Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Nevezetes determinánsok, nevezetes determinánstételek

Szakdolgozat

Készítette:
Józsa Mónika
Matematika BSc Tanár

Témavezető:
Ágoston István
egyetemi docens

Budapest, 2013

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A dolgozatom témája a nevezetes determinánsok, nevezetes determinánstételek. Nagyon sok érdekes determináns létezik, ilyen például a Hesse-determináns, Jacobi-determináns, Hadamard-determináns, stb. A determinánsok közül kettőt emeltem ki, és ezek köré szerveztem a munkámat.

A dolgozatomat három nagyobb egységre bontottam. Az első részben bevezetem a determináns fogalmát, tulajdonságait, és mutatok egy középiskolai alkalmazást.

A második részben főleg a rezultánssal foglalkozom, ennek a használatával, majd a rezultáns és a determináns kapcsolatával. Ebben a fejezetben két kidolgozott példa is szerepel, ami a könnyebb megértést segíti.

A Vandermonde-determináns az egyetemi tanulmányaim alatt már előfordult, ezért erre csak érintőlegesen térek ki. A harmadik fejezet a Vandermonde-determináns néhány alkalmazásairól szól, pontosabban a ciklikus determinánsról, az általánosított Vandermonde-determinánsról és a hiperfaktoriálisról.

1. fejezet

A determináns fogalma

1.1. Alapfogalmak

1.1.1. Definíció. Permutációnak nevezzük n különböző elemnek valamilyen sorrendjét. Egy n-elemű halmaz permutációinak számát P_n-nel jelöljük, ez a szám:

$$\mathrm{P}_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots 2 \cdot 1$$

A permutációkra gondolhatunk úgy is, mint speciális függvényre. Például az $\{1,2,\ldots,n\}$ halmaz permutációi a halmaz önmagára történő bijektív leképezései.

1.1.2. Definíció. Tekintsük az $1,2,\ldots,n$ elemek egy permutációját. Azt mondjuk, hogy két elem inverzióban áll, ha a két elem közül a nagyobbik elem megelőzi a kisebbik elemet. Az inverzióban álló elempárok számát a permutáció inverziószámának nevezzük. A σ permutáció inverziószámát $\mathrm{I}(\sigma)$-val jelöljük.

Példa. Tekintsük a következő permutációt: 256143. Ebben a permutációban a 2 és az 1, az 5 és az 1, az 5 és a 4, az 5 és a 3, a 6 és az 1, a 6 és a 4, a 6 és a 3, valamint a 4 és a 3 állnak inverzióban, vagyis $I(\sigma) = 8$.

1.1.3. Definíció. Egy permutáció páros, ha az inverziószáma páros, és páratlan, ha az inverziószáma páratlan.

Vagyis az előző példában szereplő 256143 permutáció páros.

1.1.4. Tétel. *I) Ha egy permutációban két szomszédos elemet felcserélünk, akkor az inverziószám 1-gyel változik (nő vagy csökken).*
II) Ha egy permutációban két tetszőleges elemet felcserélünk, akkor az inverziószám páratlannal változik.

1.1.5. Tétel. *Ha n>1, akkor n elemnek ugyanannyi páros és páratlan permutációja van.*

1.1.6. Definíció. Legyen T egy kommutatív test és k,n adott pozitív egészek. A T test feletti $k \times n$-es mátrixon egy olyan téglalap alakú táblázatot értünk, amelynek k sora és n oszlopa van, és elemei T-ből valók.

Példa. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ egy 2×3-as mátrix.

Egy $k \times n$-es mátrix általános alakja A= $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kn} \end{pmatrix}$

Azt mondjuk, hogy a fenti mátrix négyzetes, ha $k = n$. Ilyenkor az $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{nn}$ sorozatot az A főátlójának nevezzük.

1.1.7. Megjegyzés. Az A mátrix i-edik sorának j-edik elemét α_{ij}-vel jelöljük.

1.1.8. Definíció. Determinánsnak nevezünk egy négyzetes mátrixhoz rendelt számot. Ha egy A $n \times n$-es négyzetes mátrix elemei az α_{ij} számok, akkor az $A \in R^{n \times n}$ mátrix determinánsa a következő képlettel kapható meg:

$$\det A = \sum_{\sigma} (-1)^{I(\sigma)} \alpha_{1\sigma(1)} \alpha_{2\sigma(2)} \dots \alpha_{n\sigma(n)},$$

ahol σ végigfut az $1,2,\dots,n$ számok minden lehetséges permutációján, I(σ) pedig az inverziók számát jelenti.

A determináns másik szokásos jelölése: det A= $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$

1.1.9. Tétel. *Vegyünk egy n-tényezős szorzatot, ahol minden sorból és minden oszlopból egy elem szerepel. Ez a szorzat*

$$\alpha_{\rho(1)\pi(1)} \dots \alpha_{\rho(n)\pi(n)}$$

alakú, ahol ρ a sorindexeknek, π az oszlopindexeknek megfelelő permutáció. Ekkor ennek a tagnak az előjelét a determináns definíciójában a

$$(-1)^{I(\rho)+I(\pi)}$$

adja meg.

1.2. A determináns tulajdonságai

1.2.1. Tétel. *A determináns nem változik meg, ha elemeit tükrözzük a főátlóra, azaz ha i-edik sorát i-edik oszlopnak tesszük meg és fordítva. Tehát érvényes a következő azonosság:*
$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

1.2.2. Tétel. *Ha a főátló alatt vagy fölött minden elem 0, akkor a determináns a főátlóbeli elemek szorzata.*

1.2.3. Tétel. *Ha egy determináns két oszlopát felcseréljük, akkor a determináns értéke* (-1)*-gyel szorzódik. (Ugyanez érvényes két sor felcserélésére is.)*

1.2.4. Tétel. *Ha egy determinánsban két sor vagy két oszlop megegyezik, akkor a determináns értéke 0.*

1.2.5. Tétel. *Ha egy determináns valamelyik sorának vagy oszlopának mindegyik elemét megszorozzuk ugyanazzal a c számmal, akkor a determináns értéke is c-vel szorzódik.*

1.2.6. Tétel. *Ha egy determinánsnak egyik sorában vagy egyik oszlopában mindegyik elem 0, akkor a determináns értéke 0.*

1.2.7. Tétel. *Ha az* $A = \left|a_{ik}\right|$ *determináns i-edik sorában (illetve oszlopában) mindegyik elem kéttagú összeg, akkor A előállítható két olyan determináns összegeként, amelyek közül az egyik i-edik sorában (oszlopában) a kéttagú összegek első tagjai, míg másik i-edik sorában (oszlopában) a második tagok állnak, a két determináns többi sora (illetve oszlopa) pedig ugyanaz, mint az eredetié. Azaz*
$$\begin{vmatrix} \alpha'_{11} + \alpha''_{11} & \dots & \alpha'_{1n} + \alpha''_{1n} \\ \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha'_{11} & \dots & \alpha'_{1n} \\ \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha''_{11} & \dots & \alpha''_{1n} \\ \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

1.2.8. Megjegyzés. Az előző tétel megfordítása is igaz, vagyis: két olyan determináns összege, amelyek az i-edik sortól (oszloptól) eltekintve megegyeznek, előállítható egy olyan determináns alakjában, amelynek i-edik sorában (oszlopában) a két determináns i-edik sorának (oszlopának) összege áll, míg a többi sora (oszlopa) megegyezik a két összeadott determináns megfelelő sorával (oszlopával).

