Fraktálok.
A Sierpinski-háromszög

Írta: Moór István
Témavezető: Dr. Buczolich Zoltán egyetemi tanár
Analízis Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Budapest, 2013

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Dolgozatom fő témája a fraktálok közé tartozó Sierpinski-háromszög vizsgálata. Ez a halmaz nevét egy lengyel matematikusról, Waclaw Sierpinskiről kapta, aki 1915-ben publikálta először.

Először néhány olyan definíciót, illetve tételt mondok ki, amelyek a fraktálok – így többek között a Sierpinski-háromszög – leírását megkönnyítik. Ismertnek tételezem fel azokat az anyagrészeket, amelyek a ELTE tanári szakirányú matemaika BSc képzésében szerepelnek, továbbá a d-dimenziós Lebesgue-mérték definícióját ($d = 1, 2, \ldots$) és főbb tulajdonságait. A bemutatott definíciókat és állításokat a Sierpinski-háromszög példáján szemléltetem. Dolgozatomban egy adott E halmaz d-dimenziós Lebesgue-mértékét $\mathcal{L}^d(E)$-vel jelölöm.

Ezek után egy speciális problémáról, a Sierpinski-háromszög Hausdorff-dimenziójának megfelelő mértékéről írok. Ennek pontos értéke máig meghatározatlan, így a szakirodalomban fellelt alsó és felső becsléseket ismertetem ezek vázlatos bizonyításával együtt.

Végül a Sierpinski-háromszög matematikai tulajdonságainak vizsgálata után egy ipari alkalmazást tárgyalok. Antennák tervezésében az 1980-as évek második felétől kezdve használják fel a fraktálokról szerzett ismereteket, kísérleteznek fraktálokra emlékeztető módon megalkotott antennákkal. A témában számos publikáció született az elmúlt három évtizedben. Ezek közül néhányat bemutatok.

1. A fraktálokról általánosságban

1.1. A meghatározás nehézségei

A fraktálok elnevezése a latin 'fractus' szóból származik, amelynek jelentése: 'törött', 'töredezett'. A kifejezés megalkotója Benoit Mandelbrot, akinek 1982-ben megjelent munkája [8] jelentős lépés volt a fraktálok tanulmányozásának népszerűvé válásában. Mandelbrot kezdeti meghatározása a következő: „a fraktál definíció szerint olyan halmaz, amelynek Hausdorff–Besicovitch-dimenziója szigorúan nagyobb a topológiai dimenziójánál" ([8], 15. oldal). A későbbiekben azonban ez a meghatározás túl szűkössé vált az összes fraktálnak tartott halmaz számára. Ma nincs általános elfogadott definíció, azt azonban biztosan állíthatjuk, hogy az a halmaz, amely az alább felsorolt tulajdonságok közül legalább eggyel rendelkezik, ebbe a kategóriába tartozik[1]:

- „finom sruktúrája van;
- túl szabálytalan ahhoz, hogy leírható legyen a klasszikus geometriában;
- önhasonló (esetleg csak közelítően vagy statisztikusan);
- fraktál-dimenziója nagyobb, mint topológiai dimenziója[2]
- egyszerűen definiálható (például rekurzív módon)."

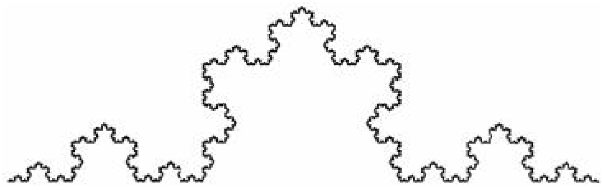
Habár a fraktálok elnevezés csak a XX. század második felében keletkezett, ide tartozó halmazokat jóval korábban felfedeztek már. Ezeket sokszor példaként használták arra, hogy az analízis által használt tételek feltételeinek a fontosságát hangsúlyozzák. Ilyen példa többek között az úgynevett Koch-görbe (1. ábra), amely felfedezőjéről, Helge von Kochról kapta a nevét. Koch 1904-ben írta le először ezt a görbét, amely folytonos, ugyanakkor nem differenciálható egyetlen pontban sem.

A régóta ismert fraktálok közé tartozik a Sierpinski-háromszög is. A halmaz egyik előállítási módja a következő:

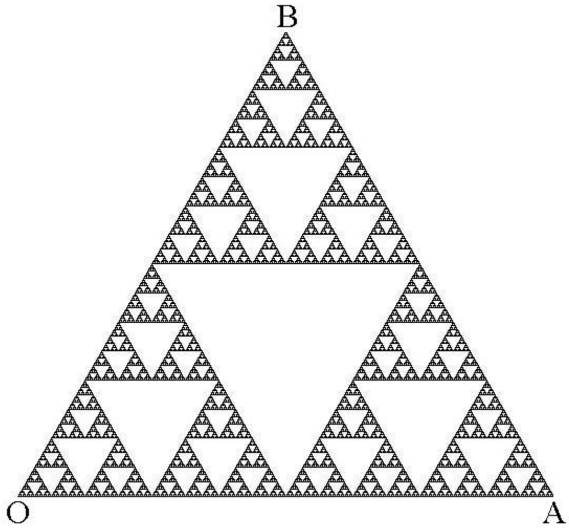
Tekintsük a koordinátasíkon az $O = (0,0)$, $A = (1,0)$ és $B = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ csúcsok által meghatározott S_0 háromszöget a belsejével együtt. Hagyjuk el belőle a középvonalai által meghatározott háromszög belsejét (a határvonalát azonban ne). Az így kapott halmazt nevezzük S_1-nek. S_1 tehát három

[1] A felsorolás Falconertől származik, akit Szabó [10] idéz.

[2] A fraktál-dimenzió és a topológiai dimenzió fogalmára egyaránt több definíció létezik, amelyek egymással nem ekvivalensek. Dolgozatomban két olyan dimenziófogalmat említek, amelyeket fraktál-dimenziónak is nevezhetünk: a hasonlósági- és a Hausdorff-dimenziót.



1. ábra. A Koch-görbe.



2. ábra. A Sierpinski-háromszög.

darab, $\frac{1}{2}$ oldalhosszúságú, szabályos háromszögből áll, valamint ezen háromszögek belsejéből. A következő lépésben hagyjuk el az S_1 halmazból ezen kisebb háromszögek középvonalai által meghatározott háromszögek belsejét (határvonalukat szintén hagyjuk meg). Az így nyert alakzatot nevezzük S_2-nek. Folytatva ezt az eljárást a végtelenségig, a kapott $S = \bigcap_{n=0}^{\infty} S_n$ halmazt nevezzük Sierpinski-háromszögnek (2. ábra). Teljes indukcióval könnyen belátható, hogy minden n-re az S_n halmaz 3^n darab, $\frac{1}{2^n}$ oldalhosszúságú, szabályos háromszöget tartalmaz (beleértve ezen háromszögek belsejét). Egy ilyen kis háromszöget dolgozatom további részében n-edik szintű kis háromszögnek fogom nevezni, és $\triangle^{(n)}$-nel jelölöm.

1.2. Néhány alapvető mértékelméleti fogalom és tétel

Ebben az alfejezetben néhány olyan definíciót és tételt fogok kimondani, amelyek a későbbi bizonyítások során nagyon hasznosak lesznek. A tételeket bizonyítás nélkül közlöm.

1.1. Definíció (σ-algebra). *Egy X halmaz részhalmazainak $\mathcal{F}$ halmazát X feletti σ-algebrának nevezzük, ha az alábbi feltételek mindegyike teljesül:*

- $\emptyset, X \in \mathcal{F}$*;*
- *ha $A \in \mathcal{F}$, akkor $X \setminus A \in \mathcal{F}$;*
- *ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, akkor $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$.*

1.2. Tétel. *Legyen X adott halmaz, és legyen $\mathcal{D}$ az X tetszőleges részhalmazaiból álló halmaz. Ekkor egyértelműen létezik az X részhalmazainak olyan $\mathcal{F}$ halmaza, hogy:*

- *$\mathcal{F}$ σ-algebra X felett;*
- $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}$*;*
- *ha $\mathcal{G}$ is X feletti σ-algebra úgy, hogy $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{G}$, akkor $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$.*

Ekkor $\mathcal{F}$-et a $\mathcal{D}$ által generált σ-algebrának nevezzük.

1.3. Definíció (Borel-halmaz). *Legyen adott egy S metrikus tér. Ekkor egy $B \subseteq S$ halmazt Borel-halmaznak nevezünk, ha az S nyílt halmazai által generált σ-algebra részhalmaza.*

1.4. Definíció (Külső mérték). *Legyen adott egy X halmaz. Ekkor az X részhalmazain értelmezett, és a $[0, \infty)$ halmazra képező $\mathcal{M}$ függvényt külső mértéknek nevezünk, ha teljesíti az alábbi feltételeket:*

- $\mathcal{M}(\emptyset) = 0$*;*
- *ha $A \subseteq B$, akkor $\mathcal{M}(A) \leq \mathcal{M}(B)$;*
- $\mathcal{M}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}(A_n)$*.*

1.5. Tétel (Tömegszétosztási elv). *Ha létezik egy μ mérték az $\mathbb{R}^n$ téren, és létezik $c > 0$ és $s > 0$ úgy, hogy $0 < \mu(\mathbb{R}^n) < \infty$, továbbá minden $A \subset \mathbb{R}^n$ esetén $\mu(A) \leq c|A|^s$, akkor $c\mathcal{H}^s(F) \geq \mu(F)$.*

1.3. Fraktálok előállításának egy módja: iterált függvényrendszerek

Az önhasonló fraktálok előállíthatóak iterált függvényrendszerek segítségével. Ezek bemutatása ennek a résznek a célja.

1.6. Definíció (Iterált függvényrendszer). *Legyen (S, ρ) metrikus tér, továbbá $X \subseteq S$, $X \neq \emptyset$ és $m \geq 2$. Ekkor iterált függvényrendszernek nevezzük az $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ függvények egy családját, ahol minden i-re f_i kontrakció, vagyis minden i esetén $f_i : X \to X$, $r_i < 1$, továbbá minden $x, y \in X$-re $\rho(f_i(x) - f_i(y)) \leq \rho(x - y)$.*

1.7. Definíció (Attraktor). *Az $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ iterált függvényrendszer attraktorának vagy invariáns halmazának nevezzük azt az E halmazt, amelyre teljesül, hogy*

$$E = \bigcup_{i=1}^{m} f_i(E).$$

1.8. Definíció. *Ha az $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ iterált függvényrendszer minden tagja hasonlóság, akkor a függvényrendszer attraktorát önhasonló halmaznak mondjuk.*

1.9. Tétel. *Ha az $r_1, r_2, \ldots, r_m$ valós számok véges sok tagból álló sorozata esetén minden i-re $0 < r_i < 1$, akkor egyértelműen létezik egy olyan $s \geq 0$ valós szám, hogy $\sum_{i=1}^{m} r_i^s = 1$. $s = 0$ akkor, és csak akkor, ha $m = 1$.*

Ennek bizonyításához[3] tekintsük azt a $\phi : [0; \infty) \to [0; \infty)$ függvényt, amelynek hozzárendelési szabálya a következő: $\phi(s) = \sum_{i=1}^{m} r_i^s$. Ekkor ϕ folytonos függvény, $\phi(0) = m \geq 1$, továbbá $\lim_{s \to \infty} \phi(s) = 0 < 1$. Ezért létezik legalább egy olyan s érték, ahol $\phi(s) = 1$. Mivel $\phi'(s) = \sum_{i=1}^{m} r_i^s \log r_i < 0$, ezért ϕ monoton csökkenő, tehát csak egyetlen olyan s érték van, ahol $\phi(s) = 1$. Ha $m > 1$, akkor $\phi(0) > 1$, és ezért $s \neq 0$. Ezzel beláttuk a tételt.

