Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Pozsonyi Enikő

Iskolai feladatok absztrakt algebrai háttérrel

Szakdolgozat

Témavezető:
Szabó Csaba

Budapest, 2013.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

"Miért kell olyan dolgokat tanulni az egyetemen, amiket később sehol nem fogunk használni?"

Kovács Veronika

Általában olyan emberek jelentkeznek matematika szakra, akik érdeklődnek a matematika iránt (vagy akiknek kevés a pontszáma más szakokra). Mégis sokszor felmerül a tanár szakos hallgatókban az a kérdés, hogy az egyetemi anyagot fogják-e még valamire használni, miért kell ezt vagy azt az anyagrészt megtanulni. Természetesen tanár szakos hallgatóként mindenki tudja, hogy ahhoz, hogy iskolában taníthasson, ismernie kell a felsőbb matematikát is. A közvetlen kapcsolat azonban az egyetemi matematika és az iskolai matematika között sokszor nem látszik. A különböző egyetemi kurzusokon a hallgatók megismerkednek matematikai módszerekkel és struktúrákkal, de általában hiányoznak a tanulásból azok a pillanatok, amikor világossá válik számukra, hogy ezt a tudást a későbbiekben mikor, és milyen formában tudják alkalmazni.

Dolgozatunk célja annak megmutatása, hogy egy matematikatanár igenis segítségül hívhatja az egyetemen tanultakat az iskolai feladatok megoldásakor, valamint új feladatok kitalálásakor. Középiskolai elemi- és versenyfeladatokon keresztül mutatjuk meg, hogyan használhatjuk föl az absztrakt algebrából tanultakat az iskolában. További célunk, hogy ez bekerüljön az egyetemi oktatásba is, vagyis az oktatók az iskolai példákat bevigyék a tanár szakos órákra, és felhívják a hallgatók figyelmét az iskolai feladat és az órán tanult anyag kapcsolatára. Célunk részben meg is valósult, hiszen Szabó Csaba néhány feladatot már feladott a tanár szakosoknak tartott Algebra 3 óráján. Az ELTE-n, a Szegedi Tudományegyetemen és a Debreceni Egyetemen a második és a harmadik félévben tanítják az algebra megfelelő részeit.

Kutatásunk során összegyűjtöttük a különböző feladatgyűjteményekből és az elmúlt 50 év matematika versenyeiről az algebrához kapcsolódó feladatokat. Ezek közül a dolgozatban csak versenyfeladatok szerepelnek, és a számos módszer közül is csak néhány olvasható terjedelmi korlátok miatt. A feladatoknak megvizsgáltuk az absztrakt algebrai hátterét, és rájuk frappáns, rövid megoldást adtunk. Az algebrai megoldás segítségével, ahol lehetett, új elemi megoldásokat kerestünk. Dolgozatunkban ezek közül mutatunk be néhányat. A sok módszer közül két nagyobb témakörre összpontosítottunk: a moduláris lineáris algebrára és a művelettáblákra. Az előbbihez több, az utóbbihoz kevesebb feladatot találtunk. A polinomokkal kapcsolatos módszerekkel (gyöktesztek, gyökök és együtthatók közötti összefüggések, stb.)

megoldható feladatok feldolgozása egy másik dolgozat témája lesz terjedelmi és didaktikai okok miatt.

Az absztrakt algebra alkalmazásainak összegyűjtése nem számít újdonságnak. Csak ebben a témában 1983 óta 13 monográfia jelent meg, ezek közül [1] két kiadást is megért. A lineáris algebra alkalmazásairól megjelent könyvek száma 100 fölött van. A témánkhoz legközelebb a legendás Babai-Frankl [2] áll, amelyben a szerzők felsorolják a lineáris algebra legszebb matematikai alkalmazásait, elsősorban a kombinatorikában és a geometriában. Ezen alkalmazások azonban középiskolai tudást meghaladó ismereteket igényelnek, elemi bizonyításai az ott fölsorolt tételeknek nem ismert.

Az általunk ismertetett feladatok megoldásához alapvető lineáris algebrai és elemi absztrakt algebrai ismeretek szükségesek. Ezek: test, vektortér, bázis, függetlenség, determináns, sajátérték, merőlegesség, illetve csoportaxiómák, művelettábla (Cayley-táblázat). Ezen ismeretek bármely lineáris algebra vagy absztrakt algebra jegyzetben megtalálhatók, ma az ELTE-n elsősorban [4]-t és [3]-t használják.

