Egzisztenciatételek a differenciálegyenletek elméletéből

Bodó Ágnes

Matematika BSc

Szakdolgozat

Témavezető: Besenyei Ádám
adjunktus
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Budapest, 2012.

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Besenyei Ádámnak, aki rendkívüli mennyiségű időt és energiát fordított rám hétről hétre. Az ő segítsége és motivációja nélkül e dolgozat nem jöhetett volna létre. Külön köszönettel tartozom neki a dolgozatban szereplő ábrák elkészítésében nyújtott segítségéért. Ezenkívül nagyon hálás vagyok még tanáraimnak, akik nagyban hozzájárultak a szakmai fejlődésemhez és bevezettek a matematika gyönyörű rejtelmeibe, mindig szívesen segítettek, ha szükségem volt rájuk. Végül, de nem utolsó sorban szeretném megköszönni barátaimnak és családomnak mindazt a bíztatást, segítséget, amit kaptam tőlük.

1. fejezet

Bevezető

A differenciálegyenleteket a 17. században Isaac Newton (1643–1727) angol fizikus és matematikus fedezte fel. Olyan fontosnak tartotta ezt a felfedezését, hogy anagramma formájában rejtjelezte 1677. október 24-én Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1717) német filozófus és matematikusnak küldött levelében („epistola posterior"):

6accdae13eff7i3l9n4o4qrr4s8t12ux.

Néhány évvel később Newton megadta az anagramma megoldását, amely latinul így hangzik:

„Data aequatione quotcunque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire; et vice versa."

Vlagyimir Igorevics Arnold (1937-2010) orosz matematikus szerint a fenti idézet a mai modern matematika nyelvén azt jelenti, hogy

„Differenciálegyenleteket megoldani hasznos",

avagy

„A természet törvényeit differenciálegyenletek fejezik ki."

Valójában a szó szerinti fordítás annyit tesz, hogy a differenciál- és integrálszámítás egymás megfordításai.

A differenciálegyenleteket tanulmányaim során számtalanszor alkalmaztam, főleg a fizika területén, azonban mindig a gyakorlaton volt a hangsúly, nem az elméleten. E szakdolgozat révén lehetőségem volt mélyebben megismerni a differenciálegyenletek elméletének egy szeletét. Dolgozatom célja a differenciálegyenletek és a hozzá kapcsolódó kezdetiérték-feladatok megoldására vonatkozó két fő egzisztenciatétel bemutatása. A dolgozat felépítése a következő.

A második fejezetben bevezetjük a differenciálegyenletekkel kapcsolatos alapvetőbb fogalmakat, ezután néhány gyakorlati példán hangsúlyozzuk az egzisztenciatételek fontosságát, végül pedig történeti áttekintést nyújtunk az egzisztenciatételek fejlődéséről. Az elméleti részben főként a [8] jegyzetre támaszkodunk, a történeti részben pedig az [5] könyvre, amelyben megtalálhatók a tárgyalt tételek első előfordulásainak hivatkozásai.

A harmadik fejezetben összefoglaljuk a szükséges előismereteket, amelyek a dolgozat további megértéséhez elengedhetetlenek. Szó lesz a metrikus terekről, a Banach-féle fixponttételről és az Arzelà–Ascoli-lemmáról. Ez a fejezet a [7] jegyzetre és az [1] könyv egyes részeire támaszkodik.

A negyedik fejezetben bemutatjuk a Picard–Lindelöf-féle (vagy más néven Cauchy-Lipschitz-féle) egzisztenciatételt, amelyre két különböző bizonyítást mutatunk. Az egyik a Banach-féle fixponttételen alapul, a másik a szukcesszív approximáció módszerén. Ez utóbbit egy konkrét példán keresztül is szemléltetjük.

Az ötödik fejezetben a Peano-féle egzisztenciatétellel foglalkozunk, amelyre az Euler-féle töröttvonalak módszerén alapuló bizonyítást mutatunk. Ezért a fejezet elején bevezetjük az Euler-féle töröttvonal fogalmát és belátjuk, hogy bizonyos feltételek mellett a töröttvonalak jól közelítik a pontos megoldást, amelyet egy konkrét példán is szemléltetünk. A negyedik és ötödik fejezet a [2] kézírásos jegyzet alapján készült.

A dolgozat végén röviden, bizonyítás nélkül kitérünk a globális megoldás létezésének kérdésére.

2. fejezet

Motiváció, példák

Az alábbiakban egy rövid áttekintést adunk a differenciálegyenletekkel és a hozzájuk tartozó kezdetiérték-feladatokkal kapcsolatos fogalmakról, majd a fejezet második részében néhány példával ismerkedünk meg, melyek az egzisztenciatételek bevezetését segítik elő.

2.1. Kezdetiérték-feladatok

A következőkben definiáljuk az elsőrendű nemlineáris differenciálegyenletekre vonatkozó kezdetiérték-feladatokat, majd megvizsgáljuk, hogy miért elegendő elsőrendű egyenleteket vizsgálnunk k-adrendű egyenletek helyett. Egy *kezdetiérték-feladat* a következő alakban írható fel:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= F(t, x(t)), \\ x(t_0) &= p_0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

ahol az első egyenlet a differenciálegyenlet általános alakja, a második egyenlet pedig a kezdeti feltétel. Egy *kezdetiérték-feladat megoldását* az alábbi módon definiálhatjuk.

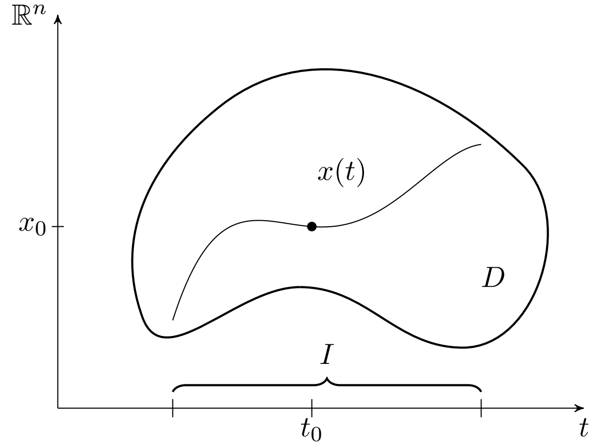
2.1. Definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ összefüggő nyílt halmaz (tartomány), $F : D \to \mathbb{R}^p$ folytonos függvény és $(t_0, p_0) \in D$. Ha az $I \subset \mathbb{R}$ (nyílt) intervallumra és az $x : I \to \mathbb{R}^p$ differenciálható függvényre teljesül, hogy

(i) $(t, x(t)) \in D$ minden $t \in I$ esetén,

(ii) $\dot{x}(t) = F(t, x(t))$ minden $t \in I$ esetén,

(iii) $t_0 \in I$, $x(t_0) = p_0$,

akkor az x függvényt az I intervallumon a (2.1) kezdetiérték-feladat megoldásának nevezzük (lásd a 2.1. ábrát).



2.1. ábra. Kezdetiérték-feladat megoldása

2.2. *Megjegyzés.* A differenciálegyenletek témakörében és a fizikában az elsőrendű deriváltat hagyományosan $\dot{x}$ jelöli a megszokott x' helyett; ezt a jelölést Newton vezette be.

A (2.1) kezdetiérték-feladat látszólag egy darab differenciálegyenletből áll, de ez valójában p darab egyenletet jelent, hiszen az x vektor p-dimenziós. Azonban a bizonyításokban nem fog gondot okozni, hogy nem írjuk ki a koordinátákat.

Vegyük észre továbbá azt is, hogy folytonos F esetén minden megoldás folytonosan differenciálható, hiszen $\dot{x}(t) = F(t, x(t))$, amely folytonos függvény.

Felmerülhet a kérdés, hogy miért elég csupán elsőrendű differenciálegyenletet vizsgálni. Az indoklás az, hogy egy k-adrendű differenciálegyenlet visszavezethető k darab elsőrendű differenciálegyenletből álló differenciálegyenlet-rendszerre. Legyen ugyanis $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és tekintsük a következő k-adrendű differenciálegyenletet:

$$x^{(k)} = F\big(t, x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(k-1)}(t)\big). \tag{2.2}$$

Ehhez az egyenlethez k darab kezdeti feltétel tartozik:

$$\begin{aligned} x(t_0) &= p_0, \\ \dot{x}(t_0) &= p_1, \\ &\vdots \\ x^{(k-1)}(t_0) &= p_{k-1}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Ekkor az $x_1 = x, x_2 = \dot{x}, \dots, x_k = x^{(k-1)}$ függvények bevezetésével a (2.2) k-adrendű differenciálegyenlet az alábbi k darab egyenletet tartalmazó elsőrendű rendszerré transzformálható:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t), \\ &\vdots \\ \dot{x}_k(t) &= F(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)). \end{aligned}$$

A hozzájuk tartozó kezdeti feltételek pedig:

$$\begin{aligned} x_1(t_0) &= p_0, \\ x_2(t_0) &= p_1, \\ &\vdots \\ x_k(t_0) &= p_{k-1}. \end{aligned}$$

Bevezetve az

$$\widetilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \widetilde{p} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{k-1} \end{pmatrix}$$

vektorokat és az $\widetilde{F} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$,

$$\widetilde{F}(\widetilde{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_k \\ F(t, x_1(t), \dots, x_k(t)) \end{pmatrix}$$

függvényt, a következő kezdetiérték-feladatot kapjuk:

$$\begin{aligned} \dot{\widetilde{x}} &= \widetilde{F}(t, \widetilde{x}), \\ \widetilde{x}(t_0) &= \widetilde{p}. \end{aligned}$$

Ez az elsőrendű kezdetiérték-feladat ekvivalens a (2.2) egyenletből és a (2.3) kezdeti értékekből álló k-adrendű kezdetiérték-feladattal.

2.2. Példák

Elenyészően kevés azon differenciálegyenletek száma, ahol a megoldást explicit alakban meg tudjuk adni. Már az egyik legegyszerűbb fizikai probléma, a matematikai inga mozgását leíró differenciálegyenlet sem tartozik közéjük. A matematikai inga (l hosszúságú fonálon felfüggesztett m tömegű anyagi pont) mozgásegyenlete a következő:

$$\ddot{x} + \frac{g}{l} \sin x = 0.$$

A fenti nemlineáris egyenlet expliciten nem oldható meg, ezért gyakran kis kilengések esetén a $\sin x \approx x$ közelítést használjuk, amellyel az egyenlet már lineárissá válik. Fontos tehát általában annak a kérdésnek az eldöntése, hogy létezik-e egy kezdetiérték-feladatnak megoldása és egyértelmű-e. Ha az előbbire a válasz igen, akkor van egzisztencia, ha ezenfelül a második kérdésre is igen a válasz, akkor teljesül az unicitás.

Számtalan különféle eset fordulhat elő a megoldás egzisztenciájával és unicitásával kapcsolatban, az alábbiakban ezekre mutatunk példákat.

2.3. Példa. Nincs megoldása a differenciálegyenletnek, és bármilyen hozzá tartozó kezdetiérték-feladatnak sincs:

$$\dot{x}(t) = d(t), \tag{2.4}$$

ahol

$$d(t) = \begin{cases} 1, \text{ha } t \text{ racionális}, \\ 0, \text{ha } t \text{ irracionális} \end{cases}$$

az úgynevezett Dirichlet-függvény. A differenciálegyenletnek nincsen megoldása, mert minden deriváltfüggvény Darboux-tulajdonságú, amely a következőt jelenti.