1.10. Tétel. *Ha (S, ρ) teljes metrikus tér, és adott egy $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ iterált függvényrendszer, rendre $\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ kontrakciós arányokkal, akkor a megadott iterált függvényrendszernek egyértelműen létezik nemüres, kompakt attraktora.*

Ennek a tételnek a belátásához szükségünk van az alábbi definíciókra és lemmákra. A lemmák bizonyításának csak a vázlatait közlöm.[4]

[3] A tétel és a bizonyítás forrása: Edgar [2], 105–106. oldal.
[4] A bizonyítások megtalálhatóak: Szabó [10], 34–35. oldal.

1.11. Definíció. *Legyen adott (S, ρ) metrikus tér, $A \subset S$ halmaz és $r > 0$ valós szám. Ekkor az A halmaz r sugarú környezete alatt a következőt értjük:*

$$N_r(A) = \{y \in S : \rho(x - y) < r \text{ valamely } x \in A \text{ pontra}\}.$$

1.12. Definíció (Hausdorff-távolság). *Ha (S, ρ) adott metrikus tér, akkor az $A, B \subset S$ halmazok Hausdorff-távolsága alatt a következő számot értjük:*

$$d(A, B) = \inf\{r > 0 : A \subset N_r(B) \text{ és } B \subset N_r(A)\}.$$

1.13. Lemma. *Jelöljük $K(S)$-sel egy adott (S, ρ) metrikus tér nemüres és kompakt részhalmazainak halmazát. Ekkor az imént definiált d Hausdorff-távolság metrika $K(S)$-en.*

A lemma bizonyításához[5] három állítást kell belátnunk. A következő összefüggéseknek kell teljesülniük tetszőleges $A, B, C \subset K(S)$ halmazokra:

- $d(A, B) = d(B, A)$;
- $0 \leq d(A, B) < \infty$; $d(A, B) = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $A = B$;
- $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$ (háromszög-egyenlőtlenség).

Ezek közül az első nyilvánvalóan következik Hausdorff-távolság definíciójából.

A másodikhoz először azt látjuk be, hogy minden $A, B \subset K(S)$ esetén $d(A, B) < \infty$. Ehhez választunk egy rögzített a pontot A-ból. Egyszerűen belátható, hogy ehhez minden $x \in B$ esetén létezik r_1 úgy, hogy $\rho(x, a) < r_1$ teljesüljön. Ekkor $B \subseteq N_{r_1}(A)$. Hasonlóan létezik r_2 úgy, hogy $A \subseteq N_{r_2}(B)$. Ha $r = max\{r_1, r_2\}$, akkor $d(A, B) \leq r$.

$d(A, B) \geq 0$ is nyilvánvalóan teljesül. Ha $A = B$, akkor könnyen látható, hogy $d(A, B) = 0$. Ha azt tesszük fel, hogy $d(A, B) = 0$ és $A \backslash B \neq \emptyset$, akkor ellentmondásra jutunk. Ellentmondásra jutunk akkor is, ha $d(A, B) = 0$ teljesülése mellett $B \backslash A \neq \emptyset$ igaz voltát feltételezzük. Tehát ha $d(A, B) = 0$, akkor $A = B$.

A háromszög-egyenlőtlenség belátásához kell a következő: minden $a \in A$ ponthoz és $\varepsilon > 0$ valós számhoz létezik $b \in B$ úgy, hogy $\rho(a, b) < d(A, B) + \varepsilon$, illetve $c \in C$ úgy, hogy $\rho(a, c) < d(A, C) + \varepsilon$. Így már pontpárokon értelmezett távolságfüggvénnyel dolgozhatunk, amelyre igaz a háromszög-egyenlőtlenség. Ez alapján levezethető, hogy $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C) + \varepsilon$. Mivel ε tetszőleges volt, ezért ebből már következik a bizonyítandó állítás.

[5] A bizonyítás forrása: Szabó [10], 34.oldal.

1.14. Lemma. *Ha S teljes metrikus tér, akkor $K(S)$ is teljes metrikus tér.*

Mivel „egy metrikus teret akkor nevezünk teljesnek, ha a tér pontjaiból álló tetszőleges Cauchy-sorozat konvergál a tér valamely pontjához” ([10], 34. oldal), ezért a lemma belátásához[6] vegyünk egy $K(S)$-beli tetszőleges $A_1, A_2, \ldots$ Cauchy-sorozatot. Erről be akarjuk látni, hogy tart az A halmazhoz, ahol

$$A = \{x \in S : \exists x_k \in A_k \text{ úgy, hogy } x_k \to x\}.$$

Ehhez legyen $\varepsilon > 0$ adott, és válasszunk $N \in \mathbb{N}$-et úgy, hogy minden $m, n \geq N$ esetén $d(A_m, A_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ teljesüljön. Ezek után a bizonyítás két részletben folytatódik: először belátjuk, hogy minden $n \geq N$-re $A \subseteq N_\varepsilon(A_n)$, majd azt, hogy minden $n \geq N$-re $A_n \subseteq N_\varepsilon(A)$. Ezekből következik, hogy ha $n \geq N$, akkor $d(A, A_n) \leq \varepsilon$, tehát a vizsgált $A_1, A_2, \ldots$ sorozat valóban konvergál az A halmazhoz.

Végül már csak azt kell belátni, hogy $A \in K(S)$, azaz A valóban nemüres és kompakt. Mivel minden n-re A_n nemüres és korlátos, továbbá elegendően nagy n esetén $d(A, A_n) \leq \varepsilon$, ezért A is nemüres és korlátos. Indirekt módon belátható, hogy A minden torlódási pontját tartalmazza, azaz zárt. A teljesen korlátos is. Ennek bizonyításához is azt használjuk fel, hogy elegendően nagy n esetén $d(A, A_n) \leq \varepsilon$, továbbá A_n kompakt.

Az eddigiek ismeretében be tudjuk bizonyítani az 1.10. tételt.[7]

Tekintsük az S metrikus tér nemüres, kompakt részhalmazaiból álló $K(S)$ metrikus teret a d Hausdorff-távolsággal. Mivel S teljes, ezért az 1.14. lemma értelmében $K(S)$ is teljes. Definiáljuk a következő képzési szabállyal megadott $f : K(S) \to K(S)$ függvényt:

$$f(A) = \bigcup_{i=1}^{m} f_i(A).$$

Mivel egy kompakt halmaz folytonos képe kompakt, továbbá véges sok kompakt halmaz uniója is kompakt, ezért ha A kompakt, akkor $f(A)$ is kompakt.

Legyen $r := \max\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$. Nyilván $r < 1$.

Tegyük fel, hogy $q > d(A, B)$ adott. Ha $x \in f(A)$, akkor valamely i-re és $x' \in A$-ra $f_i(x') = x$. Mivel a feltevésünk szerint $q > d(A, B)$, ezért létezik olyan $y' \in B$ pont, hogy $|x' - y'| < q$. Ekkor az $y = f_i(y') \in f(B)$ pontra teljesül, hogy $|x - y| = r_i|x' - y'| < rq$. Mivel ez minden $x \in f(A)$ esetében igaz, ezért $f(A) \subset N_{rq}(f(B))$. Hasonlóképpen az is teljesül, hogy $f(B) \subset N_{rq}(f(A))$. Mindezekből következik, hogy $d(f(A), f(B)) \leq rq$. Ez

[6] A bizonyítás megtalálható: Szabó [10], 34–35. oldal.

[7] A bizonyítás megtalálható: Edgar [2], 107–108. oldal.

az egyenlőtlenség minden $q > d(A, B)$ esetén igaz, így: $d(f(A), f(B)) \leq r \cdot d(A, B)$.

Ebből következően f kontrakció a $K(S)$ teljes metrikus téren. A Banach-fixponttétel miatt f-nek egyértelműen létezik fixpontja, amely megegyezik az $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ iterált függvényrendszer invariáns halmazával. Ezzel beláttuk a bizonyítandó tételt.

Az 1.10. tétel egy számítógépes programok számára hasznos következménye az alábbi tétel:

1.15. Tétel. *Legyen adott egy $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ iterált függvényrendszer, S teljes metrikus tér, és legyen A_0 nemüres, kompakt részhalmaza S-nek. Ekkor ha minden $0 \leq k$-ra*

$$A_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{m} f_i(A_k)$$

teljesül, akkor az $A_0, A_1 \ldots$ halmazok sorozata a Hausdorff-metrika szerint konvergál a megadott függvényrendszer A invariáns halmazához.

A későbbiekben fontos szerepet kap az alábbi tulajdonság, amely speciális iterált függvényrendszereket jellemez:

1.16. Definíció (Nyílthalmaz-feltétel). *Az $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ függvényrendszer kielégíti a nyílthalmaz-feltételt, ha létezik U nemüres, nyílt halmaz, amelyre $i \neq j$ esetén $f_i(U) \cap f_j(U) = \emptyset$, és minden i-re $f_i(U) \subset U$.*

1.4. A hasonlósági dimenzió

Új dimenziófogalom bevezetése azért válik szükségessé, mert bizonyos alakzatok a hagyományos kategóriákban nem kezelhetőek jól. Tekintsük például a Sierpinski-háromszöget.[8]

Ha a kerületét akarnánk kiszámolni (azaz a határát egydimenziós alakzatként vizsgálnánk), akkor ennek teljes hossza „végtelen" lenne. Ennek belátásához tekintsük az S_n halmazt, amely – ahogy korábban már említettem – 3^n darab, $\frac{1}{2^n}$ oldalhosszúságú, szabályos háromszöget tartalmaz. Egy ilyen kis háromszög kerülete tehát $3 \cdot \frac{1}{2^n}$; S_n teljes kerülete pedig $k := 3^n \cdot 3 \cdot \frac{1}{2^n}$. Jól látható, hogy $n \to \infty$ esetén $k \to \infty$.

Ha a Sierpinski-háromszögre kétdimenziós halmazként tekintünk, akkor láthatjuk, hogy egy n-edik szintű kis háromszögének a területe $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{2^{2n}}$, így S_n teljes területe: $t := 3^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{2^{2n}}$. Ha $n \to \infty$, akkor $t \to 0$, azaz a Sierpinski-háromszög területe 0. Hasznos lenne tehát ezt a halmazt olyan

[8] Az itt következő gondolatmenetet lásd például: [2], 8. oldal.

dimenziós alakzatként felfogni, amelyben a mértéke véges. Ez a dimenzió szükségszerűen nem lesz egész szám, az eddigiek alapján 1 és 2 közötti értéket várunk. Azt szeretnénk, ha az új dimenziófogalomaink az eddigi fogalom kiterjesztései lennének.