1.2.9. Tétel. *A determináns értéke nem változik, ha valamelyik sorához (oszlopához) hozzáadjuk egy másik sorának (oszlopának) c-szeresét, ahol c tetszőleges szám.*

A fenti tulajdonságok lehetővé teszik, hogy a determinánsokat gyorsan és hatékonyan kiszámolhassuk a Gauss-elimináció lépéseivel.

1.3. A determináns középiskolai alkalmazása

A középiskolában a determináns nem tananyag sem középszinten, sem emelt szinten, de a gazdasági informatikus okj-s képzésen előfordul az elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszerek megoldása során.
Nézzük meg, hogy miről is van szó.

Induljunk ki egy kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned} \tag{1}$$

általános alakjából.
Az x és y az ismeretleneket, az a_1, a_2, b_1, b_2 az ismeretlenek együtthatóit jelentik, a c_1 és c_2 ismertek, ezek az egyenletrendszer szabad tagjai.

Az (1) egyenletrendszert oldjuk meg az egyenlő együtthatók módszerével.
Az első egyenletet szorozzuk b_2-vel, a második egyenletet b_1-gyel, majd az első egyenletből vonjuk ki a másodikat.

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1$$

Ha $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, akkor eloszthatunk vele, és a következőt kapjuk:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \tag{2}$$

Hasonlóképpen megkapjuk az y értékét is:

$$y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_2b_1 - a_1b_2}, ha\ a_2b_1 - a_1b_2 \neq 0. \tag{3}$$

A (2) és (3) képletek megadják az (1) egyenletrendszer megoldását, de ezek a képletek nem jegyezhetőek meg könnyen.
Vezessünk be egy új jelölést a számlálóban és a nevezőben lévő különbségre:

$$c_1b_2 - c_2b_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$c_1a_2 - c_2a_1 = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$a_2b_1 - a_1b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

Ha a 2×2-es determinánsokat kiszámolnánk, akkor az egyenlet bal oldalán álló eredményt kapnánk.
Ezeknek a determinánsoknak a segítségével az (1) egyenletek megoldásait így írhatjuk fel:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}}$$

2. fejezet

A rezultáns

2.1. A rezultáns fogalma

Ebben a fejezetben két egyenlet közös gyökeinek problémájával foglalkozunk.

Az egyetemi tanulmányaink során megtanultuk, hogy két polinom közös gyökeit úgy kereshetjük meg, hogy meghatározzuk a kitüntetett közös osztójukat, amiből leolvashatóak a közös gyökök.

Tegyük fel, hogy a polinomok együtthatói egy paramétertől függenek, és arra vagyunk kíváncsiak, hogy mely paraméterértékek azok, amelyekre a két egyenletnek lesz közös gyöke. Az euklideszi algoritmussal nem kapnánk választ a kérdésünkre, ezért az a célunk, hogy olyan képletet írjunk fel a polinomok együtthatói segítségével, amelyből el tudjuk dönteni, hogy a polinomoknak van e közös gyöke.

Ezen képlet felírásához felhasználjuk a szimmetrikus polinomokat. A képlet felírása előtt ismételjük át, hogy mely polinomokat nevezünk szimmetrikus polinomoknak, és mit mond ki a szimmetrikus polinomok alaptétele.

2.1.1. Definíció. Azokat az $f \in R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ polinomokat nevezzük szimmetrikus polinomoknak, amelyek az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ határozatlanok tetszőleges permutációja esetén is ugyanazok maradnak.

2.1.2. Megjegyzés. Az R kommutatív, egységelemes és nullosztómentes gyűrű. A későbbiekben is ilyen gyűrűket tekintünk.

Fontos megemlíteni az elemi szimmetrikus kifejezések fogalmát, amelyek olyan egyszerű szimmetrikus polinomok, amelyek segítségével minden szimmetrikus polinomot ki lehet fejezni egyértelműen. Nézzük meg pontosan, hogy épülnek fel ezek az elemi szimmetrikus polinomok.

2.1.3. Definíció. Az $x_1, ..., x_n$ határozatlanú, k-adik elemi szimmetrikus polinom úgy keletkezik, hogy az $x_1, ..., x_n$ közül kiválasztunk k darabot az összes lehetséges módon, a kiválasztott elemeket összeszorozzuk, majd a szorzatokat összeadjuk.
Az $s_k(x_1, ..., x_n)$ jelölést használjuk, ahol $1 \leq k \leq n$. Nézzük a polinomokat:

$$\begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \\ s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n \\ \vdots \\ s_n = x_1x_2 \ldots x_n \end{cases} \tag{4}$$

Ezeknek a szimmetrikus kifejezéseknek az értéke a (4) és a gyökök és együtthatók közötti összefüggések szerint a következő:

$$s_1 = -\frac{a_1}{a_0},\ s_2 = \frac{a_2}{a_0},\ s_3 = -\frac{a_3}{a_0},\ \ldots,\ s_n = (-1)^n\frac{a_n}{a_0} \tag{5}$$

Minden szimmetrikus polinom felírható elemi szimmetrikus kifejezések polinomjaként. A szimmetrikus polinomok alaptétele pont ezt mondja ki:

2.1.4. Tétel (Szimmetrikus polinomok alaptétele)**.** *Legyen R gyűrű. Ekkor minden $f \in R[x_1, \ldots, x_n]$ szimmetrikus polinom egyértelműen fölírható az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként. Ez azt jelenti, hogy létezik pontosan egy $F \in R[y_1, \ldots, y_n]$ polinom, melyre*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = F(s_1, \ldots, s_n).$$

A F együtthatói a f együtthatóiból összeadás és kivonás segítségével kaphatók.

Térjünk vissza két egyenlet közös gyökének problémájára. Induljunk ki az $f(x)$ és $g(x)$ tetszőleges polinomból, amelyek a következő alakúak:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = a_0(x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_n) = 0 \tag{6}$$
$$g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m = b_0(x - \beta_1) \ldots (x - \beta_m) = 0 \tag{7}$$

Mindkét polinom esetében feltesszük, hogy a főegyüttható nem nulla, vagyis $a_0 \neq 0$ és $b_0 \neq 0$. Az egyenlet gyökei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, illetve $\beta_1, \ldots, \beta_m$.

