Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Kanizsai Rita

Bevezetés a Minkowski-geometriába

BSc szakdolgozat

Témavezető:

Naszódi Márton

Geometriai Tanszék

Budapest, 2012

Tartalomjegyzék

Bevezetés

"A távolságot, mint üveg –
golyót megkapod…"

Jól megszokott világban élünk. Érzékelhető, mérhető. Megszoktuk, hogy amit elengedünk, az leesik, a mágnes vonza a vasat, a Föld gömbölyű, a nap minden nap felkel, két kezünk van és két lábunk. Mindezekhez hozzászoktunk, és az keltene bennünk meglepetést, ha valami nem így a szokásos menete szerint zajlana. Csak nagyon ritkán szoktunk abba belegondolni, hogy mindez miért van így. Nem szoktunk azon gondolkodni, hogy lehetne másképp is. Nem fordulhatna-e elő, hogy amit látunk, az korántsem a teljes valóság?

A matematikát is megszoktuk. Megszoktuk, hogy a kilenc után a tíz jön, hogy 2+2 az négy, hogy $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Tudjuk, hogy ha feldobjuk az érmét, akkor a fej valószínűsége 50%, hogy a q^n sorozat a nullához tart, ha $q \in [0, 1)$.

Ugyanígy megszoktuk a geometriát is. Tudjuk mi az hogy távolság, mi az, hogy két egyenes párhuzamos, hogy néz ki a szakasz, hogy néz ki a kör, tudjuk, hogy a kör kerülete $2r\pi$, a tükrözés távolságtartó transzformáció. Mindezen fogalmakat használjuk, néhányat már óvodáskorunk óta, megszoktuk őket, és, ha valaki azt mondja: egyenes, akkor még véletlenül sem az $\arctan x$ függvény grafikonjára gondolunk.

Régen azt gondolták, hogy a Föld lapos, hiszen laposnak látszott. A Föld lapos volt, ezért alkottunk hozzá egy olyan matematikát, mely kényelmesen illeszkedett ehhez a nézethez. Euklidész az Elemek c. munkájában kidolgozza a geometriát, és ez az elmélet évszázadokon át tartja magát.

E dolgozatban ezt a megszokást szeretném alapjában megdönteni. Egy olyan szemléletmóddal szeretnék közelíteni a geometriához, amely nem a hétköznapi szemléletet adja vissza. Dolgozatomban az euklidészi alapfogalmakat egy általánosabb távolságfüggvénnyel társítom. Ezeket a konstrukciókat Minkowski-tereknek nevezzük. A konstrukció Hermann Minkowski (1864–1909), litván matematikusról kapta nevét.

Ezekben a geometriákban a szokásostól eltérő távolságdefiníciók segítségével egészen érdekes struktúrákat hozhatunk létre, ami a szemléletünkkel akár teljesen ellentmondónak tűnhet. Hogy lehet egy négyzet kör? Mi több, hogyan lehet egy konvex síkidom kör? Hogy lehet, hogy a forgatás nem távolságtartó? Hogy lehet egy egyenes görbe? Mindezekre a kérdésekre választ kapunk a dolgozat elolvasása során. További célom a válaszadás mellett az olvasónak egy olyan szemlélet átjuttatása, mely a szokásostól eltérő, és ezzel arra sarkall, hogy elrugaszkodjunk a látványtól, és hagyjuk, hogy a puszta gondolkodás újabb és újabb szépségekhez vezessen minket, továbbá, hogy a világ dolgait is próbáljuk meg ezzel a hozzáállással szemlélni: nem minden olyan, amilyennek látszik.

A dolgozatot a metrikus terek fogalmának bevezetésével kezdem, mely egy bővebb fogalom, mint a Minkowski-terek. E témakör rövid jellemzése után a Minkowski-tér fogalmat bevezetve megnézzük, hogy egy metrikus tér mikor Minkowski-tér. A következő fejezetben megnézzük a Minkowski-terek néhány tulajdonságát, a metrikus szakasz és egyenes fogalmát, az egységköröket, és azt, hogy hogyan lehet a szinuszt értelmezni ezekben a terekben. Végül a Minkowski-terek egy speciális családjával foglalkozunk, ezek az ℓ_p terek.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani Naszódi Márton tanár úrnak, aki korlátlanul rendelkezésemre állt, és akihez bármilyen kérdéssel fordulhattam. Köszönöm az érthető, és rendszerezett magyarázatokat, és a türelmet, melyet akkor tanúsított, amikor a rendszer még nem állt össze bennem.

Továbbá szeretnék köszönetet mondani édesanyámnak, aki számtalanszor végighallgatott, amíg a téma megértésével küzdöttem, aki együtt gondolkodott velem a feladatok megoldásán, és aki támogatta a dolgozat megszületését.

1. fejezet

Metrikus terek

Bevezetésképpen definiáljuk először a metrikus tér fogalmát, hiszen később majd ennek speciális fajtáival fogunk foglalkozni. A fogalmak, és példák bevezetésekor a Russel V. Benson [1] könyvét, és Sikolya Eszter előadásjegyzetét [2] vettem alapul. A metrikus terek olyan terek, melyekben az alaphalmaz pontjaihoz definiálunk egy távolságfüggvényt, melynek segítségével meg tudjuk adni az alaphalmaz bármely két pontja közötti távolságot. Lássuk a precíz definíciót!

1. Definíció. *Egy $M \neq \emptyset$ alaphalmazon értelmezett $d : M \times M \to \mathbb{R}$ függvényből képzett (M, d) rendezett párt* metrikus térnek *nevezünk, ha a d függvényre a következő axiómák teljesülnek:*

1. *$d(x, y) \geqslant 0$ minden $x, y \in M$- re, és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x = y$.*

2. *$d(x, y) = d(y, x)$ minden $x, y \in M$-re.*

3. *$d(x, y) + d(y, z) \geqslant d(x, z)$ minden $x, y, z \in M$-re. Ezt a feltételt háromszög-egyenlőtlenségnek nevezzük.*

A d függvényt, melyre ezek a tulajdonságok teljesülnek metrikának*, az M halmaz elemeit pedig* pontoknak *nevezzük.*

A fogalom bevezetése után vegyünk néhány példát, melyekkel szemléltetni tudjuk a metrikus tereket:

$\mathfrak{M} = (M, d)$ metrikus tér, ha

1. $M = \mathbb{R}$ és
$$d(x, y) = |x - y|.$$
Ez a legegyszerűbb metrikus tér. (Ezt használjuk, amikor a vonalzón két pontnak meg akarjuk adni a távolságát.)

2. $M = \mathbb{R}^n$ és
$$d(x, y) = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$
Ezt nevezzük *n-dimenziós euklidészi térnek.* Az előző pontban bemutatott példa ennek az egydimenziós speciális esete.

3. $M = X$ tetszőleges halmaz, és
$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad x \neq y \\ 0 & \text{ha} \quad x = y \end{cases}$$
Ezt nevezzük *diszkrét metrikus térnek.*

4. $M = b(H)$ a $H \subset \mathbb{R}$ halmazon értelmezett korlátos fügvények halmaza, és
$$d(f, g) = \sup_{h \in H} |(f(h) - g(h)|$$
Ennek a példának egy speciális esete a következő:

5. $M = C[a, b]$ az $[a, b]$ halmazon értelmezett folytonos függvények halmaza, és
$$d(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$
Az utóbbi két példát az analízisben szokták alkalmazni.

1. Állítás. *A fenti példák mind metrikus teret alkotnak.*

Az első példa a második példa egydimenziós speciális esete. A második példa bizonyítását az 5. oldalon szereplő 3. és 2. állítások következményeként kapjuk. Itt csak a diszkrét metrika bizonyítását közöljük, a 4., 5. példákat nem bizonyítjuk.

Bizonyítás: A diszkrét metrikában könnyen látszik, hogy a távolság mindig nagyobb vagy egyenlő 0-val, és csak akkor 0, ha $x = y$, így a metrika első feltétele teljesül. A második feltétel is könnyen látszik: ha $x = y$, akkor triviális, ha $x \neq y$, akkor

$$d(x, y) = 1 = d(y, x).$$

A harmadik feltétel a következőképpen teljesül: ha $x \neq y$, akkor

$$1 = d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y),$$

ahol az egyenlőtlenség jobb oldalán 1 áll, ha $z = x$, vagy $z = y$, és 2, ha $z \neq x; y$. Ha $x = y$, akkor

$$0 = d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y),$$

ahol az egyenlőtlenség jobb oldalán 0 áll, ha $z = x = y$, és 1, ha $z \neq x; y$. Ezzel beláttuk az állítást.