2.4. Tétel (Darboux)**.** *Legyen f valós értékű differenciálható függvény az I nyílt intervallumon. Ekkor az f' deriváltfüggvény* Darboux-tulajdonságú, *vagyis bármely $a, b \in I, a < b$ esetén, ha*

$$f'(a) < u < f'(b) \qquad (\textit{vagy} \quad f'(b) < u < f'(a)),$$

akkor létezik $c \in (a, b)$, melyre $f'(c) = u$.

Más szóval f' bármely két függvényérték között minden értéket felvesz. A Dirichlet-függvény nyilván nem Darboux-tulajdonságú, ezért a (2.4) differenciálegyenletnek nincs megoldása.

2.5. Példa. Adott egyenlet esetén bizonyos kezdetiérték-feladatnak van megoldása, bizonyos kezdetiérték-feladatnak pedig nincs megoldása:

$$\dot{x}(t) = \operatorname{sgn}(t),$$

ahol

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } t > 0, \\ 0, & \text{ha } t = 0, \\ -1, & \text{ha } t < 0 \end{cases}$$

az előjelfüggvény. Ha $x(0) = 0$, akkor a kezdetiérték-feladatnak nincs megoldása, hiszen a fent említett Darboux-tétel miatt a $t_0 = 0$ pont környezetében nincs olyan differenciálható x függvény, amelynek a sgn függvény lenne a deriváltja. Az $x(1) = 1$ kezdeti érték mellett viszont van megoldás, könnyen látható, hogy az $x(t) = t$ függvény kielégíti a kezdetiérték-feladatot a $(0, \infty)$ intervallumon.

2.6. Példa. A kezdetiérték-feladatnak pontosan egy megoldása van:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 0, \\ x(0) &= 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Az integrálszámítás alaptétele szerint, ha egy függvény deriváltja egy intervallumon azonosan nulla, akkor a függvény ezen az intervallumon állandó. A kezdeti érték miatt ez az állandó csak a 0 lehet. Ezzel beláttuk, hogy a (2.5) kezdetiérték-feladat megoldása csak az azonosan 0 függvény.

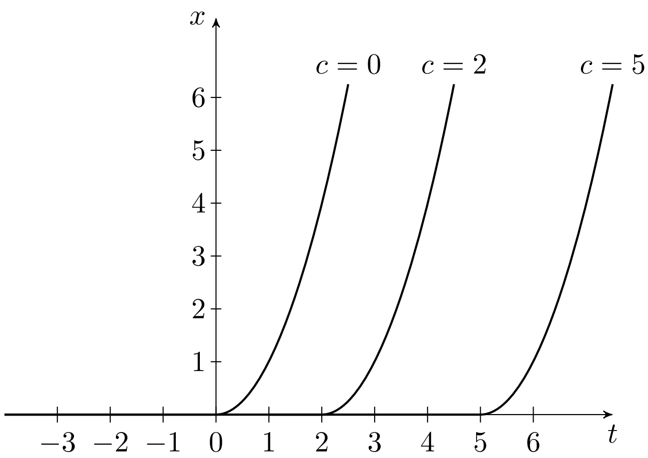
2.7. Példa. A kezdetiérték-feladatnak végtelen sok különböző megoldása van:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 2\sqrt{|x(t)|}, \\ x(0) &= 0. \end{aligned}$$

Ekkor az

$$x(t) = \begin{cases} (t-c)^2, & \text{ha } t \geq c, \\ 0, & \text{ha } t < c \end{cases}$$

alakban írható függvények tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén megoldását adják a differenciálegyenletnek, és $c \geq 0$ esetén a kezdeti feltételt is kielégítik. Ezeket a függvényeket a 2.7. ábrán láthatunk.



2.2. ábra. Kezdetiérték-feladat végtelen sok megoldása

2.8. Példa (Peano)**.** A kezdetiérték-feladatnak végtelen sok megoldása van:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 3x(t)^{\frac{2}{3}}, \\ x(0) &= 0. \end{aligned}$$

Könnyen meggyőződhetünk róla, hogy az

$$x(t) = \begin{cases} (t-c)^3, & \text{ha } t \geq c, \\ 0, & \text{ha } t < c \end{cases}$$

alakban írható függvények kielégítik a differenciálegyenletet és $c \geq 0$ esetén a kezdeti feltételt is.

2.3. Történeti áttekintés

A differenciálegyenletek elmélete a 17. századra nyúlik vissza, miután Newton és Leibniz felfedezték a differenciál- és integrálszámítást. Már akkor ismerték a differenciálegyenletek fogalmát és speciális típusú egyenletek megoldására módszereket dolgoztak ki. Azonban a differenciálegyenletek elmélete a szó szoros értelmében a 18. századtól kezdődik.

Az első egzisztenciatétel Cauchy nevéhez fűződik, azonban előtte már *Leonhard Euler* (1707–1783) svájci matematikus 1768-ban bevezette az Euler-féle töröttvonal fogalmát, amellyel a megoldás közelítésére egy fontos eljárást adott. *Augustin Cauchy* (1789–1857) francia matematikus 1824-ben mondta ki az egzisztenciatételt, amely szerint, ha f folytonosan differenciálható függvény, akkor az f jobboldalú kezdetiérték-feladatnak egyértelműen létezik megoldása. Bizonyításában felhasználta az Euler-féle töröttvonal módszert. *Rudolf Lipschitz* (1832–1903) német matematikus továbbfejlesztette a tételt, 1868-ban bevezette a később róla elnevezett Lipschitz-feltételt, amely a folytonos differenciálhatóságnál gyengébb feltétel. *Joseph Liouville* (1809–1882) francia matematikus fedezte fel a szukcesszív approximáció módszerét, amely ugyancsak a megoldás közelítésére szolgál, illetve az egzisztenciatétel egy másik bizonyítási eljárása. A módszert később *Charles Émile Picard* (1856–1941) francia matematikus fejlesztette tovább, ezért szokás Picard-iterációnak is nevezni. Az iteráció konvergenciájára *Ernst Leonard Lindelöf* (1870–1946) finn matematikus adott becslést 1894-ben (lásd a 4.4. szakaszt). Emiatt a fenti egzisztenciatételt szokás Cauchy-Lipschitz-féle, vagy Picard–Lindelöf-féle egzisztenciatételnek is nevezni.

Egy másik fontos egzisztenciatétel *Giuseppe Peano* (1858–1932) olasz matematikus nevéhez fűződik, aki 1886-ban publikálta tételét, amelyben csak egzisztenciát állít, folytonos jobb oldal mellett. *Constantin Carathéodory* (1873–1950) görög származású német matematikus 1927-ben tovább általánosította Peano egzisztenciatételét, az f függvényről már csak integrálhatóságot tett fel.

3. fejezet

Szükséges előismeretek

Ebben a fejezetben röviden összefoglaljuk az absztrakt metrikus terekkel kapcsolatos alapfogalmakat és fontosabb állításokat. Szó lesz többek között a Banach-féle fixponttételről és az Arzelà–Ascoli-lemmáról. Ezeket az eredményeket a későbbi fejezetekben szereplő egzisztenciatételek bizonyításaiban fogjuk alkalmazni. A részleteket illetően lásd a [7] jegyzetet.

3.1. Metrikus terek

3.1. Definíció. Legyen X tetszőleges nemüres halmaz. Ekkor X-beli *metrika* vagy *távolságfüggvény* alatt egy olyan $d : X \times X \to \mathbb{R}_0^+$ leképezést értünk, melyre az alábbi tulajdonságok teljesülnek:

(i) minden $x, y \in X$ esetén $d(x, y) \geq 0$,

(ii) $d(x, y) = 0$ pontosan akkor, ha $x = y$,

(iii) minden $x, y, z \in X$ esetén $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (háromszög-egyenlőtlenség).

3.2. Definíció. Az (X, d) rendezett párt *metrikus térnek* nevezzük, ha X tetszőleges nemüres alaphalmaz, d pedig egy X-beli metrika.

3.3. Példa.

(i) Legyen X tetszőleges nemüres halmaz, ekkor a

$$d(x, y) := \begin{cases} 1, \text{ ha } x \neq y, \\ 0, \text{ ha } x = y \end{cases}$$

távolságfüggvényt diszkrét metrikának nevezzük.

(ii) Legyen $X := \mathbb{R}^p$, ekkor

$$
\begin{aligned}
d_1(x,y) &:= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \ldots + |x_p - y_p| = \sum_{k=1}^{p} |x_k - y_k|\,, \\
d_2(x,y) &:= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_p - y_p)^2} = \\
&= \left(\sum_{k=1}^{p} |x_k - y_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\
d_\infty(x,y) &:= \max_{1 \le k \le p} |x_k - y_k|
\end{aligned}
$$

metrikák X-en. A d_2 metrika a szokásos euklidészi távolságfogalom.

(iii) Legyen X a $H \subset \mathbb{R}$ halmazon korlátos valós függvények halmaza és

$$
d_\infty(f,g) := \sup_{h \in H} |f(h) - g(h)|\,.
$$

(iv) Legyen $X := C([a,b],\mathbb{R}^p)$ az $[a,b] \to \mathbb{R}^p$ folytonos függvények halmaza és

$$
d_\infty(f,g) := \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|\,.
$$

Egy metrikus térben a távolságfogalom segítségével, a valós eset mintájára értelmezhetjük sorozatok konvergenciáját és a Cauchy-sorozat fogalmát.

3.4. Definíció. Legyen (X,d) metrikus tér és $(x_n) \subset X$ sorozat. Ekkor azt mondjuk, hogy az (x_n) sorozatnak az $x \in X$ a *határértéke*, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex úgy, hogy minden $n \ge N$ esetén $d(x_n, x) < \varepsilon$. Ha egy sorozatnak van határértéke, akkor a sorozatot *konvergensnek* nevezzük. Az (x_n) sorozatot *Cauchy-sorozatnak* nevezzük, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex úgy, hogy minden $n, m \ge N$ esetén $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

A konvergencia valós esetben érvényes tulajdonságainak nagy része metrikus terekben is igaz, mint például a határérték egyértelműsége, a határérték és algebrai műveletek konzisztenciája, továbbá az is igaz, hogy minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat. Azonban a valós esettől eltérően egy Cauchy-sorozat nem feltétlenül konvergens, például legyen $X = (0,1)$ a szokásos euklidészi metrikával. Ekkor tetszőleges $(x_n) \subset (0,1)$ sorozat, amelynek $\mathbb{R}$-beli határértéke 1, az X-ben Cauchy-sorozat, de X-ben nem konvergens (mert $1 \notin X$). Azok a metrikus terek, amelyekben minden Cauchy-sorozat konvergens, fontos szerepet töltenek be.

3.5. Definíció. Legyen (X, d) metrikus tér. Ha X-ben minden Cauchy-sorozat konvergens, akkor azt mondjuk, hogy az X tér *teljes* a d metrikára nézve.

3.6. Példa. A 3.3. Példában definiált terek mind teljes metrikus terek.

3.7. Definíció. Legyen (X, d) metrikus tér. Egy $H \subset X$ halmazt *sorozatkompaktnak* nevezünk, ha bármely H-beli sorozatnak van H-beli elemhez konvergáló részsorozata. Az (X, d) metrikus tér *sorozatkompakt*, ha benne X sorozatkompakt halmaz, vagyis tetszőleges sorozatnak van konvergens részsorozata.

3.8. Példa. Tetszőleges korlátos és zárt $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallum sorozatkompakt a Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel miatt, sőt tetszőleges korlátos és zárt $H \subset \mathbb{R}^p$ halmaz sorozatkompakt a Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel $\mathbb{R}^p$-beli általánosítása miatt.