2. Iskolai feladat algebrai háttérrel

"Az a baj, hogy ha a hallgatók meglátnak egy sakktáblát, nem veszik észre, hogy egy 64 dimenziós vektortérrel van dolguk."
Szabó Csaba

Első két példánk a Pósa Lajos féle matematikai tehetséggondozó táborokban egy gyakori feladvány, ami garancia arra, hogy nem teljesen egyszerű feladattal van dolgunk. Pósa Lajos legendás hírű tehetséggondozó matematikatanár. Volt szerencsém részt venni megfigyelőként és segítőként matematika táboraiban. Pósa Lajos 1988 óta szervez saját táborokat, melyek sokban különböznek a hagyományos gyerektáboroktól. Vannak hétvégi táborok, melyek péntek délutántól vasárnap délutánig tartanak, és egy hetes nyári táborok. Mindkettő meghívásos alapon működik. A nyári táborokba általában a legtehetségesebb, versenyeken is jól szereplő diákokat hívja el. Ezekben Pósa Lajos a legkülönfélébb módon készteti a diákokat a matematikával való foglalkozásra. A gyerekek már hetekkel, hónapokkal a tábor előtt házi feladatokat kapnak. Egy táborban körülbelül 20-25 diák vesz részt, akik általában 2-4 fős csoportokban dolgoznak. A tábor folyamán a diákok a foglalkozások és játékok mellett dolgozatokat is írnak.

Az általunk feldolgozott két feladatot is ezeknek a táboroknak az anyagából merítettük. Úgy választva, hogy míg ott a nehezebb feladatok között vannak számontartva, absztrakt eszközökkel viszonylag egyszerű megoldást találjunk.

Juhász Péter Pósa Lajos első tanítványainak egyike, és azóta állandó segítője. Ma már ő is önálló "Pósa" táborokat szervez. Az ELTE-TTK-n reguláris tanóra keretében tanítja a Pósa Lajostól eltanult módszereket elsősorban matematikatanár szakos hallgatók számára, a Hogyan foglalkozzunk tehetséges gyerekekkel? című egyetemi kurzuson. Az első két feladattal ezeken az órákon találkoztam.

2.1. Sortündérek

Jancsi kapott egy gyönyörű szép sakktáblát karácsonyra. Ám éjszaka a gonosz boszorkány megváltoztatta a színezését: néhány fekete mezőt fehérre színezett, egyes fehéreket pedig feketévé változtatott. Mikor ezt Jancsi meglátta, nagyon elszomorodott, de szerencsére 16 jótündér a segítségére sietett. A sakktábla minden sorához és minden oszlopához tartozik egy jótündér, aki azzal a különleges képességgel bír, hogy a saját sorában vagy oszlopában a színezést az ellentettjére tudja változtatni. Tehát egy lépésben az adott sorban vagy oszlopban minden feketét fehérre, és minden fehéret feketére színez át.

Vissza tudják-e állítani a jótündérek az eredeti sakktábla színezést?

Amikor a kérdésre keressük a választ, akkor nem elégszünk meg egy egyszerű igennel vagy nemmel, hanem ennél sokkal részletesebb indoklást szeretnénk. Arra is kíváncsiak vagyunk, hogy egyáltalán mely színezésekből állítható vissza az eredeti sakktábla. Amikor ezt a feladatot kidolgoztuk, akkor ezt olyan sorrendben tettük, ahogy Pósa Lajos a táborokban, és Juhász Péter az órán.

2.2. Sortündérek - Iskolai megoldás 1

Rutinos feladatmegoldóknak világos, de kezdők is néhány próbálkozás után észrevehetik, hogy amikor egy tündér megváltoztatja a saját sorát vagy oszlopát, akkor abban a sorban vagy oszlopban a fekete négyzetek számának paritása nem változik. Ha tehát az adott sorban vagy oszlopban x db fekete négyzet volt, akkor a változtatás után $8-x$ fekete négyzet lesz. Ha x páros, akkor $8-x$ is páros, illetve ha x páratlan, akkor $8-x$ is páratlan. Így a tündérek változtatása a feketék számának paritását mindvégig változatlanul hagyja. Ha tehát a gonosz boszorkány által megváltoztatott sakktábla olyan, hogy páratlan sok fekete mező van rajta, akkor a tündérek segítségével nem lehet helyreállítani. Ezzel megoldottuk az eredeti feladatot: a válasz általában nem. Felmerül azonban a kérdés, hogy melyek azok a színezések, amelyek megjavíthatók. Például igaz-e, hogy azok megjavíthatók, amelyekben páros sok fekete négyzet van? A válasz nyilvánvalóan nem, hiszen az előző gondolatmenet sorokra és oszlopokra is elmondható volt, azaz mindig minden sorban és oszlopban is páros sok fekete négyzet kell, hogy legyen. Itt már látszik, hogy újabb és újabb feltételek merülhetnek fel, ezért jobb lesz a színezések szisztematikus vizsgálata.