Az első fejezet végén nézzük meg, hogy két metrikus tér mikor tekinthető izometrikusnak, azaz mit jelent a „távolságtartás" metrikus terek között. Két metrikus tér izometriáját szemléletesen úgy határozhatjuk meg, hogy létezik egy olyan leképezés a két metrikus tér pontjai között, hogy két pont távolsága az egyik metrika szerint ugyanakkora lesz, mint a két képpont távolsága a másik metrika szerint.

2. Definíció. *Az $\mathfrak{M} = (M, d)$ és az $\mathfrak{M}' = (M', d')$ metrikus terek* izometrikusak*, ha létezik egy olyan $f : M \to M'$ bijektív leképezés, melyre $d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$ teljesül minden $x, y \in M$-re. Az $f : M \to M'$ bijektív leképezést* izometriának *nevezzük.*

2. fejezet

Minkowski-terek

A továbbiakban a metrikus terek speciális fajtáiról fogunk beszélni. A tér pontjainak az $\mathbb{R}^n$-beli pontokat tekintjük, és ebben a térben definiálunk egy normát, mellyel a pontokhoz tartozó vektorok „hosszát” tudjuk megadni. Ezek a terek a normált terek. Az $\mathbb{R}^n$-en értelmezett normált tereket speciálisan Minkowski-tereknek nevezzük. A továbbiakban főként kétdimenziós terekről, azaz Minkowski-síkokról fogunk beszélni. Lássuk a Minkowski-terek, és a Minkowski-sík precíz definícióját!

3. Definíció. *Egy $\mathfrak{M} = (\mathbb{R}^n, \rho)$ rendezett párt n-dimenziós* Minkowski-térnek *nevezünk, ha $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre teljesülnek a következő feltételek:*

1. *$\rho(x) \geqslant 0$, és 0 pontosan akkor, ha $x = 0$,*
2. *$\rho(\lambda x) = |\lambda|\rho(x)$ minden $\lambda \in \mathbb{R}$ számra,*
3. *$\rho(x + y) \leqslant \rho(x) + \rho(y)$ minden $x, y \in \mathbb{R}^n$ pontpárra.*

A fenti feltételeknek megfelelő ρ függvényt normának *nevezzük.*

$n = 2$ esetén Minkowski-síkról *beszélünk, és a továbbiakban $\mathfrak{M}^2$-tel jelöljük.*

A továbbiakban belátjuk, hogy a Minkowski-terek a metrikus tereknek speciális fajtái, de nem minden $\mathbb{R}^n$-en értelmezett metrika egy Minkowski-tér normája által indukált metrika. Utóbbira ellenpéldát is mutatunk.

2. Állítás. *Legyen ρ norma $\mathbb{R}^n$-en, és definiáljuk a $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényt a következő képlettel:*

$$d(x, y) := \rho(y - x)$$

Ekkor d függvény egy metrika, melyet a ρ norma által indukált metrikának *nevezünk.*

Bizonyítás:

Adott ρ norma esetén $\rho(x) = d(o, x)$, ahol o az origó, azaz a nullvektorhoz tartozó pont. Be kell látnunk, hogy ha a ρ függvényre teljesülnek a normaaxiómák, akkor d-re igazak a metrikaaxiómák is. Legyenek $x, y, z \in \mathbb{R}^n$-beli pontok.

1. Legyen $w := y - x$. Ekkor mivel $\rho(w) \geqslant 0$, ezért $d(x, y) \geqslant 0$. $\rho(w) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $w = 0$, azaz $x = y$.

2. Tudjuk, hogy $\rho(\lambda w) = |\lambda|\rho(w)$ minden $\lambda \in \mathbb{R}$ számra teljesül. Legyen $\lambda := -1$. Ekkor $\rho(-(y-x)) = |-1|\rho(y-x)$. Ebből $\rho(x-y) = \rho(y-x)$, azaz $d(y, x) = d(x, y)$.

3. A háromszög-egyenlőtlenségből következik, hogy $\rho(y - x) = \rho(y - z + z - x) \leqslant \rho(y - z) + \rho(z - x)$, amiből $d(x, y) \leqslant d(z, y) + d(x, z)$

Ezzel igazoltuk az állítást.

A 2. állítás következménye, hogy a Minkowski terek metrikus terek. Ez az állítás visszafelé azonban nem igaz. Erre ellenpélda az $\mathbb{R}^n$ diszkrét metrikával (lásd 2. oldal 3. példa) ellátva, amelyben a második feltétel sérül. Ennek belátásához indirekt tegyük fel, hogy létezik olyan norma, mely a diszkrét metrikát indukálja. Ekkor $\lambda \neq 0; 1$ tetszőleges számra, és tetszőleges $x \neq 0$ vektorra

$$1 = \rho(\lambda x) \neq |\lambda|\rho(x) = |\lambda|.$$

Ellentmondásra jutottunk, tehát nincs ilyen norma, mely a diszkrét metrikát indukálja.

3. Állítás. *Az euklidészi sík a rajta definiált távolságfüggvénnyel Minkowski-síkot alkot.*

Bizonyítás: Jelölje az euklidészi normát a szokásos $|\quad|$-jel. A következő pontokban belátjuk, hogy az $\mathbb{R}^2$ euklideszi síkon definiált $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ függvényre teljesülnek a normaaxiómák.

1. A négyzetre emelés miatt $\sqrt{x_1^2+x_2^2} \geqslant 0$ mindig teljesül. Egyenlőség pontosan akkor állhat fenn, ha $x_1, x_2 = 0$, azaz $x = o$.
2. Minden $\lambda \in \mathbb{R}$ számra teljesül a következő:

   $\rho(\lambda x) = \sqrt{(\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2} = \sqrt{\lambda^2(x_1^2+x_2^2)} = |\lambda|\sqrt{x_1^2+x_2^2} = |\lambda|\rho(x)$
3. A háromszögegyenlőtlenség a következőképpen teljesül:

$$|x+y| = \left((x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{2} x_i^2 + \sum_{i=1}^{2} y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{2} x_i y_i\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{2} x_i^2 + \sum_{i=1}^{2} y_i^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{2} x_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{2} y_i^2\right)^{1/2}\right)^{1/2} = \left(\left[\left(\sum_{i=1}^{2} x_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{2} y_i^2\right)^{1/2}\right]^2\right)^{1/2} =$$

$$= (x_1^2+x_2^2)^{1/2} + (y_1^2+y_2^2)^{1/2} = |x| + |y|$$

   A becslésnél a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséget használtuk ki.

A három feltétel teljesül, tehát a fenti távolságfüggvény norma. Ezt a normát nevezzük *euklidészi normának.*

Ugyanígy igazolható, hogy az $\mathbb{R}^n$-en definiált euklidészi norma is norma, tehát az n-dimenziós euklidészi tér is Minkowski-tér.

3. fejezet

Körök, metrikus szakaszok és trigonometria Minkowski-síkokon

A következő fejezetben a Minkowski-síkok néhány érdekességét fogjuk tárgyalni. Ahogy a fejezet címében is említettem először a körökről, főként az egységkörökről lesz szó, azután metrikus szakaszokról, majd röviden bevezetünk trigonometrikus fogalmakat ezeken a síkokon. A fogalmak definiálásához főként Benson [1] könyvét használtam.

3.1. Egységkörök a Minkowski-síkon

Ahogyan az euklidészi síkon definiálni tudjuk az egységkör fogalmát, ugyanúgy megtehetjük ezt a Minkowski-síkok esetén is. A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy mik lehetnek egységkörök, és ezek a síkidomok hogyan jellemzik a Minkowski-síkot. Definiáljuk először is az egységkör fogalmát Minkowski-síkon.

3.1.4. Definíció. *Az $\mathfrak{M}^2$ Minkowski-síkon az origótól $d \leqslant 1$ távolságra lévő pontok halmazát* egységkörnek *nevezzük.*

Az euklidészi síkon az egységkör a szokásos értelemben vett egységkör, azaz az origó középpontú, 1 sugarú kör. A következő állításban összefoglaljuk, hogy hogy néznek ki az egységkörök a Minkowski-síkokon. (Az állításban $\mathbb{R}^2$-en két normát tekintünk, egy Minkowski-normát, és $\mathbb{R}^2$ természetes euklidészi normáját.)