A (6) és a (7) egyenleteknek akkor és csak akkor van közös gyöke, ha a (6) polinom gyökeit a (7) polinomba behelyettesítve a kapott számok egyike nulla, azaz

$$g(\alpha_1) \cdot g(\alpha_2) \cdot \ldots \cdot g(\alpha_n) = 0. \tag{8}$$

A szimmetrikus polinomok alaptétele lehetővé teszi, hogy a (8) szorzatot a (6) egyenlet gyökei ismerete nélkül, csak a (6) és a (7) egyenlet együtthatóiból ki tudjuk számítani, hiszen a

$$g(x_1) \cdot g(x_2) \cdot \ldots \cdot g(x_n) \tag{9}$$

polinom szimmetrikus polinomja az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ határozatlanoknak, ezért az alaptétel szerint felírható (4) alakban elemi szimmetrikus kifejezések polinomjaként. Mivel a (9) szimmetrikus polinomban egyetlen x_k sem lép fel m-nél magasabb kitevővel, ezért csak olyan $s_1^{k_1} s_2^{k_2} \ldots s_n^{k_n}$ tagok léphetnek fel a (4)-nek az $s_1, s_2, \ldots, s_n$ előállításában, amelyekre teljesül, hogy a kitevők összege legfeljebb m. A (5) behelyettesítései után a (9)-ből tört kifejezés lesz, ezért a tört elkerülése érdekében célszerű a következő kifejezést tekinteni:

$$R(f, g) = a_0^m g(\alpha_1) \ldots g(\alpha_n) \tag{10}$$

Ezt nevezzük az $f(x)$ és $g(x)$ polinomok rezultánsának.

A $g(x)$ polinom a (7) alatti felbontását tekintve a következőképpen is felírható:

$$\begin{aligned} R(f, g) = a_0^m b_0(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \beta_2) \ldots (\alpha_1 - \beta_m) \cdot \\ \cdot b_0(\alpha_2 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2) \ldots (\alpha_2 - \beta_m) \cdot \\ \vdots \qquad\qquad \\ \cdot b_0(\alpha_n - \beta_1)(\alpha_n - \beta_2) \ldots (\alpha_n - \beta_m) = \\ = a_0^m b_0^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (\alpha_i - \beta_j), \end{aligned} \tag{11}$$

ahol

$$\prod_{j=1}^{m} (\alpha_i - \beta_j) = (\alpha_i - \beta_1)(\alpha_i - \beta_2) \ldots (\alpha_i - \beta_j),$$

míg

$$\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (\alpha_i - \beta_j) = \prod_{j=1}^{m} (\alpha_1 - \beta_j) \cdot \prod_{j=1}^{m} (\alpha_2 - \beta_j) \cdot \prod_{j=1}^{m} (\alpha_m - \beta_j).$$

A rezultáns eredeti alakjában mindig az $f(x) = 0$ egyenlet gyökeit helyettesítettük a $g(x)$ polinomba, majd a kapott mennyiségeket összeszoroztuk.

Most cseréljük fel a sorrendet, és a $g(x) = 0$ egyenlet gyökeit helyettesítsük az $f(x)$ polinomba:

$$R(g,f) = b_0^n a_0^m \prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n}(\beta_j - \alpha_j) = b_0^n f(\beta_1)\dots f(\beta_m) = (-1)^{mn} R(f,g) \quad (12)$$

Észrevehetjük, hogy a rezultáns értéke nem függ a két polinom sorrendjétől, R(g,f) legfeljebb előjelben különbözik R(f,g)-től. Ebből az is következik, hogy R(g,f) akkor és csak akkor nulla, ha R(f,g) is az. Ez nem lehet másként, hiszen gondoljunk arra, ha két egyenletnek van közös gyöke, akkor ez nem függhet attól, hogy a két egyenletet milyen sorrendben veszem.
Ha a (6) és (7) polinomoknak van közös zérushelye, akkor a (8) szorzat valamelyik tényezője nulla, ezért R(f,g)=0. Ez az állítás megfordítható, ugyanis az $f(x)$ és $g(x)$ polinomok kezdőegyütthatói közül legalább az egyik nem zérus, akkor a (10) és a (12) alapján az következik, hogy van közös zérushelye a két polinomnak, vagyis $g(\alpha_1), \dots, g(\alpha_n)$, vagy $f(\beta_1), \dots, f(\beta_m)$ számok egyike zérus.
Ezeket a tulajdonságokat fogalmazzuk meg egy tételben is:

2.1.5. Tétel. *Az f(x) és g(x) polinomok rezultánsa a két polinom együtthatóiból felépülő olyan racionális kifejezés, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik: ha a két polinomnak van közös zérushelye, akkor a rezultáns értéke nulla. Ha a rezultáns értéke nulla, és legalább az egyik polinom kezdőegyütthatója nem nulla (a_0 vagy b_0), akkor a két polinomnak van közös zérushelye.*

Határozzuk meg az általános másodfokú polinomok rezultánsát (10) alapján. Az általános polinomok a következőképpen néznek ki:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0x^2 + a_1x + a_2 \\ g(x) &= b_0x^2 + b_1x + b_2 \end{aligned} \quad (13)$$

A (10) alatti kifejezésbe helyettesítsük be az $f(x)$ polinom gyökeit, egy háromtényezős szorzatot kaptunk. Bontsuk fel a zárójeleket, és végezzük el a lehetséges kiemeléseket.

$$R(f,g) = a_0^2 g(\alpha_1) g(\alpha_2) = a_0^2(b_0\alpha_1^2 + b_1\alpha_1 + b_2)(b_0\alpha_2^2 + b_1\alpha_2 + b_2) =$$

$$= a_0^2b_0^2\alpha_1^2\alpha_2^2 + a_0^2b_1\alpha_1^2\alpha_2 + a_0^2b_0\alpha_1^2b_2 + a_0^2b_0b_1\alpha_1\alpha_2^2 + a_0^2b_1^2\alpha_1\alpha_2 + a_0^2b_1b_2\alpha_1 +$$
$$+ a_0^2b_0b_2\alpha_2^2 + a_0^2b_1b_2\alpha_2 + a_0^2b_2^2 =$$

$$= a_0^2b_0^2\alpha_1^2\alpha_2^2 + a_0^2b_0b_1\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2) + a_0^2b_0b_2(\alpha_1^2+\alpha_2^2) + a_0^2b_1b_2(\alpha_1+\alpha_2) + $$
$$+ a_0^2b_1^2\alpha_1\alpha_2 + a_0^2b_2^2.$$

Ismerjük az $a_0(\alpha_1+\alpha_2) = -a_1$, $a_0\alpha_1\alpha_2 = a_2$, $\alpha_1^2+\alpha_2^2 = (\alpha_1+\alpha_2)^2 - 2\alpha_1\alpha_2$ összefüggéseket, és ezeket visszahelyettesítve az előző képletbe a következő eredményre jutunk:

$$R(f,g) = a_2^2b_0^2 - b_0b_1a_1a_2 + (a_1^2 - 2a_0a_2)b_0b_2 - a_0a_1b_1b_2 + a_0a_2b_1^2 + a_0^2b_2^2 = \\ = (a_0b_2 - a_2b_0)^2 + (a_1b_0 - a_0b_1)(a_1b_2 - a_2b_1) \tag{14}$$

2.2. A rezultáns determinánsalakja

Két polinom rezultánsa megadható determináns alakban is, amelynek elemei a polinomok együtthatói. Ismét a (6) és a (7) egyenleteket tekintsük.

Az f és g rezultánsát meg lehet adni determináns alakban is ($(m+n)\times(m+n)$), ami a következőképpen készíthető el. Az első sorba az $a_0, a_1, \ldots, a_n$ együtthatókat írjuk, majd csupa nullákat. A második sor első eleme nulla, ezután jönnek sorban a (6) polinom együtthatói, majd ismét csupa nulla. A harmadik sor elején már két nulla van, ezeket a lépéseket addig ismételjük, amíg az m-edik sorban a_n lesz a legutolsó elem. Ezt az eljárást a maradék n sorban elvégezzük a g polinom együtthatóival.