3.2. Banach-féle fixponttétel

A következőkben egy fontos tétellel ismerkedünk meg, amely a matematika több ágában is széleskörűen alkalmazható. A tételt Stefan Banach (1892–1945) lengyel matematikus publikálta először 1922-ben. A tétel kimondása előtt szükségünk van egy új fogalom bevezetésére.

3.9. Definíció. Legyen (X, d) metrikus tér. Az $f : X \to X$ leképezést *kontrakciónak* nevezzük, ha létezik $q \in [0, 1)$ szám, amelyre minden $x, y \in X$ esetén
$$d(f(x), f(y)) \leq q \cdot d(x, y)$$
teljesül.

Szemléletesen egy kontrakció összehúzást jelent, ami bármely két pont távolságát legalább q-szorosára csökkenti.

3.10. Tétel (Banach-féle fixponttétel)**.** *Ha (X, d) teljes metrikus tér és $f : X \to X$ kontrakció, akkor létezik egyetlen olyan (*fixpontnak *nevezett) $x^* \in X$, amelyre $f(x^*) = x^*$. Sőt, ez a fixpont megkapható tetszőleges x_0-ból kiindulva az $x_n = f(x_{n-1})$ rekurzióval értelmezett sorozat határértékeként.*

Bizonyítás. A bizonyítás ötlete maga a tétel utolsó mondata, vagyis hogy egy tetszőleges $x_0 \in X$ elemből kiindulva, az f leképezés egymás utáni alkalmazásával megkonstruáljuk a fixpontot. Legyen tehát $x_0 \in X$ tetszőleges és értelmezzük az $(x_n) \in X$ sorozatot az $x_n := f(x_{n-1}) \quad (n \in \mathbb{N})$ rekurzióval. Ekkor $n > m$ esetén a háromszög-egyenlőtlenség többszöri alkalmazásával kapjuk, hogy

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \ldots + d(x_{m+1}, x_m). \tag{3.1}$$

Mivel f kontrakció, ezért a rekurzió felhasználásával $i \geq 1$ esetén

$$d(x_i, x_{i-1}) = d(f(x_{i-1}), f(x_{i-2})) \leq q \cdot d(x_{i-1}, x_{i-2}) \leq \cdots \leq q^{i-1} d(x_1, x_0),$$

és így (3.1) alapján

$$d(x_n, x_m) \leq (q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q^m) \cdot d(x_1, x_0) = \frac{q^m - q^n}{1 - q} \cdot d(x_1, x_0),$$

ahonnan $q \in [0, 1)$ miatt $n, m \to \infty$ esetén $d(x_n, x_m) \to 0$ adódik. Ebből következően $(x_n) \subset X$ Cauchy-sorozat, így X teljessége miatt konvergens. Legyen

$$x^* := \lim_{n \to \infty} x_n.$$

Megmutatjuk, hogy x^* fixpontja f-nek. Ismét a háromszög-egyenlőtlenség és a rekurzió felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 \leq d(x^*, f(x^*)) &\leq d(x^*, x_n) + d(x_n, f(x^*)) \\ &= d(x^*, x_n) + d(f(x_{n-1}), f(x^*)) \\ &\leq d(x^*, x_n) + q \cdot d(x_{n-1}, x^*) \xrightarrow{n \to \infty} 0, \end{aligned}$$

mivel $n \to \infty$ esetén $x_n \to x^*$. Ezért $d(x^*, f(x^*)) = 0$, tehát $x^* = f(x^*)$. A fixpont egyértelműsége abból következik, hogy ha $\widetilde{x} = f(\widetilde{x})$ teljesül, akkor

$$0 \leq d(x^*, \widetilde{x}) = d(f(x^*), f(\widetilde{x})) \leq q \cdot d(x^*, \widetilde{x}),$$

ami $0 \leq q < 1$ miatt csak $d(x^*, \widetilde{x}) = 0$ esetén állhat fenn, vagyis $x^* = \widetilde{x}$. □

3.11. Példa. Tekintsük az $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ függvényt és az $X = [1, \infty)$ intervallumot, amely teljes metrikus tér a szokásos euklidészi metrikára nézve. Másrészt a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség alapján

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) \geq \sqrt{2} \quad (x > 0),$$

vagyis $f\colon X \to X$. Ezenkívül $x \in X$ esetén

$$\left|f'(x)\right| = \left|\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)\right| \le \frac{1}{2},$$

így a Lagrange-középértéktételből következően $x, y \in X$ esetén

$$|f(x) - f(y)| \le \left|f'(\xi)\right| \cdot |x - y| \le \frac{1}{2}\,|x - y|\,,$$

tehát $f\colon X \to X$ kontrakció. Ekkor a Banach-féle fixponttétel alapján az

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{2}{x_k}\right)$$

rekurzió tetszőleges $x_0 \in [1, \infty)$ kezdőérték esetén konvergens és határértéke f fixpontja, vagyis $\sqrt{2}$. A fenti eljárást szokás babiloni módszernek nevezni, amely a Newton-iteráció speciális esete (amely másodrendben konvergens).

3.3. Arzelà–Ascoli-lemma

A következőkben tárgyalásra kerülő lemma a valós (vagy $\mathbb{R}^p$-beli) sorozatokra érvényes Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel függvénysorozatokra vonatkozó analógiája. Szükséges és elégséges feltételt ad arra, hogy egy függvénysorozatnak létezik-e egyenletesen konvergens részsorozata. Az elégséges feltételt Giulio Ascoli (1843–1896) olasz matematikus bizonyította 1883-84-ben, a szükséges feltételt pedig Cesare Arzelà (1847–1912) olasz matematikus 1895-ben. Ezt a lemmát a későbbiekben a Peano-féle egzisztenciatétel bizonyításában fogjuk használni. Mielőtt kimondanánk a lemmát, néhány fogalmat be kell vezetnünk.

3.12. Definíció. Legyenek adottak az $f\colon X \to \mathbb{R}^p, f_n\colon X \to \mathbb{R}^p$ $(n \in \mathbb{N})$ függvények, ahol X tetszőleges nemüres halmaz. Azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat *egyenletesen tart* f-hez az X halmazon, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex úgy, hogy minden $n \ge N$ és minden $x \in X$ esetén $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$. Ha létezik ilyen tulajdonságú f függvény, akkor azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat *egyenletesen konvergens* X-en.

3.13. *Megjegyzés.* Ha a $C([a, b], \mathbb{R}^p)$ metrikus teret tekintjük a d_∞ metrikával, akkor az egyenletes konvergencia a metrika szerinti konvergenciának felel meg.

3.14. Definíció. Legyenek adottak az $f_n\colon X \to \mathbb{R}^p$ $(n \in \mathbb{N})$ függvények, ahol X tetszőleges nemüres halmaz. Azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat *egyenletesen Cauchy-tulajdonságú*, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex úgy, hogy minden $n, m \geq N$ és minden $x \in X$ esetén $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$.

3.15. *Megjegyzés.* Ha a $C([a,b], \mathbb{R}^p)$ metrikus teret tekintjük a d_∞ metrikával, akkor az egyenletes Cauchy-tulajdonság a metrika szerinti Cauchy-tulajdonságnak felel meg.

Mivel $C([a,b], \mathbb{R}^p)$ teljes, ezért a Cauchy-tulajdonság ekvivalens a konvergenciával, így kapjuk az alábbi tételt.

3.16. Tétel. *A $C([a,b], \mathbb{R}^p)$ térben egy függvénysorozat egyenletes konvergenciája ekvivalens az egyenletes Cauchy-tulajdonsággal.*

3.17. Definíció. Az $X \to \mathbb{R}^p$ függvényekből álló $\mathcal{F}$ függvényosztályt *korlátosnak* nevezzük, ha létezik $K \in \mathbb{R}$, melyre minden $f \in \mathcal{F}$ esetén $|f| \leq K$.

3.18. *Megjegyzés.* Ha a $C([a,b], \mathbb{R}^p)$ metrikus teret tekintjük a d_∞ metrikával, akkor a korlátosság a metrika szerinti korlátosságot jelenti.

3.19. Definíció. Legyen (X, d) metrikus tér és $\mathcal{F} \subset C(X, \mathbb{R}^p)$. Ekkor az $\mathcal{F}$ függvényosztályt *egyenlő mértékben egyenletesen folytonosnak* nevezzük, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta > 0$ szám úgy, hogy ha $d(x,y) < \delta$, akkor minden $f \in \mathcal{F}$ esetén $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

3.20. *Megjegyzés.* Ha az $\mathcal{F}$ függvényosztály minden eleme Lipschitz-tulajdonságú az $L > 0$ Lipschitz-konstanssal, azaz minden $f \in \mathcal{F}$ és minden $x, y \in X$ esetén $|f(x) - f(y)| \leq L \cdot d(x,y)$, akkor $\mathcal{F}$ egyenlő mértékben egyenletesen folytonos, hiszen ε-hoz $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ választás megfelelő.

3.21. Lemma (Arzelà–Ascoli)**.** *Legyen (X, d) sorozatkompakt metrikus tér és tekintsük a $C(X, \mathbb{R}^p)$ teret. Ekkor egy $(f_n) \subset C(X, \mathbb{R}^p)$ sorozatnak pontosan akkor van egyenletesen konvergens részsorozata, ha az $\{f_n\colon n \in \mathbb{N}\} \subset C(X, \mathbb{R}^p)$ halmaz korlátos és egyenlő mértékben egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. A bizonyítás során csak az elégségességet fogjuk igazolni és azt is csak $X = I \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt intervallum esetén. A szükségesség bizonyítására nem lesz később szükségünk, ezért azt mellőzzük (a részleteket illetően lásd az [5] könyvet). A bizonyítás első felében a Cantor-féle átlós eljárással az (f_n) sorozatból kiválasztunk egy olyan részsorozatot, amely a racionális számokban konvergens. A bizonyítás második felében bebizonyítjuk, hogy ez a részsorozat egyenletesen konvergens I intervallumon.

Legyen $(f_n) \subset C(I, \mathbb{R}^p)$ függvénysorozat, amelyre $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ korlátos és egyenlő mértékben egyenletesen folytonos. Legyen (r_k) az I intervallumbeli racionális számok felsorolása valamilyen sorrendben, ahol $k = 1, 2, \ldots$. Tekintsük az $(f_n(r_1)) \subset \mathbb{R}^p$ vektorsorozatot, ahol r_1 az (r_k) számsorozat első tagja. Ez a vektorsorozat korlátos (hiszen az (f_n) függvényosztály korlátos, így pontonként is korlátos), ezért az $\mathbb{R}^p$-beli Bolzano-Weierstrass-tétel miatt létezik valamilyen $(1, n)$ indexszel jelölt konvergens részsorozata. Ekkor az $(f_{(1,n)})$ függvénysorozat konvergens az r_1 pontban. Ezután tekintsük az $(f_{(1,n)}(r_2)) \subset \mathbb{R}^p$ vektorsorozatot, ahol r_2 az (r_k) számsorozat második tagja. Hasonlóan, a korlátosság miatt az $(f_{(1,n)}(r_2))$ vektorsorozatnak létezik $(2, n)$ indexszel jelölt konvergens részsorozata. Így az $(f_{(2,n)})$ függvénysorozat konvergens az r_2 pontban, ezenkívül mivel már r_1 pontbeli konvergens sorozatból választottunk ki részsorozatot, ezért az r_1 pontban is.