3.1.4. Állítás. *A Minkowski-síkhoz tartozó ρ norma által meghatározott U egységkör egy origót euklidészi értelemben belsejében tartalmazó, origóra szimmetrikus, euklidészi értelemben korlátos, konvex síkidom.*

A bizonyítás előtt definiáljuk a környezet, belső pont, határpont, külső pont, valamint a konvexitás fogalmát.

3.1.5. Definíció. *Egy $\mathfrak{M}$ metrikus térben egy $x \in \mathfrak{M}$ pont $\varepsilon > 0$ sugarú* környezetén *a $\{y \in \mathfrak{M} | d(x, y) < \varepsilon\}$ ponthalmazt értjük. Jele: $K_\varepsilon(x)$*

3.1.6. Definíció. *Legyen $\mathfrak{M}$ metrikus tér, és $K \subset \mathfrak{M}$ tetszőleges halmaz.*

Ekkor $x \in \mathfrak{M}$ belső pontja *K-nak, ha létezik olyan $\varepsilon > 0$ szám, hogy $K_\varepsilon(x) \subset K$, azaz K tartalmazza az x ε sugarú környezetét.*

Az $y \in \mathfrak{M}$ külső pontja *K-nak, ha létezik olyan $\varepsilon > 0$ szám, hogy $K_\varepsilon(y) \subset \mathfrak{M} \setminus K$, azaz K-nak nincs közös pontja az x ε sugarú környezetével.*

Az $z \in \mathfrak{M}$ határpontja *K-nak, ha bármely $\varepsilon > 0$ számra, $K_\varepsilon(z) \cap K \neq \emptyset$ és $K_\varepsilon(z) \cap (\mathfrak{M} \setminus K) \neq \emptyset$.*

3.1.7. Definíció. *Egy $K \subset \mathbb{R}^n$ halmaz* konvex*, ha K bármely két pontját összekötő szakaszt K tartalmazza.*

Bizonyítás: [A 3.1.4. állítás bizonyítása]

Legyen $\mathfrak{M}^2 = (\mathbb{R}^2, \rho)$ Minkowski-sík. Megmutatjuk, hogy a három normatulajdonságból következik az egységkör négy tulajdonsága.

1. A norma első tulajdonsága miatt $\rho(x) \geqslant 0$, és $\rho(x) = 0$ pontosan akkor, ha $x = o$. Tehát, mivel $\rho(o) \leqslant 1$ ezért ez pontja az egységkörnek.

   Belátjuk, hogy origó euklidészi értelemben is belső pont, azaz, létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy minden olyan y vektor melynek euklidészi hossza kisebb, mint ε, benne van az U egységkörben.

   Indirekt tegyük fel, hogy o nem belső pont, ekkor o határpont. A konvexitáselméletből ismert, hogy ekkor az U konvex halmaznak az o határpontjában létezik támaszegyenese. (A támaszegyenes definícióját lásd a 19. oldalon a 3.2.12. definícióban.) Azaz létezik egy olyan o-n átmenő egyenes, mely két félsíkra osztja a síkot, és U-nak az egyik nyílt félsíkban nincs pontja. Vegyünk egy z pontot ebben a félsíkban. Ekkor a $\frac{z}{\rho(z)}$ vektor eleme a nyílt félsíknak, és eleme az U egységkörnek is, ami ellentmondás. Tehát o euklidészi értelemben is belső pont.

Mivel o belső pont, ezért létezik egy olyan $\varepsilon := r$ sugarú euklidészi B kör, melyet U tartalmaz. Legyen $f : \partial B \to \mathbb{R}$ függvény, és legyen $f(v) = \rho(v)$. Belátható, hogy ez a függvény folytonos, (Lipschitz-folytonos), és mivel ∂B korlátos és zárt, ezért a Weierstrass-tétel miatt f felveszi a minimumát, ez legyen $m > 0$. Ekkor, mivel tetszőleges v vektorra igaz, hogy $\rho\left(\frac{v}{|v|}\right) \geqslant m$, ezért $\rho(v) \geqslant m|v|$ teljesül. A bizonyítás befejezéséhez lássuk be a következő lemmát:

3.1.1. Lemma. *Adottak ρ_1 és ρ_2 normák, és a hozzájuk tartozó U_1, U_2 egységkörök. Ekkor valamely $r \in \mathbb{R}^+$ számra $U_1 \subset rU_2$ pontosan akkor, ha bármely $x \in \mathbb{R}^n$ vektorra $\frac{1}{r}\rho_2(x) \leqslant \rho_1(x)$.*

Bizonyítás: Adott egy $x \in \mathbb{R}^n$ vektor. Legyenek e_x^1 és e_x^2 azon x irányú vektorok, melyeknek Minkowski-hossza a ρ_1 illetve ρ_2 norma szerint 1. Ekkor $e_x^1 = \frac{x}{\rho_1(x)}$ és $e_x^2 = \frac{x}{\rho_2(x)}$ Mivel $U_1 \subset rU_2$, ezért az $|e_x^1| \leqslant r|e_x^2|$. Emiatt

$$\frac{1}{r}\frac{1}{|e_x^2|} \leqslant \frac{1}{|e_x^1|},$$

így

$$\frac{1}{r}\rho_2(x) = \frac{1}{r}\frac{|x|}{|e_x^2|} \leqslant \frac{|x|}{|e_x^1|} = \rho_1(x).$$

Ezzel igazoltuk az állítást.

Így a 3.1.1. lemma miatt teljesül, hogy $U \subset \frac{1}{m}B$, tehát U korlátos.

2. A második normatulajdonság teljesülésének következtében (lásd 4. oldal,) az $|\quad|$-jel miatt bármely x vektornak, és ellentettjének a normája ugyanaz. Tehát, ha x eleme az egységkörnek, akkor $-x$ is. Emiatt a síkidom origóra szimmetrikus lesz.

3. Az állítást, hogy a háromszög-egyenlőtlenségből következik az egységkör konvexsége, indirekt bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy x és y az U egységkör pontjai, és tegyük fel, hogy az őket összekötő szakasz egy z pontja U-nak nem pontja. Ekkor a következők teljesülnek:

   $\rho(x) \leqslant 1$, $\rho(y) \leqslant 1$ és $\rho(z) > 1$.

   Mivel z az $\overline{xy}$ szakasz egy pontja, ezért felírható, $z = \frac{ax+by}{a+b}$ alakban, ahol $a, b > 0$ számok. Mivel $\rho(z) > 1$, ezért behelyettesítve:

$$\rho(ax + by) > a + b.$$

   A norma kettes és hármas tulajdonságát kihasználva

$$a\rho(x) + b\rho(y) > a + b.$$

   Majd kihasználva, hogy x és y belső vagy határpontok, következik, hogy

$$a\rho(x) + b\rho(y) \leqslant a + b.$$

   A két egyenlőtlenség együtt nem teljesülhet, tehát ellentmondásra jutottunk.

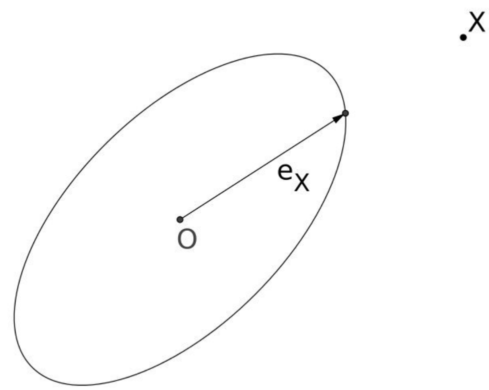
A következő állítás a 3.1.4. állítás megfordítása.

3.1.5. Állítás. *Legyen $U \subset \mathbb{R}^2$ egy nem üres belsejű, origóra szimmetrikus, euklidészi értelemben korlátos és konvex halmaz. Ekkor U meghatároz egy ρ normát, és ezzel egy $\mathfrak{M}^2$ Minkowski-síkot definiál, melynek egységköre az U.*

Bizonyítás: Belátjuk, hogy a síkidom három feltételéből következik a norma három tulajdonsága. Jelölje $|\ \ | : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény egy vektor euklidészi normáját. Az $x \in \mathbb{R}^2$ vektor Minkowski-normáját a következőképpen definiáljuk. Ha $x = o$, akkor $\rho(x) = 0$, különben:

$$\rho(x) := \frac{|x|}{|e_x|} \tag{3.1.1}$$

ahol e_x vektort a következőképpen határozhatjuk meg. Vegyük az origóból induló x irányú félegyenes metszéspontját az U egységkörrel. Pontosan egy ilyen pont létezik,



3.1. ábra.

mert U korlátos, konvex és az origó belső pontja. Az e_x vektor legyen az origóból e pontba mutató vektor. (Lásd 3.1. ábra.)

