

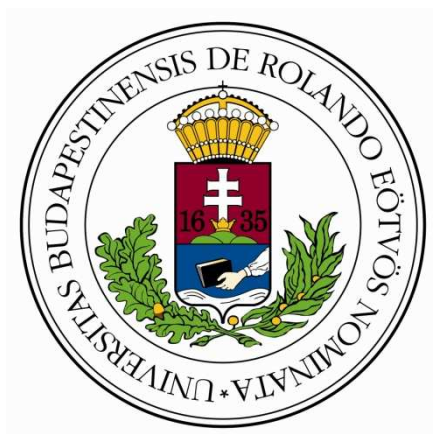
A sorozatok tanítása

Szakdolgozat

Készítette: Knyazovics Anna

Matematika BSc, Tanári szakirány

Témavezető: Munkácsy Katalin



Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi kar

2013

Tartalom

Bevezetés.....	3
Első feladatsor	7
Második feladatsor	19
Köszönetnyilvánítás	30
Felhasznált irodalom	31

Bevezetés

Manapság, a XXI. században a gyors ütemben fejlődő technikai vívmányoknak, és az internetnek köszönhetően megváltozott az információszerzés módja, ez az iskolák életét is befolyásolja. A NAT is kimondja, hogy az iskola nem az információszerzés, hanem az információ rendszerezés helyszíne.

A diákok figyelmét nehéz elterelni a TV, és számítógép színes, mozgón világáról, így ahhoz, hogy más iránt is felkeltsük az érdeklődésüket új ötletekre van szükség. Ezt az is erősíti, hogy ma már mást jelent a diákok számára, ha egyest kapnak. A rossz jegyek nem feltétlenül kényszerítik őket arra, hogy komolyabban foglalkozzanak az iskolai tananyaggal. Ennek köszönhetően a tanári munkában egyre fontosabbá válik az olyan eszközök ismerete, amellyel motiválni lehet a diákokat.

Nem kívánok széles vitát nyitni az előbbiekkal, mivel ez a jelenség viszonylag új, így nincsenek statisztikai eredmények, amelyek segítenék ezen állítás bizonyítását, vagy cáfolását, valamint azért sem, mert motiváltság nem is rendelkezik mérőszámmal.

A dolgozatomban két példát szeretnék mutatni arra, hogyan lehet iskolai feladatokból kiindulva a szokásostól eltérő utakat bejárva ugyanazokat bemutatni és így felkelteni a diákok érdeklődését. egye

Az első, négyzetekkel foglalkozó feladat egy középiskolás feladatgyűjteményből származik, célja a végtelen mértani sorozat egyfajta bemutatása. A feladat színesebbé tételéhez Mezei István ötletét, a bicikliző hangyákat használtam. A mesés körítésnek köszönhetően a példa jobban illeszkedik a középiskolásoknak szóló feladatok közé, illetve a száraz matematikai megfogalmazást elkerülve a diákokhoz is közelebb áll. Kitaláltam egy feladatsorozatot, melynek különböző változatai között találkozhatunk izgalmasabb, és teljesen szokványos, unalmasabb feladatokkal is. A további változatok megoldásához ugyanazok a kompetenciák szükségesek, mint az eredeti feladat megoldásához, illetve néhány nehezebb változatot fel lehet adni a tehetségesebb diákoknak, ezek több kreativitást is igényelnek.

A másik feladat az Árpád Gimnáziumban évente megrendezésre kerülő, 5-6. osztályosoknak szóló Amfiteátrum Kupa feladatait tartalmazó feladatgyűjteményből származik. Az általam kiválasztott feladatot a 2000-ben megrendezésre kerülő versenyen tűzték ki. Ennek a feladatnak a kapcsán megmutatom, hogy érdekes iskolai feladatok tudatos elkészítéséhez milyen egyetemi háttér szükséges (pl. körosztási polinomok).

Az első feladatsorban előkerül a kerület és terület számítás, illetve más geometriai háttér, melyek segítségével olyan feladatokat adhatunk, melyek a mértani sorozatok

összegképletére kérdeznék rá. Az első feladat a szövegtől eltekintve a zöld könyvből származik. A mellé kitalált feladatsor mind saját feladat, saját megoldásokkal.

A második feladatsor feladataiban a lineáris rekurzió megoldása kapcsán merülnek fel kérdések. Egy általános iskolás úgy oldja meg a feladatot, hogy próbálgatással észreveszi, hogy a sorozat periodikus. Az egyetemi háttérrel felhasználva a lineáris rekurzió képletét a karakterisztikus egyenlet gyökeivel adom meg, ebben a feladatban a karakterisztikus egyenlet gyökei 6. egységgyökök lesznek.

Ekkor felmerül a kérdés, hogy van-e még olyan rekurzió, aminek a megoldása periodikus. A fejezet eredményeként láthatjuk, hogy egy lineáris rekurzió által meghatározott sorozat pontosan akkor periodikus, ha a karakterisztikus egyenlete különböző körosztási polinomok szorzata. Ennek kapcsán megmutatjuk az összes legfeljebb negyedfokú, periodikus lineáris rekurziót. Magasabb fokút nem érdemes feladni, mert így a megoldás elveszítené szépségét.

A dolgozatban nem ismertetjük a lineáris rekurzió háttéréhez szükséges ismereteket, ez méltatlan lenne a dolgozathoz

Olyan középiskolai feladatokat is választhattunk volna, amit meg lehet oldani iskolás, illetve egyetemi eszközökkel is, de ekkor a megoldás nagy valószínűséggel erőltetett lenne, mint a most következő KöMaL-ból származó példában:

Egy d differenciájú számtani sorozatban $a_1 = 1$ és $a_n = 81$. Egy q hányadosú mértani sorozatban $b_1 = 1$ és $b_n = 81$. Tudjuk még, hogy $\frac{q}{d} = 0,15$. Adjuk meg az összes ilyen sorozatot. (2009. C.942.)

Megoldás iskolai eszközökkel:

A számtani és a mértani sorozat n -edik tagjára vonatkozó képlet alapján tudjuk, hogy:

$$81 = 1 + (n - 1) \cdot d$$

és

$$81 = 1 \cdot q^{n-1},$$

ezekből, mivel $n - 1 \geq 1$,

$$d = \frac{80}{n-1}, \text{ tehát}$$

$$\frac{q}{\frac{80}{n-1}} = 0,15, \text{ innen}$$

$q = \frac{12}{n-1}$, mivel $81 = 1 \cdot q^{n-1}$, ezért

$$81 = \left(\frac{12}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Tudjuk, hogy $2 \leq n$, és mivel ha $n \geq 13$, akkor $\frac{12}{n-1} \leq 1$, tehát $\left(\frac{12}{n-1}\right)^{n-1} \leq 1$, ha $n = 13$, akkor $\left(\frac{12}{n-1}\right)^{n-1} = 1$, ezért

$$2 \leq n \leq 12$$

A KöMaL-ban szereplő megoldás alapján, az eseteket végigpróbálgatva megkapjuk, hogy csak $n = 5$ lehet a megoldás, ezt behelyettesítve kapjuk, hogy $q = 3$, $d = 20$. Tehát csak ez az egy sorozat teljesíti a feltételeket.