Nézzük meg, mi történik egy kis négyzet szemszögéből, amikor a tündérek próbálják megjavítani a sakktáblát. Egy kis négyzetre 2 tündér van hatással: az oszloptündére és a sortündére. Amikor egy tündér változtat, akkor a kis négyzet színe megváltozik. Egy újabb változtatás után viszont ismét az eredeti színét nyeri vissza, az ő szemszögéből tehát csak annak van jelentősége, hogy összesen hányszor lett megváltoztatva, a tündérek sorrendjétől függetlenül. Hasonlóan, ha egy tündér változtat, akkor a kis négyzet színe megváltozik, majd ha ez a tündér újra változtat, akkor négyzetünk visszakapja eredeti színét. Így csak az számít, hogy egy tündér páros vagy páratlan sokszor változtatott. Ha páros sokszor, az olyan, mintha nem változtatott volna 1-szer sem, ha pedig páratlan sokszor, az megfelel annak, hogy csak 1-szer változtatott. Ez minden kis négyzetre egyszerre igaz, tehát feltehető, hogy minden tündér 0-szor vagy 1-szer változtathat.

Vegyük észre, hogy minden színezés elérhető úgy is, hogy az első sortündér nem változtat. Ha ugyanis ő változtat, és így eljutunk egy sakktáblaszínezésből egy másik színezéshez, akkor ehhez a színezéshez el lehet jutni mégegyféleképpen: minden tündér pontosan az ellenkezőjét csinálja, mint az előbb. Ha az előbb egy tündér változtatott, akkor most nem változtat, ha pedig nem változtatott, akkor most változtat. Így ugyanazt a színezést kapjuk meg.

Tegyük fel tehát, hogy az első sortündér nem változtat. Az oszloptündérek ilyenkor kényszerhelyzetben vannak: meg kell javítaniuk a sakktábla első sorát. Minden oszloptündér eldönti, hogy változtat-e vagy sem, aszerint, hogy a saját oszlopában az első négyzet színe megegyezik-e az eredeti sakktáblaszínezéssel. Ha megegyezik, akkor nem változtat, ha nem egyezik meg, akkor változtat. Ezután az oszloptündérek többet nem szerepelnek, mert tudjuk, hogy csak 0-szor vagy 1-szer változtathatnak. Így a sortündérek keze is meg van kötve: meg kell javítaniuk az első oszlopot. Hasonlóan az oszloptündérekhez, a sortündérek is eldöntik, hogy változtatnak vagy sem, aszerint, hogy a saját sorukban az első négyzet színe megfelel-e az eredeti sakktáblának. Ha az első oszlop is helyreállt, a sortündérek sem szerepelnek többet. Ha most a sakktábla színezése megegyezik az eredeti sakktáblaszínezéssel, akkor készen vagyunk, ha pedig nem, akkor nem is lehet helyreállítani a színezést.

Vegyük észre, hogy már akkor látszik a sakktáblán, hogy meg lehet-e javítani, amikor a 8 oszloptündér megjavította az első sort. A sortündérek pontosan akkor tudják megjavítani a színezést, ha ekkor minden további sor pontosan olyan, mint az első, vagy annak az ellentettje. Az a feltétel, hogy minden sor az első sorral megegyezik, vagy annak ellentettje, az oszloptündérek hatása során sem változik meg. Tehát egy sakktábláról ránézésre eldönthető, hogy megjavítható-e vagy nem, hiszen pontosan azok a sakktáblák hozhatók helyre, amelyekben bármely két sor vagy megegyezik, vagy egymás ellentettje. □

Érdemes megjegyezni, hogy bár a mi megoldásunk koherens és folytonos, még a tehetséges diákok sem oldják meg ebben a folyamatban. A táborokban és az órán Juhász Péter számos segédfeladatot ad fel közben, hogy az észrevételeket megtehessék.

2.3. Sortündérek - Iskolai megoldás 2

Miután megállapítottuk, hogy a páratlan sok fekete mezőt tartalmazó sakktáblát nem lehet visszaállítani az eredeti színezésre, itt is felmerül a kérdés, hogy mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy színezésből el lehessen érni a sakktábla színezést.