A bizonyítás előtt oldjuk meg a következő feladatot, melynek eredményét a bizonyításban felhasználjuk.

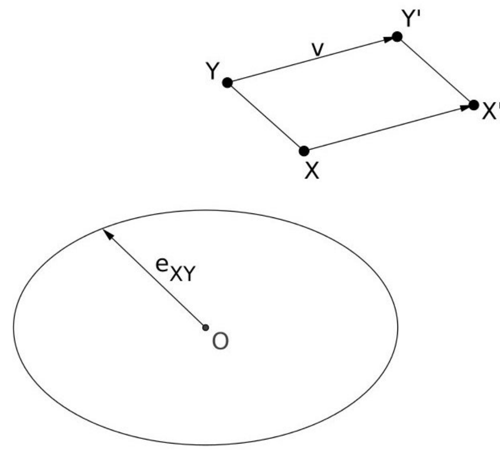
1 Feladat. ***29.3*** *Mutassa meg, hogy minden $\mathbb{R}^2$ feletti eltolás és középpontos tükrözés $\mathfrak{M}^2$ egy izometriája! [1]*

Megoldás:

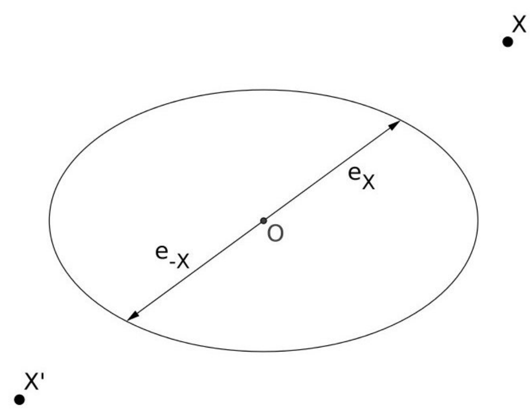
A feladat első részében azt kell belátnunk, hogy minden x, y végpontú szakasz hossza, és $v \neq 0$ vektorral való x', y' eltoltjának hossza megegyezik. (Lásd 3.2. ábra!) Felírható, hogy $x' = x + v$ és $y' = y + v$. Ekkor $y - x = y' - v - x' + v = y' - x'$. Ebből következik, hogy $d(x, y) = \rho(y - x) = \rho(y' - x') = d(x', y')$, tehát az eltolás távolságtartó leképezés.

A feladat második részében megmutatjuk, hogy minden x vektor normája megegyezik a $-x$ vektor normájával. A norma második tulajdonsága miatt $\rho(-x) = \rho(x)$ Tehát az origóra való tükrözés is távolságtartó leképezés. (Lásd 3.3. ábrát!)

A két részmegoldás segítségével bármely k pontra való tükrözésre igaz, hogy a leképezés távolságtartó, hiszen ha a vektort eltoljuk a $-k$ vektorral, tükrözzük az origóra, majd visszatoljuk az k vektorral, akkor éppen a k-ra vett tükörképét kapjuk. Így igazoltuk, hogy tetszőleges pontra vett középpontos tükrözés távolságtartó.



3.2. ábra.



3.3. ábra.

Lássuk a 3.1.5. állítás bizonyításának folytatását!

1. Az első feltétel a 3.1.1 Minkowski-norma definíciójából triviális, mivel $o \in U$. Ekkor $\rho(x) \geqslant 0$ minden x-re teljesül. Pontosan $x = o$ esetén $\rho(o) = 0$ is teljesül.

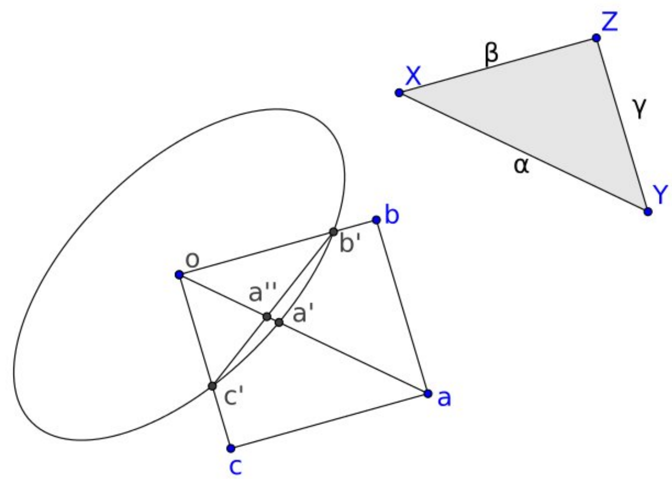
2. A második feltétel bizonyításához először tegyük fel, hogy $\lambda \geqslant 0$. Ekkor

$$\rho(\lambda x) = \frac{|\lambda x|}{|e_x|} = \lambda \frac{|x|}{|e_x|} = \lambda \rho(x)$$

Az 1. feladat második része miatt $\rho(-\lambda x) = \rho(\lambda x) = \lambda \rho(x)$. Így tehát bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén teljesül, hogy $\rho(\lambda x) = |\lambda| \rho(x)$.

3. A háromszög-egyenlőtlenség bizonyításához vegyünk három pontot a síkon, ezek legyenek x, y, z.

   Ha x, y, z kollineárisak, és z az egyenesen x és y között van, akkor teljesül, hogy $|y-x| = |y-z| + |z-x|$, és így $\rho(y-x) = \rho(y-z) + \rho(z-x)$.



3.4. ábra.

   Ha x, y, z nem kollineárisak, akkor háromszöget határoznak meg, ahol az $\overline{xy}$, $\overline{zx}$ és $\overline{yz}$ oldalak hosszai rendre, α, β és γ. (Lásd 3.4. ábra!) Mivel az eltolás távolságtartó transzformáció, ezért a háromszöget eltoljuk a $-x$ vektorral az origóba. Ekkor x képe o, y képe a, és z képe legyen b. Az $\overline{ab}$ oldallal párhuzamosan fektessünk az origón keresztül egy egyenest, és a β oldalt mérjük fel a $a-b$ vektorral megegyező irányba. Így kapjuk a c pontot. Az oa, ob és oc félegyenesek és az U egységkör által meghatározott metszéspontok legyenek rendre a', b' és c'.Ekkor felírható, hogy $a = \alpha a'$, $b = \beta b'$ és $c = \gamma c'$.

   Legyen az oa és a $b'c'$ szakaszok metszéspontja a''. Mivel $a'' \in \overline{oa}$, ezért létezik olyan ν, hogy $a'' = \nu a$, és mivel $a'' \in \overline{b'c'}$, ezért létezik olyan $\lambda \in [0,1]$, hogy

$$a'' = \lambda b' + (1-\lambda)c'$$

   Tudjuk, hogy $a = b + c = \beta b' + \gamma c'$. Ebből

$$a'' = \nu(\beta b' + \gamma c').$$

A két egyenletet egyenlővé téve:

$$\lambda b' + (1-\lambda)c' = \nu\beta b' + \nu\gamma c'.$$

Ebből kapjuk a következő két egyenletet:

$$\lambda = \nu\beta \quad \text{és} \quad (1-\lambda) = \nu\gamma.$$

A két egyenletből kapjuk, hogy

$$\lambda = \frac{\beta}{\beta+\gamma} \quad \text{és} \quad \nu = \frac{1}{\beta+\gamma}.$$

Tehát megkaptuk, hogy

$$a'' = \frac{1}{\beta+\gamma}a = \frac{\beta}{\beta+\gamma}b' + \frac{\gamma}{\beta+\gamma}c'.$$

Ebből következik, hogy mivel az a'' pont a $b'c'$ szakasz pontja, és az egységkör konvex, emiatt az a'' pont az egységkör egy pontja. Mivel rajta van az $\overline{oa}$ szakaszon, emiatt felírható, hogy $a'' = \theta a'$, ahol $0 < \theta \leqslant 1$. Mivel $a'' = \frac{1}{\beta+\gamma}a$, ezért

$$\frac{1}{\beta+\gamma}a = \theta a'.$$

Ezt átrendezve

$$\theta(\beta+\gamma)a' = a = \alpha a'.$$

Ebből

$$\theta(\beta+\gamma) = \alpha \quad \text{amiből} \quad \alpha \leqslant \beta+\gamma$$

azaz teljesül a háromszög-egyenlőtlenség.

