számok többen vannak a természetes számoknál. Ez középiskolás szinten elég nehéz bizonyítás. Először meg kell vizsgálnunk, mit értünk azon, hogy „többen vannak", hisz már megállapítottuk, hogy a két vizsgált halmaz elemei mind végtelen sokan vannak.

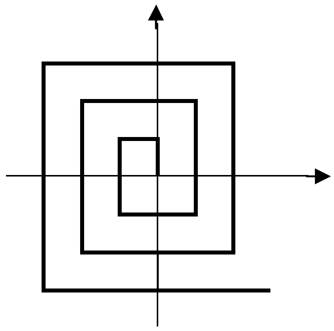
A valós számok legalább annyian vannak, mint a természetes számok, hisz minden természetes szám valós szám is egyben. Amennyiben meg tudom mutatni a valós számok egy részhalmazáról, hogy nem felsorolhatóak az elemei, ezzel azt is belátom, hogy a valós számok többen vannak, mint a természetesek. Ugyanis ha nem felsorolhatóak, akkor nem tudom párba állítani őket a természetes számokkal. Vizsgáljuk a (0,1) intervallumot, melynek minden tagját fel tudom írni, mint egy végtelen tizedes törtet. (a végesek azok, melyek utána csupa 0-val folytatódnak). Tegyük fel, hogy felsorolhatóak. Azt állítom, hogy tudok olyan számot konstruálni, amelyet mégsem vettem bele a felsorolásba. Megvizsgálom a felsorolt számok közül az első tizedes tört tizedes vessző utáni első számjegyét, amennyiben ez 4-es akkor az általam konstruált szám első számjegye legyen 5-ős, amennyiben nem 4-es, akkor pedig a kontsruált első számjegye legyen 4-es. Hasonlóan vizsgálom a második szám második számjegyét, majd a harmadik szám harmadik számjegyét, s így tovább… Az így megkonstruált számot biztos nem soroltam fel, hisz a megalkotása módján minden felsorolt számtól különbözik legalább egy számjegyben. Tehát a (0,1) intervallum elemei nem sorolhatóak fel, emiatt elemeinek száma nagyobb a természetes számkörénél. Mivel a (0,1) intervallum része a valós számok halmazának, így a valós számok is többen vannak, mint a természetesek.

Azt mondjuk, hogy a természetes számok megszámlálhatóan végtelenül, ezzel szemben a valós számok nem megszámlálhatóan végtelenül sokan vannak. Amennyiben egy halmaz minden tagjához hozzá tudok rendelni egy pozitív egész számot, azt mondjuk, hogy a halmaz elemei megszámlálhatóan sokan vannak.

A két végtelen halmaz elemeinek száma megegyezik, ha az egyik halmaz minden eleméhez egyértelműen hozzá tudom rendelni a másik halmaz egy elemét, úgy hogy minden elemhez rendeltem elemet, és pontosan egy elemet rendeltem mindhez. Ekkor azt mondjuk, hogy a két halmaz közt kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés áll fenn.

Az egész számok is megszámlálhatóan sokan vannak. Vegyük például a következő megszámlálásukat: 0,1,-1,2,-2,3,-3… Ezzel a módszerrel az összes egész számot felsorolhatom, tehát hozzá tudok rendelni egy természetes számot.

A racionális számok legalább megszámlálhatóan végtelenül sokan vannak, hisz a természetes számok halmaza része a racionális számok halmazának. Megmutatható, hogy a racionális számok legfeljebb megszámlálhatóan sokan vannak. A derékszögű koordinátarendszerben az összes rácspontot össze tudom kötni egy tört vonallal. Az origóból kiindulva, tört csigavonalban az összes csúcspontot tudom érinteni:

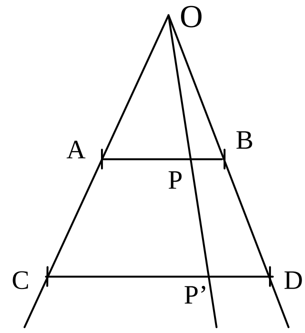


A koordinátarendszer csúcspontjaihoz rendeljünk hozzá racionális számokat. Ahol az egyik koordináta 0, azokhoz 0-t rendelünk. A többi rácspont esetében az x koordináta jelentse a tört számlálóját, az y koordináta a nevezőjét. Ekkor minden racionális számot legalább egyszer hozzárendeltem egy rácsponthoz. Az origóból kiinduló csigavonal segítségével ezt a halmazt sorba tudom rendezni. A racionális számok ennek a halmaznak részhalmaza, ezért a racionális számok legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sokan vannak. Előtte már beláttuk, hogy legalább megszámlálhatóan végtelen sokan vannak, most hogy legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sokan vannak, tehát a racionális számok is megszámlálhatóan végtelen sokan vannak.

Amikor beláttuk, hogy a valós számok többen vannak, mint a természetes számok, megelégedtünk annyival, hogy a (0,1) intervallum nem megszámlálható, illetve a valós számok halmazáról azt mondtuk, nem megszámlálhatóan végtelen. Érdemes ezt a gondolatot továbbfűzni.

Bármely véges szakasznak ugyanannyi pontja van.

Legyen a két szakasz AB és CD. Az egyszerűség kedvéért tekintsük azt az esetet, amikor AB párhuzamos CD-vel. (az elhelyezkedés a pontok számán nem változtat). Az ábrán látható módon vegyük az AC és BD egyenesek metszéspontját, O-t. Az AB szakasz tetszőleges P pontjának legyen a párja az a P’ pont, melyet az OP egyenes metsz ki a CD szakaszból. Így AB és CD pontjai között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítettünk.



Hasonlóan belátható, hogy a (0,1) nyílt intervallumnak és az egyenesnek szintén ugyanannyi pontja van. Az előző bizonyítás alapján belátható, hogy két nyílt intervallum pontjainak a száma is megegyezik. A tangens függvény a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumot kölcsönösen egyértelműen képzi le a valós számok halmazára, ami, mint már láttuk, megfeleltethető az egyenes pontjaival (számegyenes). Ezek alapján bármely nyílt intervallumnak ugyanannyi pontja van, mint az egyenesnek, s pontjaik száma nem megszámlálhatóan végtelen.