Ezt az eljárást folytatva kapjuk az $(f_{(k-1,n)}(r_k))$ korlátos vektorsorozatot, amelynek létezik $(f_{(k,n)}(r_k))$ konvergens részsorozata, ahol $k, n = 1, 2, \ldots$. Így az $(f_{(k,n)})$ függvénysorozat minden rögzített k esetén konvergens az $r_1, \ldots, r_k$ pontokban. Rendezzük a sorozat tagjait a következő végtelen nagyságú táblázatba:

$$
\begin{array}{cccccc}
f_{(1,1)} & f_{(1,2)} & \cdots & f_{(1,n-1)} & f_{(1,n)} & \cdots \\
f_{(2,1)} & f_{(2,2)} & \cdots & f_{(2,n-1)} & f_{(2,n)} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots \\
f_{(n-1,1)} & f_{(n-1,2)} & \cdots & f_{(n-1,n-1)} & f_{(n-1,n)} & \cdots \\
f_{(n,1)} & f_{(n,2)} & \cdots & f_{(n,n-1)} & f_{(n,n)} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

Tekintsük az átlóban szereplő függvénysorozatot, $(f_{(n,n)})$-t, amelyet az egyszerűség kedvéért $(\widetilde{f}_n)$-mal jelölünk. Ekkor $(\widetilde{f}_n)$ egy olyan sorozat, amely konvergens az összes I intervallumbeli racionális számban, hiszen véges sok tagtól eltekintve $(\widetilde{f}_n)$ részsorozata $(f_{(k,n)})$-nek minden rögzített k-ra.

Ezek után bebizonyítjuk, hogy $(\widetilde{f}_n)$ egyenletesen konvergens az I intervallumon, amely a 3.16. Tétel alapján ekvivalens azzal, hogy egyenletesen Cauchy-tulajdonságú. Mivel az $(\widetilde{f}_n)$ függvénysorozat r_k-ban konvergens, ezért Cauchy-tulajdonságú is. Legyen adott $\varepsilon > 0$, így minden rögzített

$r_k \in I$ racionális számhoz létezik olyan $N_0(r_k)$ egész szám, hogy

$$\left|\widetilde{f}_n(r_k) - \widetilde{f}_m(r_k)\right| < \varepsilon, \text{ ha } n, m > N_0(r_k). \tag{3.2}$$

Az egyenlő mértékben való egyenletes folytonosság miatt az adott ε-hoz létezik $\delta_0 > 0$, hogy tetszőleges $t, \widetilde{t} \in I$ esetén

$$\left|\widetilde{f}_n(t) - \widetilde{f}_n(\widetilde{t})\right| < \varepsilon, \text{ ha } \left|t - \widetilde{t}\right| < \delta_0. \tag{3.3}$$

Osszuk fel az I intervallumot véges sok $I_1, I_2, \ldots, I_l$ részintervallumra úgy, hogy a legnagyobb részintervallum hosszúsága is kisebb, mint δ_0. Ekkor minden I_k intervallumhoz válasszunk egy $\widetilde{r}_k$ racionális számot, hogy $\widetilde{r}_k \in I_k$. Ha $t \in I$, akkor valamilyen k-ra teljesül, hogy $t \in I_k$, és ezért

$$\begin{aligned} &\left|\widetilde{f}_n(t) - \widetilde{f}_m(t)\right| \leq \\ &\leq \left|\widetilde{f}_n(t) - \widetilde{f}_n(\widetilde{r}_k)\right| + \left|\widetilde{f}_n(\widetilde{r}_k) - \widetilde{f}_m(\widetilde{r}_k)\right| + \left|\widetilde{f}_m(\widetilde{r}_k) - \widetilde{f}_m(t)\right| < 3\varepsilon \end{aligned} \tag{3.4}$$

feltéve, hogy $n, m > \max(N_0(\widetilde{r}_1), \ldots, N_0(\widetilde{r}_l))$. A (3.4) egyenlőtlenség jobb oldalának első és harmadik tagjának becslése a (3.3), a második tag becslése pedig a (3.2) összefüggés következménye. Ebből következik, hogy az $(\widetilde{f}_n)$ függvénysorozat egyenletesen konvergens az I intervallumon.

$\square$

4. fejezet

Picard–Lindelöf-féle egzisztenciatétel

Ebben a részben megismerkedünk a Picard–Lindelöf-féle egzisztenciatétellel, amely a differenciálegyenletek és a hozzájuk tartozó kezdetiérték-feladatok megoldására lokális létezést és egyértelműséget mond ki. A tételt kétféleképpen bizonyítjuk, először a Banach-féle fixponttétel segítségével, másodszor a szukcesszív approximáció módszerével. Végül egy konkrét példán is szemléltejük a szukcesszív approximációt.

4.1. Picard–Lindelöf-féle egzisztenciatétel

Amint azt a 2.8. Példában is láthattuk, a kezdetiérték-feladat jobb oldalán álló függvény folytonossága nem elegendő a megoldás unicitásához. Az egyértelműség igazolásához bevezetjük a Lipschitz-folytonosság fogalmát.

4.1. Definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ tartomány. Az $f\colon D \to \mathbb{R}^p$ függvényt *második változójában Lipschitz-tulajdonságúnak* nevezzük, ha létezik $L > 0$ úgy, hogy minden $(t, p_1), (t, p_2) \in D$ esetén

$$|f(t, p_1) - f(t, p_2)| \leq L\,|p_1 - p_2|\,.$$

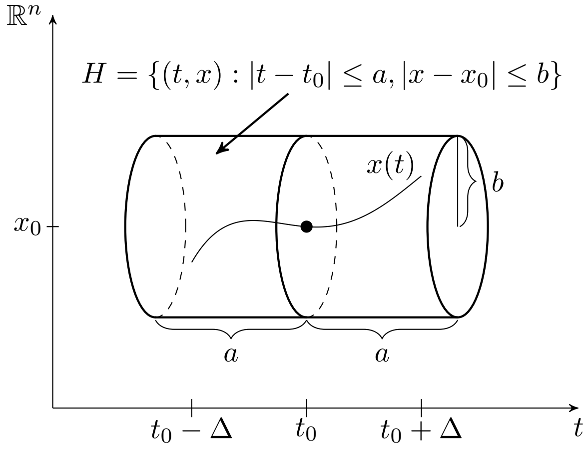
4.2. Tétel (Picard–Lindelöf)**.** *Legyen $f\colon H \to \mathbb{R}^p$ folytonos függvény, ahol*

$$H = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p : |t - t_0| \leq a \text{ és } |x - x_0| \leq b\}$$

henger (lásd a 4.1. ábrát), $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ és $0 < a < \infty$, $0 < b < \infty$. Legyen $M = \max\limits_{(t,x)\in H} |f(t, x)|$, továbbá tegyük fel, hogy az f függvény második *változójában kielégíti a Lipschitz-féle feltételt. Ekkor az*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)),$$
$$x(t_0) = x_0$$

kezdetiérték-problémának egyértelműen létezik megoldása a $[t_0 - \Delta, t_0 + \Delta]$ *intervallumon, ahol* $\Delta = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$.



4.1. ábra. A Picard–Lindelöf-tétel

4.3. *Megjegyzés.* A tételt szokás Cauchy-Lipschitz-féle egzisztenciatételnek nevezni, lásd a 2.3. szakaszt.

4.2. Unicitás

Az unicitás bizonyításához a Gronwall-lemmát használjuk, amelyre később a Peano-féle egzisztenciatétel bizonyítása során is szükségünk lesz.

4.4. Lemma (Gronwall)**.** *Legyenek* $u, v\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *folytonos függvények,* $u(t), v(t) \geq 0 \ \ (t \in [a, b]), 0 \leq k \in \mathbb{R}$. *Ha*

$$u(t) \leq k + \int_a^t v(s)u(s)\,\mathrm{d}s \qquad (a \leq t \leq b), \tag{4.1}$$

akkor

$$u(t) \leq k \cdot \exp \int_a^s v(s)\,\mathrm{d}s \qquad (a \leq t \leq b).$$

Bizonyítás. Feltehető, hogy

$$k + \int_a^t v(s)u(s)\,\mathrm{d}s > 0,$$

hiszen különben $u = 0$. Mivel

$$v(t) \geq 0,$$

ezért a (4.1) egyenlőtlenséget v-vel szorozva és integrálva kapjuk, hogy

$$\int_a^t \frac{u(s)v(s)}{k + \int_a^s u(r)v(r)\,\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}s \leq \int_a^t v(s)\,\mathrm{d}s.$$

A bal oldalon levő integrál mögött a számláló a nevező differenciálhányadosa, így a Newton–Leibniz-formula következtében

$$\ln\left[k + \int_a^t u(s)v(s)\,\mathrm{d}s\right] \leq \ln k + \int_a^t v(s)\,\mathrm{d}s.$$

Ebből az e^x függvény monotonitása miatt és a (4.1) egyenletet felhasználva kapjuk, hogy

$$u(t) \leq k + \int_a^t u(s)v(s)\,\mathrm{d}s \leq k \cdot \exp \int_a^t v(s)\,\mathrm{d}s,$$

amit bizonyítani akartunk. □

A Gronwall-lemma Thomas Hakon Gronwall (1877–1932) svéd matematikusról kapta nevét, de valójában már Peano is használta az egzisztenciatételének bizonyításában. A Gronwall-lemma következménye az alábbi tétel.

4.5. Tétel. *Tegyük fel, hogy $f\colon H \to \mathbb{R}$ folytonos, második változójában Lipschitz-tulajdonságú az L konstanssal, ahol H a 4.2. Tételben definiált henger. Legyen $x(t)$ az $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$ kezdetiérték-feldat egy megoldása, valamint $y(t)$ az $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$ kezdetiérték-feladat egy megoldása, ahol $(t_0, y_0) \in H$. Ekkor a megoldások különbségére az alábbi becslés teljesül:*

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0|\, e^{L(t-t_0)}.$$

Bizonyítás. Az $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$ kezdetiérték-feladat folytonos f mellett a Newton–Leibniz tétel következtében ekvivalens az alábbi integrálegyenlettel:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))\,\mathrm{d}s.$$

Hasonló módon $y(t)$-re kapjuk az

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s$$

egyenletet. Ekkor a Lipschitz-feltétel alapján a következő becslést kapjuk:

$$0 \leq |x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| + \int_{t_0}^{t} L \cdot |x(s) - y(s)|\,\mathrm{d}s.$$

A Gronwall-lemmát a $k = |x_0 - y_0|$, $u(t) = |x(t) - y(t)|$ és $v(s) = L$ szereposztással alkalmazva kapjuk, hogy

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0|\, e^{L(t-t_0)}.$$

$\square$

A 4.5. Tételből könnyen adódik a 4.2. Tétel unicitásának bizonyítása, ha tekintjük az $x(t)$ és $y(t)$ megoldásokat ugyanazon $x(t_0) = x_0 = y(t_0)$ kezdeti feltétel mellett.

4.6. *Megjegyzés.* A 4.5. Tétel valójában azt is kifejezi, hogy a kezdetiérték-feladat megoldása folytonosan függ a kezdeti értéktől. Ez azt jelenti, hogy ha két kezdeti feltétel közel van egymáshoz, akkor az azokból induló megoldások sem térnek el „nagyon” egymástól.

4.3. Egzisztencia a Banach-féle fixponttétellel

Bizonyítás. A bizonyítás lényege a következő: egy kezdetiérték-feladat ekvivalens egy integrálegyenlettel, így az egyszerűbben kezelhető integrálegyenletet fogjuk vizsgálni. Ezt fixpontegyenletként tekintve a Banach-féle fixponttétel segítségével belátjuk, hogy létezik fixpont, így a kezdetiérték-feladatnak létezik megoldása. Elég azt belátni, hogy a megoldás létezik a $[t_0, t_0+\Delta]$ intervallumon. A $[t_0 - \Delta, t_0]$ intervallumon hasonlóan adódik a megoldás létezése, és mivel a 2.2. Megjegyzés alapján a megoldások folytonosan differenciálhatóak, így azok csatlakoznak folytonosan differenciálható módon.