Az úgynevezett hasonlósági dimenziót szemléletesen a következőképpen tudjuk bevezetni[9]: a vizsgálni kívánt halmazt s-dimenziósnak nevezzük, ha legalább n^s darab, n-ed részére lekicsinyített példányával tudjuk csak lefedni. Ez a szemléleltes meghatározás valóban a hagyományos dimenziófogalom kiterjesztése, amit néhány példával szemléltetek. Ha egy szakaszt a felére kicsinyítünk, akkor $2 = 2^1$ darabra van szükségünk belőle ahhoz, hogy az eredeti szakaszt lefedjük, ha ötödére kicsinyítjük, akkor a lekicsinyített példányokból ugyanehhez $5 = 5^1$ darabra van szükség, tehát a szakasz eszerint a meghatározás szerint is egydimenziós. A négyzet dimenziója továbbra is kettő, hiszen például a felére kicsinyített példányából $4 = 2^2$ darabra van szükség az eredeti négyzet lefedéséhez. Dolgozatom tárgyának szempontjából különösen is a Sierpinski-háromszög hasonlósági dimenziója érdekes: ennek felére lekicsinyített példányából 3 darabra van szükség az eredeti lefedéséhez. Így a Sierpinski-háromszög dimenziójára az $s = \log_2 3 \approx 1,58$ értéket kapjuk.

A következőkben nézzük meg a hasonlósági dimenzió precízebb definícióját:

1.17. Definíció. *Legyen adott az $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ iterált függvényrendszer rendre $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ hasonlósági arányokkal. Jelöljük a megadott függvényrendszer attraktorát E-vel. Ekkor E hasonlósági dimenzióján azt a nemnegatív s számot értjük, melyre:*

$$r_1^s + r_2^s + \ldots + r_m^s = 1.$$

Ez a definíció az 1.9. tétel miatt egyértelmű. Dolgozatom további részében egy E halmaz hasonlósági dimenzióját $\dim E$-vel jelölöm.

A Sierpinski-háromszög előáll a következő iterált függvényrendszer attraktoraként:

$$f_1(x, y) = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right),$$

$$f_2(x, y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}y\right),$$

$$f_3(x, y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

[9] A fogalom ismertetéséhez felhasznált elsődleges irodalom: Szabó [10].

Mindegyik függvény egy-egy hasonlóságot definiál, melyek középpontjai az S_0 háromszög csúcsai, hasonlósági arányaik pedig megegyeznek: $r_1 = r_2 = r_3 = \frac{1}{2}$. Ez a függvényrendszer kielégíti a nyílthalmaz-feltételt az S_0 belső pontjaiból álló S_0' halmaz révén, erre ugyanis teljesül, hogy ha $i \neq j$, akkor $f_i(S_0') \cap f_j(S_0') = \emptyset$, továbbá $i = 1, 2, 3$ esetén $f_i(S_0') \subset S_0'$. Így a $3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^s = 1$ egyenletből a Sierpinski-háromszög hasonlósági dimenziójára a definíció alapján is az $s = \log_2 3$ értéket kapjuk, amely megegyezik a szemléletes képből nyert értékkel.

1.5. A Hausdorff–Besicovitch-dimenzió

Fraktálok tárgyalásában a hasonlósági dimenziónál is fontosabb szerepet játszik az úgynevezett Hausdorff–Besicovitch-dimenzió (vagy rövidebben: Hausdorff-dimenzió). Ennek bevezetéséhez először a Hausdorff-mértéket definiálom, amelyhez szükségem van a következő meghatározásokra:

1.18. Definíció (Halmaz átmérője). *Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ nemüres halmaz. Ekkor U átmérője alatt a következőt értjük: $|U| = sup\{|x - y| : x, y \in U\}$.*

A fenti definíciót tetszőleges távolságfüggvénnyel rendelkező metrikus térre is ki lehet mondani kevés változtatással, azonban dolgozatom tárgya szempontjából elegendő, ha az $\mathbb{R}^n$ térben vizsgálódom, ahol a megadott távolságfüggvény a szokásos euklidészi távolság.

1.19. Definíció. *Legyen $\delta > 0$ adott szám és $E \subset \mathbb{R}^n$ adott halmaz. Ekkor az $U_i \subset \mathbb{R}^n$ halmazokat E egy δ-fedésének nevezzük, ha $F \subset \bigcup_i U_i$, és minden i-re $|U_i| < \delta$.*

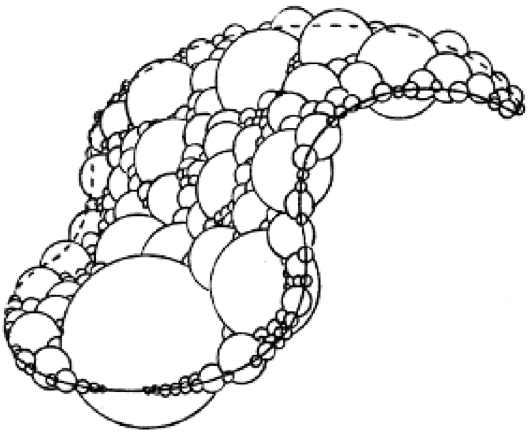
1.20. Definíció (Hausdorff-mérték). *Legyen $F \subset \mathbb{R}^n$ halmaz és $s > 0$ valós szám. Tekintsük az alábbi mennyiséget:*

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf\left\{\sum_{i=0}^{\infty} |U_i^s| : \{U_i\} \textit{ az } F \ \delta\textit{-fedése}\right\}.$$

Ekkor az F halmaz s-dimenziós Hausdorff-mértékét a következő kifejezés definiálja:

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}_\delta^s(F).$$

Egyszerű számolással belátható, hogy ha s-et változatlanul hagyjuk, és δ-t növeljük, akkor $\mathcal{H}_\delta^s(F)$ értéke csökken. A 3. ábrán[10] láthatunk példát



3. ábra. Egy felület lefedése adott δ-nál kisebb átmérőjű gömbökkel.

egy halmaz lefedésére különböző, de egy adott δ-nál nem nagyobb átmérőjű gömbökkel.

A Hausdorff-mérték néhány egyszerűen belátható tulajdonságát bizonyítás nélkül, tételként közlöm:

1.21. Tétel. *Legyen $s > 0$. Ekkor teljesülnek a következők:*

- $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$;
- *ha $A \subset B$, akkor $\mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(B)$;*
- $\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_i)$;
- *ha $A \subset \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$, továbbá λA jelöl minden olyan halmazt, amely az A λ-szoros nagyítása, akkor $\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$.*

Rögzített F halmaz, és változó s dimenziószám mellett a $\mathcal{H}^s(F)$ függvény vizsgálatával definiálhatjuk a Hausdorff-dimenziót. Ehhez a következő tételt mondom ki:

1.22. Tétel. *Legyen F Borel-halmaz, továbbá $0 < s < t$. Ha $\mathcal{H}^s(F) < \infty$, akkor $\mathcal{H}^t(F) = 0$.*

Az állítás bizonyításához[11] tegyük fel, hogy F olyan Borel-halmaz, amelyre $\mathcal{H}^s(F) < \infty$. Válasszunk minden rögzített δ valós számhoz F-nek egy olyan

[10] Az ábra forrása: Edgar [2], 148. oldal.

[11] A bizonyítás megtalálható: [10], 61. oldal.

$\{G_1, G_2, \ldots\}$ δ-fedését, amelyre teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |G_i|^s \leq k := \mathcal{H}^s(F) + 1.$$

Ha $s < t$, akkor:

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |G_i|^t \leq \delta^{t-s} \sum_{i=1}^{\infty} |G_i|^s \leq k\delta^{t-s}.$$

Innen:

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(F) = 0.$$

Az 1.22. tételből következik, hogy pontosan egy olyan $s_0 \in [0, \infty)$ létezik, melyre rögzített F halmaz mellett:

$$\mathcal{H}^s(F) = \infty \qquad \text{ha } s > s_0 \text{ és}$$

$$\mathcal{H}^s(F) = 0 \qquad \text{ha } s < s_0.$$

Ezt a kritikus s_0 értéket nevezzük az F halmaz Hausdorff-dimenziójának.

1.6. Önhasonló halmazok hasonlósági- és Hausdorff-dimenziójának viszonya

A kérdés vizsgálatához az n tagból álló E-ábécék terét, valamint ezzel kapcsolatos fogalmakat kell definiálnunk. Ebben az alfejezetben Edgar [2] gondolatmenetét követem.

Legyen adott egy n darab különböző betűből álló E halmaz. Ezen betűk felhasználásával véges és végtelen sok tagból álló sorozatok készíthetőek. Jelöljünk egy E betűiből álló sorozatot α-val. Ekkor α hossza alatt azt az $\ell(\alpha)$ számot értjük, amely megmondja, hány elemből áll α. Jelöljük $E^{(n)}$-nel azokat a sorozatokat, amelyekre $\ell(\alpha) = n$. Legyen továbbá

$$E^{(*)} := E^{(0)} \cup E^{(1)} \cup E^{(2)} \cup \ldots;$$

illetve $E^{(\omega)}$ a végtelen sok tagból álló sorozatok halmaza.

Az α és a β véges sorozatok egymás mögé írásának nevezzük azt az $\alpha\beta$ sorozatot, amely előbb α, majd β elemeit sorolja fel (megőrizve természetesen az elemek eredeti sorrendjét). Ha létezik olyan γ véges sorozat, hogy $\beta = \alpha\gamma$, akkor azt mondjuk, hogy az α sorozat a β előtagja, amit az $\alpha \leq \beta$ jelöléssel rövidítünk. Ha $\alpha \in E^{(*)}$, akkor legyen

$$[\alpha] = \{\sigma \in E^{(\omega)} : \alpha \leq \sigma\},$$

azaz $[\alpha]$ azoknak a végtelen sorozatoknak a halmaza, amelyeknek az α véges sorozat az előtagjuk.

Legyen adott $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ pozitív valós számok egy véges sorozata. Ekkor egy szintén n darab különböző betűből álló E-ábécé tagjaihoz bijektív módon hozzárendelhetjük az $\{1, 2, \dots, n\}$ számokat, és így új indexekkel láthatjuk el az egyes r_i számokat. Az újraindexelt sorozatot jelöljük $(r_e)_{e\in E}$-vel.

Minden $e \in E$ betűre definiáljuk a következő $\theta_e : E^{(\omega)} \to E^{(\omega)}$ függvényt:

$$\theta_e(\sigma) = e\sigma.$$

Ezt a függvényt eltolásnak nevezzük, mivel σ elemeit egy egységgel jobbra tolja, és a sorozat elejére az e elemet helyezi. Ezután definiáljuk egy $\alpha \in E^{(*)}$ sorozat w_α-val jelölt átmérőjét rekurzív módon: legyen a 0 hosszúságú üres sorozat átmérője: $w_0 = 1$, és minden $e \in E$-re $w_{\alpha e} = w_\alpha r_e$. Legyen a $\sigma, \tau \in E^{(\omega)}$ sorozatok távolsága:

$$\rho(\sigma, \tau) := \|[\alpha]\| = w_\alpha,$$

ahol α a σ és a τ leghosszabb közös előtagja.