IV.5 Végtelen hotel

A végtelen halmazok vizsgálatához létezik egy frappáns feladatsor, amelyet sokan Hilbert Grand Hotel paradoxonjaként ismernek. Igazából nem tekinthető paradoxonnak, nincs benne ellentmondás, a megoldáshoz szükséges elvonatkoztatás, és végtelenben gondolkozás miatt tekintik mégis sokan embertől idegennek. A feladatoknak sokféle változata van, különböző történetekbe fűzve. További feladtok találhatók például Trembeczki Csaba – *A Végtelen Világvége Hotel és más történetek* című matematikai feladatgyűjteményben.

A kiindulás: Képzeljünk el egy szállodát, amelynek végtelen sok szobája van, a szobaszámok 1-től kezdve folyamatosan növekednek és nincs olyan szoba, amelynél ne lenne nagyobb számú. A szállodának van egy hangosbemondó rendszere is, amelyen keresztül a recepciós az összes vendégnek üzenhet egyszerre. Tegyük fel, hogy a szálloda tele van.

- *El tudunk-e helyezni egy további vendéget a szállodában, vagy el kell őt küldenünk?*
  Megkérjük, hogy minden vendég költözzön egy szobával arrébb, így az első szoba felszabadul, ahová beköltöztethetjük az újonnan érkezettet. Amennyiben véges sok embert kell elszállásolni, hasonlóan megkérjük, hogy mindenki költözzön feljebb annyi szobával, amennyi üres szobára szükségünk van.
- *Tegyük fel, hogy a szállodához érkezik egy megszámlálhatóan végtelen sok utast szállító autóbusz, amely tele van. El tudjuk-e helyezni az utasokat?*
  A feladat kicsit komplikáltabb, ekkor megkérjük a szálloda vendégeit, mindenki költözzön a szobaszámának a kétszeresébe, így a páratlan számú szobák felszabadulnak, ahová be tudnak költözni az újonnan érkezett utasok.
- *Tegyük fel, hogy a szállodához érkezik megszámlálhatóan végtelen sok, egyenként megszámlálhatóan végtelen sok utast szállító autóbusz, amelyek mindegyike tele van. El tudjuk-e helyezni az utasokat?*

Ez a szituáció is megoldható. Tekintsük a szálloda lakóit a nulladik busz utasainak. Megkérjük az n-edik busz m-edik utasát, hogy költözzön a $2^n 3^m$ számú szobába. Így elszállásolhatjuk az összes érkező vendéget.

- *Tegyük fel, hogy a recepciós kap egy telefonhívást arról, hogy ismeretlen számú, ám csak véges sok vendég érkezik az éjszaka közepén, akik egymás melletti szobákban szeretnének aludni. Tud-e helyet biztosítani számukra még az érkezésük előtt? (Az éjszaka közepén a bentlakók nyugalmát nem lehet zavarni).*

  Megkérjük, hogy a vendégek szobaszámukat tegyék kettő kitevőjébe, majd költözzenek át ebbe a szobába. Így kellően sok, üres szobákból álló hézag áll majd rendelkezésünkre.

V. Halmazelmélet

A következő fejezetnek nem célja a halmazelmélet mélységeinek bemutatása, részletes tárgyalása. Rövid kitekintést szeretnék tenni, az előző fejezetben tárgyaltakat „felsőbb matematikailag” megvilágítva. Tételeket egy-két esettől eltekintve, ahol szükségesnek érzem, nem bizonyítok, hisz a bizonyítások megtalálhatóak a tankönyvekben is.

A halmazelméletben a halmaz alapfogalom, melyeket nem definiálunk. Az előző fejezetben sokszor vizsgáltuk, miből van több, vagyis melyik halmaz nagyobb. Eme vizsgálódásaink a véges halmazok körében egyértelműek, hisz egy véges halmaz elemeinek számát meg tudom adni egy természetes számmal. Végtelen halmazok esetében, kétfajta végtelen halmazt különböztettünk meg, a megszámlálhatóan, illetve nem megszámlálhatóan végtelen halmazokat. Az ilyen irányú vizsgálódások érdekességként még megjelenhetnek a középiskolai tanulmányok során (főképp érdeklődő diákok körében, melyeket nem zavar össze a végtelenben való gondolkodás), azonban az ezek alapjául szolgáló egzakt fogalom, a halmazok számossága, kívül esik a középiskolás tananyagon.

Definíció:Két halmaz ekvivalens, jelölésben A~B, ha kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető köztük. Vagyis létezik olyan f függvény, mely az A halmazt kölcsönösen egyértelműen a B halmazra képezi le.

Tétel: Az így definiált „~” ekvivalencia reláció, azaz ha A, B és C tetszőleges halmazok:

- A~A – ”~” reflexív
- Ha A~B akkor B~A - ”~” szimmetrikus
- Ha A~B és B~C akkor A~C - ”~” tranzitív

A naiv megközelítés szerint azt mondhatnánk, hogy a halmazok összessége egymással ekvivalens halmazok osztályaira bomlik. Az egy osztályban lévő halmazok közös tulajdonságát számosságnak nevezzük. Ha tehát A~B, akkor azt mondjuk, hogy A és B számossága ugyanaz, írásban $|A| = |B|$. Azonban a II. fejezetben már említett Russell-paradoxon épp azt mutatja meg, hogy nem beszélhetünk összes halmazok halmazáról, halmazok összességéről. Mindemellett a halmazelmélet felépítésekor nem akarunk a halmazon kívül új alapfogalmat sem bevezetni. Készítünk egy Ƒ operációt (jól definiált hozzárendelés, melynek értelmezési tartománya osztály), amely az összes halmazokon van értelmezve, s Ƒ(A)=Ƒ(B) akkor és csak akkor teljesül, ha A~B. Jelöljük Ƒ(A)-t $|A|$-val. A számosságok vizsgálatakor most megelégszem ezzel a hiányos definícióval, tudva, hogy az Ƒ operáció precízen megadható. Ennek, s a hozzákapcsolódó fogalmaknak a bevezetése meghaladja ezen dolgozat kereteit.

A természetes számokról, s a vele ekvivalens halmazokról azt mondjuk, hogy megszámlálhatóan végtelen sokan vannak. A számosságukat jelölje $\aleph_0$ (א (alef) a héber abc első betűje). Az előző fejezetben beláttuk, hogy az egész számok, s racionális számok is megszámlálhatóan sokan vannak, ugyanakkor bebizonyítottuk, hogy a valós számok halmaza nem megszámlálhatóan végtelen. Definiálunk egy újabb végtelen számosságot, a kontinuumot, jelölve: *c*, mely a valós számok, s a vele ekvivalens halmazok számossága.

Tétel: Minden valós intervallum (kivéve az egy pontú intervallumokat, s az üres halmazt) kontinuum számosságú.