0. lépés.

Az $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$ kezdetiérték-feladat folytonos f függvény esetén a Newton–Leibniz-tétel miatt ekvivalens az alábbi integrálegyenlettel:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s.$$

Sőt, a fenti integrálegyenletnek elég folytonos megoldását keresnünk, hiszen az automatikusan folytonosan differenciálható lesz a Newton–Leibniz-tétel alapján. Legyen F az a leképezés, amely az x függvényhez a következő függvényt rendeli hozzá:

$$(F(x))(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s.$$

Tekintsük az $x = F(x)$ fixpontegyenletet, ez a fenti integrálegyenlettel ekvivalens. Megmutatjuk, hogy egyértelműen létezik fixpont, ez a Banach-féle fixponttételből fog következni.

1. lépés.

Legyen $\Delta \le a$, $\Delta \le \frac{b}{M}$ és definiáljuk a

$$\mu = \big\{x \in C([t_0, t_0 + \Delta], \mathbb{R}^n) : |x(t) - x_0| \le b \quad (t \in [t_0, t_0 + \Delta])\big\} \tag{4.2}$$

teret, mely teljes metrikus tér a 3.6. Példa alapján. A Banach-féle fixponttétel feltételeit ellenőrizzük az F leképezésre.

4.7. Állítás. *Az $F: \mu \to \mu$ leképezés kontrakció.*

Bizonyítás. Először azt kell belátnunk, hogy F valóban $\mu \to \mu$, azaz ha $x \in \mu$, akkor $F(x) \in \mu$ teljesül. Más szóval az $F(x)$ függvény grafikonja nem lép ki a H hengerből, ami azt jelenti, hogy $t \in [t_0, t_0 + \Delta]$ esetén

$$|(F(x))(t) - x_0| \le b$$

teljesül. Mivel

$$|(F(x))(t) - x_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s\right| \le \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s))|\,\mathrm{d}s,$$

és $|f(s, x(s))| \le M$, ezért $\Delta \le \frac{b}{M}$ esetén

$$\int_{t_0}^{t} |f(s, x(s))|\,\mathrm{d}s \le \int_{t_0}^{t} M\,\mathrm{d}s \le \Delta \cdot M \le b.$$

Ezután megmutatjuk, hogy létezik $0 \le q < 1$, melyre minden $x, \widetilde{x} \in \mu$ esetén teljesül a

$$d(F(x), F(\widetilde{x})) \le q\, d(x, \widetilde{x})$$

egyenlőtlenség, ahol d a d_∞ metrikát jelenti μ-ben. Nyilván

$$\begin{aligned} d(F(x), F(\widetilde{x})) &= \max_{t \in [t_0, t_0+\Delta]} \left| x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s - \Big(x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \widetilde{x}(s))\,\mathrm{d}s\Big)\right| \\ &\le \max_{t \in [t_0, t_0+\Delta]} \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s)) - f(s, \widetilde{x}(s))|\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

A Lipschitz-féle feltétel teljesülése miatt

$$\max_{t\in[t_0,t_0+\Delta]} \int_{t_0}^{t} |f(s,x(s)) - f(s,\widetilde{x}(s))|\;\mathrm{d}s \le \max_{t\in[t_0,t_0+\Delta]} \int_{t_0}^{t} L\cdot|x(s)-\widetilde{x}(s)|\;\mathrm{d}s \le$$
$$\le \int_{t_0}^{t_0+\Delta} L\cdot \max_{t_0\le s\le t_0+\Delta} |x(s)-\widetilde{x}(s)|\;\mathrm{d}s = L\cdot\Delta\cdot d(x,\widetilde{x}).$$

Vagyis azt kaptuk, hogy

$$d(F(x),F(\widetilde{x})) \le L\cdot\Delta\cdot d(x,\widetilde{x}).$$

Ha tehát $L\cdot\Delta = q < 1$, akkor készen vagyunk. □

Ezek alapján tehát $\Delta = \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{q}{L}\right\}$ esetén $F\colon \mu\to\mu$ kontrakció, így létezik megoldása az integrálegyenletnek. Azonban a $\frac{q}{L}$ hányadost szeretnénk kiküszöbölni. Ezt az alábbi módon tesszük.

2. lépés.

Finomítjuk a fenti módszert, a d_∞ metrika helyett, Adam Bielecki (1910–2003) lengyel matematikus 1956-os cikke nyomán, súlyozott metrikát vezetünk be. Jelölje

$$\hat{d}(x,\widetilde{x}) = \max_{t_0\le t\le t_0+\Delta}\left\{e^{-L(t-t_0)}\,|x(t)-\widetilde{x}(t)|\,\right\}$$

a súlyozott metrikát (amelyről később látjuk be, hogy valóban metrika). Ha $x,\widetilde{x}\in\mu$, akkor vizsgáljuk a

$$\hat{d}(F(x),F(\widetilde{x})) = \max_{t_0\le t\le t_0+\Delta}\left\{e^{-L(t-t_0)}\,|(F(x))(t)-(F(\widetilde{x}))(t)|\,\right\}$$

kifejezést. Ekkor tudjuk, hogy

$$|(F(x))(t)-(F(\widetilde{x}))(t)| = \left|x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,\mathrm{d}s - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s,\widetilde{x}(s))\,\mathrm{d}s\right| =$$
$$= \left|\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,\mathrm{d}s - \int_{t_0}^{t} f(s,\widetilde{x}(s))\,\mathrm{d}s\right|.$$

A Lipschitz-féle feltétel miatt

$$\left|\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,\mathrm{d}s - \int_{t_0}^{t} f(s,\widetilde{x}(s))\,\mathrm{d}s\right| \le L\cdot\int_{t_0}^{t} |x(s)-\widetilde{x}(s)|\;\mathrm{d}s.$$

Mivel $e^{-L(s-t_0)}\cdot e^{L(s-t_0)} = 1$, így a fenti kifejezést bővítve kapjuk, hogy

$$L\cdot\int_{t_0}^{t} |x(s)-\widetilde{x}(s)|\;\mathrm{d}s = L\cdot\int_{t_0}^{t} |x(s)-\widetilde{x}(s)|\cdot e^{-L(s-t_0)}\cdot e^{L(s-t_0)}\,\mathrm{d}s \le$$
$$\le L\cdot\int_{t_0}^{t} e^{L(s-t_0)}\cdot\hat{d}(x,\widetilde{x})\,\mathrm{d}s.$$

Ebből a súlyozott metrikára a következő becslést végezhetjük el:

$$\begin{aligned}
&\max_{t_0 \le t \le t_0+\Delta} \left\{ e^{-L(t-t_0)} \left| (F(x))(t) - (F(\widetilde{x}))(t) \right| \right\} \le \\
&\le \max_{t_0 \le t \le t_0+\Delta} \left\{ L \cdot \int_{t_0}^{t} e^{L(s-t)}\, \mathrm{d}s \cdot \hat{d}(x,\widetilde{x}) \right\} = \\
&= \max_{t_0 \le t \le t_0+\Delta} \left[e^{-L(t-s)} \right]_{s=t_0}^{t} \cdot \hat{d}(x,\widetilde{x}) = \\
&= \max_{t_0 \le t \le t_0+\Delta} \left(1 - e^{-L(t-t_0)} \right) \cdot \hat{d}(x,\widetilde{x}) \le \left(1 - e^{-L\Delta} \right) \hat{d}(x,\widetilde{x}),
\end{aligned}$$

ahol $1 - e^{-L\Delta} < 1$ a kontrakciós konstans, így az 1. lépésbeli $L \cdot \Delta < 1$ feltételekre már nincs szükségünk, tehát $\Delta = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$ vehető. A fenti bizonyítás akkor lesz teljes, ha belátjuk, hogy a súlyozott metrika kielégíti a metrika axiómáit.

4.8. Állítás. *A fentiekben bevezetett súlyozott metrika valóban metrika.*

Bizonyítás. A súlyozott metrikára a három szokásos feltételt kell megvizsgálnunk.

(i) A $\hat{d}(x,\widetilde{x}) \ge 0$ feltétel minden $(x,\widetilde{x})$ esetén teljesül, mivel nyilvánvalóan $|x(t) - \widetilde{x}(t)| \ge 0$ minden $(x,\widetilde{x})$ esetén, és $e^{-L(t-t_0)} > 0$, így a súlyozott metrika mindig nemnegatív.

(ii) A $\hat{d}(x,\widetilde{x}) = 0 \Leftrightarrow x = \widetilde{x}$ feltétel is teljesül, mivel $e^{-L(t-t_0)} > 0$, így a második $|x(t) - \widetilde{x}(t)|$ tagnak kell azonosan nullának lennie, ez pedig akkor és csak akkor teljesül, ha $x = \widetilde{x}$.

(iii) A $\hat{d}(x,z) \le \hat{d}(x,y) + \hat{d}(y,z)$ feltétel az alábbi módon látható be. Ha háromszög-egyenlőtlenséget írunk fel az $|x(t) - z(t)|$ tagra és kihasználjuk, hogy $\max(f+g) \le \max f + \max g$, akkor a következő becslést kapjuk:

$$\begin{aligned}
&\max\left\{ e^{-L(t-t_0)} |x(t) - z(t)| \right\} \le \\
&\le \max\left\{ e^{-L(t-t_0)} |x(t) - y(t)| + e^{-L(t-t_0)} |y(t) - z(t)| \right\} \le \\
&\le \max\left\{ e^{-L(t-t_0)} |x(t) - z(t)| \right\} + \max\left\{ e^{-L(t-t_0)} |y(t) - z(t)| \right\},
\end{aligned}$$

ami éppen a kívánt egyenlőtlenség. □

Ezzel az utolsó lépéssel a Picard–Lindelöf-féle egzisztenciatétel bizonyítása már teljes. □

4.9. *Megjegyzés.* Ebben a bizonyításban valójában az egyértelműség is kijött, hiszen a Banach-féle fixponttételből az is következik.

4.4. Egzisztencia a szukcesszív approximációval

Ebben a részben a Banach-féle fixponttétel bizonyítását ismételjük meg és alkalmazzuk a kezdetiérték-feladat megoldására.

Bizonyítás. Legyen

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x_0, \\ x_1(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_0(s))\,\mathrm{d}s, \\ x_2(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_1(s))\,\mathrm{d}s, \\ &\vdots \\ x_{k+1}(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s))\,\mathrm{d}s, \\ &\vdots \end{aligned}$$

A fenti iterációt szokás szukcesszív approximáció módszerének vagy Picard-iterációnak is nevezni. Ahhoz, hogy x_{k+1}-et képezhessük, be kell látnunk, hogy az x_k függvény grafikonja nem lép ki a H hengerből. Azonban ennek bizonyítása teljesen hasonlóan történik, mint a 4.7. Állítás bizonyításának első felében, és az is hasonlóan adódik, hogy az (x_k) sorozat a μ térben van, ahol μ-t a (4.2) összefüggéssel definiáltuk.