Példa egy $(2+3)\times(2+3)$-as determinánsra (m=2 és n=3):

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Nézzük meg általánosan, hogy néz ki az $(m+n)\times(m+n)$-es determináns:

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} & a_n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_m & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \ldots & b_{m-1} & b_m & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_m \end{vmatrix} \tag{15}$$

2.2.1. Tétel. *Ha a (6) és (7) egyenleteknek van közös gyökük, akkor a (15) determináns értéke zérus. Ha a (15) determináns értéke zérus, akkor vagy* $a_0 = b_0 = 0$ *teljesül, vagy van közös gyökük a (6) és (7) egyenleteknek.*

Szele Tibor könyvében[1] megtalálható annak a bizonyítása, hogy a korábban bevezetett rezultáns tényleg felírható determináns alakban.

Példa. *(Szele Tibor: Bevezetés az algebrába, 243. oldal 2. feladat)* Állapítsuk meg a rezultáns determináns alakjából, hogy van-e közös gyökük az alábbi egyenleteknek:

$$x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0,$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Megoldás. Első lépésként írjuk fel az adott egyenletek együtthatóiból a rezultáns determináns alakját. Mivel az első egyenlet harmadfokú, ezért az n=3 lesz, a második egyenletből pedig az következik, hogy az m=2.
Az együtthatók pedig a következőek: $a_0 = 1,\ a_1 = -4,\ a_2 = 3,\ a_3 = 2,$
$b_0 = 1,\ b_1 = -3,\ b_2 = 2.$

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Miután felírtuk a determináns alakot, határozzuk meg az értékét. Első oszlop szerinti kifejtést alkalmazzunk egészen addig, amíg egy 2×2-es determinánshoz nem jutunk. A kifejtés menetét az egyetemen tanultuk, ezért ezt ismertnek tekintem, ennek a leírásától eltekintek.

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} -$$

$$-4 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 12 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + 9 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 16 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} -$$

$$-12 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 4 - 12 \cdot 4 + 9 \cdot 12 + 3 \cdot (-4) - 2 \cdot 12 + 16 \cdot 4 - 12 \cdot 12 -$$

$$-4 \cdot (-4) - 3 \cdot 4 - 3 \cdot 4 + 3 \cdot 12 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 4 = 0$$

Mivel a rezultáns értéke nulla, ezért a két egyenletnek van közös gyöke.

A rezultáns arra is alkalmas, hogy többismeretlenes egyenletrendszereket egyismeretlenesre vezessünk vissza. Nézzünk erre is egy példát.

Példa. *(Kiss Emil: Bevezetés az algebrába, 125. oldal 3.7.12. gyakorlat)* A rezultáns módszerével vezessük vissza az alábbi egyenletrendszert egyismeretlenes egyenletre, és oldjuk meg C fölött.

$$(x-1) \cdot y^2 + (x+1) \cdot y - 2 = 0$$

$$(x-1) \cdot y^2 + x \cdot y - 1 = 0$$

Megoldás. Mindkét egyenlet bal oldalát y polinomjának képzeljük, majd írjuk fel az egyenletek rezultánsát.
A feladat tulajdonképpen a két polinom közös gyökeinek a meghatározása. Először meghatározzuk, hogy mely x értékekre lesz megoldása a polinomoknak, majd a közös x értékeknél vizsgáljuk, hogy mely y értékek a megfelelőek.

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} x-1 & x+1 & -2 & 0 \\ 0 & x-1 & x+1 & -2 \\ x-1 & x & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & x & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1) \cdot \begin{vmatrix} x-1 & x+1 & -2 \\ x & -1 & 0 \\ x-1 & x & -1 \end{vmatrix} + (x-1) \cdot \begin{vmatrix} x+1 & -2 & 0 \\ x-1 & x+1 & -2 \\ x-1 & x & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1) \cdot [(x-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ x & -1 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} x+1 & -2 \\ x & -1 \end{vmatrix} + (x+1) \cdot \begin{vmatrix} x+1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}]+$$

$$+(x-1) \cdot [(x+1) \cdot \begin{vmatrix} x+1 & -2 \\ x & -1 \end{vmatrix} - (x-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ x & -1 \end{vmatrix} + (x-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ x+1 & -2 \end{vmatrix} =]$$

$$= (x-1) \cdot [(x-1) \cdot 1 - x \cdot (x-1) + (x+1) \cdot (-2)]+$$

$$+(x-1) \cdot [(x+1) \cdot (x-1) - (x-1) \cdot 2 + (x-1) \cdot 4] =$$

$$= (x-1) \cdot (-x^2 - 3) + (x-1) \cdot (x^2 + 2x - 3)$$

A zárójelek felbontása után vonjuk össze az egynemű tagokat, majd alakítsuk szorzattá a másodfokú egyenletet. Ezek után a következőt kapjuk:

$$2x^2 - 8x + 6 = 2 \cdot (x-3) \cdot (x-1)$$

A rezultáns pontosan akkor nulla, ha mindkét főegyüttható nulla, vagy ha a két polinomnak van közös gyöke.

Vizsgáljuk meg a főegyütthatókat. Az $x - 1$ akkor nulla, ha az $x = 1$. Ha az eredeti polinomokba az x helyére behelyettesítjük az 1-et, akkor láthatjuk, erre az értékre van megoldása az egyenletrendszernek, ez pedig az (1,1) számpár.

Nézzük meg, hogy az egyenletrendszernek van-e több megoldása. Ehhez szükségünk van az R(f,g) másodfokú polinom gyöktényezős alakjára. Ennek a másodfokú egyenletnek két gyöke van: a 3 és az 1. Az 1-et már vizsgáltuk, ezért most csak a 3-mal foglalkozunk. Az eredeti polinomokba behelyettesítve a 3-at, majd megoldva a másodfokú egyenleteket azt láthatjuk, hogy a két egyenletnek nincs közös gyöke $x = 3$ esetén. Tehát csak egy megoldása van az egyenletrendszernek: az (1,1) számpár.

3. fejezet

A Vandermonde-determináns és alkalmazásai

3.1. A Vandermonde-determináns

A Vandermonde-determináns egy speciális típusú determináns, amely a következő alakú:
Az $a_1, a_2, \ldots, a_m$ elemek által generált Vandermonde-determináns soraiban az elemek 0,1, $\ldots, m-1$ hatványai szerepelnek.
Nézzük pontosan a tételt:

3.1.1. Tétel. *Legyen R egy kommutatív gyűrű, és legyen $m \in N$, valamint $a_1, a_2, \ldots, a_m \in R$. Ekkor*

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_m) = det((a_i^{j-1})_{1 \le i \le m}^{1 \le j \le m}) = \prod_{(i,j)\in\{1,2,\ldots,m\}^2,\ i>j} (a_i - a_j)$$