Bizonyítás: Ezt tulajdonképpen már az előző fejezetben beláttuk, hisz adtunk egy egyértelmű megfeleltetést a (0,1) nyílt intervallum, s az egyenes között, mely reprezentálja a valós számokat. Ugyanakkor azt is beláttuk, hogy két szakasznak ugyanolyan sok pontja van.

Megjegyzés: Egy halmazt megszámlálhatónak nevezünk, ha véges, vagy megszámlálhatóan végtelen. Egy halmaz megszámlálható, ha az elemei felsorolhatóak.

Tétel: megszámlálható halmaz minden részhalmaza is megszámlálható.

Két megszámlálható halmaz uniója is megszámlálható. Ez könnyen látható, elérhető a két halmaz összefésülésével. Az új halmaznak egy lehetséges megszámlálása, hogy veszem az első halmaz első elemét, majd a második első elemét, utána az első halmaz második elemét, s így tovább. Ennél általánosabb a következő tétel.

Tétel: megszámlálhatóan sok megszámlálható halmaz uniója is megszámlálható.

Bizonyítás: Az első halmaz elemei legyenek rendre a_{11}, a_{12}, a_{13}… hasonlóan a másodiké a_{21}, a_{22}, a_{23}… és így tovább.

$$\begin{array}{lll} a_{11} & a_{12} & a_{13}\ldots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\ldots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\ldots \end{array}$$

Egy lehetséges sorozatba rendezés például, ha az ábrán jelzett módon veszem sorba a halmazok elemeit. Amennyiben egy elem már előfordult a felsorolás során, azt kihagyhatom a felsorolásból, s a következő elem vizsgálatára lépek át.

Tétel: Ha A végtelen halmaz, akkor van $\aleph_0$ számosságú részhalmaza.

Bizonyítás: A egy tetszőleges elemét elnevezem a_1-nek. Ekkor A\{a_1} szintén végtelen halmaz (véges sok elemet hagytam el), veszem ennek a halmaznak egy tetszőleges elemét, elnevezem a_2-nek. Az ezzel a módszerrel alkotott A'={a_1, a_2, a_3…} halmaz felsorolható, vagyis megszámlálhatóan végtelen.

Definíció: Legyenek a és b tetszőleges számosságok. Azt mondjuk, hogy az a számosság kisebb vagy egyenlő, mint a b számosság, ha találhatóak olyan A és B halmazok, melyekre $|A| = a$, $|B| = b$ és található A-nak egyértelmű leképezése B egy részhalmazára. Ez a ≤ tulajdonság megmutatható, hogy nem függ A és B választásától.

Tétel: $\aleph_0$ a legkisebb végtelen számosság.

Bizonyítás: Legyen a végtelen számosság és A olyan halmaz, melyre $|A| = a$. Mint előbb már beláttuk, minden végtelen halmaznak létezik $\aleph_0$ számosságú részhalmaza, vagyis $\aleph_0 \leq$a.

Bernstein ekvivalencia tétele: Minden a és b számosság esetén ha a≤b és b≤a akkor a=b.

Definíció: Azt mondjuk, hogy az a számosság kisebb a b számosságnál (a<b) amennyiben a≤b és a≠b

Cantor tétele: Bármely A halmazra $|A| < |P(A)|$ (P(A) az A halmaz hatványhalmaza)

Irodalomjegyzék

1. BALASSA – CSEKNÉ – SZILAS: *Harmadik és Negyedik matematikakönyvem*. Apáczai kiadó, Celldömölk.
2. CZAHÓCZKI – CSATÁR – KOVÁCS – MORVAI – SZÉPLAKI – SZEREDI: *Matematika 5-8. osztály* Apáczai kiadó, Celldömölk.
3. EUKLIDÉSZ: *Elemek* Gondolat, Budapest, 1983.
4. HAJDÚ SÁNDOR: *Matematika 5.* Műszaki kiadó, Budapest.
5. HAJNAL ANDRÁS – HAMBURGER PÉTER: *Halmazelmélet.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.
6. KOMJÁTH PÉTER: *Halmazelmélet.* ELTE egyetemi jegyzet, Budapest, 2007.
7. KOSZTOLÁNYI – KOVÁCS – PINTÉR – URBÁN – VINCZE: *Sokszínű matematika 9-12.* Mozaik kiadó, Szeged.
8. KURUCZNÉ BORBÉLY MÁRTA: *Az én matematikám 1-2. osztály*, Apáczai kiadó, Celldömölk.
9. N. JA. VILENKIN: *A végtelen kutatása.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.
10. PÉTER RÓZSA: *Játék a végtelennel*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.
11. RICHARD SKEMP: *A matematikatanulás pszichológiája*. Gondolat, Budapest, 1975.
12. RUZSA IMRE: *A matematika és a filozófia határán*. Gondolat, Budapest, 1968.
13. SAIN MÁRTON: *Nincs Királyi út.* Gondolat, Budapest, 1986.
14. TREMBECZKI CSABA: *A Végtelen Világvége Hotel és más történetek.* Kaposvár, 2007.

Mellékletek

1.sz. melléklet - Kérdőív
2.sz. melléklet – A kérdőívre beérkezett válaszok

1.sz. melléklet

Kérdőív
A végtelen fogalma a matematikában
című szakdolgozathoz

Szakdolgozati kérdőív

Kedves barátom! Kérlek válaszolj a következő kérdésekre, ezzel segítve szakdolgozatom megírását! Itt nincs rossz válasz, mint egy dolgozatban, ugyanis ha egy felelet hibás, számomra az is információ. Természetesen a kérdőív névtelen. Köszönöm, hogy rám szánsz pár percet az életed véges sok pillanatából! Velkey Kristóf

* Required

Nemed? *

- Férfi
- Nő

Korod? *

- kevesebb, mint 14
- 14-18
- 18-24
- 24-30
- 30-40
- 40-60
- 60 felett

Végzettséged? *

- kevesebb, mint 8 általános
- 8 általános
- érettségi
- felsőfokú szakképzettség
- főiskola/ egyetem

Melyikből van több, páros vagy páratlan számból? *

- párosból
- páratlanból
- ugyanannyi van belőlük
- nem tudom

Melyiknek van több pontja, egy 2 cm hosszú szakasznak vagy egy 10 cm hosszú szakasznak? *

- a 2 cm hosszú szakasznak
- a 10 cm hosszú szakasznak
- ugyanannyi pontjuk van
- nem tudom