Megoldás egyetemi eszközökkel:

Az analízis eszközeit felhasználva lehetőség adódik, hogy képet kapjunk arról, hogy milyen lehet a függvény grafikonja, amin a sorozat tagjait ábrázolni tudjuk, ehhez az $f(x) = \left(\frac{12}{x-1}\right)^{x-1}$ függvény vizsgálatára van szükségünk. Keressük meg a függvény szélső értékeit a $[2; 12]$ intervallumon:

Mivel ez egy zárt intervallumon folytonos függvény, ezért a Weierstrass-tétel szerint a függvénynek van abszolút minimuma és maximuma ezen az intervallumon, tehát a szélsőérték létezik. Az intervallum széléin a következő értékeket veszi fel:

$$f(2) = \left(\frac{12}{2-1}\right)^{2-1} = 12 \text{ és } f(12) = \left(\frac{12}{12-1}\right)^{12-1} \approx 2,60$$

Meg kell nézni, hol nulla a derivált, tudjuk, hogy $x - 1 > 0$, $\left(\frac{12}{x-1}\right) > 0$:

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{12}{x-1}\right)^{x-1}\right)' &= \left(e^{(x-1) \cdot \ln\left(\frac{12}{x-1}\right)}\right)' = \\ e^{(x-1) \cdot \ln\left(\frac{12}{x-1}\right)} \cdot \left(\ln\left(\frac{12}{x-1}\right) + (x-1) \frac{1}{\frac{12}{x-1}} \left(-\frac{12}{(x-1)^2}\right)\right) &= \\ = \left(\frac{12}{x-1}\right)^{x-1} \cdot \left(\ln\left(\frac{12}{x-1}\right) - 1\right) \end{aligned}$$

$\left(\frac{12}{x-1}\right)^{x-1} \cdot \left(\ln\left(\frac{12}{x-1}\right) - 1\right) = 0$, ha valamelyik tényezője 0, mivel $\left(\frac{12}{x-1}\right)^{x-1} > 0$, a következő kell:

$$\ln\left(\frac{12}{x-1}\right) = 1, \text{ vagyis}$$

$$e = \left(\frac{12}{x-1}\right), \text{ mivel}$$

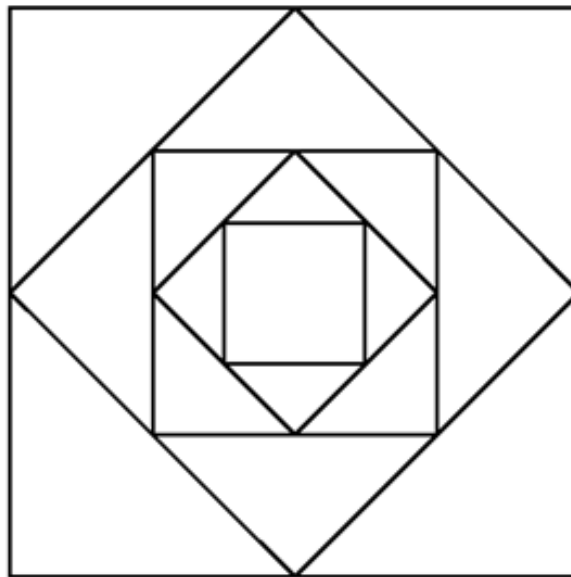
$e \approx 2,71828 \dots$, ezért $5 \leq x \leq 6$.

A bal oldalon szigorúan monoton nő, a jobb oldalon szigorúan monoton csökken a függvény. Most egész megoldásokat keresünk, éppen ezért a függvény a 81-et két helyen veheti fel, a jobb illetve a bal oldalon. Az $x = 5$ helyen veszi fel a 81-et, az $x = 6$ helyen kisebbet vesz fel. A 81-et a maximum és 6 közt is felveszi, de ez nem egész, így nem lesz jó.

A második megoldás erőltetett, nem érdemes függvényvizsgálatot végezni, ha próbálgatással is meg lehet kapni az eredményt. Tehát érdekesebb egyetemi ismereteinket felhasználva feladatokat gyártani, mint iskolai feladatokra ráerőltetni egy egyetemi megoldást.

Első feladatsor

Egy hangyák lakta városban, ahol nagyon népszerű a biciklivel való közlekedés, az úthálózat a következőképpen néz ki: a külső négyzet egység oldalú, az ebben elhelyezkedő négyzetet úgy kapjuk meg, hogy a négyzetek szomszédos oldalainak felezőpontjait összekötjük. Minden további négyzetet úgy kapunk meg, hogy a már meglévő legkisebb négyzet oldalfelező pontjait összekötjük, lásd 1. ábra:



1. ábra

Első feladat (feladatgyűjtemény): Egy társaság szeretné leaszfaltozni az utat, hogy zökkenőmentes utat biztosítsanak a biciklivel közlekedő hangyák számára, de ehhez tudniuk kell, hogy milyen hosszú az út összesen.

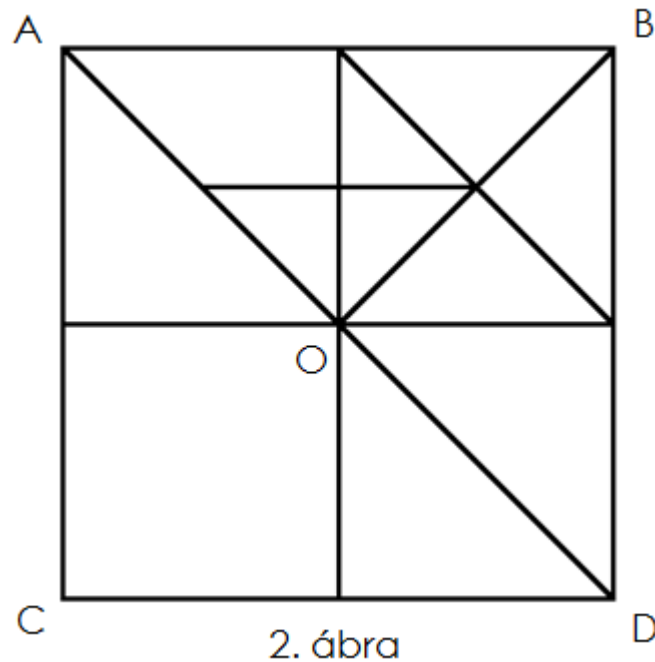
Első ránézésre úgy tűnhet, hogy a társaságnak végtelen sok aszfaltra lesz szüksége, de meg tudjuk mutatni, hogy ez mégsem így van.

Első megoldás: Meg kell néznünk a négyzetek kerületeinek összegét. Ez egy végtelen összeg lesz. Ehhez elég összeadnunk az egymást követő négyzetek egy-egy oldalának hosszát, majd ezt megszorozni négygyel.

Mivel egység oldalú négyzetről van szó, az első oldalhossz: 1

A további oldalak hosszát a következőképpen állapíthatjuk meg: Vegyük az egység oldalú négyzetet, rajzoljuk meg oldalfelező merőlegeseit, és az egyik átlóját. Ezt követően húzzuk be

az oldalfelező merőlegesek megrajzolásával keletkező B csúcsnál lévő négyzet átlóit, majd rajzoljuk meg az ABO háromszög középvonalát:



Így a hasonlóságnak köszönhetően láthatjuk, hogy a második négyzet oldalhossza egyenlő a négyzet átlójának a felével, azaz: $\frac{1}{\sqrt{2}}$

A harmadik négyzet másodikból ugyanúgy képződik, mint a második az elsőből, így oldalhossza: $\frac{1}{2}$

A négyzetek végig ugyanúgy képződnek, ezért az oldalak rendre $\frac{1}{\sqrt{2}^n}$ hosszúak.