Példaként írjuk fel a 3×3-as Vandermonde-determinánst:

$$V(a_1, a_2, a_3) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix}$$

Bizonyítás. Induljunk ki a Vandermonde-determináns $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{m-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{m-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \ldots & a_3^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_m & a_m^2 & \ldots & a_m^{m-1} \end{vmatrix}$ alakjából. Az utolsó oszlopból indulva vonjuk ki minden oszlopból az őt meg-előző oszlop a_1-szeresét egészen a második oszlopig. Vagyis:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1-a_1 & a_1^2-a_1^2 & \dots & a_1^{m-1}-a_1a_1^{m-2} \\ 1 & a_2-a_1 & a_2^2-a_1a_2 & \dots & a_2^{m-1}-a_1a_2^{m-2} \\ 1 & a_3-a_1 & a_3^2-a_1a_3 & \dots & a_3^{m-1}-a_1a_3^{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_m-a_1 & a_m^2-a_1a_m & \dots & a_m^{m-1}-a_1a_m^{m-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_2-a_1 & a_2^2-a_1a_2 & \dots & a_2^{m-1}-a_1a_2^{m-2} \\ 1 & a_3-a_1 & a_3^2-a_1a_3 & \dots & a_3^{m-1}-a_1a_3^{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_m-a_1 & a_m^2-a_1a_m & \dots & a_m^{m-1}-a_1a_m^{m-2} \end{vmatrix}$$

A következő lépésben vonjuk le minden sorból az első sort. Ezzel a lépéssel az első oszlop első elemén kívül minden elem nullára változik, a többi elem pedig változatlan marad. A második sorból kiemelhetjük a $a_2 - a_1$-et, a harmadik sorból a $a_3 - a_1$-et, így tovább, végül az m-edik sorból az $a_m - a_1$-et. Ezzel a következő alakra jutottunk:

$$(a_2-a_1)(a_3-a_1)\dots(a_m-a_1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \dots & a_2^{m-2} \\ 0 & 1 & a_3 & \dots & a_3^{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & a_m & \dots & a_m^{m-2} \end{vmatrix}$$

Ezzel a módszerrel egy eggyel kisebb rendű Vandermonde-determinánsra jutottunk. A kisebb rendű determinánsokra ezt az eljárást újra és újra alkalmazva adódik a tétel.

A Vandermonde-determinánsnak számos alkalmazása van, ezek közül a ciklikus determinánsra térek ki.

3.2. A ciklikus determináns

A ciklikus determinánst úgy írhatjuk fel, hogy az első sora egy tetszőleges sorrendben tartalmazza az elemeket, ez a sorrend legyen például az $a_1, a_2, \dots, a_m$. A determináns többi sorait úgy kapjuk meg, hogy mindig egy elemmel hátrább kezdjük el felírni az előző sor elemeit. Vagyis ha az első sorban az $a_1, a_2, \dots, a_m$ elemek ilyen sorrendben követik egymást, akkor a második sor első eleme a_m lesz, a második elem az a_1, ezt követik az

$a_2, a_3, \ldots, a_{m-1}$ elemek.

Nézzük a ciklikus determinánst formálisan:

$$C_m = C_m(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_m \\ a_m & a_1 & a_2 & \ldots & a_{m-1} \\ a_{m-1} & a_n & a_1 & \ldots & a_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_1 \end{vmatrix} \tag{16}$$

Ellenkező értelmű leolvasási rendszerrel kapott determináns előjeltől eltekintve megegyezik a (16)-os pontban leírt ciklikus determinánssal:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_m \\ a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \ldots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_m & a_1 & a_2 & \ldots & a_{m-1} \end{vmatrix} \tag{17}$$

A továbbiakban a (16)-os pontban ismertetett ciklikus determinánst alkalmazzuk.

A következőkben nézzük meg, hogyan lehet a C_m determináns értékét meghatározni.

3.2.1. Tétel. *Legyen R egy kommutatív gyűrű, és legyen $m \in N$, valamint $a_1, a_2, \ldots, a_m \in R$. Legyenek $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_m \in C$ egymástól különböző m-edik egységgyökök. Ekkor*

$$C(a_1, a_2, \ldots, a_m) = f(\epsilon_1) f(\epsilon_2) \ldots f(\epsilon_m) = \prod_{k=1}^{m} (a_1 + a_2 \epsilon_k + \ldots + a_m \epsilon_k^{m-1}),$$

ahol $\epsilon_k^m = 1$ $(k = 1,2,\ldots,m)$ és $f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_m x^{m-1}$.

Bizonyítás. Legyenek $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_m$ egymástól különböző n-edik egységgyökök. Írjuk fel az ezekhez tartozó Vandermonde-determinánst:

$$V_m = V_m(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_m) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \epsilon_1 & \epsilon_2 & \epsilon_3 & \ldots & \epsilon_m \\ \epsilon_1^2 & \epsilon_2^2 & \epsilon_3^2 & \ldots & \epsilon_m^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \epsilon_1^{m-1} & \epsilon_2^{m-1} & \epsilon_3^{m-1} & \ldots & \epsilon_m^{m-1} \end{vmatrix} \tag{18}$$

Ennek a Vandermonde-determinánsnak az értéke zérustól különböző, hiszen a $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_m$ számok is különbözők.
Számítsuk ki a $C_m V_m^T$ mátrixszorzatot a szorzástétel értelmében:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_m \\ a_m & a_1 & a_2 & \ldots & a_{m-1} \\ a_{m-1} & a_m & a_1 & \ldots & a_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \epsilon_1 & \epsilon_2 & \epsilon_3 & \ldots & \epsilon_m \\ \epsilon_1^2 & \epsilon_2^2 & \epsilon_3^2 & \ldots & \epsilon_m^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \epsilon_1^{m-1} & \epsilon_2^{m-1} & \epsilon_3^{m-1} & \ldots & \epsilon_m^{m-1} \end{vmatrix}$$

A szorzást a következőképpen végezzük. A C_m determináns első sorának elemeit rendre szorozzuk össze a V_m^T determináns megfelelő elemével, majd a szorzatokat adjuk össze. Ugyanezt ismételjük meg a C_m determináns további soraira is.
Példaként nézzük meg $m = 5$-re

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_5 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_4 & a_5 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \epsilon_1 & \epsilon_2 & \epsilon_3 & \epsilon_4 & \epsilon_5 \\ \epsilon_1^2 & \epsilon_2^2 & \epsilon_3^2 & \epsilon_4^2 & \epsilon_5^2 \\ \epsilon_1^3 & \epsilon_2^3 & \epsilon_3^3 & \epsilon_4^3 & \epsilon_5^3 \\ \epsilon_1^4 & \epsilon_2^4 & \epsilon_3^4 & \epsilon_4^4 & \epsilon_5^4 \end{vmatrix}$$

Írjuk fel példaként a $C_5 V_5^T$ mátrixszorzat harmadik sorának első elemét:

$$a_4 + a_5\epsilon_1 + a_1\epsilon_1^2 + a_2\epsilon_1^3 + a_3\epsilon_1^4$$

Az $C_m V_m^T$ mátrixszorzat i-edik sorának k-adik eleme a következőképpen néz ki az előző példát figyelembe véve:

$$a_{m-i+2} + a_{m-i+3}\epsilon_k + \ldots + a_m\epsilon_k^{i-2} + a_1\epsilon_k^{i-1} + a_2\epsilon_k^{i} + \ldots + a_{n-i+1}\epsilon_k^{n-1}$$