Melyikből van több, páros vagy természetes számból? *

- párosból
- természetesből
- ugyanannyi van belőlük
- nem tudom

Melyikből van több, páratlan vagy pozitív egész számból? *

- páratlan számból
- pozitív egészből
- ugyanannyi van belőlük
- nem tudom

Melyiknek van több pontja, egy 5 cm hosszú szakasznak vagy egy félegyenesnek? *

- az 5 cm hosszú szakasznak
- a félegyenesnek
- ugyanannyi pontjuk van
- nem tudom

Melyikből van több, természetes vagy egész számból? *

- természetes számból
- egész számból
- ugyanannyi van belőlük
- nem tudom

Melyiknek van több pontja, egy 1 cm sugarú körvonalnak vagy egy 1 cm oldalú négyzetnek? *

- az 1 cm sugarú körvonalnak
- az 1 cm oldalú négyzetnek
- ugyanannyi pontjuk van
- nem tudom

Melyiknek van több pontja, a (0,1) vagy a (50,100) intervallumnak? *A ( ) a nyílt intervallumot jelenti, melynek a végpontjai nincsenek benne.

- (0,1)-nek
- (50,100)-nek
- ugyanannyi pontjuk van
- nem tudom

Melyikből van több, egész számból vagy racionális számból? *

- egész számból
- racionálisból
- ugyanannyi van belőlük
- nem tudom

Melyiknek van több pontja, a (0,1) vagy a [0,1] intervallumnak? *A ( ) a nyílt, míg a [ ] a zárt intervallumot jelenti. A zárt intervallumba beletartoznak annak végpontjai is, míg a nyílt intervallumba nem.

- (0,1)-nek
- [0,1]-nek
- ugyanannyi pontjuk van
- nem tudom

Melyikből van több, racionális vagy irracionális számból? *

- racionálisból
- irracionálisból
- ugyanannyi van belőlük
- nem tudom

Melyikből van több, természetes vagy valós számból? *

- természetes számból
- valós számból
- ugyanannyi van belőlük
- nem tudom

Melyiknek van több pontja, egy 1 cm hosszú szakasznak vagy egy egyenesnek? *

- a szakasznak
- az egyenesnek
- ugyanannyi pontjuk van
- nem tudom

2.sz. melléklet

A kérdőívre beérkezett válaszok
A végtelen fogalma a matematikában
című szakdolgozathoz

Nemed?	Korod?	Végzettséged?	Melyikből van több, páros vagy páratlan számból?	Melyikből van több, páros vagy természetes számból?	Melyikből van több, páratlan vagy pozitív egész számból?	Melyikből van több, természetes vagy egész számból?	Melyikből van több, egész számból vagy racionális számból?	Melyikből van több, racionális vagy irracionális számból?	Melyikből van több, természetes vagy valós számból?	Melyiknek van több pontja, a (0,1) vagy a (50,100) intervallumnak?	Melyiknek van több pontja, a (0,1) vagy a [0,1] intervallumnak?	Melyiknek van több pontja, egy 2 cm hosszú szakasznak vagy egy 10 cm hosszú szakasznak ?	Melyiknek van több pontja, egy 5 cm hosszú szakasznak vagy egy félegyenesnek?	Melyiknek van több pontja, egy 1 cm hosszú szakasznak vagy egy egyenesnek?	Melyiknek van több pontja, egy 1 cm sugarú körvonalnak vagy egy 1 cm oldalú négyzetnek?
Férfi	0 -14	kevesebb, mint 8 általános	nem tudom	párosból	páratlan számból	egész számból	nem tudom	nem tudom	ugyanannyi van belőlük	(50,100)-nek	(0,1)-nek	a 10 cm hosszú szakasznak	nem tudom	nem tudom	az 1 cm sugarú körvonalnak
Férfi	18-24	főiskola/ egyetem	páratlanból	természetesből	ugyanannyi van belőlük	egész számból	racionálisból	irracionálisból	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	(0,1)-nek	ugyanannyi pontjuk van	a félegyenesnek	az egyenesnek	ugyanannyi pontjuk van
Nő	18-24	érettségi	páratlanból	természetesből	ugyanannyi van belőlük	természetes számból	racionálisból	irracionálisból	természetes számból	(50,100)-nek	[0,1]-nek	a 10 cm hosszú szakasznak	a félegyenesnek	az egyenesnek	az 1 cm oldalú négyzetnek
Nő	14-18	8 általános	Párosból	párosból	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	irracionálisból	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	(0,1)-nek	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	14-18	8 általános	Párosból	természetesből	páratlan számból	egész számból	racionálisból	irracionálisból	valós számból	(50,100)-nek	[0,1]-nek	a 10 cm hosszú szakasznak	a félegyenesnek	az egyenesnek	az 1 cm sugarú körvonalnak
Nő	14-18	8 általános	Párosból	természetesből	pozitív egészből	egész számból	egész számból	irracionálisból	valós számból	(50,100)-nek	(0,1)-nek	a 10 cm hosszú szakasznak	a félegyenesnek	az egyenesnek	az 1 cm oldalú négyzetnek
Férfi	14-18	8 általános	párosból	természetesből	pozitív egészből	természetes számból	racionálisból	irracionálisból	természetes számból	ugyanannyi pontjuk van	[0,1]-nek	a 10 cm hosszú szakasznak	a félegyenesnek	az egyenesnek	az 1 cm sugarú körvonalnak
Férfi	14-18	8 általános	párosból	természetesből	pozitív egészből	egész számból	racionálisból	irracionálisból	valós számból	(50,100)-nek	[0,1]-nek	a 10 cm hosszú szakasznak	a félegyenesnek	az egyenesnek	az 1 cm sugarú körvonalnak
Férfi	14-18	8 általános	párosból	ugyanannyi van belőlük	pozitív egészből	egész számból	racionálisból	irracionálisból	valós számból	(50,100)-nek	[0,1]-nek	a 10 cm hosszú szakasznak	a félegyenesnek	az egyenesnek	az 1 cm oldalú négyzetnek
Nő	18-24	érettségi	párosból	párosból	páratlan számból	egész számból	racionálisból	irracionálisból	valós számból	(50,100)-nek	[0,1]-nek	a 10 cm hosszú szakasznak	a félegyenesnek	az egyenesnek	az 1 cm sugarú körvonalnak
Nő	18-24	érettségi	párosból	természetesből	páratlan számból	egész számból	nem tudom	nem tudom	valós számból	(50,100)-nek	[0,1]-nek	a 10 cm hosszú szakasznak	nem tudom	ugyanannyi pontjuk van	az 1 cm oldalú négyzetnek
Nő	18-24	érettségi	párosból	természetesből	pozitív egészből	egész számból	racionálisból	irracionálisból	valós számból	(50,100)-nek	[0,1]-nek	a 10 cm hosszú szakasznak	a félegyenesnek	az egyenesnek	az 1 cm oldalú négyzetnek
Nő	18-24	érettségi	párosból	természetesből	pozitív egészből	természetes számból	racionálisból	nem tudom	természetes számból	(50,100)-nek	(0,1)-nek	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	az 1 cm oldalú négyzetnek
Nő	18-24	érettségi	párosból	természetesből	pozitív egészből	egész számból	racionálisból	racionálisból	valós számból	(50,100)-nek	[0,1]-nek	a 10 cm hosszú szakasznak	a félegyenesnek	az egyenesnek	az 1 cm sugarú körvonalnak
Férfi	18-24	főiskola/ egyetem	párosból	természetesből	ugyanannyi van belőlük	egész számból	racionálisból	irracionálisból	valós számból	(50,100)-nek	[0,1]-nek	ugyanannyi pontjuk van	a félegyenesnek	az egyenesnek	az 1 cm sugarú körvonalnak
Férfi	18-24	felsőfokú szakképzettség	párosból	ugyanannyi van belőlük	pozitív egészből	egész számból	racionálisból	irracionálisból	valós számból	(50,100)-nek	[0,1]-nek	ugyanannyi pontjuk van	az 5 cm hosszú szakasznak	a szakasznak	az 1 cm oldalú négyzetnek
Nő	18-24	érettségi	párosból	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	egész számból	racionálisból	irracionálisból	valós számból	(50,100)-nek	[0,1]-nek	a 10 cm hosszú szakasznak	a félegyenesnek	az egyenesnek	az 1 cm sugarú körvonalnak
Férfi	24-30	főiskola/ egyetem	párosból	párosból	páratlan számból	egész számból	racionálisból	nem tudom	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Nő	24-30	főiskola/ egyetem	párosból	párosból	pozitív egészből	egész számból	egész számból	racionálisból	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	az 1 cm oldalú négyzetnek
Férfi	24-30	érettségi	párosból	természetesből	pozitív egészből	ugyanannyi van belőlük	egész számból	racionálisból	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	[0,1]-nek	ugyanannyi pontjuk van	az 5 cm hosszú szakasznak	a szakasznak	az 1 cm oldalú négyzetnek
Férfi	24-30	érettségi	párosból	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	egész számból	racionálisból	irracionálisból	valós számból	(50,100)-nek	[0,1]-nek	a 10 cm hosszú szakasznak	a félegyenesnek	az egyenesnek	az 1 cm oldalú négyzetnek
Férfi	40-60	főiskola/ egyetem	párosból	természetesből	ugyanannyi van belőlük	egész számból	racionálisból	nem tudom	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Nő	18-24	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	nem tudom	nem tudom	egész számból	racionálisból	nem tudom	valós számból	nem tudom	[0,1]-nek	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	nem tudom	ugyanannyi pontjuk van