Meggondolható, hogy ha egy X színezésből egy lépéssorozattal elérhető egy Y színezés, akkor az Y színezésből is elérhető az X, ha visszafelé végrehajtjuk ugyanazokat a lépéseket. Ebből következik, hogy az olyan színezéseket meg lehet javítani, amelyek elérhetők az eredeti színezésből. Így a kérdés úgy is fogalmazható, hogy melyek azok a színezések, amelyek az eredeti sakktáblából elérhetők? Az eredeti színezésben minden sor vagy megegyezik az elsővel, vagy annak ellentettje, és minden változtatás után megmarad ez a tulajdonsága a sakktáblának. Tehát csak ilyen színezések érhetők el. Be kell még látnunk, hogy minden ilyen elérhető, ehhez pedig megadunk egy jó lépéssorozatot. Először az oszlopokat színezzük át úgy, hogy az első sor megegyezzen X első sorával, nevezzük ezt a színezést Y-nak. Ekkor igaz maradt az a tulajdonság, hogy minden sor az első sorral megegyezik, vagy ellentettje, tehát az Y színezés k-adik sora az X színezés k-adik sorával azonos, vagy az ellentettje, ez pedig a sor átszínezésével a megfelelőre állítható.

□

Ehhez a megoldáshoz azt kell hozzátenni, hogy bár rövidnek tűnik, magas fokú absztrakciós és feladatmegoldó képességet feltételez a diákokról. Az, hogy ezek a műveletek invertálhatóak, és ezért elég a célszínezésből kiindulni, még nem elég ahhoz, hogy "észrevegyük", mik az elérhető színezések. Erre csak olyanok képesek, akik már számos ilyen feladatot láttak előtte. Gondoljunk csak bele, hány sakktábla átszínezést kellene papíron kézzel végrehajtanunk, hogy ilyen megállapításra jussunk.

2.4. Algebrai megoldás - absztrakt vektortér

Nézzük meg, hogy egy matematikus hogyan fordítaná le az algebra nyelvére ezt a feladatot.

A megfeleltetés: Legyen $\underline{n}_{ij}$ az i. sor j. négyzete, és V az $\underline{n}_{ij}$ vektorok által generált vektortér $\mathbb{Z}_2$ fölött. Ekkor látható, hogy V dimenziója 64, hiszen az $\underline{n}_{ij}$ vektorok függetlenek, és 64 darab van belőlük (ennyi négyzet van a sakktáblán). Minden $\underline{v} \in V$ vektor felírható a következő alakban: $\sum \lambda_{ij}\underline{n}_{ij}$, ahol λ_{ij} értéke vagy 0 vagy 1. Ekkor minden sakktábla színezésnek megfelel egy V-beli vektor, ahol az $\underline{n}_{ij}$ együtthatója 0, ha a neki megfelelő négyzet az adott színezésben fehér, és 1, ha fekete. (Természetesen a fekete és fehér négyzetek szerepe felcserélhető.) Így egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést definiáltunk a sakktábla színezések és a V-beli vektorok között.

Az eredeti sakktábla színezésnek megfelelő vektort jelöljük $\underline{a}$-val. Ekkor

$$\underline{a} = \sum_{i+j \text{ páros}} \underline{n}_{ij}$$

A tündérek hatása: Nézzük meg, hogy amikor egy tündér megváltoztatja egy négyzet színét, mi történik az annak a négyzetnek megfelelő vektorral. Ilyenkor az adott vektor együtthatója 1-ről 0-ra, vagy 0-ról 1-re változik. (Például, ha a négyzet színe eredetileg fekete volt, akkor a neki megfelelő vektor együtthatója 1. A tündér változtatása után a négyzet színe fehér lesz, tehát az együtthatója 0-ra változik.) $\mathbb{Z}_2$ felett ez nem jelent mást, minthogy az adott együtthatóhoz 1-et hozzáadunk. Egy tündér egy egész oszlopra vagy sorra van hatással, tehát amikor ő változtat, akkor abban az oszlopban vagy sorban minden együtthatóhoz hozzáadunk 1-et. A k. oszlophoz tartozó tündér hatásának megfelelő vektor:

$$\underline{o}_k = \sum_{i=1}^{8} \underline{n}_{ik}$$

Azaz a k. oszlop megváltoztatásakor ezt a vektort adjuk hozzá az aktuális színezésnek megfelelő vektorhoz. Hasonlóan a sortündérekre:

$$\underline{s}_k = \sum_{j=1}^{8} \underline{n}_{kj}$$

A probléma modellezése: Adott egy tetszőleges színezés, azaz egy $\underline{v} \in V$ vektor. Ehhez a sortündérek és az oszloptündérek változtatásakor a nekik megfelelő $\underline{o}_k$ és $\underline{s}_k$ vektorokat adjuk hozzá. Az eredeti színezés akkor érhető el, ha az $\underline{a}$ vektor előáll a fentiek lineáris kombinációjaként, azaz benne van a $\underline{v}$, $\underline{o}_k$ és $\underline{s}_k$ vektorok által generált altérben.