Vegyük észre, hogy minden tagból kiemelhetjük a ϵ_k^{i-1} tényezőt. Kiemelés után egy (m-1)-edfokú egyenletet kapunk, majd erre felírhatunk egy zárt alakot:

$$\epsilon_k^{i-1}(a_1 + a_2\epsilon_k + a_3\epsilon_k^2 + \ldots + a_n\epsilon_k^{m-1}) = \epsilon_k^{i-1} f(\epsilon_k),$$

ahol $\epsilon_k^m = 1$ és $f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \ldots + a_m x^{m-1}$ Az előzőeket felhasználva írjuk fel a $C_m V_m^T$-t:

$$C_m V_m^T = \begin{vmatrix} f(\epsilon_1) & f(\epsilon_2) & \ldots & f(\epsilon_m) \\ \epsilon_1 f(\epsilon_1) & \epsilon_2 f(\epsilon_2) & \ldots & \epsilon_m f(\epsilon_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \epsilon_1^{m-1} f(\epsilon_1) & \epsilon_2^{m-1} f(\epsilon_2) & \ldots & \epsilon_m^{m-1} f(\epsilon_m) \end{vmatrix}$$

Az oszlopokból rendre kiemelhetjük a következő elemeket: $f(\epsilon_1), f(\epsilon_2), \ldots, f(\epsilon_m)$. Nézzük meg, hogyan változik a $C_m V_m^T$.

$$C_m V_m^T = f(\epsilon_1) f(\epsilon_2) \ldots f(\epsilon_m) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \epsilon_1 & \epsilon_2 & \ldots & \epsilon_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \epsilon_1^{m-1} & \epsilon_2^{m-1} & \ldots & \epsilon_m^{m-1} \end{vmatrix}$$

A determináns megegyezik a (18)-as pontban ismertetett determinánssal. A bizonyításunk elején kikötöttük, hogy a V_m értéke nem nulla, ezért a

$$C_m V_m = f(\epsilon_1) f(\epsilon_2) \ldots f(\epsilon_m) V_m$$

egyenletet V_m-mel egyszerűsítve a tételben leírt képlethez jutunk:

$$C_m = f(\epsilon_1) f(\epsilon_2) \ldots f(\epsilon_m).$$

3.3. Az általánosított Vandermonde-determináns

A Vandermonde-determináns általánosított alakjában a determináns elemei nem számok, hanem polinomok. A tétel kimondása előtt rögzítek néhány jelölést.
P_j a j-edik polinomot jelöli, a $coeff_j P$ pedig a P polinom x^j együtthatóját.

3.3.1. Tétel. *Legyen R egy kommutatív gyűrű, és legyen $m \in N$, valamint $a_1, a_2, \ldots, a_m \in R$. Minden $j \in \{1{,}2, \ldots, m\}$-re $P_j \in R[X]$, ahol $deg(P_j) \leq$ $\leq j-1$. Ekkor*

$$det((P_j(a_i))_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq m}) = \prod_{j=1}^{m} coeff_{j-1}(P_j) \cdot \prod_{(i,j)\in\{1,2,\ldots,m\}^2,\ i>j} (a_i - a_j)$$

Nézzünk példát arra, hogy néz ki m=4-re az általánosított Vandermonde-determináns:

$$V = \begin{vmatrix} P_1(a_1) & P_2(a_1) & P_3(a_1) & P_4(a_1) \\ P_1(a_2) & P_2(a_2) & P_3(a_2) & P_4(a_2) \\ P_1(a_3) & P_2(a_3) & P_3(a_3) & P_4(a_3) \\ P_1(a_4) & P_2(a_4) & P_3(a_4) & P_4(a_4) \end{vmatrix}$$

Ha olyan polinomokat választunk, amelyek minden együtthatója egy, akkor a $(coeff_0(P_1) \cdot coeff_1(P_2) \cdot coeff_2(P_3) \cdot coeff_3(P_4))$ szorzat értéke is egy, tehát egy együtthatójú polinomok esetén a Vandermonde-determinánshoz jutunk.

Az általánosított Vandermonde-determinánsnak van egy fontos következménye, ez így hangzik:

3.3.2. Következmény. *Legyen R egy kommutatív gyűrű, és legyen $m \in N$, valamint $a_1, a_2, \ldots, a_m \in R$. Ekkor*

$$det((\prod_{k=1}^{j-1}(a_i - k))_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq m}) = \prod_{(i,j)\in\{1,2,\ldots,m\}^2,\ i>j} (a_i - a_j)$$

A következő lemmából levezethető a Vandermonde- és az általánosított Vandermonde determináns.

3.3.3. Lemma. *Legyen R egy kommutatív gyűrű, és legyen $m \in N$, valamint $a_1, a_2, \ldots, a_m \in R$. Minden $j \in \{1,2,\ldots,m\}$-re $P_j \in R[X]$, ahol $deg(P_j \leq$ $\leq j-1)$. Ekkor*

$$det((P_j(a_i))_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq m}) = \prod_{j=1}^{m} coeff_{j-1}(P_j) \cdot det((a_i^{j-1})_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq m}).$$

A lemmában szereplő $det((a_i^{j-1})_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq m})$ tényező felírható

$$\prod_{(i,j)\leq\{1,2,\ldots,m\}^2,\ i>j} (a_i - a_j)$$

alakban is. Ha ezt a két tagot kicseréljük, akkor a (3.2.3) lemmában, akkor az általánosított Vandermonde-determinánst kapjuk meg. Nézzük a lemma bizonyítását:

Bizonyítás. Minden $j \in \{1,2,\ldots,m\}$ esetén a polinomot megadhatjuk a következő zárt alakkal:

$$P_j(X) = \sum_{k=0}^{m-1} coeff_k(P_j) \cdot X^k$$

Minden $i \in \{1,2,\ldots,m\}$ és $j \in \{1,2,\ldots,m\}$ esetén, ha az X helyére a_i-t írunk, akkor is igaz marad az egyenlőség, továbbá, ha a szorzatban a tényezőket felcseréljük, akkor sem változik az összeg.

$$P_j(a_i) = \sum_{k=0}^{m-1} coeff_k(P_j) \cdot a_i^k = \sum_{k=0}^{m-1} a_i^k \cdot coeff_k(P_j) = \sum_{k=1}^{m} a_i^{k-1} \cdot coeff_{k-1}(P_j)$$

Ha az összeg indexeit 1-el növeljük, akkor nem változik az összeg, hiszen ugyanannyi tagnak kell venni az összegét. Ezért:

$$(P_j(a_i))_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq m} = (a_i^{j-1})_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq m} \cdot (coeff_{i-1}(P_j))_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq m}. \tag{19}$$

i>j esetén $coeff_{i-1}(P_j) = 0$, ezért $(coeff_{i-1}(P_j))_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq m}$ felső háromszögmátrix.
A (19) pontban leírt egyenlet, akkor sem változik, ha vesszük mindkét oldal determinánsát.

$$det((P_j(a_i))_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq m}) = det((a_i^{j-1})_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq m} \cdot (coeff_{i-1}(P_j))_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq m})$$

Két elem szorzatának a determinánsa megegyezik az elemek determináns értékének a szorzatával, ezért:

$$det((a_i^{j-1})_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq m} \cdot (coeff_{i-1}(P_j))_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq m}) =$$

$$= det((a_i^{j-1})_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq m}) \cdot det((coeff_{i-1}(P_j))_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq m}) \qquad (20)$$