Férfi	30-40	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	nem tudom	nem tudom	egész számból	egész számból	racionálisból	ugyanannyi van belőlük	(50,100)-nek	nem tudom	ugyanannyi pontjuk van	az 5 cm hosszú szakasznak	a szakasznak	az 1 cm oldalú négyzetnek
Nő	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	nem tudom	páratlan számból	nem tudom	racionálisból	nem tudom	nem tudom	nem tudom	nem tudom	ugyanannyi pontjuk van	nem tudom	ugyanannyi pontjuk van	az 1 cm oldalú négyzetnek
Férfi	14-18	8 általános	ugyanannyi van belőlük	párosból	páratlan számból	egész számból	racionálisból	racionálisból	valós számból	(50,100)-nek	nem tudom	a 10 cm hosszú szakasznak	a félegyenesnek	az egyenesnek	az 1 cm oldalú négyzetnek
Nő	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	párosból	páratlan számból	természetes számból	racionálisból	ugyanannyi van belőlük	nem tudom	(50,100)-nek	[0,1]-nek	ugyanannyi pontjuk van	a félegyenesnek	az egyenesnek	ugyanannyi pontjuk van
Nő	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	párosból	páratlan számból	egész számból	racionálisból	irracionálisból	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	(0,1)-nek	a 10 cm hosszú szakasznak	a félegyenesnek	az egyenesnek	az 1 cm sugarú körvonalnak
Nő	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	párosból	páratlan számból	természetes számból	racionálisból	irracionálisból	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	(0,1)-nek	ugyanannyi pontjuk van	a félegyenesnek	az egyenesnek	ugyanannyi pontjuk van
Nő	18-24	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	párosból	páratlan számból	egész számból	racionálisból	nem tudom	valós számból	nem tudom	nem tudom	ugyanannyi pontjuk van	az 5 cm hosszú szakasznak	a szakasznak	az 1 cm oldalú négyzetnek
Nő	18-24	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	párosból	páratlan számból	egész számból	racionálisból	irracionálisból	ugyanannyi van belőlük	(50,100)-nek	[0,1]-nek	a 10 cm hosszú szakasznak	a félegyenesnek	az egyenesnek	ugyanannyi pontjuk van
Nő	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	párosból	páratlan számból	ugyanannyi van belőlük	racionálisból	ugyanannyi van belőlük	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	[0,1]-nek	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	az 1 cm oldalú négyzetnek
Nő	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	párosból	páratlan számból	természetes számból	racionálisból	racionálisból	valós számból	(50,100)-nek	[0,1]-nek	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	az egyenesnek	az 1 cm oldalú négyzetnek
Nő	24-30	érettségi	ugyanannyi van belőlük	párosból	páratlan számból	ugyanannyi van belőlük	egész számból	ugyanannyi van belőlük	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	[0,1]-nek	a 10 cm hosszú szakasznak	a félegyenesnek	az egyenesnek	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	24-30	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	párosból	páratlan számból	ugyanannyi van belőlük	egész számból	racionálisból	természetes számból	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	30-40	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	párosból	páratlan számból	egész számból	egész számból	irracionálisból	ugyanannyi van belőlük	(50,100)-nek	[0,1]-nek	ugyanannyi pontjuk van	a félegyenesnek	ugyanannyi pontjuk van	az 1 cm oldalú négyzetnek
Férfi	30-40	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	párosból	páratlan számból	egész számból	egész számból	irracionálisból	valós számból	(50,100)-nek	[0,1]-nek	ugyanannyi pontjuk van	az 5 cm hosszú szakasznak	nem tudom	az 1 cm oldalú négyzetnek
Férfi	30-40	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	párosból	páratlan számból	természetes számból	egész számból	racionálisból	természetes számból	(50,100)-nek	[0,1]-nek	a 10 cm hosszú szakasznak	a félegyenesnek	az egyenesnek	az 1 cm sugarú körvonalnak
Nő	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	párosból	pozitív egészből	természetes számból	racionálisból	ugyanannyi van belőlük	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	[0,1]-nek	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	az egyenesnek	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	24-30	érettségi	ugyanannyi van belőlük	párosból	pozitív egészből	egész számból	racionálisból	irracionálisból	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	a félegyenesnek	az egyenesnek	nem tudom
Férfi	24-30	érettségi	ugyanannyi van belőlük	párosból	pozitív egészből	egész számból	racionálisból	irracionálisból	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	(0,1)-nek	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	az egyenesnek	az 1 cm sugarú körvonalnak
Nő	30-40	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	párosból	pozitív egészből	egész számból	nem tudom	nem tudom	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	[0,1]-nek	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	14-18	8 általános	ugyanannyi van belőlük	párosból	ugyanannyi van belőlük	egész számból	racionálisból	irracionálisból	valós számból	(50,100)-nek	[0,1]-nek	a 10 cm hosszú szakasznak	a félegyenesnek	az egyenesnek	ugyanannyi pontjuk van
Nő	18-24	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	párosból	ugyanannyi van belőlük	egész számból	nem tudom	racionálisból	természetes számból	(50,100)-nek	nem tudom	a 10 cm hosszú szakasznak	nem tudom	nem tudom	az 1 cm oldalú négyzetnek
Férfi	30-40	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	természetesből	nem tudom	egész számból	ugyanannyi van belőlük	nem tudom	nem tudom	nem tudom	[0,1]-nek	ugyanannyi pontjuk van	a félegyenesnek	az egyenesnek	az 1 cm sugarú körvonalnak
Férfi	14-18	8 általános	ugyanannyi van belőlük	természetesből	páratlan számból	természetes számból	egész számból	irracionálisból	ugyanannyi van belőlük	nem tudom	[0,1]-nek	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	az 1 cm oldalú négyzetnek
Férfi	14-18	8 általános	ugyanannyi van belőlük	természetesből	páratlan számból	egész számból	racionálisból	racionálisból	valós számból	(50,100)-nek	[0,1]-nek	a 10 cm hosszú szakasznak	a félegyenesnek	az egyenesnek	az 1 cm sugarú körvonalnak
Nő	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	természetesből	páratlan számból	egész számból	racionálisból	ugyanannyi van belőlük	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Nő	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	természetesből	páratlan számból	természetes számból	racionálisból	irracionálisból	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	(0,1)-nek	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	az egyenesnek	az 1 cm sugarú körvonalnak