3.1.6. Állítás. *Bármely U egységkör meghatároz egy ρ normát, a norma által indukált U' egységkörre teljesül, hogy $U = U'$.*

Bizonyítás: U egységkörhöz rendeljük hozzá a 3.1.1 Minkowski képlettel a ρ normát. Mi lesz az origótól egységnyi távolságra lévő pontok halmaza? $\rho(x) = 1$ pontosan akkor, ha $|x| = |e_x|$ azaz $x = \pm e_x$. Szimmetria miatt legyen $x = e_x$ és $-x = -e_x$. Ekkor éppen a U egységkör körvonalának pontjait kaptuk meg.

3.1.7. Állítás. *Adott ρ normából kiindulva a norma által definiált U egységkörből a Minkowski-képlettel kapott ρ' normára $\rho = \rho'$.*

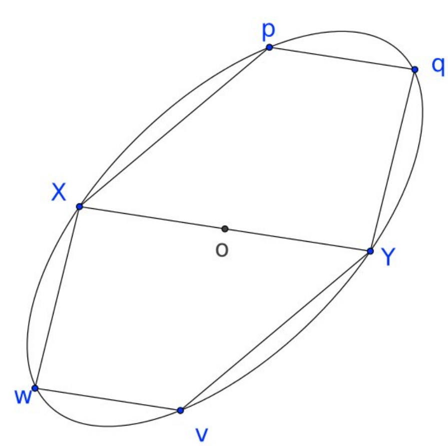
Bizonyítás: A ρ' norma által definiált egységkör szintén az U az előző állítás miatt. Mivel ρ és ρ' normáknak ugyanaz az egységköre, ezért a két norma azonos.

3.1.1. Tétel. *A 3.1.4., 3.1.5. 3.1.6. és 3.1.7. állításokból következik, hogy minden egységkör egyértelműen meghatározza a Minkowski-síkot, és fordítva minden Minkowski-síkhoz megfeleltethető egy egységkör.*

Ez egy fontos tétel, miszerint tetszőleges konvex, középpontosan szimmetrikus síkidomból kiindulva képezhetünk egy távolságfüggvényt, és fordítva, ha tudjuk a távolságfüggvényt akkor meg tudjuk mondani a sík egységkörét. Tehát az egységkörök és a Minkowski-síkokhoz tartozó normák között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van.

Az egységkörnek még egy érdekes tulajdonságát a következő állításban mutatjuk meg.

3.1.8. Állítás. *Az U egységkörvonal Minkowski-hossza mindig nagyobb vagy egyenlő, mint 6.*



3.5. ábra.

Bizonyítás: Legyenek x, y pontok az egységkör körvonalának pontjai, és legyen y az x o-ra vett tükörképe. Vegyük a $\overline{pq}$ húrt az egységkörben úgy, hogy $\overline{pq}$ párhuzamos legyen $\overline{xy}$ húrral, és $|\overline{pq}| = |\overline{xo}|$. Legyenek v és w a p és q pontok origóra vett tükörképei. Ekkor x, w, v, y, q, p pontok, egy H hatszöget határoznak meg, ahol e pontok a hatszög csúcsai.

A $\overline{pq}$ húr hossza 1, hiszen ez az $\overline{xo}$ szakasz egy eltoltja, így $1 = \rho(x) = \rho(p - q)$. Az $xoqp$ négyszög egy paralelogrammát határoz meg, így tehát $\rho(p - x) = 1$, hiszen $\rho(q) = 1$. Hasonlóan a hatszög többi oldaláról is belátható, hogy hosszuk 1. Így a kerülete $L(H) = 6$. A hatszög a U egységkörben benne van, tehát az egységkör kerülete: $L(U) \geqslant 6$.

3.2. Metrikus egyenes, metrikus szakasz

3.2.1. Fogalmak

$\mathbb{R}^n$ vektortérben az egyenes és szakasz fogalmak metrikától függetlenül definiálhatók. Az *egyenest* úgy értelmezzük, mint az $\mathbb{R}^n$ vektortér egy egydimenziós altere, illetve annak egy v vektorral való eltoltja. A továbbiakban ezt E^1-gyel jelöljük, amely jelölésben az indexben szereplő 1-es az altér dimenzióját jelenti.

A szakaszt úgy definiálhatjuk, hogy vesszük a tér a és b pontját, és az $\overline{ab} = \{x | x = (1-t)a + tb \quad 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ halmazt, az *a és b végpontú zárt szakasz*nak nevezzük.

Hogyan definiálhatjuk ezeket a fogalmakat a metrikus terekben? A következő definíciók segítségével a metrikus egyenes és metrikus szakasz fogalmakat adjuk meg.

3.2.8. Definíció. *Legyen $\mathfrak{M} = (M, d)$ egy tetszőleges metrikus tér. Ekkor ha $f : \mathbb{R} \to \mathfrak{M}$ egy izometria, akkor $f(\mathbb{R})$-et* metrikus egyenesnek *nevezzük $\mathfrak{M}$-ben.*

3.2.9. Definíció. *Legyen $f : I \to \mathfrak{M}$,ahol $I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, egy izometria I és $f(I)$ között, és $f(\alpha) =: a$ és $f(\beta) =: b$. Ekkor az $f(I)$-t az a és b végpontú* metrikus szakasznak *nevezzük.*

Jogosan merül fel a kérdés, hogy vajon a metrikus egyenesek és a hagyományos egyenesek ugyanazok-e. Könnyen belátható, hogy tetszőleges Minkowski-térben minden hagyományos egyenes metrikus egyenes, viszont fordítva nem igaz az állítás. (Például létezik olyan Minkowski-sík, amelyben az $\arctan x$ függvény grafikonja is metrikus egyenes.)

Definiáljuk, hogy mit jelent ha egy pont metrikusan két másik adott pont között van. Erre a fogalomra többször szükségünk lesz további állításokban, a metrikus szakaszok vizsgálatakor.

3.2.10. Definíció. *Legyen $\mathfrak{M} = (M, d)$ metrikus tér, és adottak $a, b \in \mathfrak{M}$ pontok. Egy $c \in \mathfrak{M}$ pont* metrikusan az a és b pontok között van*, ha teljesül, hogy $d(a, c) + d(c, b) = d(a, b)$.*

A definíció bevezetése után kimondhatjuk a következő állítást.

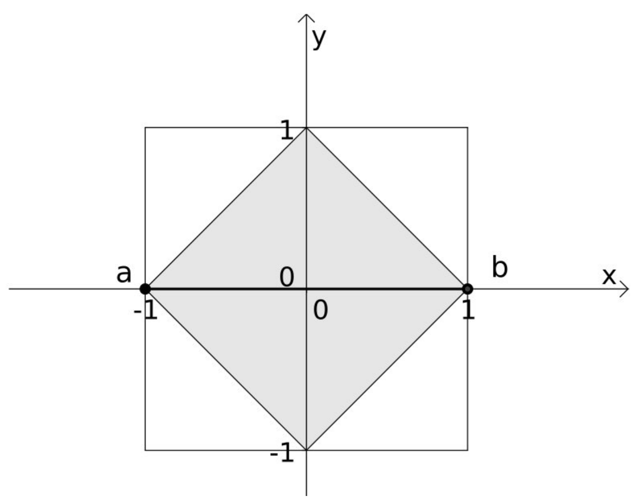
3.2.9. Állítás. *Legyen* $\mathfrak{M}(M, d)$ *metrikus tér, és* $m \in \mathfrak{M}$ *egy* a *és* b *végpontú metrikus szakasz. Ekkor bármely* $c \in m$ *pontra igaz, hogy metrikusan az* a *és* b *pontok között van.*

Bizonyítás: Mivel m metrikus szakasz $\mathfrak{M}$-ben, ezért létezik olyan $I := [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, és $f : I \to \mathfrak{M}$ izometria, hogy I képe m, $f(\alpha) = a$ és $f(\beta) = b$. Tudjuk, hogy bármely $\gamma \in I$ számra igaz, hogy $\gamma - \alpha + \beta - \gamma = \beta - \alpha$. Mivel f izometria, ezért igaz, hogy $\gamma - \alpha = d(a, c)$, $\beta - \gamma = d(b, c)$ és $\beta - \alpha = d(a, b)$. Ebből következik, hogy

$$d(a, c) + d(c, b) = d(a, b)$$

tehát c pont metrikusan az a és b pontok között van.