A négyzetek oldalhosszát az alábbi ábra segítségével is megállapíthatjuk:

Az oldalak hossza összesen tehát:

$$\sum_{i=0}^n \frac{1}{\sqrt{2}^i} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 + \sqrt{2},$$

ezt négygel megszorozva megkapjuk a megoldást:

$$8 + 4 \cdot \sqrt{2}$$

Második megoldás: Úgy is megkaphatjuk a megoldást, ha észrevesszük a 2. ábra segítségével, hogy a harmadik négyzet oldala az ABO háromszög középvonala, tehát hossza:

$$\frac{1}{2}$$

A további oldalakat hasonlóan kapjuk meg, tehát hosszuk rendre: $\frac{1}{4}, \frac{1}{8} \dots$

Összegük:

$$\sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

A ferde négyzetek oldalait úgy kapjuk meg, ha a vízszintes oldalakat elosztjuk $\sqrt{2}$ -vel, vagyis az oldalak rendre: $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}}, \frac{1}{4 \cdot \sqrt{2}} \dots$. Így az összeg:

$$\sum_{i=0}^n \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2^i} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

A két mértani sor összegét összeadva és négygyel megszorozva szintén eljutunk a megoldáshoz:

$$8 + 4 \cdot \sqrt{2}$$

Második feladat (saját): Az egyik hangya pizzafutárként dolgozik és tudni szeretné, hogyan juthat el a legrövidebb úton a négyzet közepén lakókhoz, milyen hosszú utat kell ehhez bejárnia?

A másodsomszédos oldalaknak nincs közös pontja, így ha a hangya el szeretne jutni a négyzet közepére, az összes lehetséges méretű négyzet oldalán kell járnia. Ha elindul a külső négyzetről, csak csúcson keresztül léphet át a következőre. Ahhoz, hogy eljusson a következő csúcshoz, az adott csúcból induló oldal hosszának felét kell megtennie, ekkor fog a legrövidebb úton átlépni a következő négyzetre. Majd szintén egy csúcson keresztül az azt követőre, így folytatva tovább útját el fog jutni a négyzet közepére. Útja során mindig, amikor egy csúcson keresztül egy új négyzetre lép a csúcstól az őt tartalmazó nagy négyzetnek a felére illeszkedik. Így az utak hossza legalább:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \dots = \sum_{i=0}^n \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}^i} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (1 + \frac{1}{\sqrt{2}})}{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

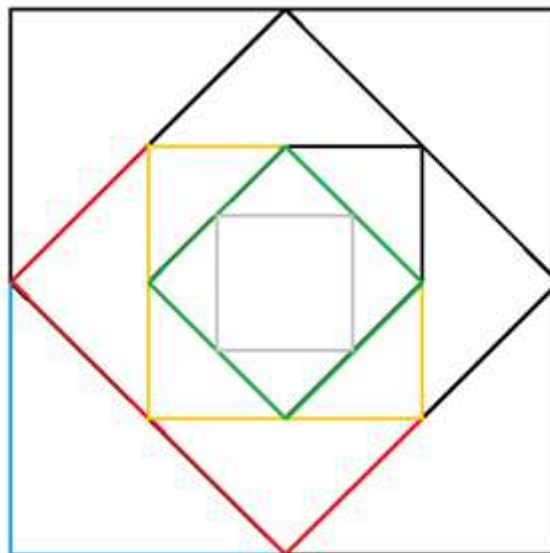
Harmadik feladat: Hányféle úton juthat el a hangya a négyzet közepére?

Amikor eljutunk egy csúcshoz minden esetben két-két lehetőségünk van a továbbhaladásra, mivel végtelen sokszor fogunk elkanyarodni, végtelen sok lehetséges út lesz.

Ez így nem olyan izgalmas, de átalakítva a feladatot, érdekesebb problémával is találkozhatunk.

Negyedik, saját feladat: A társaság addig is szeretné megkönnyíteni a hangyák közlekedését, amíg nem készül el az aszfaltozás, ezért le akarják nyírni a fűvet az úton, de mivel nem áll sok pénz a rendelkezésükre, csak a lehetséges legrövidebb utakon akarják ezt megtenni, ehhez milyen hosszú úton kell végighaladniuk?

Első megoldás: Válasszuk ki a négyzet egyik csúcsát és induljunk innen, ekkor a kétféle úton indulhatunk tovább, tehát a kék utakat le kell nyírniuk. Amikor így elértünk a legközelebbi csúcshoz, függetlenül attól, hogy melyik irányt választottuk szintén kétféle úton indulhatunk tovább, tehát a piros utakat is le kell nyírniuk. A fűnyírást folytatva észrevehetjük, hogy a negyedik négyzettől kezdve már nem marad olyan út, amit nem kell lenyírni.



3. ábra

Tehát összesen:

$$2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} + 6 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \sum_{i=3}^n \frac{1}{\sqrt{2}^i} = 1 + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2} + 4 \cdot \sum_{i=0}^n \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}^i}$$

$$= 1 + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2} + \frac{2}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = 1 + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2} + \frac{2 + \frac{2}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2} + 2 + 2 \cdot \sqrt{2}$$

$$= \frac{9}{2} + 2 \cdot \sqrt{2}$$

hosszúságú utat kell lenyírniuk.

Második megoldás: Az összes úthosszból vonjuk ki azoknak az utaknak a hosszát, ahol biztosan nem fogunk füvet nyírni:

$$4 \cdot \sum_{i=0}^n \frac{1}{\sqrt{2}^i} - \left(6 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} + 2 \cdot \frac{1}{4} \right) = 8 + 4 \cdot \sqrt{2} - 3 - \sqrt{2} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{9}{2} + 2 \cdot \sqrt{2}$$

Ötödik, saját feladat: Laci, és barátai el akarják készíteni az előbbi feladatokhoz szükséges ábrát szalvétából úgy, hogy a különböző területű négyzeteket sorra kivágják.

Laci a következőt állítja: Nem tudjuk megcsinálni, ugyanis ehhez végtelen sok szalvétára lenne szükségünk.

Viki gondolkodik egy kicsit, majd ezt mondja: A négyzetek összterülete véges, ha vesszük az oldalhosszak négyzetét, megkapjuk a területet:

$$\sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

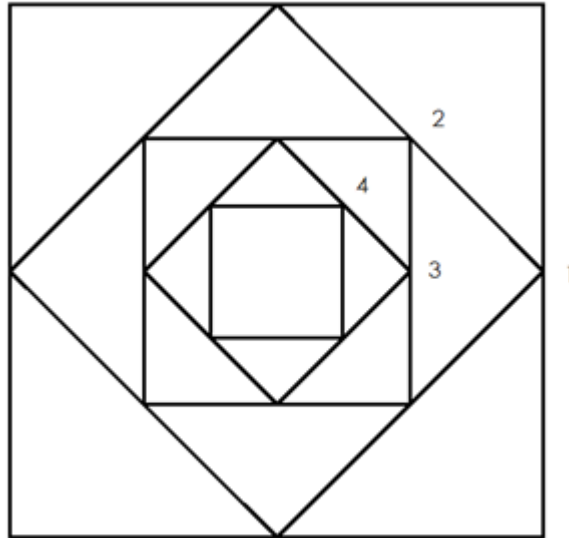
Tehát meg tudjuk csinálni véges sok szalvétából.

Peti ez után azt állítja: Mivel az összterület kettő, szerintem két szalvétából meg tudjuk csinálni az egészet.

Ekkor Nóra megszólal: Nincs igazad, mert egy szalvétára mindenképpen szükség van a legnagyobb négyzet elkészítéséhez, és mivel egy szalvétából nem tudjuk egyszerre kivágni az $\frac{1}{2}$ oldalhosszú, illetve az $\frac{1}{\sqrt{2}}$ oldalhosszú négyzeteket, így kettőnél biztosan többre van szükség.