Férfi	18-24	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	természetesből	páratlan számból	egész számból	racionálisból	irracionálisból	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Nő	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	természetesből	páratlan számból	természetes számból	ugyanannyi van belőlük	racionálisból	valós számból	(50,100)-nek	[0,1]-nek	a 10 cm hosszú szakasznak	a félegyenesnek	nem tudom	az 1 cm sugarú körvonalnak
Nő	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	természetesből	páratlan számból	ugyanannyi van belőlük	racionálisból	racionálisból	valós számból	(50,100)-nek	[0,1]-nek	a 10 cm hosszú szakasznak	a félegyenesnek	az egyenesnek	az 1 cm oldalú négyzetnek
Nő	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	természetesből	páratlan számból	ugyanannyi van belőlük	racionálisból	ugyanannyi van belőlük	valós számból	nem tudom	nem tudom	a 10 cm hosszú szakasznak	nem tudom	nem tudom	nem tudom
Nő	30-40	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	természetesből	páratlan számból	egész számból	racionálisból	irracionálisból	valós számból	(50,100)-nek	[0,1]-nek	a 10 cm hosszú szakasznak	az 5 cm hosszú szakasznak	a szakasznak	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	30-40	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	természetesből	páratlan számból	természetes számból	racionálisból	ugyanannyi van belőlük	valós számból	(50,100)-nek	(0,1)-nek	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	14-18	8 általános	ugyanannyi van belőlük	természetesből	pozitív egészből	ugyanannyi van belőlük	egész számból	nem tudom	ugyanannyi van belőlük	nem tudom	nem tudom	a 10 cm hosszú szakasznak	a félegyenesnek	az egyenesnek	az 1 cm sugarú körvonalnak
Férfi	14-18	kevesebb, mint 8 általános	ugyanannyi van belőlük	természetesből	pozitív egészből	egész számból	racionálisból	racionálisból	valós számból	(50,100)-nek	ugyanannyi pontjuk van	a 10 cm hosszú szakasznak	a félegyenesnek	ugyanannyi pontjuk van	az 1 cm oldalú négyzetnek
Nő	14-18	8 általános	ugyanannyi van belőlük	természetesből	pozitív egészből	egész számból	racionálisból	racionálisból	valós számból	(50,100)-nek	(0,1)-nek	a 10 cm hosszú szakasznak	a félegyenesnek	az egyenesnek	az 1 cm sugarú körvonalnak
Nő	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	természetesből	pozitív egészből	természetes számból	racionálisból	irracionálisból	természetes számból	nem tudom	[0,1]-nek	a 10 cm hosszú szakasznak	a félegyenesnek	az egyenesnek	ugyanannyi pontjuk van
Nő	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	természetesből	pozitív egészből	egész számból	egész számból	nem tudom	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	az egyenesnek	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	természetesből	pozitív egészből	egész számból	racionálisból	irracionálisból	valós számból	(50,100)-nek	[0,1]-nek	a 10 cm hosszú szakasznak	a félegyenesnek	az egyenesnek	az 1 cm oldalú négyzetnek
Férfi	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	természetesből	pozitív egészből	természetes számból	racionálisból	ugyanannyi van belőlük	természetes számból	(50,100)-nek	[0,1]-nek	a 10 cm hosszú szakasznak	a félegyenesnek	az egyenesnek	az 1 cm sugarú körvonalnak
Férfi	18-24	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	természetesből	pozitív egészből	természetes számból	racionálisból	irracionálisból	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	[0,1]-nek	ugyanannyi pontjuk van	a félegyenesnek	az egyenesnek	ugyanannyi pontjuk van
Nő	18-24	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	természetesből	pozitív egészből	ugyanannyi van belőlük	racionálisból	irracionálisból	valós számból	nem tudom	(0,1)-nek	ugyanannyi pontjuk van	az 5 cm hosszú szakasznak	ugyanannyi pontjuk van	nem tudom
Férfi	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	természetesből	pozitív egészből	egész számból	racionálisból	racionálisból	valós számból	(50,100)-nek	[0,1]-nek	a 10 cm hosszú szakasznak	az 5 cm hosszú szakasznak	az egyenesnek	az 1 cm sugarú körvonalnak
Férfi	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	természetesből	pozitív egészből	egész számból	racionálisból	irracionálisból	valós számból	(50,100)-nek	[0,1]-nek	ugyanannyi pontjuk van	a félegyenesnek	az egyenesnek	ugyanannyi pontjuk van
Nő	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	természetesből	pozitív egészből	természetes számból	racionálisból	irracionálisból	valós számból	(50,100)-nek	(0,1)-nek	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	az 1 cm oldalú négyzetnek
Férfi	24-30	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	természetesből	pozitív egészből	egész számból	racionálisból	racionálisból	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	24-30	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	természetesből	pozitív egészből	természetes számból	egész számból	irracionálisból	természetes számból	(50,100)-nek	[0,1]-nek	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	az egyenesnek	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	24-30	érettségi	ugyanannyi van belőlük	természetesből	pozitív egészből	természetes számból	racionálisból	nem tudom	valós számból	nem tudom	nem tudom	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	az egyenesnek	az 1 cm oldalú négyzetnek
Férfi	24-30	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	természetesből	pozitív egészből	egész számból	racionálisból	irracionálisból	valós számból	nem tudom	nem tudom	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	24-30	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	természetesből	pozitív egészből	természetes számból	egész számból	ugyanannyi van belőlük	természetes számból	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	a szakasznak	az 1 cm oldalú négyzetnek
Nő	24-30	érettségi	ugyanannyi van belőlük	természetesből	pozitív egészből	ugyanannyi van belőlük	racionálisból	nem tudom	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	[0,1]-nek	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Nő	30-40	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	természetesből	pozitív egészből	egész számból	racionálisból	irracionálisból	valós számból	(50,100)-nek	[0,1]-nek	a 10 cm hosszú szakasznak	a félegyenesnek	az egyenesnek	az 1 cm sugarú körvonalnak
Férfi	30-40	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	természetesből	pozitív egészből	egész számból	racionálisból	irracionálisból	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	[0,1]-nek	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van