Ezután belátjuk, hogy adott E halmaz mellet $(\theta_e)_{e\in E}$ olyan iterált függvényrendszer az $(E^{(\omega)}, \rho)$ metrikus téren, amelyhez az $(r_e)_{e\in E}$ arányok sorozata tartozik. Ehhez tegyük fel, hogy a $\sigma, \tau \in E^{(\omega)}$ sorozatok leghosszabb közös előtagja α. Ha $e \in E$, akkor $e\sigma$ és $e\tau$ leghosszabb közös előtagja $e\alpha$. Így:

$$\rho\left(\theta_e(\sigma), \theta_e(\tau)\right) = w_{e\alpha} = r_e w_\alpha = r_e \rho(\sigma, \tau).$$

Tehát minden $e \in E$-re θ_e hasonlóság. Könnyen belátható, hogy az $(E^{(\omega)}, \rho)$ metrikus tér teljes, ezért a $(\theta_e)_{e\in E}$ iterált függvényrendszernek ezen a téren az 1.10. tétel miatt egyérteműen létezik attraktora, amely maga a tér, $E^{(\omega)}$. Ezt a metrikus teret a $(\theta_e)_{e\in E}$ iterált függvényrendszerrel együtt az $(r_e)_{e\in E}$ sorozat végtelen sorozatokból álló modelljének fogjuk nevezni. Megfogalmazható az alábbi tétel:

1.23. Tétel. *Legyen S nemüres, teljes metrikus tér, továbbá legyen $(f_e)_{e\in E}$ iterált függvényrendszer a következő hasonlósági arányokkal: $(r_e)_{e\in E}$, ahol minden $e \in E$-re $0 < r_e < 1$. Ekkor egyértelműen létezik olyan $h : E^{(\omega)} \to S$ folytonos függvény, amelyre*

$$h(e\sigma) = f_e(h(\sigma))$$

minden $\sigma \in E^{(\omega)}$ és minden $e \in E$ esetén. $E^{(\omega)}$ halmaz elemeinek képe, $h[E^{(\omega)}]$ az $(f_e)_{e\in E}$ iterált függvényrendszer invariáns halmaza.

A tétel bizonyítását vázlatosan ismertetem. Definiáljunk először egy (g_k) függvénysorozatot, ahol minden k-ra: $g_k : E^{(\omega)} \to S$. Egy kiválasztott $a \in S$ ponthoz legyen $g_0(\sigma) = a$ minden σ-ra. Ha g_k-t már definiáltuk, akkor $e \in E$ és $\sigma \in E^{(\omega)}$ esetén legyen

$$g_{k+1}(e\sigma) = f_e(g_k(\sigma)).$$

Kiindulva abból, hogy g_0 folytonos, indukcióval belátható, hogy minden k-ra g_k is folytonos.

Legyen $r = \max_e r_e < 1$. Vezessük be továbbá a következő jelölést: ha X_1, X_2 metrikus terek, $a, b : X_1 \to X_2$ függvények, akkor legyen $\rho_u(a, b) = \sup\{\rho(a(x), b(x)) : x \in X_1\}$. Ezek után g_k rekurzív definíciójának felhasználásval belátható, hogy minden $\sigma \in E^{(\omega)}$ esetén teljesül:

$$\rho(g_{k+1}(e\sigma), g_k(e\sigma)) \leq r\rho_u(g_k, g_{k-1}),$$

ahol ρ a 14. oldalon definiált távolságfüggvény. Majd alkalmazva a teljes indukciót és a háromszögegyenlőtlenséget, a következőkre juthatunk: ha $m \geq k$, akkor

$$\rho_u(g_m, g_k) \leq \sum_{j=k}^{m-1} \rho_u(g_{j+1}, g_j) \leq \sum_{j=k}^{\infty} r^j \rho_u(g_1, g_0).$$

Mivel a legvégül kapott felső becslés $k \to \infty$ esetén 0-hoz tart, ezért a (g_k) sorozat Cauchy-sorozat az $E^{(\omega)}$ halmazról S halmazra képező folytonos függvények terében, ezért egyenletesen konvergens. Jelöljük a határértékét h-val.

A $(g_k[E^{(\omega)}])$ halmazokból álló sorozat egyszerre konvergál $(h[E^{(\omega)}])$-hoz és az $(f_e)_{e\in E}$ iterált függvényrendszer invariáns halmazához. Mivel a határérték egyértelmű, ezért $(h[E^{(\omega)}])$ a megadott függvényrendszer attraktora.

Végül h létezésének egyértelműségét indirekt módon látjuk be az imént bemutatotthoz hasonló számolást felhasználva. Ezzel végére értünk az 1.23. tétel bizonyításának. Ezek után Edgar megjegyzi, hogy h teljesíti az úgynevezett Lipschitz-tulajdonságot, azaz létezik olyan L valós szám, hogy minden $\sigma, \tau \in E^{(\omega)}$ esetén teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$\rho(h(\sigma), h(\tau)) \leq L\rho(\sigma, \tau).$$

Az önhasonló halmazok hasonlósági- és Hausdorff-dimenziói közti összefüggés kimondásához és belátásához szükségünk van még a következő tételre:

1.24. Tétel. *Legyen X tetszőleges halmaz, $\mathfrak{A}$ pedig X olyan részhalmazainak családja, amelyek lefedik X-et. Legyen továbbá $f : \mathfrak{A} \to [0, \infty)$ függvény. Ekkor egyértelműen létezik olyan $\mathcal{M}$ külső mérték X-en, hogy az alábbiak teljesülnek:*

(a) minden $A \in \mathfrak{A}$ esetén $\mathcal{M}(A) \leq f(A)$;

(b) ha $\mathcal{N}$ tetszőleges külső mérték X-en úgy, hogy minden $A \in \mathfrak{A}$ esetén $\mathcal{N}(A) \leq f(A)$ teljesül, akkor minden $B \subseteq X$-re $\mathcal{N}(B) \leq \mathcal{M}(B)$.

A tétel bizonyítását vázlatosan ismertetem.

Az egyértelműség belátása nem nehéz, mivel ha két olyan külső mérték is létezik, amelyre (a) és (b) is teljesül, akkor mindegyik nagyobb vagy egyenlő, mint a másik, ami csak úgy lehetséges, ha egyenlőek. A létezés bizonyításához először jelöljük $\mathfrak{D}$-vel B olyan megszámlálható fedéseit, amelyekhez csak $\mathfrak{A}$-beli halmazokat használtunk fel. Majd $\mathcal{M}$-et határozzuk meg a következőképpen: minden $B \subset X$ esetén legyen

$$\mathcal{M}(B) = \inf \sum_{A \in \mathfrak{D}} f(A).$$

Nem nehéz belátni, hogy $\mathcal{M}$ valóban külső mérték, azaz megfelel az 1.4. definícióban meghatározott feltételeknek.

Ezek után már csak annak a bizonyítása marad hátra, hogy a fent definiált $\mathcal{M}$ külső mérték valóban eleget tesz a feltételeknek. Az (a) fennállásának belátásához felhasználjuk, hogy $\{A\}$ maga is fedése A-nak. Így:

$$\mathcal{M}(A) \leq \sum_{B \in \{A\}} f(B) = f(A).$$

A (b) bizonyításához tegyük fel, hogy adott egy $\mathcal{N}$ külső mérték X-en úgy, hogy minden $A \in \mathfrak{A}$ esetén $\mathcal{N}(A) \leq f(A)$ teljesül. Ekkor minden $\mathfrak{D}$ fedésre:

$$\sum_{A \in \mathfrak{D}} f(A) \geq \sum_{A \in \mathfrak{D}} \mathcal{N}(A) \geq \mathcal{N}\left(\bigcup_{A \in \mathfrak{D}} A \right) \geq \mathcal{N}(B).$$

Ebből következik, hogy $\mathcal{M}(B) \geq \mathcal{N}(B)$, így teljesen beláttuk az 1.24. tételt.

Az eddigi ismeretek birtokában már tudjuk bizonyítani az alábbi tételt, amely megkönnyíti önhasonló halmazok Hausdorff-dimenziójának kiszámítását:

1.25. Tétel. *Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $X \neq \emptyset$ és $m \geq 2$. Ha az $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ rendre $\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ kontrakciós arányokkal megadott iterált függvényrendszer – ahol minden i-re $f_i : X \to X$ – kielégíti a nyílthalmaz-feltételt, akkor a függvényrendszer K attraktorának Hausdorff-dimenziója megegyezik a hasonlósági dimenziójával.*

Legyen $\sum_{i=1}^{m} r_i^s = 1$, azaz $\dim K = s$. Legyen E az m betűből álló ábécé, $(E^{(\omega)}, \rho)$ pedig az $\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ sorozat végtelen sorozatokból álló modellje, ρ és w_α meghatározása ugyanaz, mint korábban, a 14. oldalon. A $\sum_{i=1}^{m} r_i^s = 1$ egyenlőségből következik, hogy

$$\sum_{i=1}^{m} (w_\alpha r_i)^s = w_\alpha^s.$$

Ebből látszik, hogy a w_α^s kifejezés teljesíti a külső mérték additív tulajdonságát. Ezért legyen az $E^{(\omega)}$ téren értelmezett $\mathcal{M}$ külső mérték olyan, hogy $\mathcal{M}([\alpha]) = w_\alpha^s$ teljesüljön minden α-ra. Ekkor $\mathcal{M}([\alpha]) = |[\alpha]|^s$.

Edgar ezután egy általa korábban belátott tételt használ fel, amelyet bizonyítás nélkül közlök:

1.26. Tétel. *Legyen (V, E, i, t) irányított gráf, ahol $i : V \to E$ és $t : E \to V$ függvények. Tegyük fel, hogy nemnegatív w_α számok kielégítik a*

$$w_\alpha = \sum_{i(e)=t(\alpha)} w_{\alpha e}$$

egyenlőséget minden $\alpha \in E_v^{(*)}$ esetén, ahol $E_v^{(*)}$ jelöli az összes $v \in V$ kezdőpontú, véges hosszúságú sétát a gráfban. Legyen $\mathcal{M}$ az 1.24. tétel alapján konstruált mérték úgy, hogy $\mathcal{M}([\alpha]) = w_\alpha$ teljesüljön. Ha ρ egy metrika az $E_v^{(*)}$ halmazon, és létezik olyan $s > 0$, hogy minden $\alpha \in E_v^{(*)}$ esetén $\mathcal{M}([\alpha]) = |[\alpha]|^s$ fennáll, akkor minden $B \subseteq E_v^{(*)}$ Borel-halmazra $\mathcal{M}(B) = \mathcal{H}^s(B)$.

Ebből a tételből kifolyólag minden $B \subseteq E^{(\omega)}$ Borel-halmazra $\mathcal{M}(B) = \mathcal{H}^s(B)$, amiből következik, hogy $E^{(\omega)}$ halmaz Hausdorff- és hasonlósági dimenziója egyaránt s. Mivel az egyértelműen létező $h : E^{(\omega)} \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény (lásd: 1.23. tétel) teljesíti a Lipschitz-tulajdonságot, ezért K Hausdorff-dimenziója nem nagyobb a hasonlósági dimenziójánál.