Az állítás megfordítása kimondja, hogy ha vesszük az összes metrikusan a és b pontok közötti pontok halmazát, akkor azok egy metrikus szakasz pontjai lesznek. Ez a megfordítás viszont nem igaz. Ellenpéldaként vegyük a $d(a, b) = \max(|b_1 - a_1|; |b_2 - a_2|)$



3.6. ábra.

metrikát. (Azt, hogy d metrika a 26. oldalon a 4.2.11. állításban belátjuk.) Vegyük a koordinátarendszerben az $a(-1, 0)$, és a $b(1, 0)$ pontot, ezeket a 3.6 ábra mutatja. Mik lesznek az a és b pontok közötti pontok?

Belátható, hogy ha vesszük azt a négyzetet, melynek csúcsai a, b illetve $c(0,1)$ és $d(0,-1)$, akkor ennek a négyzetnek minden belső pontja metrikusan az a és b pontok között van. Mivel ezek négyzetet határoznak meg, topológiailag belátható, hogy nem létezik olyan izometria, melynek segítségével szakasz képe négyzet lenne.

3.2.2. Metrikus és hagyományos szakaszok kapcsolata

A következő definíció és a hozzá tartozó tétel segítségével fogunk szükséges és elégséges feltételt adni arra a kérdésre, hogy a metrikus egyenesek mikor feleltethetők meg a hagyományos egyeneseknek. Definiáljuk elsőként a szigorúan konvex halmaz fogalmát!

3.2.11. Definíció. *Egy halmaz $\mathbb{R}^2$-ben* szigorúan konvex*, ha tetszőleges támaszegyenese legfeljebb egy pontban metszi.*

3.2.12. Definíció. *Egy $H \subset \mathfrak{M}^2$ halmaz* támaszegyenesén *értünk egy olyan egyenest, mely metszi H-t, de nem metszi a belsejét.*

3.2.2. Tétel. *Legyen az $\mathfrak{M}^2$ Minkowski-sík U egységköre szigorúan konvex, és legyenek $x, y \in \mathbb{R}^2$. Jelölje $d := d(x,y)$ a két pont távolságat. Ekkor tetszőleges $\lambda \in [0,1]$ számhoz pontosan egy olyan u pont van, melyre $d(x,u) = \lambda d$ és $d(y,u) = (1-\lambda)d$.*

Bizonyítás: Ha x és y tetszőleges pontok, akkor, mivel az eltolás távolságtartó leképezés, megtehetjük, hogy mindkét pontot eltoljuk az $-x$ vektorral. Így a x az origóba kerül, y képe pedig legyen y'. Vegyük az o középpontú λd Minkowski-sugarú U_1, és az y' középpontú $(1-\lambda)d$ sugarú U_2 gömböt. Az $int(U_1)$ és az $int(U_2)$ ponthalmazok metszete üres. Ennek belátásához indirekt tegyük fel, hogy van olyan u pont, hogy $u \in int(U_1) \cap int(U_2)$. Ekkor, mivel $u \in int(U_1)$, ezért $d(o,u) < \lambda d$, és mivel $u \in int(U_2)$, ezért $d(u,y') < (1-\lambda)d$. Ekkor

$$d = d(o,y') = d(o,u) + d(u,y') < d,$$

ami ellentmondás.

Tehát a két alakzat csak határpontban metszi egymást. Egy ismert konvexitáselméleti állítás szerint létezik olyan támaszegyenes, mely a közös pontokban mindkettőt metszi. Az egységkör szigorú konvexitása miatt viszont pontosan egy ilyan közös u pont van, melyre a támaszegyenes illeszkedik.

3.2.1. Következmény. *A 3.2.2. tétel következménye, hogy az egységkör szigorú konvexitása esetén bármely metrikusan x és y között lévő pontok halmaza pontosan az x, y végpontú szakasz pontjaival egyezik meg.*

Bizonyítás: Egyrészt a 3.2.9. állítás miatt teljesül, hogy ha z pont az $\overline{xy}$ szakasz egy pontja, akkor metrikusan x és y között van.

Másrészt tegyük fel, hogy z metrikusan x és y között van, és $d(x, y) = d$. Ekkor létezik olyan λ, hogy $d(x, z) = \lambda d$ és $d(y, z) = (1 - \lambda)d$. Ekkor a a 3.2.2. állítás bizonyítása miatt a két környezet csak az $\overline{xy}$ szakaszon metszheti egymást, különben két metszéspont lenne.

3.2.2. Következmény. *A 3.2.1. következmény egy következménye, hogy ha az egségkör szigorúan konvex, akkor a metrikus szakaszok megegyeznek a hagyományos szakaszokkal, és így a metrikus egyenesek a hagyományos egyenesekkel.*

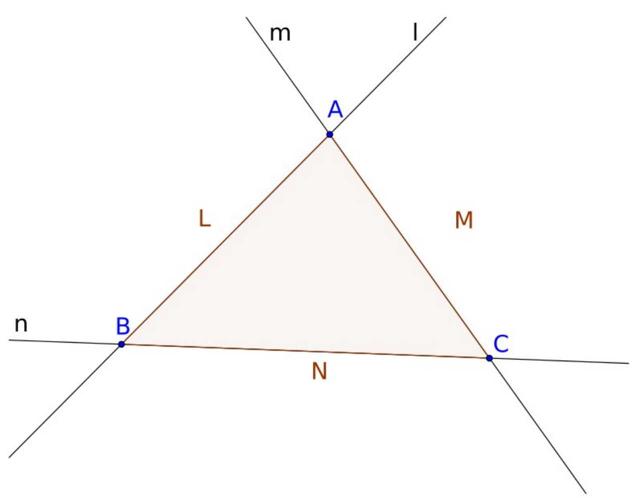
3.3. Minkowski-szinusz

Röviden említést teszünk a Minkowski-síkon értelmezett szinusz fogalmáról is. A Minkowski-síkon annak ellenére meg tudjuk adni ezt a fogalmat, hogy a szöget nem definiáltuk előtte. Ebben a konstrukcióban nagyon nehéz lenne pontosan meghatározni a szöget, hiszen még a merőlegesség fogalma sem könnyen definiálható, és nem is szimmetrikus tulajdonság. A definíciót tehát két egyenes viszonyából adjuk meg. A szinusz bevezetéséhez először ismerkedjünk meg a Minkowski-terület fogalommal.

3.3.13. Definíció. *Legyen M részhalmaza $\mathfrak{M}^2$-nek. M* Minkowski-területét *a következőképpen definiáljuk:*

$$|M| := \frac{4}{|\beta(U)|_J}|M|_J$$

Ahol $|M|_J$ az M halmaz Jordan-mértékét jelenti, a $|\beta(U)|_J$ pedig az egységkör köré rajzolt minimális paralelogramma Jordan-mértékét. (Minimális paralelogramma alatt értsük az egységkör köré rajzolt összes paralelogramma közül azt, amelynek a legkisebb az euklidészi területe.)



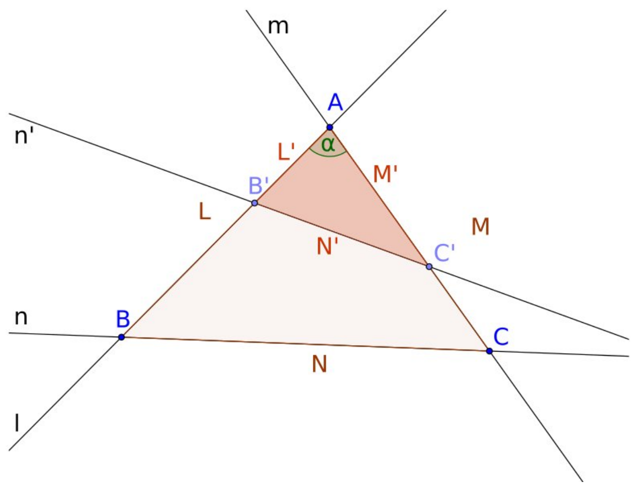
3.7. ábra.

3.3.14. Definíció. *Legyenek egy ABC háromszög L, N, M Minkowski hosszú oldalait támasztó egyenesei rendre l, n, m. (Lásd 3.7. ábrát!) Ekkor az l és m egyenesek* *által meghatározott szöghöz tartozó* Minkowski-szinuszt $sm(l,m)$ *a következőképpen definiáljuk:*

$$sm(l,m) = \frac{2|\triangle|}{LM}$$

3.3.10. Állítás. *Adott l, m egyenesek esetén az egyenesekhez tartozó Minkowski-szinusz nem függ attól, hogy a $B \in l, C \in m$ pontokat hogyan választom meg.*

Bizonyítás: A bizonyításhoz lásd a 3.8. ábrát!