Nő	30-40	felsőfokú szakképzettség	ugyanannyi van belőlük	természetesből	pozitív egészből	egész számból	racionálisból	nem tudom	valós számból	(50,100)-nek	[0,1]-nek	a 10 cm hosszú szakasznak	az 5 cm hosszú szakasznak	nem tudom	nem tudom
Férfi	40-60	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	természetesből	pozitív egészből	természetes számból	racionálisból	racionálisból	valós számból	(50,100)-nek	[0,1]-nek	a 10 cm hosszú szakasznak	a félegyenesnek	az egyenesnek	az 1 cm sugarú körvonalnak
Férfi	14-18	8 általános	ugyanannyi van belőlük	természetesből	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	racionálisból	racionálisból	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	[0,1]-nek	a 10 cm hosszú szakasznak	a félegyenesnek	ugyanannyi pontjuk van	az 1 cm oldalú négyzetnek
Nő	14-18	8 általános	ugyanannyi van belőlük	természetesből	ugyanannyi van belőlük	egész számból	racionálisból	irracionálisból	valós számból	(50,100)-nek	[0,1]-nek	a 10 cm hosszú szakasznak	a félegyenesnek	az egyenesnek	az 1 cm sugarú körvonalnak
Férfi	14-18	8 általános	ugyanannyi van belőlük	természetesből	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	(50,100)-nek	[0,1]-nek	ugyanannyi pontjuk van	az 5 cm hosszú szakasznak	az egyenesnek	az 1 cm oldalú négyzetnek
Nő	18-24	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	természetesből	ugyanannyi van belőlük	természetes számból	racionálisból	ugyanannyi van belőlük	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	természetesből	ugyanannyi van belőlük	egész számból	racionálisból	irracionálisból	valós számból	(50,100)-nek	[0,1]-nek	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	az 1 cm oldalú négyzetnek
Férfi	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	természetesből	ugyanannyi van belőlük	természetes számból	nem tudom	nem tudom	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	(0,1)-nek	ugyanannyi pontjuk van	a félegyenesnek	az egyenesnek	ugyanannyi pontjuk van
Nő	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	természetesből	ugyanannyi van belőlük	egész számból	racionálisból	irracionálisból	valós számból	(50,100)-nek	[0,1]-nek	ugyanannyi pontjuk van	a félegyenesnek	az egyenesnek	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	természetesből	ugyanannyi van belőlük	egész számból	racionálisból	ugyanannyi van belőlük	valós számból	nem tudom	nem tudom	a 10 cm hosszú szakasznak	a félegyenesnek	az egyenesnek	az 1 cm sugarú körvonalnak
Nő	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	természetesből	ugyanannyi van belőlük	egész számból	racionálisból	racionálisból	valós számból	(0,1)-nek	(0,1)-nek	a 10 cm hosszú szakasznak	a félegyenesnek	az egyenesnek	az 1 cm sugarú körvonalnak
Nő	18-24	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	természetesből	ugyanannyi van belőlük	természetes számból	racionálisból	nem tudom	nem tudom	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	24-30	érettségi	ugyanannyi van belőlük	természetesből	ugyanannyi van belőlük	természetes számból	egész számból	irracionálisból	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	[0,1]-nek	a 10 cm hosszú szakasznak	ugyanannyi pontjuk van	nem tudom	nem tudom
Nő	30-40	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	természetesből	ugyanannyi van belőlük	természetes számból	racionálisból	ugyanannyi van belőlük	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	a 10 cm hosszú szakasznak	a félegyenesnek	az egyenesnek	az 1 cm sugarú körvonalnak
Férfi	30-40	érettségi	ugyanannyi van belőlük	természetesből	ugyanannyi van belőlük	egész számból	ugyanannyi van belőlük	irracionálisból	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Nő	30-40	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	természetesből	ugyanannyi van belőlük	természetes számból	racionálisból	ugyanannyi van belőlük	természetes számból	nem tudom	nem tudom	a 10 cm hosszú szakasznak	a félegyenesnek	az egyenesnek	nem tudom
Nő	60 felett	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	természetesből	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	egész számból	irracionálisból	természetes számból	(50,100)-nek	(0,1)-nek	a 10 cm hosszú szakasznak	a félegyenesnek	az egyenesnek	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	páratlan számból	egész számból	racionálisból	racionálisból	valós számból	(50,100)-nek	[0,1]-nek	a 10 cm hosszú szakasznak	a félegyenesnek	az egyenesnek	az 1 cm oldalú négyzetnek
Férfi	14-18	8 általános	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	(0,1)-nek	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	az egyenesnek	ugyanannyi pontjuk van
Nő	14-18	8 általános	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	irracionálisból	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	[0,1]-nek	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Nő	14-18	8 általános	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	14-18	8 általános	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	[0,1]-nek	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	14-18	8 általános	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	egész számból	racionálisból	irracionálisból	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	az 1 cm sugarú körvonalnak
Férfi	14-18	8 általános	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	természetes számból	racionálisból	irracionálisból	valós számból	(50,100)-nek	ugyanannyi pontjuk van	a 10 cm hosszú szakasznak	a félegyenesnek	az egyenesnek	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	14-18	8 általános	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	racionálisból	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van