Ezek után a fordított egyenlőtlenséget szeretnénk belátni, azaz, hogy K hasonlósági dimenziója nem nagyobb a Hausdorff-dimenziójánál. Ehhez is tekintsünk egy adott, m darab betűből álló E ábécét. Indexeljük újra az iterált függvényrendszert és a hozzá tartozó kontrakciós arányok sorozatát, azaz jelöljük ezeket rendre $(f_e)_{e\in E}$-vel és $(r_e)_{e\in E}$-vel. Jelöljük egy véges α sorozat legutolsó elemének elhagyásával létrehozott sorozatot α^--val. Ha $\alpha = e_1, e_2, \ldots, e_k$, ahol $k = \ell(\alpha)$ akkor rövidítésként legyen

$$f_{e_k} \circ f_{e_{k-1}} \circ \ldots \circ f_{e_1}(x) := \alpha(x).$$

Mivel az $(f_e)_{e\in E}$ iterált függvényrendszer teljesíti a nyílthalmaz-feltételt, ezért létezik olyan $U \subseteq X$ nemüres, nyílt halmaz, amelyre $i \neq j$ esetén

$f_i(U) \cap f_j(U) = \emptyset$, továbbá minden i-re $f_i(U) \subset U$. Ekkor olyan $\alpha, \beta \in E^{(*)}$ sorozatokra, amelyek közül egyik sem előtagja a másiknak, teljesül, hogy $\alpha[U] \cap \beta[U] = \emptyset$. Tekintsük az alábbi halmazt $A \subseteq K$ esetén:

$$T = \left\{ \alpha \in E^{(*)} : \overline{\alpha[U]} \cap A \neq \emptyset, \quad |\alpha[U]| < |A| \leq |\alpha^-[U]| \right\}.$$

Különböző α-k esetén az $\alpha[U]$ halmazok diszjunktak, mivel egyik α sorozat sem előtagja valamelyik másiknak.

Mivel az f_α függvény hasonlóság $|[\alpha]|$ aránnyal, ezért $\alpha[U]$ átmérője $|U| \cdot |[\alpha]|$. Legyen $r = min_e r_e$. Ekkor:

$$|\alpha[U]| = |U| \cdot |[\alpha]| \geq r|U| \cdot |[\alpha^-]| = r|\alpha^-[U]| \geq r|A|.$$

Vezessük be a következő jelöléseket: legyen az U halmaz átmérője $|U| := w$, továbbá a d-dimenziós Lebesgue-mértéke $\mathcal{L}^d(U) := p$. Így:

$$\mathcal{L}^d(\alpha[U]) = p \cdot \left(\frac{|\alpha[U]|}{|U|} \right)^d \geq \frac{pr^d}{w^d} \cdot |A|^d.$$

Ha $x \in A$, akkor minden $\alpha \in T$ sorozat esetén minden $a \in \alpha[U]$ pontra az x és a pontok távolsága nem nagyobb, mint $|A| + |\alpha[U]| \leq 2 \cdot |A|$. Jelöljük T elemszámát q-val, valamint a 0 pont körüli egységgömb d-dimenziós Lebesgue-mértékét t-vel. Ekkor az eddigiek alapján:

$$\frac{qpr^d}{w^d}|A|^d \leq t \cdot (2 \cdot |A|)^d,$$

amely átrendezve:

$$q \leq \frac{t}{p} \cdot \left(\frac{2w}{r} \right)^d := c.$$

Ez a c tehát olyan pozitív szám, amely felső korlát T halmaz elemszámára.

Ezek után azt akarjuk belátni, hogy létezik olyan $b > 0$ szám, hogy valamely $A \subseteq K$ Borel-halmazra

$$\mathcal{M}(h^{-1}[A]) \leq b \cdot |A|^s$$

teljesüljön. Legyen A adott, T pedig, mint előbb. Ekkor:

$$A \subseteq \bigcup_{\alpha \in T} \overline{\alpha[U]} \quad \text{és} \quad h^{-1}[A] \subseteq \bigcup_{\alpha \in T} [\alpha].$$

Ha $\alpha \in T$, akkor

$$\mathcal{M}([\alpha]) = |[\alpha]|^s = \left(\frac{|\alpha[U]|}{w} \right)^s \leq \left(\frac{|A|}{w} \right)^s.$$

Innen:

$$\mathcal{M}(h^{-1}[A]) \leq \sum_{\alpha \in T} \mathcal{M}([\alpha]) \leq c \cdot \left(\frac{|A|}{w} \right)^s .$$

Tehát $b = \frac{c}{w^s}$ a keresett konstans.

Végül az 1.24. tétel miatt $1 = \mathcal{M}(h^{-1}[K]) \leq b\mathcal{H}^s(K)$, ezért K hasonlósági dimenziója nem nagyobb, mint Hausdorff-dimenziója. Ezzel beláttuk az 1.25. tételt.

E tétel értelmében a Sierpinski-háromszög Hausdorff-dimenziója egyszerűen kiszámítható, mivel megegyezik a hasonlósági dimenziójával, azaz $s = \log_2 3$-mal. Dolgozatom további részében a Sierpinski-háromszög Hausdorff-dimenzióját s-sel, e dimenziónak megfelelő Hausdorff-mértékét pedig $\mathcal{H}^s(S)$-sel fogom jelölni.

2. A Sierpinski-háromszög s-dimenziós Hausdorff-mértékének becslése

A korábbiakban már láttuk, hogy a Siepinski-háromszög Hausdorff-dimenziója $s = \log_2 3$, a dimenziónak megfelelő Hausdorff-mértéke azonban még nyitott kérdés. Az általam elért legfrissebb írás, amelyik ezzel a témával foglalkozik: Móra [9]. E dolgozat felsorolja az elmúlt évek kutatásainak legfontosabb eredményeit a Sierpinski-háromszög s-dimenziós Hausdorff-mértékének alsó és felső korlátjára vonatkozóan. (Lásd: Móra [9], 2. oldal.)

Ezek az alsó korlátra vonatkozóan a következők:

- $0,5$ (2002; B. Jia, Z. Zhou, Z. Zhu)
- $0,5631$ (2004; R. Houjun, W. Weiyi)
- $0,670432$ (2006; B. Jia, Z. Zhou, Z. Zhu)

A felső korlátra vonatkozóan Móra a következőket említi:

- $0,9508$ (1987; Marion)
- $0,915$ (1997; Z. Zhou)
- $0,89$ (1997; Z. Zhou)
- $0,83078$ (2000; Z. Zhou, Li Feng)
- $0,81794$ (1999; Wang Heyu, Wang Xinghua)

A Móra által adott alsó korlát jobb az eddigieknél ($0,77$), azonban bizonyítása hosszadalmas, ismertetése ezért meghaladja dolgozatom kereteit. Helyette B. Jia, Z. Zhou és Z. Zhu [5] gondolatmenetét fogom ismertetni. Móra felső korlátra vonatkozó eredménye valamivel rosszabb ugyan Wang Heyu és Wang Xinghua állításánál, viszont a kínai kutatók által adott bizonyítás az anyanyelvükön íródott, ezért helyessége nehezen ellenőrizhető. (Lásd: Móra [9], 10. oldal.) Móra bizonyítása azonban könnyen érthető és viszonylag rövid, ezért az alábbiakban ezt fogom ismertetni.

2.1. Alsó korlát

Az alsó korlát keresésének alapötlete egy új mérték definiálása, amely ekvivalens a Hausdorff-mértékkel, így segítségével becsülhető a Sierpinski-háromszög s-dimenziós Hausdorff-mértéke. Tekintsük ehhez azon koordinátasíkbeli szabályos hatszögek halmazát, amelyek három oldala párhuzamos

S_0 oldalaival. Jelöljük ezt a halmazt Λ-val. Egy $E \subset \mathbb{R}^2$ halmaz s-dimenziós $\mathcal{M}$-mértéke legyen:

$$\mathcal{M}^s(E) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{M}^s_\delta(E),$$

ahol

$$\mathcal{M}^s_\delta(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : U_i \in \Lambda, \quad |U_i| \leq \delta, \quad E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \right\}.$$

E mérték segítségével egy, a koordinátasíkban található halmaz Hausdorff-mértéke könnyen becsülhető:

2.1. Lemma. *Ha $E \subset \mathbb{R}^2$ nemüres halmaz, akkor az imént definiált $\mathcal{M}^s(E)$ mérték ekvivalens a megfelelő Hausdorff-mértékkel, $\mathcal{H}^s(E)$-vel. Ezen felül $s > 0$ esetén*

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^s \mathcal{M}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{M}^s(E).$$

Ennek a lemmának a bizonyításához az [5] cikk szerzői kétféleképp fedik le E-t legfeljebb δ átmérőjű halmazokkal: tetszőleges, valamint Λ-ból vett halmazokkal. A kétféle fedésre felírt egyenlőtlenségből levezethető a lemma állítása.

A Sierpinski-háromszög s-dimenziós Hausdorff-mértékének alsó becsléséhez szükség van egy tömegeloszlásra is. Definiáljunk ezért S-en egy olyan tömegeloszlást, amelyet az alábbi mérték ad meg:

$$\begin{cases} \mu(S_0) = 1 \\ \mu(\triangle^{(n)}) = \frac{1}{3^n}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \\ \mu(S_0 - S) = 0 \end{cases}$$

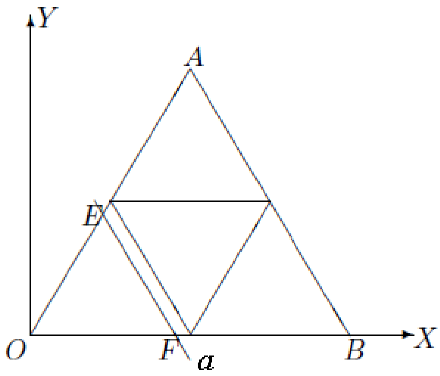
Ha az S_0 háromszög csúcsai a korábban felsorolt O, A és B pontok (lásd 3. oldal), továbbá a Sierpinski-háromszöget a 10. oldalon definiált függvényrendszer attraktorának tekintjük, akkor igaz a következő állítás:

2.2. Lemma. *Ha V olyan halmaz, amely metszi az S Sierpinski-háromszöget, és μ a fent definiált tömegeloszlás S-en, akkor*

$$\frac{\mu(V \cap S)}{|V|^s} = \frac{\mu(f_i(V \cap S))}{\frac{1}{3}|V|^s}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Az [5] által megadott becslés belátásához szükségünk lesz két további lemma kimondására, ezekhez azonban új jelöléseket kell bevezetnünk. Legyen a egyenes az AB oldallal párhuzamos, és messe az OA oldalt az E, az OB oldalt pedig az F pontban (4. ábra[12]). Legyen $|OF| = g$, az O, F és E pontok által meghatározott háromszög pedig Δ_g. Ekkor igaz a következő lemma:

2.3. Lemma. *Ha μ a fent megadott tömegeloszlás, $s = \log_2 3$, $0 < g \leq 1$, akkor $\mu(\Delta_g) \geq 0,812545g^s$.*



4. ábra. Δ_g szemléltetése.