A determinánsok tulajdonságairól szóló tétel kimondja, hogy a felső háromszögmátrix determinánsának értéke egyenlő a főátlóban lévő elemek szorzatával. Ez formálisan így néz ki:

$$det((coeff_{i-1}(P_j))_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq m}) = \prod_{j=1}^{m} coeff_{j-1}(P_j) \qquad (21)$$

Ha jobban megnézzük a (20) és a (21) összefüggéseit, akkor észrevehetjük, hogy a (21) jobb oldalán lévő zárt alak megtalálható a (20)-ben is. Amennyiben kicseréljük ezt a zárt alakot a (21) bal oldalán lévő zárt alakkal, akkor éppen a lemmához jutunk:

$$\prod_{j=1}^{m} coeff_{j-1}(P_j) \cdot det((a_i^{j-1})_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq m})$$

3.4. A hiperfaktoriális

Jelöljük H-val a hiperfaktoriális függvényt, amely $H : N \to N$ és minden $n \in N$

$$H(n) = \prod_{k=0}^{n-1} k!\,.$$

Nézzük meg azt a tételt, amely a hiperfaktoriális és az oszthatóság kapcsolatáról szól.

3.4.1. Tétel. *Minden $a \in N$-re, minden $b \in N$-re és minden $c \in N$-re*

$$H(b+c)H(c+a)H(a+b)|H(a)H(b)H(c)H(a+b+c)$$

A (3.4.1) tétel bizonyítása előtt nézzünk pár fontos lemmát, amelyet felhasználunk majd a bizonyításban.

3.4.2. Lemma. *Legyen $m \in N$. Ekkor*

$$\prod_{(i,j)\in\{1,2,\ldots,m\}^2;\ i>j} (i-j) = H(m).$$

Milyen eredményt kapunk m=3-ra:

$$\prod_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2;\ i>j} (i-j) = H(3) = \prod_{k=0}^{2} k!\,.$$

$$(2-1)\cdot(3-1)\cdot(3-2) = 0!\cdot 1!\cdot 2! = 2.$$

Bizonyítás. *(3.4.2 Lemma)* Induljunk ki a lemma jobb oldalán álló szorzatból. Ha az i és j lehetséges értékeinek halmazát eggyel eltoljuk, akkor nem változik semmi sem, az i-j állandó marad, vagyis:

$$\prod_{(i,j)\in\{1,2,\ldots,m\}^2;\ i>j} (i-j) = \prod_{(i,j)\in\{0,1,\ldots,m-1\}^2;\ i>j} (i-j) =$$

Az előző sorban a két futóindexet egy produktum alatt helyeztük el, ezt szedjük ketté:

$$= \prod_{i\in\{0,1,\ldots,m-1\}} (i-j) \prod_{j\in\{0,1,\ldots,m-1\};\ i>j} (i-j) =$$

Módosítsuk $i-1$-re a j maximális értékét, majd ezt követően a halmaz értékeinek határát növeljük meg eggyel. Tehát a j végigfut az $1,2,\ldots,i$ számokon. Ezzel azt értük el, hogy a második produktum értéke i! lesz.

$$= \prod_{i\in\{0,1,\ldots,m-1\}} \prod_{j=0}^{i-1}(i-j) = \prod_{i\in\{0,1,\ldots,m-1\}} \prod_{j=1}^{i} j = \prod_{i\in\{0,1,\ldots,m-1\}} i! =$$

Az i-t kicserélve a k-ra elérkeztünk a lemmához:

$$= \prod_{k=0}^{m-1} k! = H(m).$$

3.4.3. Lemma. *Minden $i, j \in N$-re, melyre $i \geq 1$ és $j \geq 1$ teljesül a következő*

$$\binom{a+b+i-1}{a+i-j} = \frac{(a+b+i-1)!}{(a+i-1)!\cdot(b+j-1)!}\cdot\prod_{k=1}^{j-1}(a+i-k).$$

Bizonyítás. *Triviális számolás.*

Nézzünk erre is példát a következő értékekkel: i=3, j=2, a=2, b=1

$$\binom{2+1+3-1}{2+3-2} = \frac{(2+1+3-1)!}{(2+3-1)!\cdot(1+2-1)!}\cdot\prod_{k=1}^{1}(2+3-k)$$

$$10 = \binom{5}{3} = \frac{5!}{4!\cdot 2!}\cdot 4 = 10$$

3.4.4. Lemma. *Legyen R egy kommutatív gyűrű, és legyen $u \in N$, és $a_{i,j} \in$ $\in R$ minden $(i,j) \in \{1,2,\ldots,u\}^2$. Legyen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_u \in R$ és $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_u \in$ $\in R$. Ekkor*

$$det\left((\alpha_i a_{i,j}\beta_j)_{1\le i\le u}^{1\le j\le u}\right) = \prod_{i=1}^{u}\alpha_i\cdot\prod_{i=1}^{u}\beta_i\cdot det\left((a_{i,j})_{1\le i\le u}^{1\le j\le u}\right).$$

Bizonyítás.

$$(\alpha_i a_{i,j}\beta_j)_{1\le i\le u}^{1\le j\le u} = diag(\alpha_1,\ldots,\alpha_u)\cdot(a_{i,j})_{1\le i\le u}^{1\le j\le u}\cdot diag(\beta_1,\ldots,\beta_u)$$

Vegyük mindkét oldal determinánsát:

$$det\left((\alpha_i a_{i,j}\beta_j)_{1\le i\le u}^{1\le j\le u}\right) = det\left(diag(\alpha_1,\ldots,\alpha_u)\cdot(a_{i,j})_{1\le i\le u}^{1\le j\le u}\cdot diag(\beta_1,\ldots,\beta_u)\right) =$$

A szorzat tagjainak külön-külön vegyük a determinánsát:

$$= det(diag(\alpha_1,\ldots,\alpha_u))\cdot det\left((a_{i,j})_{1\le i\le u}^{1\le j\le u}\right)\cdot det(diag(\beta_1,\ldots,\beta_u)),$$

ami éppen

$$= \prod_{i=1}^{u}\alpha_i\cdot det\left((a_{i,j})_{1\le i\le u}^{1\le j\le u}\right)\cdot\prod_{i=1}^{u}\beta_i = det\left((\alpha_i a_{i,j}\beta_j)_{1\le i\le u}^{1\le j\le u}\right).$$

Most térjünk rá a (3.4.1)-es tétel bizonyítására.