3.8. ábra.

Legyen az l és m által bezárt (euklidészi értelemben vett) szög α. Legyen az $l \cap m = A$, és legyen $B \in l$ és $C \in m$. Ekkor $sm(l,m) = \frac{2|\triangle|}{LM}$. Vegyük ugyanezt a két egyenest, de a B, C csúcsok helyett az egyenesen vegyük a B', C' csúcsokat. Ekkor a kapott $AB'C'\blacktriangle$ oldalainak Minkowski-hosszai legyenek L', N', M'. Ekkor $sm(l,m) = \frac{2|\blacktriangle|}{L'M'}$. Belátható, hogy

$$\frac{2|\triangle|}{LM} = \frac{2|\blacktriangle|}{L'M'}$$

A Minkowski-terület definíciója miatt

$$|\triangle| = \frac{4}{\beta(U)} L_e M_e \sin\alpha \quad \text{és} \quad |\blacktriangle| = \frac{4}{\beta(U)} L'_e M'_e \sin\alpha$$

ahol az e index a szakaszok euklidészi hosszát jelenti. Legyen az $|e_{AB}| = |e_{AB'}| = \lambda$, az $|e_{AC}| = |e_{AC'}| = \mu$. Ekkor

$$L_e = \lambda L \quad \text{és} \quad M_e = \mu M$$

Ekkor az is igaz, hogy

$$L'_e = \lambda L' \quad \text{és} \quad M'_e = \mu M'$$

Ezeket behelyettesítve a fenti egyenletbe azonosságot kapunk, tehát igaz, hogy két egyenest jellemző Minkowski-szinusz csak a két egyenes helyzetétől függ, és az egyeneseken felvett pontoktól független.

A következő két feladat arra irányul, hogy megmutassuk, hogy a Minkowski-szinusz a hagyományos értelemben vett szinusz általánosítása. A 2. feladatban megmutatjuk, hogy a Minkowski-szinusz definíció az euklidészi síkon a hagyományos definíciót adja, a 3. feladatban pedig megmutatjuk, hogy Minkowski-síkon is igaz a szinusz-tétel.

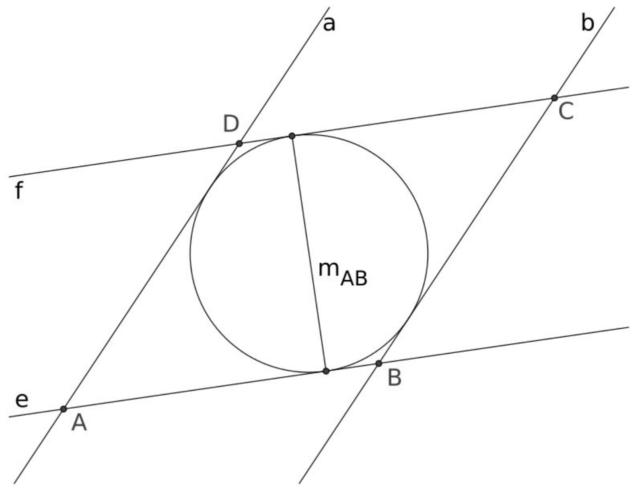
2 Feladat. *Mutassuk meg, hogy ha $\mathfrak{M}^2$ az euklidészi sík, akkor a Minkowski-szinusz megegyezik a hagyományos értelemben definiált szinusszal!(**29.14** [1])*

Megoldás:

$$sm(l,m) = \frac{2|\triangle|}{LM} = 2\frac{4}{\beta(U)}\frac{\lambda L \mu M}{2}\sin\alpha\frac{1}{LM} = \frac{4}{\beta(u)}\lambda\mu\sin\alpha$$

Euklidészi tér esetén $\lambda = \mu = 1$. Be kell látnunk, hogy a kör köré írt legkisebb területű paralelogramma területe 4.

Rögzítsük az egységkört érintő a, b párhuzamos egyenespárt. (Lásd a 3.9 ábrát!) Vegyünk fel tetszőlegesen egy e, f párhuzamos egyenespárt, melyek szintén érintik a kört, de nem párhuzamosak a, b-vel. Ekkor négy metszéspontot kapunk, ezek legyenek a 3.9. ábra szerint A, B, C, D. Az e, f egyenesek távolsága, ami a paralelogramma magassága is egyben $m_{AB} = 2$, mert érintik a kört. Tehát az $ABCD$ paralelogramma területe csak az $\overline{AB}$ szakasz hosszától függ. Ez akkor minimális, ha e és f merőlegesek a- ra és b-re, azaz a paralelogramma négyzet, melynek területe 4.



3.9. ábra.

3 Feladat. *Mutassa meg, hogy az $\mathfrak{M}^2$-ben igaz a szinusz-tétel! (**29.14** [1])*

Belátható, hogy

$$\frac{sm(l,m)}{sm(m,n)} = \frac{N}{L}$$

teljesül. A definíciót alkalmazva kapjuk, hogy

$$\frac{2|\triangle|}{LM}\frac{MN}{2|\triangle|} = \frac{N}{L}$$

Szimmetria miatt ugyanígy belátva teljesül, hogy

$$sm(l,m) : sm(m,n) : sm(l,n) = N : L : M$$

4. fejezet

Az ℓ_p terek

A Minkowski-terek egy speciális családját alkotják az ℓ_p terek. Először lássunk három példát ezekre a terekre kétdimenziós térben, majd általánosítjuk őket, és végül n-dimenzióra is kiterjesztjük. E fejezet kidolgozásához főként Sikolya Eszter [2] jegyzetét használtam.

4.1. Példák ℓ_p normára:

Vegyük a következő három normát, amelyekben az x_1, x_2 az $x \in \mathbb{R}^2$ vektor koordinátái.

1. $\rho_1(x) := |x_1 + x_2|$
2. $\rho_2(x) := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$
3. $\rho_\infty(x) := \max(|x_1|; |x_2|)$

Az $\mathbb{R}^2$ a ρ_1, ρ_2 és ρ_∞ normákkal rendre az ℓ_1^2, ℓ_2^2 és ℓ_∞^2 tereket alkotják. Azt, hogy a fenti három példa normát határoz meg, általánosabban fogjuk belátni.

4.2. ℓ_p normák általánosítása

A fenti példák általánosítását a következő norma adja meg:

$$\rho_p(x) := (\sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p}),$$

ahol $p \geqslant 1$. Ez a norma adja az ℓ_p^2 teret $\mathbb{R}^2$ felett. A normát n-dimenzióban definiálva kapjuk, hogy:

$$\rho_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{és} \quad \rho_p(x) := \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i^p|\Big)^{1/p}$$

ahol $p \leqslant 1$. Ekkor $\ell_p^n = (\mathbb{R}^n, \rho_p)$.

4.2.11. Állítás. *Ez a függvény egy norma.*

Bizonyítás: Az állítást két dimenzióban látjuk be, de n-dimenzióban ugyanúgy belátható.

1. Az $|\quad|$-jel miatt triviálisan nemnegatív a norma. Ha a normára

   $$0 = \rho_p(x) = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p}$$

   teljesül, akkor

   $$0 = |x_1|^p + |x_2|^p.$$

   Ez csak akkor igaz, ha $x_1 = 0$ és $x_2 = 0$, azaz $x = o$.

2. x vektor λ-szorosára

   $$\rho_p(\lambda x) = \sqrt[p]{|\lambda x_1|^p + |\lambda x_2|^p}.$$

   λ-t kiemelve:

   $$\rho_p(\lambda x) = \sqrt[p]{|\lambda|^p(|x_1|^p + |x_2|^p)} = |\lambda|\sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p} = |\lambda|\rho_p(x).$$

3. Az utolsó feltétel bizonyítását jelen dolgozatban nem közöljük. A bizonyításban a Hölder-egyenlőtlenséget használjuk, melynek segítségével bizonyítható, hogy

   $$\rho_p(x+y) = \sqrt[p]{|x_1 + y_1|^p + |x_2 + y_2|^p} \leqslant \rho_p(x) + \rho_p(y)$$

A következő állításban belátjuk, hogy a fejezet elején harmadik példaként említett ρ_∞ norma a p végtelenben vett határértékeként származtatható, a ρ_p általános alakjából.