Legyen b egyenes az OA oldallal párhuzamos, és messe az OB oldalt a D, az AB oldalt pedig a G pontban (5. ábra[13]). Legyen $|OD| = t$, az O, D, G, A pontok által meghatározott trapéz pedig Ω_t. Ekkor belátható az alábbi lemma:

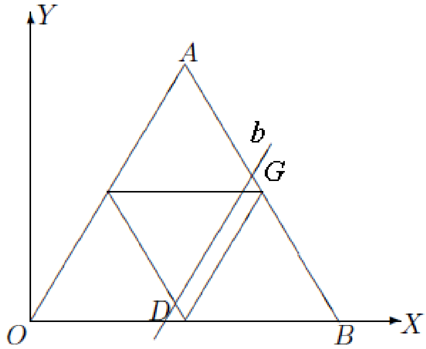
2.4. Lemma. *Ha μ a fent megadott tömegeloszlás, $s = \log_2 3$, $0 \leq t \leq 1$, akkor $\mu(\Omega_t) \geq t^s$.*

A lemma bizonyításához a teljes indukció módszerét alkalmazhatjuk. Ennek vázlatát ismertetem. Ha D az OB szakasz felezőpontja, akkor igaz az állítás. Az indukciós feltevésünk szerint a lemma állítása igaz abban az esetben, ha a D pont egyike az OB szakasz olyan pontjainak, amelyek a szakaszt 2^n egyenlő részre osztják. Ezek után a lemma állítása egy rekurzív formula megalkotása által belátható azokra az esetekre is, amikor D olyan osztópontok egyike, amelyek az OB szakaszt 2^{n+1} egyenlő részre osztják.

Az eddig közölt lemmák segítségével már belátható az alábbi tétel:

[12]Az ábra forrása: [5], 11. oldal, a jelölésekben kevés módosítást hajtottam végre.

[13]Az ábra forrása: [5], 12. oldal, a jelölésekben kevés módosítást hajtottam végre.



5. ábra. Ω_t szemléltetése.

2.5. Tétel. *Tetszőleges $V \in \Lambda$ szabályos hatszög esetén $\mu(V) \leq 1,1875|V|^s$.*

A következő bekezdésekben a tétel bizonyítását vázlatosan közlöm.

Vegyünk olyan V hatszöget, amely metszi az S Sierpinski-háromszöget, és amelynek az S_0 háromszög AB, OA és OB oldalaival párhuzamos oldalegyenesei rendre a, b és c. Ha e három oldalegyenes legalább egyike nem metszené S-et, akkor a Sierpinski-háromszöget előállító iterált függvényrendszer elemeiből válogatott kontrakciók megfelelő kompozíciójával elérhető, hogy a, b és c egyaránt messék S-et. A 2.2 lemma következményeként a továbbiakban vizsgálhatjuk $V \cap S$ helyett azt halmazt, amely $V \cap S$ képe a kontrakciók kompozíciójának alkalmazása után. Az [5] cikk szerzői ezek után három esetet elemeznek aszerint, hogy V hány első szintű kis háromszöget metsz. Magasabb szintű kis háromszögekre a Sierpinski-háromszög önhasonlósága miatt nem kell külön bizonyítást adni.

Első esetben V mindhárom első szintű kis háromszöget metszi. Ekkor a 6. ábrának[14] megfelelően legyen $a \cap OB = E$, $b \cap AB = F$, $c \cap OA = G$, illetve $|OE| = g_1$, $|BF| = g_2$, $|AG| = g_3$. Ekkor $|V| = \frac{2}{3}(2 - g_1 - g_2 - g_3)$, továbbá a 2.3. lemma miatt:

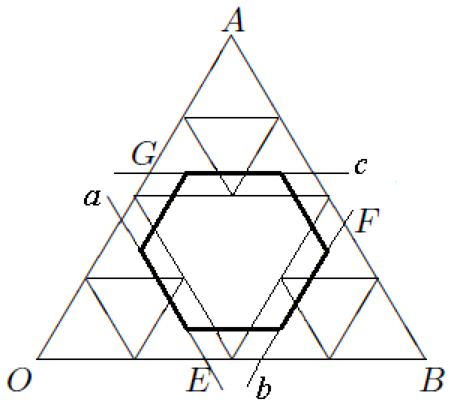
$$\mu(V) \leq 1 - \mu(\Delta_{g_1}) - \mu(\Delta_{g_2}) - \mu(\Delta_{g_3}) \leq 1 - 0,812545 \left(g_1^s + g_2^s + g_3^s\right).$$

Vezessük be az alábbi függvényt:

$$f(g_1, g_2, g_3) = 1,1875 \left(\frac{2}{3}(2 - g_1 - g_2 - g_3)\right)^s + 0,812545 \left(g_1^s + g_2^s + g_3^s\right) - 1,$$

ahol $0 \leq g_i \leq \frac{1}{2}$, $i = 1,2,3$. Az $f(g_1, g_2, g_3)$ függvény parciális deriváltjai a 0

[14] Az ábra forrása: [5], 14. oldal, a jelölésekben kevés módosítást hajtottam végre.

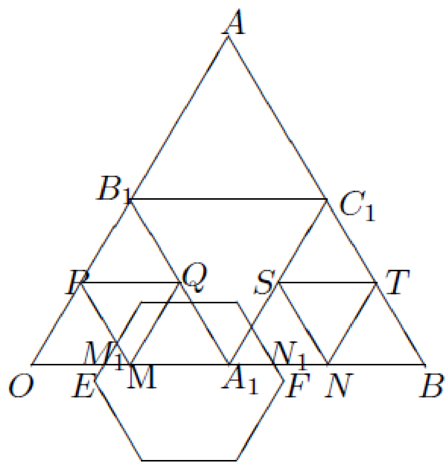


6. ábra. Az első eset szemléltetése: amikor V mindhárom első szintű kis háromszöget metszi.

értéket veszik fel abban a (g_1^0, g_2^0, g_3^0) pontban, ahol

$$g_1^0 = g_2^0 = g_3^0 = \frac{4}{6 + 3\left(\frac{3\cdot 0,812545}{2\cdot 1,1875}\right)^{\frac{1}{s-1}}} \approx 0,437804.$$

A második parciális deriváltak vizsgálatának segítségével belátható, hogy a $D_1 = \left\{(g_1, g_2, g_3) : 0 \leq g_i \leq \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, 3\right\}$ zárt halmazon a függvény mindenütt pozitív. Az eddigiekből következik, hogy az első esetben $\mu(V) \leq 1,1875|V|^s$ valóban igaz.



7. ábra. Az második eset egyik alesetének szemléltetése.

A második esetben V két első szintű kis háromszöget metsz. Ez további hat esetre bomlik g_1, g_2 és g_3 szakaszok hossza szerint, amely esetek szinte mindegyikében a fent ismertetett gondolatmenethez hasonlóan kell okoskodni. Egyes esetekben a 2.4. lemma alkalmazására is szükség van. Ilyen például az, amikor $0 \le g_1 \le \frac{1}{4}$, $\frac{1}{4} \le g_2 \le \frac{1}{2}$, $\frac{3}{4} \le g_3 \le 1$. Ezt a helyzetet szemlélteti a 7. ábra.[15] Jelöljük az OB szakasz negyedelőpontjait sorrendben M-mel, A_1-gyel és N-nel. Legyen V és OM metszéspontja M_1, V és A_1N metszéspontja pedig N_1; továbbá $|OM_1| = g$ valamint $|NN_1| = t$. Ekkor $|V| \ge \frac{3}{4} - g - t$; a 2.3. és a 2.4. lemmák miatt $\mu(V) \le \frac{1}{3} - 0,812545g^s - t^s$. Definiáljuk az

$$f(g,t) = 1,1875(0,75 - g - t)^s + 0,812545g^s + t^s - \frac{1}{3}$$

függvényt, amelyről a parciális deriváltak vizsgálatának segítségével szintén belátható, hogy seholsem negatív a $D_2 = \left\{(g,t) : 0 \le g \le \frac{1}{4}, \quad 0 \le t \le \frac{1}{4}\right\}$ zárt halmazon. Innen következik, hogy $\mu(V) \le 1,1875|V|^s$.

A második eset egy speciális alesetében, amikor $\frac{1}{4} \le g_1 \le \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4} \le g_2 \le \frac{1}{2}$, $\frac{3}{4} \le g_3 \le 1$, V az $f_1 \circ f_2(S_0)$ és az $f_2 \circ f_1(S_0)$ kis háromszögeket metszi. Ekkor az előző bekezdésben ismertetett módszerhez hasonlóan belátható, hogy $\mu(V) \le 1,1875|V|^s$, kivéve amikor V csak az $f_1 \circ f_2 \circ f_2(S_0)$ valamint az $f_2 \circ f_1 \circ f_1(S_0)$ kis háromszögeket metszi. Ezért indukció segítségével kell érvelnünk: ha V csak az $f_1 \circ f_2 \circ f_2 \ldots \circ f_2(S_0)$ valamint az $f_2 \circ f_1 \circ f_1 \ldots \circ f_2(S_0)$, n-edik szintű kis háromszögeket metszi, akkor $\mu(V) \le \frac{2}{3^{n+1}}$, így $n \to \infty$ esetén $\mu(V) \le 1,1875|V|^s$.

A harmadik esetben, amikor V csak egy darab első szintű kis háromszögbe metsz bele, hasonló módon az induktív módszer alkalmazandó. Ezzel az összes esetet végigvettük.

Az 1.5. tétel és a 2.5. tétel alapján következik az alábbi tétel:

2.6. Tétel. $\mathcal{M}^s(E) \ge 0,8421052$.

Ennek a bizonyítása nagyon egyszerű:

$$\mathcal{M}^s(E) \ge \frac{\mu(S)}{1,1875} = \frac{1}{1,875} > 0,8421052.$$

Végül a 2.1. lemmából és a 2.6. tételből következik az alsó becslés a Sierpinski-háromszög s-dimenziós Hausdorff-mértékére:

2.7. Tétel. $\mathcal{H}^s(E) \ge \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^s \cdot 0,8421052 \ge 0,670432$.

[15] Az ábra forrása: [5], 18. oldal.

2.2. Felső korlát

Móra felső korlátjának alapötlete, hogy átvesz egy B. Jia [6] által bevezetett sorozatot, amelyről Jia már belátta, hogy felső korlátot ad a Sierpinski-háromszög s-dimenziós Hausdorff-mértékére. Mivel azonban e sorozat tagjai nehezen kiszámolhatóak, Móra Jia sorozatára ad felső becslést egy másik sorozat segítségével, amely becslés $\mathcal{H}^s(S)$-re is felső becslés lesz.

A sorozat definiálásához hasznos lesz számunkra egy újabb jelölés bevezetése: jelöljük k_n-nel azon n-edik szintű kis háromszögek számát, amelyeket egy választás alkalmával S_n-ből kiválasztunk. Így Jia nyomán az alábbi sorozat definiálható:

$$a_n = \min \frac{\left|\bigcup_{j=1}^{k_n} \triangle_j^{(n)}\right|^s}{k_n/3^n} = \min \frac{\left|\bigcup_{j=1}^{k_n} \triangle_j^{(n)}\right|^s}{\mu\left(\bigcup_{j=1}^{k_n} \triangle_j^{(n)}\right)},$$

ahol μ a 21. oldalon definiált tömegeloszlás, a minimumot pedig az összes nemüres, n-edik szintű kis háromszögre kell venni.