Bizonyítás. A tételben szerepel a $H(a+b+c)$ tényező, első lépésként ezt írjuk át más alakúra.
Mivel $H(n) = \prod_{k=0}^{n-1} k!$, ezért

$$H(a+b+c) = \prod_{k=0}^{a+b+c-1} k! =$$

A zárt szorzatot két tényezős szorzattá alakíthatjuk, ahol az egyik tényező a $H(a+b)$, ami szintén a tételben szerepel.

$$= \prod_{k=0}^{a+b-1} k! \cdot \prod_{k=a+b}^{a+b+c-1} k! = H(a+b) \cdot \prod_{k=a+b}^{a+b+c-1} k! =$$

Végül k helyére írjuk be az $(a+b+i-1)$-et.

$$= H(a+b) \cdot \prod_{i=1}^{c} (a+b+i-1)!\,. \tag{22}$$

Most a $H(b+c)$-t írjuk át a H(n) függvény segítségével, majd írjuk át kéttényezős szorzatalakba. Itt is észrevehetjük, hogy az egyik tényező a tételben is előfordul:

$$H(b+c) = \prod_{k=0}^{b+c-1} k! = \prod_{k=0}^{b-1} k! \cdot \prod_{k=b}^{b+c-1} k! = H(b) \cdot \prod_{k=b}^{b+c-1} k! =$$

A k helyére most a $(b+i-1)$-et írjuk, a következőt eredményezi:

$$= H(b) \cdot \prod_{i=1}^{c} (b+i-1)!\,. \tag{23}$$

Ugyanezeket a lépéseket végezzük el $H(c+a)$-n is, de itt a k helyére $(a+i-$ $-1)$-et helyettesítsünk. Tehát:

$$H(c+a) = \prod_{k=0}^{c+a-1} k! = \prod_{k=0}^{a-1} k! \cdot \prod_{k=a}^{c+a-1} k! = H(a) \cdot \prod_{k=a}^{c+a-1} k! =$$

$$= H(a) \cdot \prod_{i=1}^{c} (a+i-1)!\,. \tag{24}$$

A bizonyítás második részében írjuk fel a $\binom{a+b+i-1}{a+i-j}$ determinánsát. Ez a következő:

$$det\left(\left(\binom{a+b+i-1}{a+i-j}\right)_{1\le i\le c}^{1\le i\le c}\right)$$

A (3.4.3) lemma alapján az előző determináns megegyezik a következővel:

$$det\left(\left(\frac{(a+b+i-1)!}{(a+i-1)!\cdot(b+j-1)!} \cdot \prod_{k=1}^{j-1}(a+i-k)\right)_{1\le i\le c}^{1\le i\le c}\right)$$

A kéttényezős szorzatot alakítsuk háromtényezős szorzattá úgy, hogy a tört nevezőjéből emeljük ki a $(b+j-1)!$-t.

$$det\left(\left(\frac{(a+b+i-1)!}{(a+i-1)!}\cdot\prod_{k=1}^{j-1}(a+i-k)\cdot\frac{1}{(b+j-1)!}\right)_{1\leq i\leq c}^{1\leq i\leq c}\right) \tag{25}$$

Ennek a háromtényezős szorzatnak a determinánsa megegyezik a (3.4.4)-es lemmában szereplő determinánssal, az α_i, az $a_{i,j}$ és a β_i rendre a következők:

$$a_{i,j}=\prod_{k=1}^{j-1}(a+i-k),$$

$$\alpha_i=\frac{(a+b+i-1!)}{(a+i-1)!},$$

$$\beta_i=\frac{1}{(b+i-1)!}.$$

Tehát a (3.4.4)-es lemma értelmében a (25)-ös pontban ismertetett determináns átírható ilyen alakúra:

$$\prod_{i=1}^{c}\frac{(a+b+i-1)!}{(a+i-1)!}\cdot\prod_{i=1}^{c}\frac{1}{(b+i-1)!}\cdot det\left(\left(\prod_{k=1}^{j-1}(a+i-k)\right)_{1\leq i\leq c}^{1\leq i\leq c}\right)$$

A (3.3.2) következmény alapján, alkalmazva az $m=c$ és az $a_i=a+i$ helyettesítéseket:

$$det\left(\left(\prod_{k=1}^{j-1}(a+i-k)\right)_{1\leq i\leq c}^{1\leq i\leq c}\right)=\prod_{(i,j)\in\{1,2,\ldots,c\}^2;\ i>j}((a+i)-(a+j))=$$

Észrevehetjük, hogy az a-k kiesnek, és éppen a (3.4.2) lemmához jutunk $m=$ $=c$ helyettesítéssel:

$$\prod_{(i,j)\in\{1,2,\ldots,c\}^2;\ i>j}(i-j)=H(c)$$

Az eddigi bizonyításból kiderült a következő:

$$det\left(\left(\binom{a+b+i-1}{a+i-j}\right)_{1\leq i\leq c}^{1\leq i\leq c}\right)=\prod_{i=1}^{c}\frac{(a+b+i-1)!}{(a+i-1)!}\cdot\prod_{i=1}^{c}\frac{1}{(b+i-1)!}\cdot H(c). \tag{26}$$

Most írjuk fel a tételben szereplő oszthatóságot törtalakba, majd a $H(a+$ $+b+c)$, $H(b+c)$, $H(c+a)$ helyére azokat a szorzatokat írjuk, amelyek a (22), (23), és (24)-es pontokban szerepelnek:

$$\frac{H(a)H(b)H(c)H(a+b+c)}{H(b+c)H(c+a)H(a+b)} =$$

$$\frac{H(a)H(b)H(c)H(a+b)\cdot\prod_{i=1}^{c}(a+b+i-1)!}{H(b)\prod_{i=1}^{c}(b+i-1)!\cdot H(a)\prod_{i=1}^{c}(a+i-1)!\cdot H(a+b)}$$

Egyszerűsíthetünk $H(a)$-val, $H(b)$-vel, és $H(a+b)$-vel:

$$= \frac{\prod_{i=1}^{c}(a+b+i-1)!}{\prod_{i=1}^{c}(b+i-1)!\cdot\prod_{i=1}^{c}(a+i-1)!}\cdot H(c) =$$

A törtet szedjük szét kéttényezős szorzatalakba:

$$\frac{\prod_{i=1}^{c}(a+b+i-1)!}{\prod_{i=1}^{c}(a+i-1)!}\cdot\frac{1}{\prod_{i=1}^{c}(b+i-1)!}\cdot H(c) =$$

$$\prod_{i=1}^{c}\frac{(a+b+i-1)!}{(a+i-1)!}\cdot\prod_{i=1}^{c}\frac{1}{(b+i-1)!}\cdot H(c) =$$

Ami éppen a (26)-os pontban leírt összefüggés:

$$det\left(\left(\binom{a+b+i-1}{a+i-j}\right)_{1\leq i\leq c}^{1\leq i\leq c}\right)$$

Mivel $\left(\binom{a+b+i-1}{a+i-j}\right)_{1\leq i\leq c}^{1\leq i\leq c}$ egész szám, ezért pont az oszthatóságot adja.

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom a témavezetőmnek, Ágoston Istvánnak a szakdolgozat elkészítésében nyújtott segítségéért, támogatásáért.

Irodalomjegyzék

[1] Szele Tibor: Bevezetés az algebrába, Dabas, 1977, Tankönyvkiadó.

[2] Freud Róbert: Lineáris algebra, Budapest, 2006, ELTE Eötvös Kiadó.

[3] Kiss Emil: Bevezetés az algebrába, Budapest, 2007, Typotex Kiadó.

[4] Bánhegyesiné Topor Gizella, Bánhegyesi Zoltán: Matematika Nem matematika szakosoknak, Budapest, 2002, Műszaki Kiadó.

[5] http://web.mit.edu/ darij/www/hyperfactorialBRIEF.pdf

[6] http://hu.wikipedia.org/wiki/Determin