Peti miután feldolgozta kudarcát, azt állítja: Ha adtok nekem négy szalvétát, elkészítem az ábrát. Gondolatmenetét megosztotta barátaival:

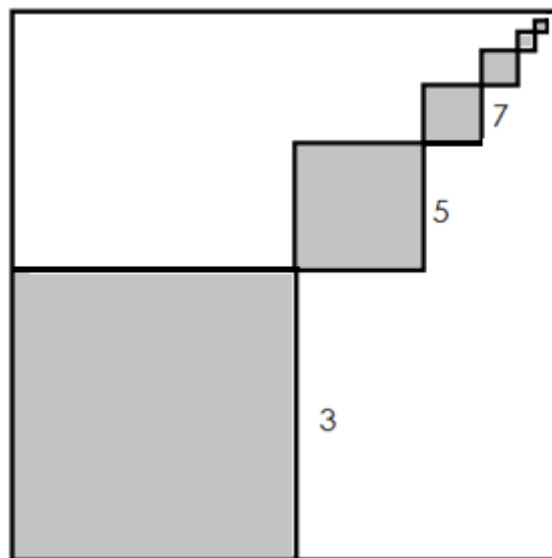
Az ábrán számozzuk meg az oldalakat a következőképpen: A racionális oldalak legyenek a páratlanok, az irracionális oldalak legyenek a párosak:



4. ábra

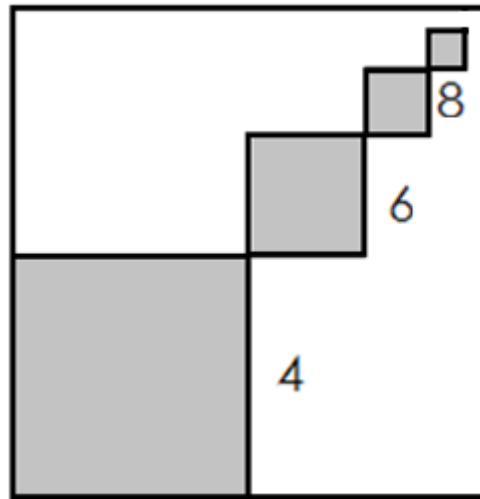
Egy egész szalvéta mindenképpen kell a legnagyobb négyzethez.

A páratlan oldalakhoz tartozó négyzetekhez elég egy szalvéta, ha az ábrán látható módon helyezzük el őket:



5. ábra

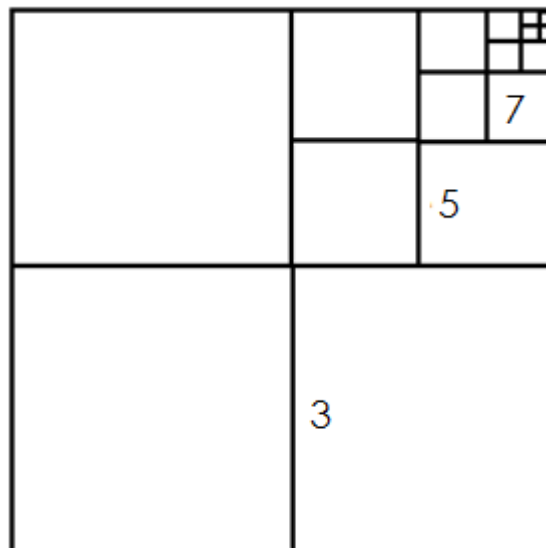
A páros oldalakhoz nem elég egy szalvéta, mivel az $\frac{1}{\sqrt{2}}$ oldalú négyzet nem fér el, mint az $\frac{1}{2}$ oldalú négyzeté, így az előbbi eljárást nem alkalmazhatjuk, ehhez több helyre lenne szükségünk. Tehát a páros oldalakhoz még két szalvétára lesz szükségünk, az egyikből kivágjuk az $\frac{1}{\sqrt{2}}$ oldalú négyzetet, a másikkól pedig a maradék páros sorszámú négyzeteket:



6. ábra

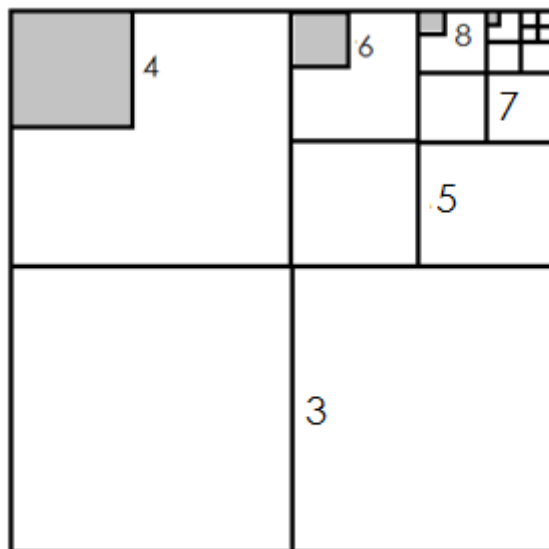
Laci a magyarázatot végighallgatva ráébred, hogy ő három szalvétából is ki tudná vágni az összes négyzetet a következő módon:

Egy-egy szalvéta mindenképpen szükséges a legnagyobb, valamint az $\frac{1}{\sqrt{2}}$ oldalú négyzethez, de a maradék négyzeteket már egy szalvétából is ki tudjuk vágni. Egészítsük ki azt az ábrát, ahol a páratlan sorszámú négyzeteket helyezzük el további négyzetekkel a következő módon:



7. ábra

A vonalak behúzásával keletkezett újabb négyzetekből ki tudjuk vágni a páros számosságú oldalakat, a következőképpen:



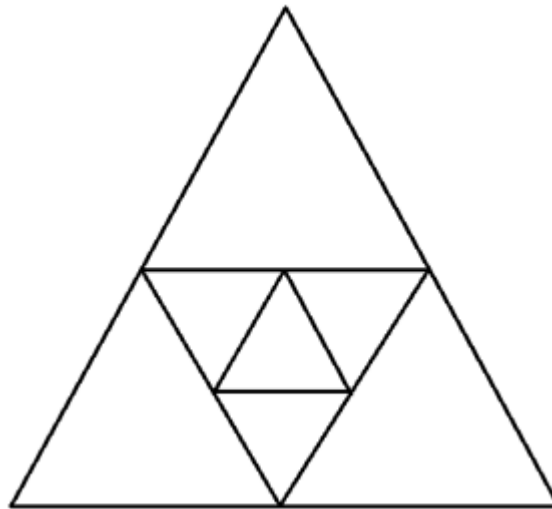
8. ábra

Így láthatjuk, hogy három szalvéta birtokában már el tudjuk készíteni az ábrát.

A feladat háromszögekre:

Érdemes lehet megvizsgálni ugyanezeket a feladatokat más síkidomok esetén is. A négyszögnél nagyobb esetek körülményesek. Vizsgáljuk meg a háromszögek esetét. Most saját feladatok következnek. Az eredeti feladatok szövegét megtartottam, mert ezeket az előzőektől függetlenül is fel lehet adni.

A hangyák egy olyan útrendszeren bicikliznek, ahol a külső háromszög egység oldalú, és minden további háromszög csúcsa az őt tartalmazó nagyobb háromszög felezőpontján helyezkedik el:



9. ábra

Első feladat: Egy társaság szeretné leaszfaltozni az utat, hogy zökkenőmentes utat biztosítsanak a biciklivel közlekedő hangyák számára, de ehhez tudniuk kell, hogy milyen hosszú az út összesen.

Első ránézésre úgy tűnhet, hogy a társaságnak végtelen sok aszfaltra lesz szüksége, de meg tudjuk mutatni, hogy ez mégsem így van.

Megoldás: Elég, ha megnézzük, hogy mennyi a háromszögek kerülete összesen. Ahhoz, hogy ezt megállapítsuk elég, ha megnézzük az egymást követő háromszögek egy-egy oldalának hosszát, majd ezt megszorozzuk hárommal.