Igazoljuk, hogy ez az (x_k) sorozat egyenletesen Cauchy-tulajdonságú, sőt (Lindelöf nyomán) teljes indukcióval belátjuk, hogy

$$|x_k(t) - x_{k-1}(t)| \le \frac{M}{L} \frac{(L(t-t_0))^k}{k!}.$$

Nyilván

$$|x_1(t) - x_0(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, x_0(s))\,\mathrm{d}s \right| \le M\,|t - t_0|\,.$$

Tegyük fel, hogy k-ig igaz, bizonyítsuk $k+1$-re:

$$\begin{aligned} |x_{k+1}(t) - x_k(t)| &\le \int_{t_0}^{t} |f(s, x_k(s)) - f(s, x_{k-1}(s))|\,\mathrm{d}s \le \\ &\le \int_{t_0}^{t} \frac{M}{L} \frac{(L(s-t_0))^k}{k!}\,\mathrm{d}s = \frac{M}{L} \frac{(L(t-t_0))^{k+1}}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

Ekkor (x_k) Cauchy-tulajdonságú, ugyanis

$$|x_{k+l}(t) - x_k(t)| \le \sum_{i=k+1}^{k+l} \frac{M}{L} \frac{(L(t-t_0))^i}{i!} \le \sum_{i=k+1}^{k+l} \frac{M}{L} \frac{(L\Delta)^i}{i!},$$

és a $\sum_{i=k+1}^{k+l} \frac{M}{L}\frac{(L\Delta)^i}{i!}$ kifejezés 0-hoz tart $k \to \infty$ esetén, hiszen ez az $\frac{M}{L}e^{\Delta L}$ sorfejtésének a maradékösszege. A $C([t_0, t_0 + \Delta], \mathbb{R}^p)$ tér teljessége és (x_k) Cauchy-tulajdonsága miatt (x_k) egyenletesen is konvergens, azaz (x_k) egyenletesen tart egy $x^* \in C([t_0, t_0 + \Delta], \mathbb{R}^p)$ függvényhez (sőt, $x^* \in \mu$). Mivel

$$x_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s))\,\mathrm{d}s,$$

ezért elvégezve a határátmenetet, az egyenletes konvergencia miatt kapjuk, hogy

$$x^*(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x^*(s))\,\mathrm{d}s,$$

hiszen

$$\begin{aligned}\left|\int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s))\,\mathrm{d}s - \int_{t_0}^{t} f(s, x^*(s))\,\mathrm{d}s\right| &\le \int_{t_0}^{t} L\,|x_k(s) - x^*(s)|\,\mathrm{d}s \le \\ &\le \Delta d(x_k, x^*) \xrightarrow{k\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Az x^* függvény tehát megoldása az integrálegyenletnek és így a kezdetiérték-feladatnak is.

□

4.5. Alkalmazás

Tekintsük a nagyon egyszerű

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x,\\ x(0) &= 1\end{aligned}$$

kezdetiérték-problémát. Mint tudjuk, ennek egyetlen megoldása $x(t) = e^t$. Alkalmazzuk most a szukcesszív approximáció módszerét:

$$\begin{aligned}x_0(t) &= 1,\\ x_1(t) &= 1 + \int_0^t \mathrm{d}s = 1 + t,\\ x_2(t) &= 1 + \int_0^t (1+s)\,\mathrm{d}s = 1 + t + \frac{t^2}{2},\\ &\vdots\\ x_{k+1}(t) &= 1 + \int_0^t \left(1 + s + \ldots + \frac{s^k}{k!}\right)\mathrm{d}s = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \ldots + \frac{t^{k+1}}{(k+1)!},\\ &\vdots\end{aligned}$$

Megkaptuk tehát az általunk ismert $x(t) = e^t$ megoldást hatványsor alakban és tudjuk, hogy $x_k(t)$ egyenletesen tart az $x(t)$ megoldáshoz tetszőleges korlátos intervallumon.

5. fejezet

Peano-féle egzisztenciatétel

Ebben a részben először bevezetjük az Euler-féle töröttvonal fogalmát, amely szemléletesen érintők sorozata. Ennek segítségével egy újabb közelítő eljárást adunk az egyértelmű megoldás kiszámítására. Ezt egy példa segítségével is szemléltetjük. Végül megismerkedünk a Peano-féle egzisztenciatétellel és bizonyításával.

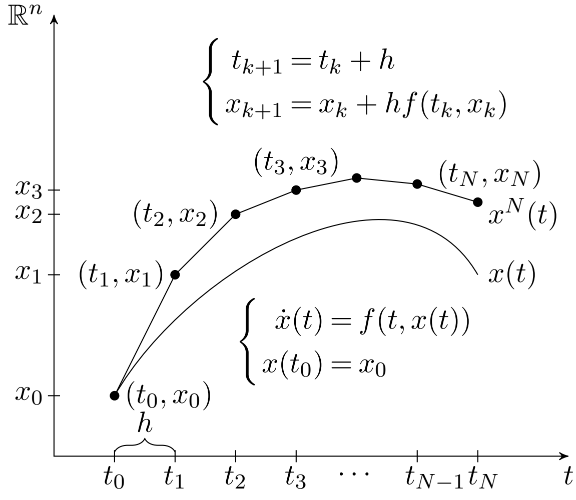
5.1. Euler-féle töröttvonal

A szukcesszív approximáció lehetőséget ad a megoldás közelítésére, most erre egy másik eljárást mutatunk be, mely az Euler-féle töröttvonalból fejlődött ki. Adott $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$ kezdetiérték-probléma éppen azt jelenti, hogy az $x(t)$ megoldás grafikonjának ismerjük a meredekségét a t pontban. Ez motiválja a következő definíciót.

5.1. Definíció. Legyen $h > 0$ adott, és tekintsük az $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$ kezdetiérték-feladatot. Definiáljuk a $(t_k, x_k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ $(k = 0, \ldots, N)$ pontokat a következőképpen:

$$\begin{aligned} t_k &= t_{k-1} + h, \\ x_k &= x_{k-1} + hf(t_{k-1}, x_{k-1}). \end{aligned}$$

Ekkor a fenti kezdetiérték-feladathoz tartozó h lépésköző *Euler-féle töröttvonalon* azt az $x_N \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ függvényt értjük, amelynek grafikonja a (t_k, x_k) pontokat összekötő töröttvonal, vagyis $t \in (t_k, t_{k+1})$ esetén $x^N(t) = x_k + (t - t_k)f(t_k, x_k)$. Természetesen $t < t_0$ esetén is hasonló módon képezhetjük a töröttvonalat. Valójában amikor a töröttvonalról beszélünk, gondolhatunk az x^N függvényre, de annak grafikonjára is.



5.1. ábra. Az Euler-féle töröttvonal

Szemléletesen az Euler-féle töröttvonal (grafikonja) nem más, mint az $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, $x(t_k) = x_k$ kezdetiérték-feladatok megoldásainak érintőiből álló töröttvonal. Azt várjuk, hogy $h \to 0$ esetén a töröttvonal jól közelíti a (t_0, x_0) pontból induló megoldást, lásd az 5.1. ábrát.

5.2. Tétel. *Legyen $f\colon H \to \mathbb{R}^p$ folytonos függvény, ahol a H halmaz a Picard–Lindelöf-féle egzisztenciatételben definiált henger, vagyis*

$$H = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p : |t - t_0| \leq a \text{ és } |x - x_0| \leq b\},$$

ahol $0 < a < \infty$, $0 < b < \infty$ és $(t_0, x_0) \in H$. Tegyük fel, hogy f első és második változójában kielégíti a Lipschitz-féle feltételt, azaz létezik $L > 0$, melyre minden (t_1, p_1), $(t_2, p_2) \in H$ esetén

$$|f(t_1, p_1) - f(t_2, p_2)| \leq L(|t_1 - t_2| + |p_1 - p_2|).$$

Tekintsük az

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)), \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

kezdetiérték-feladatot és x^* megoldását valamilyen $[t_0 - \Delta, t_0 + \Delta]$ intervallumon, amely a Picard–Lindelöf-tétel miatt egyértelmű. Ekkor a kezdetiérték-feladathoz tartozó $h = \frac{\Delta}{N}$ lépésközű Euler-féle töröttvonalak $N \to \infty$ (azaz $h \to 0$) esetén egyenletesen konvergálnak az x^* megoldáshoz.

Bizonyítás. A bizonyítást elég a $[t_0, t_0+\Delta]$ intervallumon elvégezni, az állítás a $[t_0 - \Delta, t_0]$ intervallumon hasonlóan adódik. Legyen $h = \frac{\Delta}{N}$, és jelölje x^N az N-edik Euler-féle töröttvonalat. Belátjuk (lásd az 5.2. ábrát), hogy $t_k \leq \tau \leq t_{k+1}$ esetén

$$\left|x^N(\tau) - x^*(\tau)\right| \leq c \cdot h^2 + |x_k - x^*(t_k)| \cdot e^{L(\tau - t_k)}. \tag{5.1}$$

Speciálisan $\tau = t_{k+1}$ választással

$$H_{k+1} \leq c \cdot h^2 + e^{L \cdot h} \cdot H_k,$$

ahol

$$H_k = |x_k - x^*(t_k)| \quad (k = 0, \dots, N).$$

Az (5.1) egyenlőtlenségből majd következni fog, hogy az Euler-féle töröttvonalak konvergálnak a megoldáshoz.

Az (5.1) egyenlet bizonyításhoz vezessük be a következő jelölést. Jelölje általában $x(\tau, \tau_0, p_0)$ az $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, $x(\tau_0) = p_0$ kezdetiérték-feladat egyértelmű megoldását a τ pontban. A háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$\left|x^N(\tau) - x^*(\tau)\right| \leq \left|x^N(\tau) - x(\tau, t_k, x_k)\right| + |x(\tau, t_k, x_k) - x^*(\tau)|,$$

így elég belátni, hogy

$$\left|x^N(\tau) - x(\tau, t_k, x_k)\right| \leq c \cdot h^2 \tag{5.2}$$

és

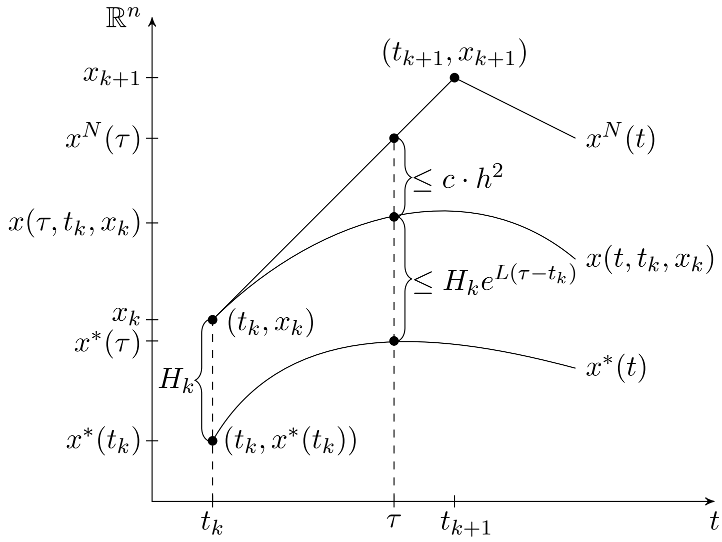
$$|x(\tau, t_k, x_k) - x^*(\tau)| \leq H_k \cdot e^{L(\tau - t_k)}. \tag{5.3}$$

Először az (5.3) egyenlőtlenséget látjuk be. Mivel x^* az $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, $x(t_k) = x^*(t_k)$ kezdetiérték-feladat megoldása, ezért a Gronwall-lemma szerint

$$\begin{aligned}|x(\tau, t_k, x_k) - x^*(\tau)| &= |x(\tau, t_k, x_k) - x(\tau, t_k, x^*(t_k))| \leq \\ &\leq |x_k - x^*(t_k)| \cdot e^{L \cdot (\tau - t_k)} = H_k \cdot e^{L \cdot (\tau - t_k)}.\end{aligned}$$