Férfi	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	racionálisból	nem tudom	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Nő	18-24	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Nő	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	[0,1]-nek	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	racionálisból	irracionálisból	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	az 1 cm oldalú négyzetnek
Férfi	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	racionálisból	ugyanannyi van belőlük	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	a félegyenesnek	az egyenesnek	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	természetes számból	racionálisból	ugyanannyi van belőlük	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	a félegyenesnek	ugyanannyi pontjuk van	az 1 cm oldalú négyzetnek
Férfi	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	[0,1]-nek	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	irracionálisból	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	egész számból	racionálisból	irracionálisból	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	[0,1]-nek	ugyanannyi pontjuk van	a félegyenesnek	az egyenesnek	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	18-24	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Nő	18-24	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Nő	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Nő	18-24	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	egész számból	racionálisból	irracionálisból	valós számból	(50,100)-nek	[0,1]-nek	a 10 cm hosszú szakasznak	a félegyenesnek	az egyenesnek	az 1 cm sugarú körvonalnak
Férfi	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	irracionálisból	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	az egyenesnek	ugyanannyi pontjuk van
Nő	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	egész számból	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	irracionálisból	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	racionálisból	irracionálisból	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	a félegyenesnek	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	egész számból	racionálisból	irracionálisból	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	[0,1]-nek	ugyanannyi pontjuk van	a félegyenesnek	az egyenesnek	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	nem tudom	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	racionálisból	ugyanannyi van belőlük	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	az 1 cm oldalú négyzetnek
Férfi	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van

Férfi	18-24	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	irracionálisból	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Nő	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	irracionálisból	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	18-24	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	[0,1]-nek	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Nő	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	irracionálisból	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	egész számból	racionálisból	racionálisból	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	[0,1]-nek	ugyanannyi pontjuk van	a félegyenesnek	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Nő	18-24	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Nő	18-24	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	racionálisból	nem tudom	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	irracionálisból	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Nő	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	egész számból	racionálisból	irracionálisból	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	[0,1]-nek	ugyanannyi pontjuk van	a félegyenesnek	az egyenesnek	az 1 cm sugarú körvonalnak
Férfi	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	az 5 cm hosszú szakasznak	az egyenesnek	ugyanannyi pontjuk van
Nő	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Nő	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	racionálisból	racionálisból	ugyanannyi van belőlük	(50,100)-nek	(0,1)-nek	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	irracionálisból	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Nő	18-24	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	racionálisból	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	a félegyenesnek	ugyanannyi pontjuk van	nem tudom
Nő	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	18-24	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	egész számból	racionálisból	irracionálisból	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	[0,1]-nek	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	az egyenesnek	ugyanannyi pontjuk van
Nő	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	nem tudom	ugyanannyi van belőlük	nem tudom	nem tudom	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Nő	18-24	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	egész számból	racionálisból	nem tudom	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	[0,1]-nek	ugyanannyi pontjuk van	a félegyenesnek	az egyenesnek	az 1 cm oldalú négyzetnek
Nő	24-30	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	irracionálisból	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Nő	24-30	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	irracionálisból	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	az egyenesnek	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	24-30	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	egész számból	racionálisból	irracionálisból	valós számból	(50,100)-nek	[0,1]-nek	a 10 cm hosszú szakasznak	a félegyenesnek	az egyenesnek	ugyanannyi pontjuk van

Nő	24-30	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	egész számból	irracionálisból	természetes számból	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Nő	24-30	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	24-30	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Nő	24-30	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	24-30	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	24-30	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	irracionálisból	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Nő	24-30	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	24-30	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	irracionálisból	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	nem tudom	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	24-30	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	24-30	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	irracionálisból	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	24-30	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	irracionálisból	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	24-30	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	[0,1]-nek	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Nő	24-30	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	irracionálisból	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Nő	24-30	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	irracionálisból	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Nő	24-30	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	nem tudom	nem tudom	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	30-40	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	egész számból	egész számból	irracionálisból	nem tudom	ugyanannyi pontjuk van	nem tudom	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	30-40	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	30-40	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	30-40	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Nő	30-40	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	30-40	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	egész számból	racionálisból	racionálisból	valós számból	(50,100)-nek	[0,1]-nek	ugyanannyi pontjuk van	az 5 cm hosszú szakasznak	a szakasznak	az 1 cm oldalú négyzetnek
Férfi	30-40	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	30-40	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	30-40	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	irracionálisból	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	30-40	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	irracionálisból	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	30-40	felsőfokú szakképzettség	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van

Férfi	30-40	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	irracionálisból	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	40-60	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	irracionálisból	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	40-60	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	nem tudom	nem tudom	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Nő	40-60	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	egész számból	egész számból	irracionálisból	természetes számból	(50,100)-nek	[0,1]-nek	a 10 cm hosszú szakasznak	a félegyenesnek	az egyenesnek	az 1 cm sugarú körvonalnak
Férfi	40-60	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	a félegyenesnek	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	40-60	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	irracionálisból	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	40-60	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Nő	40-60	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Nő	40-60	érettségi	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	60 felett	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	60 felett	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	irracionálisból	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van
Férfi	60 felett	főiskola/ egyetem	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	ugyanannyi van belőlük	irracionálisból	valós számból	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van	ugyanannyi pontjuk van