Mivel egység oldalú háromszögről van szó, az első oldalhossz: 1

A hasonlóság miatt második oldal hossza: $\frac{1}{2}$

Szintén a hasonlóság miatt a harmadik oldal hossza: $\frac{1}{4}$

Így látható, hogy az n-edik oldal hossza: $\frac{1}{2^n}$

Az oldalak hossza összesen tehát:

$$\sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

ezt hárommal megszorozva megkapjuk a megoldást, ami a 6.

Második feladat: Az egyik hangya pizzafutárként dolgozik és tudni szeretné, hogyan juthat el a legrövidebb úton a háromszög közepén lakókhoz, milyen hosszú utat kell legalább bejárnia?

A másodsomszédos oldalaknak nincs közös pontja, így ha a hangya el szeretne jutni a háromszög közepére, az összes lehetséges méretű háromszög oldalán kell járnia. Ha elindul a külső háromszögről csak csúcson keresztül léphet át a következőre. Ahhoz, hogy eljusson a következő csúcshoz, az adott csúcsból induló oldal hosszának felét kell megtennie, ekkor fog a legrövidebb úton átlépni a következő háromszögre. Majd szintén egy csúcson keresztül az azt követőre, így folytatva tovább útját el fog jutni a háromszög közepére. Így az út hossza legalább:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^i} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

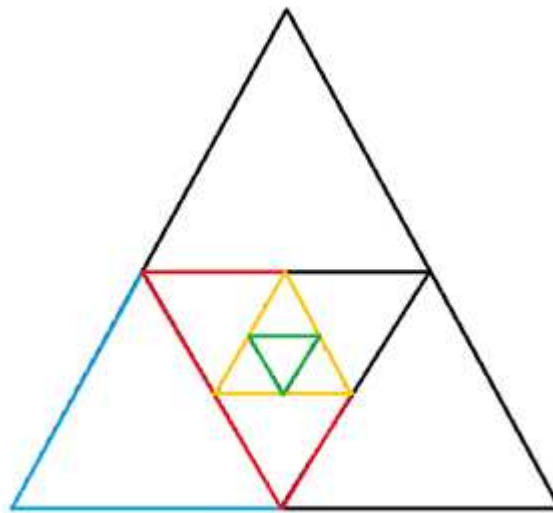
Harmadik feladat: Hányféle úton juthat el a hangya a háromszög közepére?

Amikor eljutunk egy csúcshoz minden esetben két-két lehetőségünk van a továbbhaladásra, mivel végtelen sokszor fogunk elkanyarodni, végtelen sok lehetséges út lesz.

Ez így nem olyan izgalmas, de átalakítva a feladatot, érdekesebb problémával is találkozhatunk.

Negyedik feladat: A társaság addig is szeretné megkönnyíteni a hangyák közlekedését, amíg nem készül el az aszfaltozás, ezért le akarják nyírni a fűvet az úton, de mivel nem áll sok pénz a rendelkezésükre, csak a lehetséges legrövidebb utakon akarják ezt megtenni, ehhez milyen hosszú úton kell végighaladniuk?

Első megoldás: Válasszuk ki a háromszög egyik csúcsát és induljunk innen, ekkor kétféle úton indulhatunk tovább, tehát a kék utakat le kell nyírni. Amikor így elértünk a legközelebbi csúcsba, függetlenül attól, hogy melyik irányt választottuk, szintén kétféle úton indulhatunk tovább, tehát a piros utakat is le kell nyírni. A fűnyírást folytatva észrevehetjük, hogy a harmadik háromszögtől kezdve már nem marad olyan út, amit nem kell lenyírni.



10. ábra

Tehát összesen:

$$2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \sum_{i=2}^n \frac{1}{2^i} = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \sum_{i=0}^n \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^i} = 1 + 1 + 3 \cdot \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 + \frac{3}{2}$$

hosszúságú utat kell lenyírni.

Második megoldás: Az összes úthosszból vonjuk ki azoknak az utaknak a hosszát, ahol biztosan nem fogunk füvet nyírni:

$$3 \cdot \sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i} - \left(4 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} \right) = 4 - \frac{1}{2}$$

Ötödik feladat: Laci, és barátai el akarják készíteni az előbbi feladatokhoz szükséges ábrát szalvétából úgy, hogy a különböző területű háromszögeket sorra kivágják, a szalvéták most háromszögek.

Laci a következőt állítja: Nem tudjuk megcsinálni, ugyanis ehhez végtelen sok szalvétára lenne szükségünk.

Viki gondolkodik egy kicsit, majd ezt mondja: A háromszögek összterülete véges:

Kiszámolhatjuk, hogy az első háromszög területe: $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Ugyanígy megadhatjuk a második háromszög területét is: $\frac{\sqrt{3}}{16}$

Az n-edik háromszög területe ekkor: $\frac{\sqrt{3}}{4^n}$

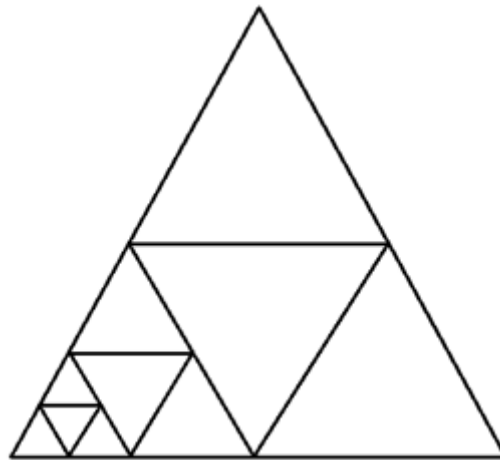
A háromszögek összterülete: $\sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{3}}{4^i} = \sum_{i=0}^n \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{4^i} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Az összterület véges, nézzük meg, hogy meg lehet-e csinálni.

Peti ezután azt állítja: Mivel háromszögről van szó, úgy gondolom, hogy három szalvétára lesz szükségünk az ábra elkészítéséhez.

Laci a következőt állítja: Szerintem két szalvétából is meg tudjuk csinálni az egészet.

Egy szalvétára mindenképpen szükség van az egység oldalú háromszöghöz. A maradék háromszögekhez valóban elegendő egy szalvéta, ha az ábrán látható módon vágjuk ki őket:



11. ábra

Látható, hogy a háromszöges példák egyszerűbbek, így talán érdekesebb ezekkel kezdeni.

Második feladatsor

Az Amfiteátrum Kupa 6. osztályosoknak szóló feladatai közül választottam egy példát, aminek a megoldásával részletesen foglalkozom, de ismertetem a feladatsor többi feladatát is:

1. Egy konvex sokszög egy csúcsából 3 átló indul ki. Hány átlója van a sokszögnek?
2. Hány olyan különböző téglalap van, amelynek oldalai cm-ben mérve egész számok, és kerülete
 - a) 23 cm;
 - b) 2000 cm ?(Az oldalak felcserélésével kapott téglalapok nem különbözőek.)
3. András olyan lottót javasol osztálytársainak, amelyben az 1, 2, 3, 4, 5 számokból két számra kell tippelni. Hány szelvényt kell ahhoz kitölteniük, hogy biztosan legyen telitalálatunk (azaz 2 találatunk) ezen a lottón? Hány szelvény kitöltése esetén lesz biztosan 1 találatunk?
4. Ki a legidősebb az öt gyerek közül, ha Anita 10500 órás, Ági 4385 napos, Bea 141 hónapos, Cili 6307200 perces és Dóra 12 éves?
5. Hány olyan háromjegyű, 3-mal osztható pozitív egész szám van, amelyet oda-vissza olvasva ugyanazt a számot kapjuk?
6. Egy sorozat első eleme 3, a második 4. A további elemeket úgy képezzük, hogy az utolsóból kivonjuk az az előtti elemet. Határozzuk meg a sorozat 2008. elemét!