A sorozat első néhány tagja könnyen kiszámolható:

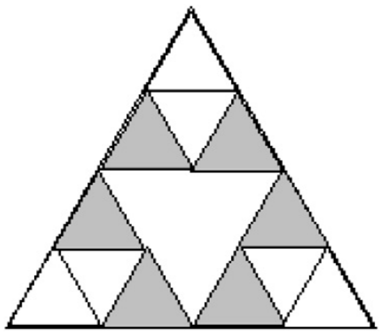
- $n = 0$ esetén $k_0 = 1$, csak magát az S_0 háromszöget választhatjuk ki. Ennek átmérője 1, így $a_0 = \min \frac{1^s}{1/3^0} = 1$.
- $n = 1$ esetén $1 \leq k_1 \leq 3$. Ha $k_1 = 2$, akkor a $\frac{\left|\bigcup_{j=1}^{k_1} \triangle_j^{(1)}\right|^s}{k_1/3^1}$ kifejezés értéke $1,5$; a minimum $k_1 = 1$ valamint $k_1 = 3$ választásával áll elő, mindkét esetben 1. Tehát $a_1 = 1$.
- $n = 2$ esetén $1 \leq k_2 \leq 9$. Jia számításai nyomán ekkor $a_2 = \frac{3^s}{6} \approx 0,9508$, melyet a 8. ábrán bemutatott elrendezés valósít meg.[16]

A sorozattal kapcsolatban Jia belátta a következő tételt:

2.8. Tétel. $a_n e^{-\frac{16\sqrt{3}}{3}\cdot s \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n} \leq \mathcal{H}^s(S) \leq a_n$.

Ugyan Jia [6] a tételt $n \geq 1$ feltevésével mondta ki, de $n = 0$ esetén is igaz. A tételből következik, hogy ha $n \to \infty$, akkor $a_n \to \mathcal{H}^s(S)$. Nehézség azonban, hogy a_n értéke $n \geq 6$ esetén nem számolható ki. Ha viszont $n < 6$, akkor a kapott a_n értékeknél ismert jobb becslés a Sierpinski-háromszög s-dimenziós Hausdorff-mértékére. Ezért további konkrét a_n értékek kiszámolása helyett Móra felső korlátot ad a sorozat tagjainak értékére. A 2.8. tétel miatt ez $\mathcal{H}^s(S)$-re is felső korlát lesz.

[16] Az ábra forrása: Jia [6], 1023. oldal.



8. ábra. Segédábra a_2 kiszámításához. A szürkére színezett kis háromszögek a választott kis háromszögek.

Ehhez a következő 6 pont körüli, $0,75$ sugarú, zárt köröket veszi:

$$\left\{\left(\frac{1}{4},0\right),\left(\frac{3}{4},0\right),\left(\frac{1}{8},\frac{\sqrt{3}}{8}\right),\left(\frac{3}{8},\frac{3\sqrt{3}}{8}\right),\left(\frac{5}{8},\frac{3\sqrt{3}}{8}\right),\left(\frac{7}{8},\frac{\sqrt{3}}{8}\right)\right\}.$$

E zárt körök metszetét jelöljük D-vel. Tekintsük azon n-edik szintű kis háromszögeket, amelyek részhalmazai D-nek. Ezen háromszögek által alkotott halmaz átmérője legfeljebb $0,75$. Az így választott háromszögek számát l_n-nel jelölve definiáljuk a következő sorozatot:

$$c_n = \frac{0,75^s}{l_n/3^n}.$$

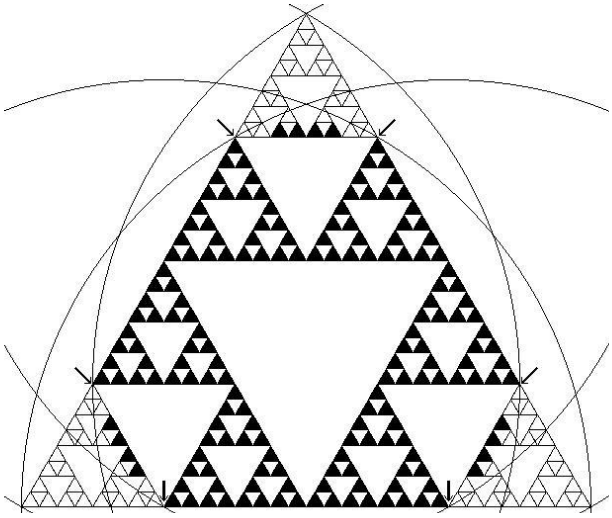
c_5 kiszámításához a 9. ábra nyújt segítségét.[17] Az ábrán látható választott kis háromszögek száma $l_5 = 54$, így $c_5 \approx 0,885$.

a_n és c_n definíciójából következik, hogy minden $n \geq 0$ egész számra $c_n \geq a_n$, tehát $c_n \geq \mathcal{H}^s(S)$. Móra a c_n sorozat tagjainak értékét $n = 30$-ig számolta ki számítógép segítségével. Az eredmény 15 tizedesjegyre kerekítve: $c_{30} = 0,819161232881177$.

Nagyobb n-ekre valamivel kisebb értéket kapnánk, azonban ez nem lenne lényegesen jobb becslés. Ennek belátásához jelöljük L_n-nel azoknak az n-edik szintű kis háromszögeknek a számát, amelyek elemei D-nek vagy amelyek metszik D-t. Ekkor minden n-re igaz a következő egyenlőtlenség:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{l_m}{3^m} \leq \frac{L_n}{3^n}.$$

[17] Az ábra forrása: Móra [9], 12. oldal.



9. ábra. Segédábra c_5 kiszámításához. A nyilakkal megjelölt pontok a D halmazhoz tartozó körök középpontjai, a feketére színezett kis háromszögek pedig a választott kis háromszögek.

Ez a módszer nem tud kisebb felső becslést adni a Sierpinski-háromszög s-dimenziós Hausdorff-mértékére a $0,819161232089868$ értéknél, amely $\frac{L_{30}}{3^{30}}$ esetén áll elő.

A végkövetkeztetést tételként közlöm:

2.9. Tétel. $\mathcal{H}^s(S) \leq 0,819161232881177.$

3. A Sierpinski-háromszög egy ipari alkalmazása: fraktálantenna

3.1. Egy új és népszerű kutatási terület

Az első antennát Heinrich Hertz készítette 1887-ben. Célja James Clerk Maxwell azon elméletének bizonyítása volt, miszerint léteznek elektromágneses hullámok. A következő évtizedekben az eszköz fejlődésnek indult, a távközlésben egyre fontosabb szerepet töltött be. Az első antennák egy viszonylag szűk frekvenciatartományban voltak képesek jeleket fogni, az 1920-as években jelentek meg az első szélessávú antennák. A II. világháború után fedezték fel az úgynevezett frekvenciafüggetlen vagy „log-periodikus" antennákat, amelyek több frekvenciájú elektromágneses hullámra is rezonáltak. Az első fraktálantennát Nathan Cohen építette 1988-ban Bostonban.

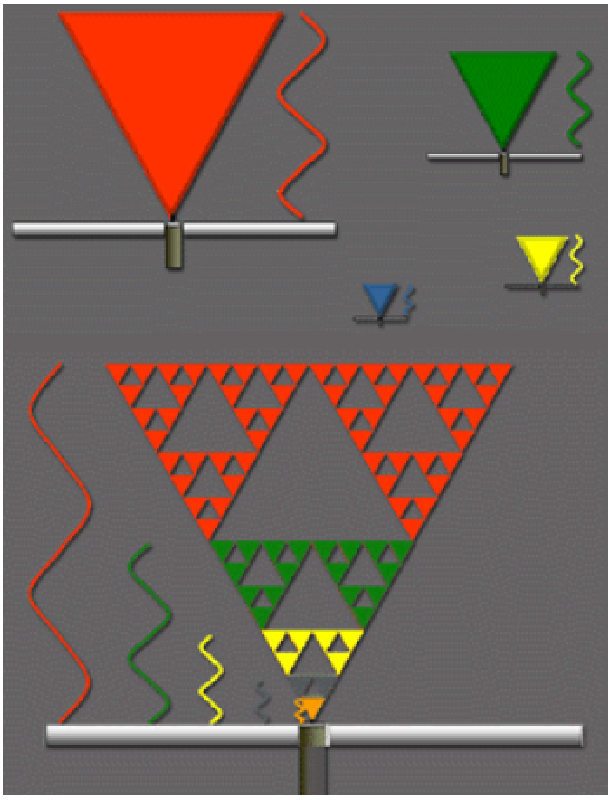
„Az antenna elektromágneses hullámok egy tartományának, a rádióhullámoknak a sugárzására vagy vételére alkalmas elektrotechnikai eszköz." ([4]) Az antenna tulajdonképpen egy nyitott rezgőkör, amelyről elektromágneses hullámok szakadhatnak le, és amely képes bizonyos frekvenciájú hullámokra rezonálni. Mivel a frekvencia a hullámhosszal fordítottan arányos, továbbá egy L hosszúságú antenna a $2L$ hullámhosszú elektromágneses hullámokra rezonál, ezért nehézségekbe ütközik az alacsony frekvenciájú jelek továbbítása.

A fraktálok geometriáját felhasználó antennák népszerűségüket a következő tulajdonságoknak köszönhetik:

- az önhasonlóság miatt egyszerre több rezonanciafrekvenciával rendelkeznek,
- könnyűek, vékonyak, és kis helyet foglalnak el (különösen a térkitöltő görbék),
- előállításuk viszonylag olcsó és egyszerű.

Felber [3] egyik ábrája a Sierpinski-háromszög példáján keresztül kiválóan érzékelteti a fraktálantennák alkalmazásának legfontosabb előnyét. A 10. ábra[18] szerint egy S_5 alapján készített antenna egyszerre 4 különböző antennát képes helyettesíteni, mivel egymaga képes rezonanciára a 4 másik antenna rezonanciafrekvenciáin.

[18] Az ábra forrás: [3], 10. oldal.



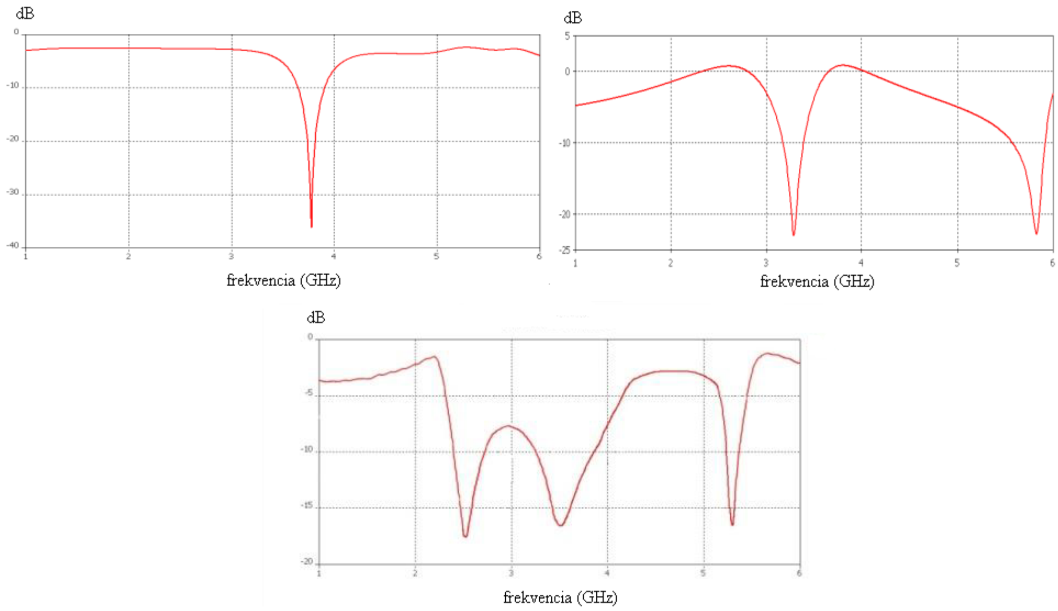
10. ábra. Az S_5 mintájára készült antenna 4 másikat képes helyettesíteni. Az ábra felső részén láthatóak a szokásos antennák, amelyek csak egy-egy frekvenciára rezonálnak, míg a legalul látható, S_5 alakú antenna rezonál minegyik másik antenna rezonanciafrekvenciáján.