Ezután az (5.2) egyenlőtlenséget igazoljuk. Mivel $x(\tau, t_k, x_k)$ az $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, $x(t_k) = x_k$ kezdetiérték-feladat megoldásának τ-beli értéke, ezért

$$x(\tau, t_k, x_k) = x_k + \int_{t_k}^{\tau} f(s, x(s, t_k, x_k))\, \mathrm{d}s.$$



5.2. ábra. Az Euler-féle töröttvonal és a pontos megoldás

A töröttvonal definíciója miatt $\tau \in (t_k, t_{k+1})$ esetén

$$x^N(t) = x_k + (\tau - t_k) \cdot f(t_k, x_k),$$

így

$$\begin{aligned}
\left|x^N(\tau) - x(\tau, t_k, x_k)\right| &= |x_k + (\tau - t_k) \cdot f(t_k, x_k) - x(\tau, t_k, x_k)| = \\
&= \left| x_k + \int_{t_k}^{\tau} f(t_k, x_k) \,\mathrm{d}s - \left(x_k + \int_{t_k}^{\tau} f(s, x(s, t_k, x_k)) \,\mathrm{d}s \right) \right| \leq \\
&\leq \int_{t_k}^{\tau} (L \cdot |t_k - s| + L \cdot |x_k - x(s, t_k, x_k)|) \,\mathrm{d}s \leq \\
&\leq \int_{t_k}^{\tau} L \cdot h \,\mathrm{d}s + L \cdot \int_{t_k}^{\tau} |x(t_k, t_k, x_k) - x(s, t_k, x_k)| \,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

A Newton–Leibniz formulából következik, hogy

$$\int_{t_k}^{\tau} |x(t_k, t_k, x_k) - x(s, t_k, x_k)| \,\mathrm{d}s = \left| \int_{t_k}^{s} \dot{x}(\nu, t_k, x_k) \,\mathrm{d}\nu \right|,$$

ekkor

$$\begin{aligned}
&\int_{t_k}^{\tau} L \cdot h \,\mathrm{d}s + L \cdot \int_{t_k}^{\tau} |x(t_k, t_k, x_k) - x(s, t_k, x_k)| \,\mathrm{d}s = \\
&= L \cdot h^2 + L \cdot \int_{t_k}^{\tau} \left| \int_{t_k}^{s} f(\nu, x(\nu, t_k, x_k)) \,\mathrm{d}\nu \right| \mathrm{d}s \leq \\
&\leq L \cdot h^2 + M \cdot L \cdot h^2 = c \cdot h^2,
\end{aligned}$$

ahol $M = \max_{(t,x)\in H} |f(t,x)|$. Az (5.2) és az (5.3) egyenlőtlenségekből következik az (5.1) egyenlőtlenség, amelybe $\tau = t_{k+1}$-et helyettesítve kapjuk H_{k+1}-re az alábbi rekurzív egyenlőtlenséget:

$$H_{k+1} \leq c \cdot h^2 + e^{L\cdot h} \cdot H_k,$$

azaz $\widetilde{c} = c \cdot h^2$ és $B = e^{L\cdot h}$ bevezetésével

$$H_{k+1} \leq \widetilde{c} + B \cdot H_k.$$

Belátjuk, hogy $h \to 0$ esetén $\max_{k=0,\dots,N} H_k \to 0$. A (H_k) sorozat minden tagját felülről tudjuk becsülni a következő módon:

$$\begin{aligned}
&H_1 \leq \widetilde{c} + B \cdot H_0,\\
&H_2 \leq \widetilde{c} + B \cdot H_1 \leq \widetilde{c} + B \cdot \widetilde{c} + B^2 \cdot H_0,\\
&H_3 \leq \widetilde{c} + B \cdot H_2 \leq \widetilde{c} + B \cdot \widetilde{c} + B^2 \cdot \widetilde{c} + B^3 \cdot H_0.
\end{aligned}$$

Ebből indukcióval következik, hogy

$$H_k \leq \widetilde{c} \cdot (1 + B + \ldots + B^{k-1}) + B^k \cdot H_0.$$

A mértani sorozatra vonatkozó összegképlet alapján

$$1 + B + \ldots + B^{k-1} = \frac{B^k - 1}{B - 1},$$

ezért

$$H_k \leq c \cdot h^2 \cdot \frac{e^{L\cdot h\cdot k} - 1}{e^{L\cdot h} - 1} + 0.$$

Jól ismert, hogy $e^{L\cdot h} > L \cdot h + 1$ minden $h > 0$-ra teljesül, azaz

$$\frac{1}{e^{L\cdot h} - 1} < \frac{1}{L \cdot h}.$$

Ekkor a fenti egyenlőtlenséget kihasználva a következőt kapjuk H_k-ra:

$$H_k \leq c \cdot h \cdot \frac{1}{L} \cdot \left(e^{L\cdot h\cdot k} - 1\right) \leq c \cdot h \cdot \frac{1}{L} \cdot \left(e^{L\cdot\Delta} - 1\right).$$

A fentiekből következik, hogy rögzített hosszúságú $[t_0, t_0 + \Delta]$ intervallumon $\max H_k \to 0$, midőn $h \to 0$, azaz az Euler-féle töröttvonalak a töréspontokban konvergálnak a megoldáshoz.

Végül az alábbiakban igazoljuk, hogy két töréspont között pedig az Euler-féle töröttvonalak szintén konvergálnak a megoldáshoz. Korábban bebizonyítottuk, hogy $t_k \leq \tau \leq t_{k+1}$ esetén

$$\left|x^N(\tau) - x^*(\tau)\right| \leq c \cdot h^2 + H_k \cdot e^{L(\tau - t_k)},$$

ahol a becslés első tagja $h \to 0$ esetén nullához tart, míg a második kifejezés $(\tau - t_k) \leq h$ és $H_k \to 0$ miatt szintén nullához tart.

□

5.3. *Megjegyzés.* A $h = \frac{\Delta}{N}$ egyenletes felosztás helyett tetszőleges olyan felosztássorozatra igaz a tétel, amelynek finomsága (vagyis $\max_{k=1,\ldots,N} |t_k - t_{k-1}|$) nullához tart.

5.2. Alkalmazás

Tekintsük a már korábban említett

$$\dot{x} = x,$$
$$x(0) = 1$$

kezdetiérték-feladatot és keressük a megoldását a fentiekben tárgyalt Euler-féle töröttvonalak módszerével. Osszuk fel a $[0, a]$ intervallumot N egyenlő részre. Ekkor az első szakaszig

$$x^N(t) = 1 + t \quad \Big(0 \leq t \leq \frac{a}{N}\Big),$$

így

$$x^N\Big(\frac{a}{N}\Big) = 1 + \frac{a}{N}.$$

A második szakaszig a töröttvonal

$$x^N(t) = \Big(1 + \frac{a}{N}\Big) + \Big(1 + \frac{a}{N}\Big)\Big(t - \frac{a}{N}\Big) \quad \Big(\frac{a}{N} \leq t \leq \frac{2a}{N}\Big),$$

így

$$x^N\Big(\frac{2a}{N}\Big) = \Big(1 + \frac{a}{N}\Big)^2.$$

Általánosan a k-adik szakaszon a töröttvonal

$$x^N(t) = \Big(1 + \frac{a}{N}\Big)^{k-1} + \Big(1 + \frac{a}{N}\Big)^{k-1}\Big(t - \frac{(k-1)a}{N}\Big),$$

amikor is

$$\frac{(k-1)a}{N} \leq t \leq \frac{ka}{N},$$

így

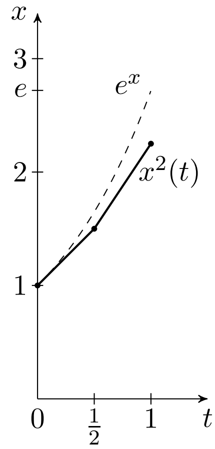
$$x^N\Big(\frac{ka}{N}\Big) = \Big(1 + \frac{a}{N}\Big)^k.$$

N	$(1+\frac{1}{N})^N$	$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{N!}$
1	2.000	2.0
2	2.250	2.5
3	2.370	2.66
4	2.441	2.708
5	2.488	2.7166
6	2.522	2.71805
7	2.546	2.718253
8	2.566	2.7182787
9	2.581	2.71828152
10	2.594	2.718281801
11	2.604	2.7182818261
12	2.613	2.71828182828
13	2.621	2.718281828446
14	2.627	2.7182818284582
15	2.633	2.71828182845899
16	2.638	2.718281828459042
17	2.642	2.7182818284590450
18	2.646	2.71828182845904509
19	2.650	2.718281828459045226
20	2.653	2.7182818284590452349

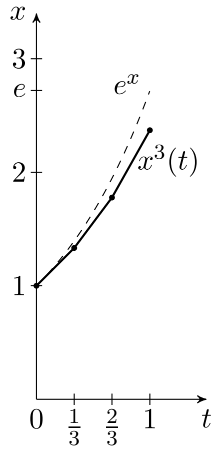
5.1. táblázat. Az e közelítése

Következésképpen
$$x^N(a) = \left(1+\frac{a}{N}\right)^N.$$
Az $N\to\infty$ határátmenettel kapjuk, hogy
$$\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{a}{N}\right)^N = e^a,$$
és valóban a kezdetiérték-feladat megoldása e^t, amelynek értéke a-ban e^a. A fenti módszer három lépését szemléltetik az 5.3–5.5. ábrák.

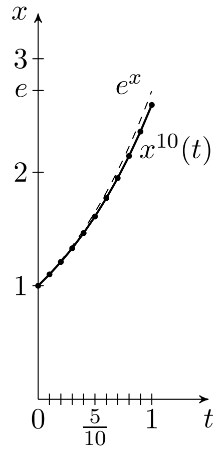
Az Euler-féle töröttvonal és a szukcesszív aprroximáció néhány lépését láthatjuk az e kiszámítására az 5.1. táblázatban. Látható, hogy a szukcesszív approximáció módszere sokkal gyorsabb, azonban általában a gyakorlatban mégsem ezt használjuk.



5.3. ábra. $N = 2$



5.4. ábra. $N = 3$



5.5. ábra. $N = 10$

5.3. Peano-féle egzisztenciatétel

A Peano-féle egzisztenciatétel csak az f jobb oldali függvény folytonosságát teszi fel, amely gyengébb, mint a Picard–Lindelöf-féle egzisztenciatétel folytonos differenciálhatósági feltétele, így csupán egzisztenciát állít.

5.4. Tétel (Peano)**.** *Legyen* $f\colon H \to \mathbb{R}$ *folytonos függvény, ahol* $(x_0, t_0) \in H$ *és* H *a Picard–Lindelöf-féle egzisztenciatételben definiált henger, azaz*

$$H = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p : |t - t_0| \le a \text{ és } |x - x_0| \le b\},$$

ahol $0 < a < \infty$*,* $0 < b < \infty$*. Ekkor az* $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$*,* $x(t_0) = x_0$ *kezdetiérték-problémának létezik megoldása a* $[t_0 - \Delta, t_0 + \Delta]$ *intervallumon, ahol* $\Delta = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$.

Bizonyítás. A bizonyítás során az Euler-féle töröttvonalakból az Arzelà–Ascoli-lemma segítségével kiválasztunk egyenletesen konvergens részsorozatot. Ezután bebizonyítjuk, hogy a határérték megoldása a kezdetiérték-feladatnak. Ismét elegendő a $[t_0, t_0 + \Delta]$ intervallumot vizsgálni.

1. lépés.