A feladatok közül a hatodikat választottam, azért mert emlékeztet Fibonacci-sorozatokra, amihez kapcsolódik a lineáris rekurziók elmélete, aminek segítségével megoldom a feladatot. Megkeresem a karakterisztikus egyenlet gyökeit és az ezekből képzett mértani sorozatok segítségével felírom a lineáris rekurziót, a sorozatok lineáris kombinációjaként, ahol maguk a mértani sorozatok is kielégítik a rekurziót. Ez a fajta megoldás meghaladja egy általános iskolás diák lehetőségeit. A diákok a megoldás során az elemek vizsgálatával rájöhetnek, hogy a sorozat periodikus. Ebben a fejezetben be fogom

bizonyítani, hogy egy rekurzív sorozat akkor periodikus, ha karakterisztikus polinomja körosztási polinomok szorzata, ami ekvivalens azzal, hogy osztója $x^k - 1$ -nek valamilyen k -ra.

Ennél a feladatnál, valamint a feladat továbbgondolásánál, felhasználhatjuk a lineáris rekurziókhoz kapcsolódó egyetemi ismereteinket. A kötelező egyetemi anyagot nem másolnám be a dolgozatba, csak a feladatokhoz szükséges részeket szeretném ismertetni: Ismerni kell a lineáris rekurziókat, azt hogy ezeknek, hogyan áll elő a karakterisztikus egyenlete. Ha a karakterisztikus egyenlet minden gyöke egyszeres, akkor a sorozat előáll mint az ebből képzett mértani sorozatok lineáris kombinációja, ahol a mértani sorozatok is kielégítik a rekurziót, ahol a mértani sorozatok és azok együtthatói egyértelműek.

Az előbb ismertetteken kívül az egyetemi anyagból szükség lesz még a körosztási polinomokra, láthatjuk majd, hogy ezek ismeretében, hogyan lehet középiskolás feladatokat készíteni. Speciális esetként le fogom írni az összes olyan rekurziót, amely legfeljebb negyedfokú, és periodikus a megoldása.

Térjünk rá a hatodik feladat megoldására:

Megoldás: Tudjuk, hogy $a_1 = 3$ és $a_2 = 4$, valamint, hogy

$$a_3 = a_2 - a_1 = 1$$

$$a_4 = a_3 - a_2 = -3$$

$$a_5 = a_4 - a_3 = -4$$

$$a_6 = a_5 - a_4 = -1$$

$$a_7 = a_6 - a_5 = 3$$

$$a_8 = a_7 - a_6 = 4$$

Így látható, hogy a sorozat elemei ismétlődni fognak, a következőképpen követik egymást:

3, 4, 1, -3, -4, -1, 3, 4, 1, -3, -4, -1, ..., tehát a számok periodikusan ismétlődnek, a periódus hossza pedig 6. Ezért a 2008. tagot megkapjuk úgy, hogy ha vesszük 2008 6-tal vett maradékát, és tekintjük a sorozat ennyiedik tagját. A 2008 6-tal vett maradéka 4, ahhoz, hogy ezt megállapítsuk nincs szükség maradékos osztásra. Mivel 2004 számjegyeinek összege osztható 3-mal, és 2004 osztható 2-vel is, ezért osztható lesz 6-tal. Ebből rögtön láthatjuk, hogy 2008 6-tal vett maradéka 4, tehát a sorozat 2004. eleme 4, a 2008. eleme pedig -3.

Ezt a feladatot egyetemi ismereteink alkalmazásával is megoldjuk. A véges matematika keretein belül tanultak alapján keressük a sorozatot olyan mértani sorozatok lineáris kombinációjaként, ahol maguk a mértani sorozatok is kielégítik a rekurziót. A rekurzió megoldását az $a_n = a_0 \cdot q^n$ mértani sorozat formájában keresve felírhatjuk, hogy:

$$a_0 \cdot q^n = a_0 \cdot q^{n-1} - a_0 \cdot q^{n-2},$$

oszthatunk a_0 -lal és q^{n-2} -nel, ekkor a következőt kapjuk:

$$q^2 = q - 1, \text{ tehát}$$

$$q^2 - q + 1 = 0,$$

ebből a gyökök

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \text{ és } \varepsilon_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$$

Sorozatunk képletét keressük a következő alakban:

$$a_n = \alpha \cdot \varepsilon_1^n + \beta \cdot \varepsilon_2^n$$

Helyettesítsük be az első két tagot:

$$3 = \alpha \cdot \varepsilon_1 + \beta \cdot \varepsilon_2$$

$$4 = \alpha \cdot \varepsilon_1^2 + \beta \cdot \varepsilon_2^2$$

Ebben az egyenletrendszerben az első egyenletet ε_1 -gyel beszorozva, majd az elsőből a másodikat kivonva:

$$3 \cdot \varepsilon_1 - 4 = \beta \cdot \varepsilon_2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

összefüggést kapjuk. Nem kell elosztani egymással a két komplex számot, ha észrevesszük, hogy ε_1 a 60° -os 1 hosszú, míg ε_2 a -60° -os 1 hosszú szám, így a szorzatuk 1 lesz.

Ha megoldjuk az egyenletrendszert megkapjuk α -t és β -t.

Inverz Fibonacci- sorozatok

A most következő rész saját ötletekből és feladatokból áll. Az előző általános iskolai versenyfeladat egy olyan sorozattal foglalkozott, melynek elemei periodikusan ismétlődnek. Az egyetemi ismereteinket felhasználva tudjuk, hogy ebben az esetben ennek az az oka, hogy a rekurziót kielégítő mértani sorozatok hányadosa egységgyök és a karakterisztikus polinom minden gyöke egyszeres. Ekkor felmerül a kérdés, hogy hogyan kereshetünk hasonló

feladatokat, rekurziókat, illetve, hogy lehet-e osztályozni azokat a polinomokat, amelyekhez tartozó rekurzív sorozatok periodikusak. Hasonló feladatokat kapunk, ha bevezetjük az inverz Fibonacci-sorozatot.

Definíció: Nevezzünk egy sorozatot inverz Fibonacci-sorozatnak, ha kielégíti az

$$a_n = -a_{n-1} - a_{n-2}$$

rekurziót.

1. Állítás: Az inverz Fibonacci-sorozatok periodikusak.

Bizonyítás: Mivel $a_n = -a_{n-1} - a_{n-2}$, a karakterisztikus polinomot megkapjuk, ha a

$$x^k = -x^{k-1} - x^{k-2}$$

egyenletet leosztjuk x^{n-2} -nal:

$$x^2 = -x - 1, \text{ vagyis}$$

$$x^2 + x + 1,$$

aminek a gyökei a harmadik egységgyökök, vagyis:

$$\omega_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i, \text{ valamint } \omega_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i,$$

tehát a kezdőtagoktól függően vannak olyan α és β számok, hogy

$$a_n = \alpha \cdot \omega_1^n + \beta \cdot \omega_2^n$$

Mivel ω_1 és ω_2 harmadik egységgyökök, ezért a sorozat periodikus lesz, a periódus hossza 1 vagy 3. A periódus hossza 1 lesz, ha sorozat minden eleme egyenlő, és 3 lesz, ha legalább két különböző tagja van.

Az iskolai megoldás ebben az esetben egyszerűbb. A karakterisztikus egyenletet átrendezve:

$$a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = 0$$

Ezt írjuk fel a következő tagra:

$$a_{n+1} + a_n + a_{n-1} = 0,$$

ezt kivonva az előzőből:

$$a_{n+1} = a_{n-2},$$

vagyis a sorozat 3 szerint periodikus.

Ezt a példát általánosíthatjuk is:

Definíció: Egy rekurzív sorozatot általánosított inverz Fibonacci-sorozatnak nevezünk, ha kielégíti az

$$a_n = -a_{n-1} - a_{n-2} - \dots - a_{n-k+1}$$

rekurziót.