4.2.12. Állítás.

$$\lim_{p\to\infty} \rho_p(x) = \rho_\infty(x).$$

Bizonyítás: Be kell látni, hogy

$$\lim_{p\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p} = \max_{i=\{1\dots n\}}(|x_i|).$$

Ezt az analízis eszközeivel fogjuk megtenni. Tegyük fel, hogy $|x_m| = \max_{i=1\dots n}(|x_i|)$. Ekkor

$$\lim_{p\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p} = \lim_{p\to\infty}\sqrt[p]{|x_1|^p+|x_2|^p+\dots+|x_n|^p} =$$
$$= \lim_{p\to\infty}\sqrt[p]{|x_m|^p\left(\left|\frac{x_1}{x_m}\right|^p+\left|\frac{x_2}{x_m}\right|^p+\dots+\left|\frac{x_n}{x_m}\right|^p\right)} =$$
$$= \lim_{p\to\infty}|x_m|\sqrt[p]{q_1^p+q_2^p+\dots+q_n^p+1}$$

ahol $0 < q_i := |\frac{x_i}{x_m}| < 1$ és $i = \{1\dots n\}$ de $i \neq m$.

A

$$\lim_{p\to\infty} q^p = 0 \quad \text{ha} \quad 0 < q < 1$$

nevezetes határérték miatt minden i-re

$$\lim_{p\to\infty} q_i^p = 0.$$

Tehát

$$\lim_{p\to\infty}|x_m|\sqrt[p]{q_1^p+q_2^p+\dots+q_n^p+1} = \lim_{p\to\infty}|x_m|\sqrt[p]{0+0+\dots+0+1} = |x_m| = \max_{i=1\dots n}(|x_i|).$$

Így tehát megkaptuk, hogy az eredetileg példaként bevezetett ρ_∞ norma az ρ_p norma ∞-ben vett határértékeként áll elő.

Az általánosítás során feltettük, hogy $p \geqslant 1$. Nézzük meg, hogy ρ_p norma miért nem jó $p < 1$-re.

Ha $0 < p < 1$ akkor a háromszögegyenlőtlenség feltétele nem teljesül. Lássunk erre egy ellenpéldát! Legyen

$$x := \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \text{és} \quad y := \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Ekkor, ha $p < 1$, akkor

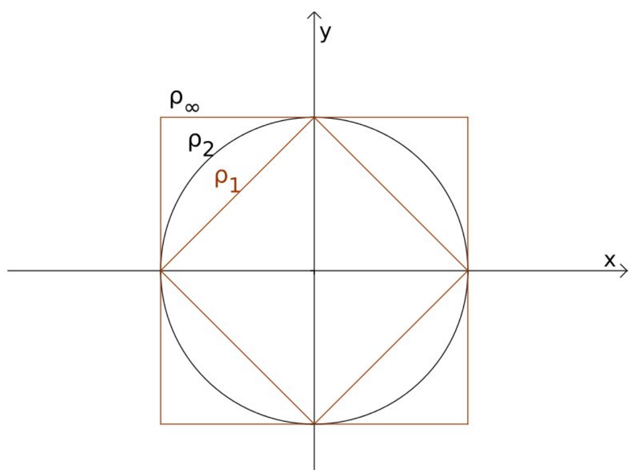
$$(|1+0|^p + |0+1|^p)^{1/p} = 2^{1/p} > 2 = (1^p + 0^p)^{1/p} + (0^p + 1^p)^{1/p}.$$

Ha $p < 0$, akkor már az első feltétel sem teljesül, ugyanis a nullvektor normája nem értelmezhető.

Összevetve ezen eredményeket az első fejezetben példaként felhozott (1-es és 2-es példa) metrikákkal azt kapjuk, hogy azok valóban metrikák, hiszen normák is.

4.3. Az ℓ_p normákhoz tartozó egységkörök

Az ρ_1, ρ_2 és ρ_∞ normákhoz tartozó egységköröket a 4.1 ábra mutatja.



4.1. ábra.

Ha p-t növeljük, akkor az egységkör egyre nagyobb lesz, de a középpontja mindig az origó marad, és a $(0, \pm 1)$, valamint a $(\pm 1, 0)$ pontokat mindig tartalmaznia kell. Ezt következő tétel segítségével látjuk be.

4.3.3. Tétel. *Ha $p < q$ akkor az ℓ_p^n egységkör benne van a ℓ_q^n egységkörben.*

Bizonyítás:

Be kell látnunk, hogy ha $1 \leqslant p < q$, akkor ha x egységvektor az ρ_p norma szerint, akkor a $\rho_q(x) \leqslant 1$. Az állítást n-dimenzióban látjuk be.

Mivel x egységvektor a ρ_p norma szerint, ezért

$$1 = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{1/p}$$

Ekkor

$$1 = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)$$

Ebben az esetben minden x_i-ről állítjuk, hogy $0 \leqslant |x_i| \leqslant 1$, hiszen ha valamelyik tag 1-nél nagyobb lenne, akkor az egyenlőség nem teljesülhetne. Be kell látnunk, hogy

$$1 \geqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q\Big)^{1/q}$$

azaz

$$1 \geqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q\Big)$$

Ekkor

$$|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p \geqslant |x_1|^q + |x_2|^q + \cdots + |x_n|^q$$

feltételnek kell teljesülnie.

$p < q$ esetén $|x_i|^p \geqslant |x_i|^q$ minden $i = 1 \ldots n$-re, az $f(x) = a^x$ függvény (ahol $0 < a < 1$) szigorúan monoton csökkenése miatt, így az egyenlőtlenség valóban teljesül. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha pontosan az egyik $|x_i|$ koordináta 1. Ezekben a pontokban tehát az egységgömbök érintik egymást.

Így tehát beláttuk, hogy $\rho_q(x) \leqslant 1$, következésképpen a ℓ_p^n egységgömb benne van az ℓ_q^n egységgömbben.

Befejezés

Jogosan teheti fel az olvasó a kérdést, hogy mindez "Szép, szép, de hol használjuk?" Hadd említsem meg itt a befejezésben a fenti geometria egy fontos alkalmazását.

Az ℓ_p normák közül a ρ_1 norma használatára egy különleges geometria a "taxicab" geometria épül. Ennek lényege, hogy ha egy város utcáit egymásra merőlegesen építik ki, akkor mekkora utat kell megtennie egy taxinak, hogy adott pontból egy másikba eljusson. Rengeteg érdekes problémával találkozhatunk ebben a konstrukcióban.

E példa mutatja, hogy ez a geometriai modell szépségén túl alkalmazásokban is könnyen előfordulhat.

Örülök, hogy megismertethettem az olvasót ezzel a különleges geometriával. Remélem az olvasó, aki végigolvasva a dolgozatot eljutott a befejezésig ugyanazzal a meglepődéssel áll, ahogy én álltam neki a téma kidolgozásának. Remélem sikerült átjuttatnom ugyanazt a lelkesedést, melyet én is megtapasztaltam, amikor a témába beleástam magam. Nem pusztán csak a matematikai oldal miatt, hanem ahogyan a bevezetőben is említettem, ez a szemléletmód arra tanít minket, hogy a világot egy új szemüvegen keresztül vizsgáljuk. Tudomásul vegyük, hogy nem csak egy igazság létezik, hiszen azon kívül amit én látok, vagy tapasztalok, létezhetnek más igazságok is, melyek ugyanúgy érvényesek. Ugyanerre a felismerésre jutott Bolyai, amikor megalkotván a szférikus geometriát, egy ugyanolyan érvényű igazságot hozott létre, mint amilyen az addig érvényben lévő euklidészi geometria volt. Mindkét konstrukció ellentmondásmentes, tehát igazság. Ha az ember máshonnan indul, máshova juthat el.

Ugyanígy a Minkowski-geometriában, más távolságfüggvényből kiindulva más és más konstrukciókat kaptunk.

Próbáljuk meg a világra így tekinteni, amikor furcsa dolgokkal találkozunk. Lehet, hogy elsőre érthetetlen, másodszorra lenyűgöző, de harmadszorra már ellentmondásmentesen beépíthető az addigi rendszerünbe, ha egy kicsit magasabbról, általánosabban szemléljük.

Irodalomjegyzék

[1] R. V. Benson: *Euclidean geometry and convexity*. McGraw-Hill Book Company, United States of America, 1966. 229-253

[2] Sikolya E.: *Matematika BSc tanárszak, Analízis III. előadasjegyzet 2010/2011. őszi félév*. ELTE TTK Alkalmazott Analízis Számításmatematikai Tanszék, 2011. október 11. 27-29