Legyen $h = \frac{\Delta}{N}$ és jelölje x^N az N-edik Euler-féle töröttvonalat (néha a függvényre, néha a függvény grafikonjára gondolunk), vagyis

$$\begin{aligned} x_0^N &= x_0, \\ t_0^N &= t_0, \\ t_k^N &= t_0 + k \cdot \frac{\Delta}{N}, \\ x_k^N &= x_{k-1}^N + \frac{\Delta}{N} \cdot f(t_{k-1}^N, x_{k-1}^N), \end{aligned}$$

ahol $k = 1, 2, \ldots$. Az első lépésben belátjuk, hogy az $\mathrm{graph}(x^N)$ töröttvonal nem lép ki a H hengerből, ez az Arzelà–Ascoli-lemma feltételeiben szereplő korlátosságot biztosítja. Legyen $M = \max_{(t,x)\in H} |f(t,x)|$, amely az x^N függvények közös Lipschitz-konstansa lesz. Ha létezik közös Lipschitz-konstans, akkor a függvényosztály egyenlő mértékben egyenletesen folytonos (lásd a 3.20. Megjegyzést), amely az Arzelà–Ascoli-lemma második fontos feltétele.

5.5. Állítás.

(i) a $\mathrm{graph}(x^N)$ *töröttvonal* H*-ban fut,*

(ii) x^N *Lipschitz-tulajdonságú az* M *konstanssal.*

Bizonyítás.

(i) A H henger konvexitása folytán elég bebizonyítani, hogy a csúcspontok benne vannak H-ban. Először nézzük a vízszintes koordinátát: Δ választása miatt a $t_k^N = t_0 + k \cdot \frac{\Delta}{N}$ képlettel definiált pontok kielégítik a $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$ feltételt. Ezután nézzük a függőleges koordinátát! Mivel

$$x_k^N = x_{k-1}^N + \frac{\Delta}{N} f(t_{k-1}^N, x_{k-1}^N),$$

ezért

$$\left| x_k^N - x_{k-1}^N \right| = \left| \frac{\Delta}{N} f(t_{k-1}^N, x_{k-1}^N) \right| \le \frac{\Delta}{N} \cdot M.$$

A fenti egyenletet összegezve $k = 1$-től l-ig és felhasználva a háromszög-egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$\left| x_l^N - x_0 \right| \le l \cdot \frac{\Delta}{N} \cdot M \le \Delta \cdot M \le \frac{b}{M} \cdot M = b,$$

ami éppen azt jelenti, hogy a töröttvonal semelyik csúcspontja nem lép ki a hengerből.

(ii) Nézzük szakaszonként a töröttvonalat! Legyen t tetszőleges, melyre teljesül, hogy $t_k^N \leq t \leq t_{k+1}^N$. Ekkor $x^N(t) = x_k^N + (t - t_k^N) \cdot f(t_k^N, x_k^N)$. Lineáris függvényeknél a meredekség a Lipschitz konstans, ami jelen esetben $\left|f(t_k^N, x_k^N)\right| \leq M$. A töröttvonal Lipschitz-konstansának az egyes szakaszok közül a legnagyobb meredekségűt vehetjük, amely mindig kisebb vagy egyenlő, mint M. □

2. lépés.

Az Arzelà–Ascoli-lemma miatt létezik az Euler-féle töröttvonalak (x^N) sorozatának konvergens részsorozata. Átindexelés, átsorszámozás után feltehető, hogy az (x^N) sorozat egyenletesen tart x^*-hoz, ahol

$$x^* \colon [t_0, t_0 + \Delta] \to \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq b\}.$$

Mivel a sorozat a zárt hengerben futott, így a határértéke, x^* is benne marad a hengerben.

3. lépés.

Belátjuk, hogy x^* kielégíti a kezdetiérték-feladatot. Ehhez az alábbi segédállítást igazoljuk.

5.6. Lemma. *Minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $N(\varepsilon)$ küszöbindex, hogy minden $N \geq N(\varepsilon)$ és $t \in (t_k, t_{k+1})$ esetén*

$$\left|\dot{x}^N(t) - f(t, x^N(t))\right| \leq \varepsilon.$$

Bizonyítás. Világos, hogy $t \in (t_k, t_{k+1})$ esetén $\dot{x}^N(t) = f(t_k, x^N(t_k))$ a töröttvonal definíciója szerint. Ekkor a következőt elegendő bebizonyítanunk:

$$\left|f(t_k, x^N(t_k)) - f(t, x^N(t))\right| \leq \varepsilon.$$

Mivel $f \colon H \to \mathbb{R}$ egyenletesen folytonos (hiszen H korlátos és zárt), ezért adott $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy $|t_k - t| \leq \delta$ és $\left|x^N(t_k) - x^N(t)\right| \leq \delta$ esetén $\left|f(t_k, x^N(t_k)) - f(t, x^N(t))\right| \leq \varepsilon$ teljesül. Azonban, ha N elég nagy, akkor egyrészt $|t_k - t| \leq \frac{\Delta}{N} \leq \delta$, másrészt a Lipschitz-folytonosság miatt

$$\left|x^N(t_k) - x^N(t)\right| \leq M\,|t_k - t| \leq \delta.$$

□

Az 5.6. Lemmát a (t_k, t_{k+1}) intervallumon integrálva kapjuk, hogy

$$\left|x^N(t_{k+1}) - x^N(t_k) - \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, x^N(s))\,\mathrm{d}s\right| \leq \varepsilon\,|t_{k+1} - t_k|,$$

és hasonló módon

$$\left|x^N(t) - x^N(t_l) - \int_{t_l}^{t} f(s, x_k^N(s))\,\mathrm{d}s\right| \leq \varepsilon\,|t - t_l|\,,$$

ahol t_l a t-hez legközelebbi osztópont. Az előzőeket felhasználva

$$\begin{aligned}
&\left|x^N(t) - \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x^N(s))\,\mathrm{d}s\right)\right| \leq \\
&\leq \sum_{k=0}^{l} \left|x^N(t_{k+1}) - x^N(t_k) - \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, x^N(s))\,\mathrm{d}s\right| + \\
&\quad + \left|x^N(t) - x^N(t_l) - \int_{t_l}^{t} f(s, x^N(s))\,\mathrm{d}s\right| \leq \\
&\leq \sum_{k=0}^{l} \varepsilon\,|t_{k+1} - t_k| + \varepsilon\,|t - t_l| = \varepsilon\,|t - t_0|
\end{aligned}$$

adódik. Az előzőeket felhasználva végül kapjuk, hogy

$$\left|x^N(t) - \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x^N(s))\,\mathrm{d}s\right)\right| \leq \varepsilon\,|t - t_0|\,.$$

Minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $N(\varepsilon)$ küszöbszám, hogy $N \geq N(\varepsilon)$ esetén a fenti egyenlőtlenség teljesül. Következésképpen $N \to \infty$ esetén

$$\left|x^*(t) - \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x^*(s))\,\mathrm{d}s\right)\right| \leq 0.$$

Valóban mivel $x^N \to x^*$ egyenletesen és f egyenletesen folytonos H-n, ezért elég nagy N-re

$$\left|x^N(s) - x^*(s)\right| \leq \delta$$

minden $s \in [t_0, t_0+\Delta]$ esetén, ahol δ-t az f függvény egyenletes folytonossága alapján úgy választjuk, hogy

$$\left|f(s, x^N(s)) - f(s, x^*(s))\right| \leq \widetilde{\varepsilon},$$

ahol $\widetilde{\varepsilon} > 0$ adott. Integrálva a (t_0, t) intervallumon kapjuk, hogy tetszőleges $\widetilde{\varepsilon} > 0$ esetén minden elég nagy N-re

$$\left|\int_{t_0}^{t} f(s, x^N(s))\,\mathrm{d}s - \int_{t_0}^{t} f(s, x^*(s))\,\mathrm{d}s\right| \leq \Delta \cdot \widetilde{\varepsilon},$$

azaz beláttuk, hogy x^* megoldása az integrálegyenletnek, tehát a kezdetiérték-feladatnak is.

5.7. *Megjegyzés.* A Peano-tétel egy másik (ugyancsak az Arzelà–Ascoli-lemmát használó) bizonyítása olvasható a [9] könyvben. Felmerülhet a kérdés, hogy van-e elemi (az Arzelà–Ascoli-lemmára nem támaszkodó) bizonyítása a tételnek. A válasz igen, belátható, hogy egydimenzióban az Euler-féle törött-vonalak sorozatának $\limsup$-ját véve a kezdetiérték-feladat egy megoldását nyerjük.

A tételt Carathéodory általánosította integrálható f esetére (lásd az [1] könyvben). Ebben az esetben csak az integrálegyenletnek garantálható megoldása, amit szokás *általánosított megoldásnak* nevezni. Ha az általánosított megoldás folytonosan differenciálható, akkor visszanyerjük az eredeti megoldás fogalmát.

□

6. fejezet

Záró megjegyzések

A dolgozatban kezdetiérték-feladatok megoldásainak lokális létezésével és egyértelműségével (valamint a kezdeti értéktől való folytonos függéssel) foglalkoztunk, illetve két közelítő módszert adtunk a megoldások kiszámítására. Felmerül azonban a kérdés, hogy mit mondhatunk globális megoldás létezéséről és egyértelműségéről. Globális (más néven maximális vagy teljes) megoldáson a lehető legbővebb intervallumon értelmezett megoldást értjük (más szóval egy maximális megoldást nem terjeszthetünk ki egy nagyobb intervallumon értelmezett megoldássá). Globális megoldással kapcsolatban a következő eredmények ismeretesek. Amennyiben az f jobb oldali függvény második változójában lokális Lipschitz-tulajdonságú az értelmezési tartományán (vagyis az értelmezési tartomány bármely pontjának van olyan környezete, ahol f a második változójában Lipschitz-folytonos egy alkalmas Lipschitz-konstanssal), akkor egyértelműen létezik a kezdetiérték-feladatnak globális megoldása. Ráadásul ez a globális megoldás határtól határig terjed, azaz f értelmezési tartományának tetszőleges korlátos és zárt részhalmazát elhagyja. A pontos fogalmakat és tételeket illetően lásd az [5] és a [9] könyvek egyes fejezeteit.

Irodalomjegyzék

[1] Earl A. Coddington, Norman Levinson: *Theory of Ordinary Differential Equations*, TATA McGraw Hill, New Delhi, 1987.

[2] Garay Barnabás: *Közönséges differenciálegyenletek*, ELTE előadásjegyzet, 2001/2002. tavaszi félév.

[3] Hatvani László, Pintér Lajos: *Differenciálegyenletes modellek a középiskolában*, Polygon, Szeged, 1997.

[4] Horváth Zoltán: *Bevezetés a differenciálegyenletek megoldásába*, Széchenyi István Egyetem előadásjegyzet.
`http://rs1.sze.hu/~horvathz/Bevde/bevde.htm`

[5] Komornik Vilmos: *Valós analízis előadások I.*, TypoTEX, Budapest, 2003.

[6] Scharnitzky Viktor: *Differenciálegyenletek*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2003.

[7] Sikolya Eszter: *Analízis*, ELTE előadásjegyzet, 2009/2010. tavaszi félév és 2010/2011. őszi félév.
`http://bolyai.cs.elte.hu/~seszter/oktatas.html`

[8] Simon L. Péter: *Közönséges differenciálegyenletek*, ELTE előadásjegyzet, 2007.
`http://bolyai.cs.elte.hu/~simonp/teaching.htm`

[9] Simon Péter, Tóth János: *Differenciálegyenletek (Bevezetés az elméletbe és az alkalmazásokba)*, TypoTEX, Budapest, 2005.