2. Állítás: Az általánosított inverz Fibonacci-sorozatok periodikusak.

Bizonyítás: A karakterisztikus polinom most az

$$x^{k-1} + x^{k-2} + \dots + x^2 + x + 1$$

lesz, ami felírható $\frac{x^k - 1}{x - 1}$ alakban, aminek a gyökei az 1-től különböző k -adik egységgyökök.

Az $x^k - 1$ gyökei az egységgyökök. Az $x - 1$ gyöke az 1. Tehát a fenti polinom gyökei: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{k-1}$. Ekkor a kezdőtagoktól függően vannak olyan $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ számok, hogy

$$a_n = \alpha_1 \cdot \varepsilon_1^n + \alpha_2 \cdot \varepsilon_2^n + \dots + \alpha_k \cdot \varepsilon_k^n$$

Mivel $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{k-1}$ k -adik egységgyökök, a sorozat periodikus lesz k szerint, és a periódus hossza k lesz, vagy ennél rövidebb.

Az iskolai megoldás ebben az esetben is egyszerűbb. A karakterisztikus egyenletet átrendezve:

$$a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_{n-k+1} = 0 \text{ adódik.}$$

Ezt írjuk fel a következő tagra is:

$$a_{n+1} + a_n + a_{n-1} + \dots + a_{n-k+2} = 0,$$

ezt kivonva az előzőből:

$$a_{n+1} = a_{n-k+1},$$

így láthatjuk, hogy a sorozat k szerint periodikus.

Látva, hogy az iskolai megoldások egyszerűbbek, felmerülhet a kérdés, hogy miért érdemes az egyetemi megoldással foglalkozni. Azt is láthattuk, hogy az iskolai versenyfeladatban szereplő példa nem inverz Fibonacci-sorozat, de az előzőekhez hasonlóan mégis periodikus. A következő állítás egy közös általánosítása mindkét fajta feladatnak:

3. Állítás: Ha egy lineáris rekurzió karakterisztikus egyenletének minden gyöke egységgyök és minden gyöke egyszeres, akkor a sorozat periodikus.

Bizonyítás: A tétel nem mondja ki, hogy hányadik egységgyökökről van szó, de tudjuk, hogy az egyenlet minden gyöke egyszeres, és minden gyöke egységgyök. Ha vesszük az egységgyökök periódusának legkisebb közös többszörösét, akkor erre az összes egységgyök periodikus lesz. Mivel a sorozat az egységgyökök lineáris kombinációja, aminek minden tagja periodikus lesz az egységgyökök periódusának legkisebb közös többszöröse szerint, így az egész összeg periodikus lesz e szerint.

Az iskolai versenyfeladattal kapcsolatban észrevehetjük, hogy karakterisztikus polinomja a hatodik körosztási polinom, ebből is láthatjuk, hogy a sorozat periódusa 6.

Az alábbiakban felsorolom a körosztási polinomokat 18-ig:

$$\Phi_1(x) = x - 1$$

$$\Phi_2(x) = x + 1$$

$$\Phi_3(x) = x^2 + x + 1$$

$$\Phi_4(x) = x^2 + 1$$

$$\Phi_5(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$\Phi_6(x) = x^2 - x + 1$$

$$\Phi_7(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$\Phi_8(x) = x^4 + 1$$

$$\Phi_9(x) = x^6 + x^3 + 1$$

$$\Phi_{10}(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

$$\Phi_{11}(x) = x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$\Phi_{12}(x) = x^4 - x^2 + 1$$

$$\Phi_{13}(x) = x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$\Phi_{14}(x) = x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

$$\Phi_{15}(x) = x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1$$

$$\Phi_{16}(x) = x^8 + 1$$

$$\Phi_{17}(x) = x^{16} + x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$\Phi_{18}(x) = x^6 - x^3 + 1$$

Tudjuk, hogy az n -edik körosztási polinom foka $\varphi(n)$ és 19-nél nagyobb számokra ez már legalább 8. Így az ezek segítségével megfogalmazott iskolai feladatok már túl körülményesek ahhoz, hogy az órán, vagy versenyen szerepeljenek. A táblázatból láthatjuk, hogy a prímeknél mindig inverz Fibonacci-sorozatok szerepelnek.

Most jöjjön két olyan feladat, ahol ki tudjuk használni az egyetemi ismereteket, és így könnyebbé válik a feladat megoldása. Az első feladatban a negyedik és hatodik, a második feladatban az első és hatodik körosztási polinomok szorzatát használjuk.

$$\Phi(4) \cdot \Phi(6) = x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1$$

$$\Phi(1) \cdot \Phi(6) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$$

Első feladat: Egy sorozat első négy tagja 1, 2, 3, 4 és az n -edik tagot az alábbi szabály adja meg:

$$a_n = a_{n-1} - 2a_{n-2} + a_{n-3} - a_{n-4}$$

Számoljuk ki a sorozat 2013. tagját.

Megoldás: Írjuk fel a karakterisztikus polinomot:

$$x^n = x^{n-1} - 2x^{n-2} + x^{n-3} + x^{n-4},$$

x^{n-4} -nel egyszerűsítve a következőt kapjuk:

$$x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1$$

Láthatjuk, hogy ez éppen a negyedik és hatodik körosztási polinom szorzata. Ekkor gyökei a negyedik és hatodik primitív egységgyökök. Ezek pontosan a következők:

$$i, -i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$$

A gyökök konkrét felírására nincs szükségünk csak arra, hogy gyökei 12-edik egységgyökök, így mindegyik 12-edik hatványa 1. Így legyenek a gyökök: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$, tehát vannak olyan $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ számok, hogy

$$a_n = \alpha_1 \cdot \varepsilon_1^n + \alpha_2 \cdot \varepsilon_2^n + \alpha_3 \cdot \varepsilon_3^n + \alpha_4 \cdot \varepsilon_4^n$$

Az összes ε 12-edik hatványa 1, tehát az összes ε hatvány 12-re periodikus, mivel az összeg minden tagja 12-re periodikus, így ezek lineáris kombinációja is periodikus lesz 12-re.

Azt, hogy a sorozat periodikus kihasználhatjuk, amikor a 2013. tagot keressük. Nézzük meg, hogy a 2013 mennyi maradékot ad 12-vel osztva. A maradékos osztás elvégzése után láthatjuk, hogy a maradék 9 lesz. Így már látható, hogy

$$a_9 = a_{2013}$$

Számoljuk ki a sorozat kilencedik tagját, ezt az n -edik tagot megadó rekurzió alapján megtehetjük, mivel ismerjük a sorozat első négy tagját:

$$a_5 = a_4 - 2a_3 + a_2 - a_1$$

$$a_5 = 4 - 2 \cdot 3 + 2 - 1 = -1$$

$$a_6 = -1 - 2 \cdot 4 + 3 - 2 = -8$$

$$a_7 = -8 + 2 \cdot 1 + 4 - 3 = -5$$

$$a_8 = -5 + 2 \cdot 8 - 1 - 4 = 6$$

$$a_9 = 6 + 2 \cdot 5 - 8 + 1 = 9$$

Tehát

$$a_{2013} = 9.$$

Második feladat: Egy sorozat első négy tagja 1, 2, 3 és az n -edik tagot az alábbi szabály adja meg:

$$a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2} + a_{n-3}$$

Számoljuk ki a sorozat 2013. tagját.

Megoldás: Írjuk fel a karakterisztikus polinomot:

$$x^n = 2x^{n-1} - 2x^{n-2} + x^{n-3}$$

x^{n-3} -nal egyszerűsítve a következőt kapjuk:

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 1$$

Láthatjuk, hogy ez éppen az első és hatodik körosztási polinom szorzata. Ekkor gyökei az első és hatodik primitív egységgyökök.