3.2. Néhány példa a Sierpinski-háromszög alapján készített fraktálantennákra

Dolgozatomnak ebben a részében néhány olyan vizsgálati eredményt ismertetek, amelyeket a Sierpinski-háromszög alapján készített antennák vizsgálatából nyertek. Mivel a Sierpinski-háromszög előállításához végtelen sok iterációs lépésre van szükség, ezért természetesen nem lehet előállítani olyan antennát, amelynek alakja pontosan megegyezik a Sierpinski-háromszöggel. A gyakorlatban azonban – mint látni fogjuk – jól használható az olyan alakzat is, amely csak pár iterációs lépést használ fel, sőt olyan is, amelynek csak emlékeztet a formája az iteráció egyik állomására.

Fontos kísérleti tapasztalat, hogy egy olyan antenna, amelynek alakja S_n alakjával megegyezik, $n+1$ frekvenciára rezonál ([1], 24. oldal). Kaur, Saluja és Ubhi kutatók [7] cikke olyan antennákat vizsgál, amelyek S_0, S_1 és S_2 alapján készültek. A rezonanciafrekvenciákat és a reflexiós veszteségeket vizsgálták mindhárom esetben. Mérési eredményeiket a 11. ábra mutatja[19]. A következő adatokat kapták:

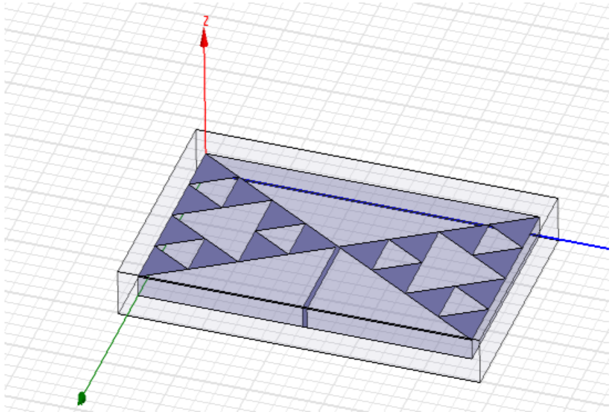
- S_0 esetén egyetlen rezonanciafrekvenciát mértek a 3,88 GHz-es értéknél, 288 MHz sávszélességgel, a reflexiós veszteség pedig -36 dB volt;
- S_1 már 3,2 GHz és 5,8 GHz frekvenciákértékekre is rezonált. Első esetben a sávszélesség 172 MHz, a reflexiós veszteség pedig -23,8 dB; a második értéknél a sávszélesség 368 MHz és a reflexiós veszteség -23,7 dB;
- S_2 vizsgálatakor 3 rezonancifrekvenciát tapasztaltak 2,5 GHz-nél, 3,5 GHz-nél és 5,2 GHz-nél rendre 339 MHz, 633 MHz, 143 MHz sávszélességekkel és -17 dB, -16,2 dB, -16,3 dB reflexiós veszteségekkel.



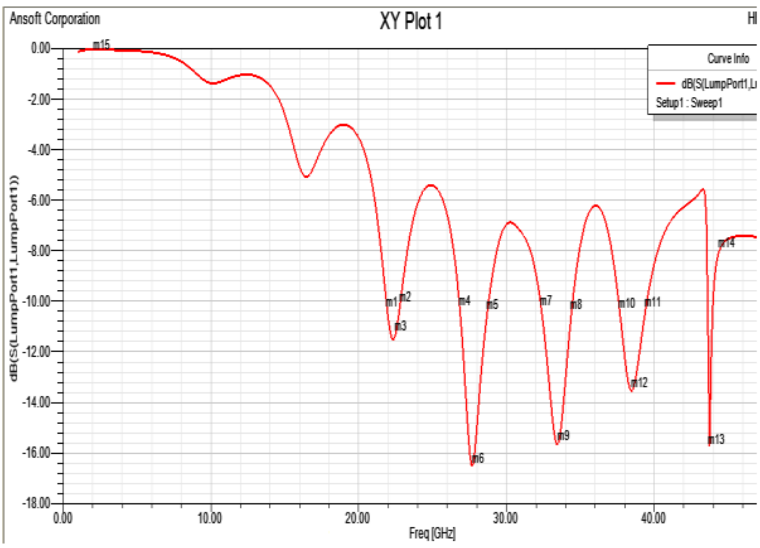
11. ábra. Mérési eredmények S_0, S_1 és S_2 alakú antennák esetén.

A mért grafikonok tehát jól szemléltetik, hogy Sierpinski-háromszög alapján készített antenna esetén a rezonancifrekvenciák száma az iterációs számnál mindig 1-gyel nagyobb.

[19] Az ábrán szereplő grafikonok forrása: [7].



12. ábra. A Bajaj és Kaushik [1] által vizsgált antenna rajza.



13. ábra. Bajaj és Kaushik [1] mérési eredményei: a visszaverődési veszteség a frekvencia függvényében.

Bajaj és Kaushik [1] olyan antenna működését elemzi, amely két, S_2 alapján elkészített fémlap összeillesztésével készítettek (12. ábra[20]). Az antenna főbb adatai: a legnagyobb háromszög alapja 26 mm, magassága pedig 22,6 mm, relatív dielektromos állandójának értéke pedig 2,2 és 12 között volt. A kutatók a frekvencia függvényében vizsgálták a visszaverődési veszteséget.

[20] Az ábra forrása: [1], 24. oldal.

Eredményeiket a 13. ábra mutatja[21]. Az ábrán jól látszik, hogy a fraktálantenna több frekvenciatartományban is rezonál, különösen is a 22,5050 GHz, 27,7094 GHz, 33,5030 GHz, 38,5110 GHz, 43,7154 GHz frekvenciaértékeknél. A visszaverődési veszteség minden esetben kevesebb, mint -10 dB, amely nagyon jónak mondható. A felsorolt rezonanciafrekvenciák különböző technológiákban használják, ezért a vizsgált antenna többféle módon alkalmazható.

[21] Az ábra forrása: [1], 24. oldal.

Befejezés

Dolgozatomban bemutattam a fraktálok általános tárgyalását segítő fogalmakat és tételeket, majd felhasználtam ezeket a Sierpinski-háromszög vizsgálatában. Láthattuk, hogy a hasonlósági- és a Hausdorff-dimenzió, továbbá a Hausdorff-mérték nagy segítség tud lenni egy fraktál leírásában, ugyanakkor kiszámításuk olykor meglehetősen nehéz feladat. Bebizonyítottam, hogy a Sierpinski-háromszög Hausdorff-dimenziója megegyezik a hasonlósági dimenziójával, azaz $\log_2 3$-mal. Ugyan idáig több tételt kellett belátnunk, ám olyan módszert ismertethettem így, amely alkalmas más önhasonló fraktálok dimenziójának kiszámítására is.

A következő általam vizsgált kérdés már speciálisan a Sierpinski-háromszögre vonatkozott, ennek $\log_2 3$-dimenziós Hausdorff-mértékére vonatkozó alsó- és felső becsléseket mutattam be. Olyan problémát ismertettem, amely máig kutatott terület, így megmutat valamit abból, hogy a matematika napjainkban is intenzíven fejlődő tudomány.

Végül a Sierpinski-háromszög ipari felhasználására hoztam példát. Láthattuk, hogy az alakzatot önhasonlósága mennyire alkalmassá teszi arra, hogy többfrekvenciás antennákat készítsenek belőle.

Remélem, hogy dolgozatommal sikerült megmutatnom valamit abból, hogy a fraktálok – többek között a Sierpinski-háromszög – vizsgálata milyen izgalmas és érdekes kutatási terület, amelynek néhány eredménye az iparban is felhasználható.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton is szeretném kifejezni köszönetemet témavezetőmnek, Dr. Buczolich Zoltánnak, akinek a téma iránti lelkesedése és munkája nagy segítség és egyben példa volt számomra. Hálás vagyok dolgozatom alapos átnézéséért, tanácsaiért, észrevételeiért.

Köszönöm Móra Péternek, hogy készségesen válaszolt a doktori dolgozatával kapcsolatban feltett kérdéseimre.

Hálás vagyok továbbá családtagjaimnak, rokonaimnak és barátaimnak, akik támogattak dolgozatom megírása közben.

Hivatkozások

[1] Bajaj, Sarita – Kaushik, Ajay: *Analysis Of The Patch Antenna Based On The Sierpinski Fractal*, International Journal of Engineering Research and Applications, 2 (2012), no. 5., 23–26., letölthető: http://ijera.com/papers/Vol2_issue5/F25023026.pdf

[2] Edgar, Gerald A.: *Measure, Topology and Fractal Geometry*, New York, Springer-Verlag, 1990.

[3] Felber, Philip: *Fractal antennas. A literature study as a project for ECE 576*, Illinois Institute of Technology, USA, 2000, letölthető: http://www.ece.iit.edu/∼pfelber/fractalantennas.pdf

[4] *Fizikai online fogalomtár*, letölthető: tankonyvtar.ttk.bme.hu/pdf/52.pdf

[5] Jia, Baoguo – Zhou, Zuoling – Zhu, Zhiwei B.: *A New Lower Bound of the Hausdorff Measure of the Sierpinski Gasket*, Analysis in Theory And Applications, 22 (2006), no. 1., 8–19., letölthető: http://file.lw23.com/9/95/957/957d785b-9e76-42d0-ae2a-6cda3fd7649e.pdf

[6] Jia, Baoguo: *Bounds of Hausdorff measure in the Sierpinski gasket*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 330 (2007), no. 2., 1016–1024., letölthető: http://copper.math.buffalo.edu/urgewiki/uploads/Literature2010Carbonara/Jia2006

[7] Kaur, Amanpreet – Saluja, Nitin – Ubhi, J. S.: *Design Of Sierpinski Gasket Multiband Fractal Antenna For Wireless Applications*, Journal of Electronics and Communication Engineering, 2 (2012), no. 3., 5–6., letölthető: http://www.iosrjournals.org/iosr-jece/papers/v2-i3/B0230506.pdf

[8] Mandelbrot, Benoit B.: *The Fractal Geometry of Nature*, New York, W. H. Freeman and Company, 1982.

[9] Móra Péter: *Random and determonistic fractals. PhD Thesis*, letölthető: http://www.omikk.bme.hu/collections/phd/Termeszettudomanyi_Kar/2013/Mora_Peter/ertekezes.pdf

[10] Szabó László Imre: *Ismerkedés a fraktálok matematikájával*, Szeged, Polygon, 1997.