A gyökök konkrét felírására nincs szükségünk csak arra, hogy gyökei 6. egységgyökök, így mindegyik 6. hatványa 1. Így legyenek a gyökök: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, tehát vannak olyan $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ számok, hogy

$$a_n = \alpha_1 \cdot \varepsilon_1^n + \alpha_2 \cdot \varepsilon_2^n + \alpha_3 \cdot \varepsilon_3^n$$

Az összes ε 6-odik hatványa 1, tehát az összes ε hatvány 6-ra periodikus, mivel az összeg minden tagja 6-ra periodikus, így ezek lineáris kombinációja is periodikus lesz 6-ra.

Ezt kihasználhatjuk, amikor a 2013. tagot keressük. Nézzük meg, hogy 2013 mennyi a maradékot ad 6-tal osztva. A maradékos osztás elvégzése után láthatjuk, hogy a maradék 3 lesz. Így már látható, hogy

$$a_3 = a_{2013},$$

tehát

$$a_{2013} = 3, \text{ mivel } a_3\text{-at ismerjük.}$$

4. Állítás: Tegyük fel, hogy van egy lineáris rekurzió, aminek a karakterisztikus polinomja osztója $x^k - 1$ -nek, ekkor a sorozat k -ra periodikus.

Bizonyítás: $x^k - 1$ gyökei a k -edik egységgyökök, ezért a polinom gyökei is k -edik egységgyökök (nem feltétlenül az összes), ezért a_n sorozat n -edik tagja előáll, mint az egységgyökök n -edik hatványának lineáris kombinációja, azaz vannak olyan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ számok, hogy

$$a_n = \alpha_1 \cdot \varepsilon_1^n + \alpha_2 \cdot \varepsilon_2^n + \dots + \alpha_n \cdot \varepsilon_n^n$$

Az összes ε k -edik hatványa 1, így az összes ε hatvány periodikus lesz k -ra, tehát az összeg minden tagja periodikus k -ra, így ezek lineáris kombinációja is periodikus lesz k -ra.

5. Állítás: Tegyük fel, hogy egy rekurzív sorozat k -ra periodikus, ekkor a sorozat karakterisztikus polinomja osztója $x^k - 1$ -nek.

Bizonyítás: A sorozat periodikus k -ra, így minden n -re teljesül, hogy

$$a_{n+k} = a_n,$$

ha ezt kielégíti egy mértani sorozat arra igaz lesz, hogy

$$q^{n+k} = q^n,$$

összünk q^n -nel, ekkor

$$q^k = 1,$$

tehát q k -edik egységgyök, ami gyöke a karakterisztikus egyenletnek, tehát gyöke lesz a lineáris rekurzió karakterisztikus polinomjának, és mivel ennek gyökei részhalmaza a másik gyökeinek, így a karakterisztikus polinom osztója lesz $x^k - 1$ -nek.

6.Állítás: Ha a lineáris rekurzió karakterisztikus polinomja különböző körosztási polinomok szorzata, akkor a lineáris rekurzió periodikus.

Bizonyítás: Legyen $\Phi_{k_1}, \Phi_{k_2}, \dots, \Phi_{k_t}$ t darab különböző körosztási polinom. Legyen $f(x) = \Phi_{k_1} \cdot \Phi_{k_2} \cdot \dots \cdot \Phi_{k_t}$, és legyen f egy lineáris rekurzió karakterisztikus polinomja. Ekkor a harmadik állítás alapján a sorozat periodikus.

Tétel: Tegyük fel, hogy adott egy racionális együtthatós lineáris rekurzió, a sorozat pontosan akkor periodikus, ha a karakterisztikus polinomja különböző körosztási polinomok szorzata.

Bizonyítás: Az előzőekből következik.

Általános iskolában azokat a rekurzív sorozatokat érdemes feladni, amelyeknél nem szükséges ahhoz sok próbálgatás, hogy a diákok észrevegyék, hogy periodikusak. Táblázatba foglalva nézzük meg az összes olyan rekurziót, ami legfeljebb negyedfokú:

$\Phi_1(x)$	$x - 1$	$a_n = a_{n-1}$	1
$\Phi_2(x)$	$x + 1$	$a_n = -a_{n-1}$	2
$\Phi_3(x)$	$x^2 + x + 1$	$a_n = -a_{n-1} - a_{n-2}$	3
$\Phi_4(x)$	$x^2 + 1$	$a_n = -a_{n-2}$	4
$\Phi_5(x)$	$x^4 + x^3 + x^2 + 1$	$a_n = -a_{n-1} - a_{n-2} - a_{n-3}$	5
$\Phi_6(x)$	$x^2 - x + 1$	$a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$	6
$\Phi_8(x)$	$x^4 + 1$	$a_n = -a_{n-4}$	8
$\Phi_{10}(x)$	$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$	$a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} - a_{n-4}$	10
$\Phi_{12}(x)$	$x^4 - x^2 + 1$	$a_n = a_{n-2} - a_{n-4}$	12
$\Phi_1(x) \cdot \Phi_2(x)$	$x^2 - 1$	$a_n = a_{n-2}$	2
$\Phi_1(x) \cdot \Phi_3(x)$	$x^3 - 1$	$a_n = a_{n-3}$	3
$\Phi_1(x) \cdot \Phi_4(x)$	$x^3 - x^2 - x - 1$	$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$	4
$\Phi_1(x) \cdot \Phi_6(x)$	$x^3 - 2x^2 + 2x - 1$	$a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2} + a_{n-3}$	6
$\Phi_2(x) \cdot \Phi_3(x)$	$x^3 + 2x^2 + 2x + 1$	$a_n = -2a_{n-1} - 2a_{n-2} - a_{n-3}$	6
$\Phi_2(x) \cdot \Phi_4(x)$	$x^3 + x^2 + x + 1$	$a_n = -a_{n-1} - a_{n-2} - a_{n-3}$	4
$\Phi_2(x) \cdot \Phi_6(x)$	$x^3 + 1$	$a_n = -a_{n-3}$	6
$\Phi_3(x) \cdot \Phi_4(x)$	$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$	$a_n = -a_{n-1} - 2a_{n-2} - a_{n-3} - a_{n-4}$	12

$\Phi_3(x) \cdot \Phi_6(x)$	$x^4 + x^2 + 1$	$a_n = -a_{n-2} - a_{n-4}$	6
$\Phi_4(x) \cdot \Phi_6(x)$	$x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1$	$a_n = a_{n-1} - 2a_{n-2} + a_{n-3} - a_{n-4}$	12
$\Phi_1(x) \cdot \Phi_2(x) \cdot \Phi_3(x)$	$x^4 + x^3 - x - 1$	$a_n = -a_{n-1} + a_{n-3} - a_{n-4}$	6
$\Phi_1(x) \cdot \Phi_2(x) \cdot \Phi_4(x)$	$x^4 - 1$	$a_n = a_{n-4}$	4
$\Phi_1(x) \cdot \Phi_2(x) \cdot \Phi_6(x)$	$x^4 - x^3 + x - 1$	$a_n = a_{n-1} - a_{n-3} + a_{n-4}$	6

Köszönetnyilvánítás:

Köszönettel tartozom Mezei Istvánnak az eredeti négyzetes feladat ötletéért, valamint a bicikliző hangyáékért, ezek az ötletek nagyban segítettek munkámat.

Felhasznált irodalom

BEDŐ LÁSZLÓ (szerk.) 2007. Matematika feladatgyűjtemény II. Nemzeti Tankönyvkiadó. Budapest.

BESENYŐNÉ TITTER BEÁTA – KONCZ LEVENTE – MIKUSI IMRE (szerk.) Az Amfiteátrum Kupa Matematika Verseny feladatai 1994 -2009.