A feladat megoldása: Látható, hogy ha egy tetszőleges színezésből elérhető az eredeti egy változtatás-sorozattal, akkor az eredetiből is elérhető az adott színezés, ha visszafelé végrehajtjuk ugyanazt a változtatás-sorozatot. Figyeljük meg, hogy a teljesen fehér sakktáblából elérhető az eredeti, ha a páratlan sorokhoz és a páros oszlopokhoz tartozó tündérek változtatnak, vagyis vektorokkal az alábbi módon:

$$\sum_{k \text{ páratlan}} \underline{s}_k + \sum_{k \text{ páros}} \underline{o}_k = \underline{a}$$

A megoldáshoz azoknak a színezéseknek megfelelő vektorokat keressük, melyek elérhetőek a fehér sakktáblából, azaz a $\underline{0}$-ból. Hiszen ezekből elérhető a fehér sakktábla, amelyből a fentiek szerint megkapható az eredeti.

A 16 tündérhez tartozó vektorok közül 15 független. Ezek halmazát $\mathcal{B}$-vel jelöljük:

$$\mathcal{B} = \{\underline{o}_1, \underline{o}_2, \ldots, \underline{o}_8, \underline{s}_2, \underline{s}_3, \ldots, \underline{s}_8\}$$

A $\underline{0}$-ból elérhető vektorok ezek lineáris kombinációiként állnak elő, azaz egy adott $\underline{v}$ vektort akkor és csak akkor kaphatunk meg, ha

$$\underline{v} \in \langle \mathcal{B} \rangle.$$

Tehát az eredeti színezés pontosan az ilyen $\underline{v}$ vektoroknak megfelelő színezésekből érhető el. Egy $\underline{v}$ vektorról pedig Gauss-eliminációval könnyedén eldönthető, hogy teljesíti-e ezt a feltételt. □

2.5. Algebrai megoldás - mátrixok vektortere

Ebben a megoldásban vektorok helyett mátrixokkal dolgozunk. Nagy előnye az előzőhöz képest, hogy sokkal szemléletesebb, ugyanis világosan látszik a sakktábla és az algebrai leírás közötti kapcsolat.

A megfeleltetés: Minden színezésnek megfeleltetünk egy 8×8-as mátrixot úgy, hogy a sakktábla i. sorának j. négyzetének a mátrix a_{ij} eleme felel meg. Ha ez a négyzet fekete, akkor $a_{ij} = 1$, ha pedig fehér, akkor $a_{ij} = 0$. Az eredeti sakktábla színezésnek megfelelő mátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A teljesen fehér sakktáblának megfelelő nullmátrix:

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ez egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a 8×8-as mátrixok és a sakktábla színezések között.

A tündérek hatása: Az előző megoldásban leírtakhoz hasonlóan a tündérek változtatása itt is a $\mathbb{Z}_2$ feletti 1 hozzáadását jelenti egy egész sorhoz vagy oszlophoz. Ennek megfelelően például a 3. oszloptündérnek megfelelő mátrix a következő:

$$\mathbf{O}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hasonlóan a 2. sortündérhez tartozó mátrix:

$$\mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Így amikor egy tündér változtat, akkor az aktuális sakktáblának megfelelő mátrixhoz az adott tündér mátrixa adódik hozzá.

A probléma modellezése: Hasonlóan az előző algebrai megoldáshoz, egy adott sakktábla színezésnek megfelelő $\mathbf{C} \in \mathbf{M}^{8\times 8}(\mathbb{Z}_2)$ mátrixból akkor érhető el az eredeti sakktábla $\mathbf{A}$ mátrixa, ha az előáll a $\mathbf{C}$, $\mathbf{S}_k$ és $\mathbf{O}_k$ mátrixok lineáris kombinációjaként. Vagyis, ha $\mathbf{A}$ felírható

$$\mathbf{C} + \sum_k \lambda_k \mathbf{S}_k + \sum_k \mu_k \mathbf{O}_k$$

alakban, ahol λ_k és μ_k értéke 0 vagy 1 lehet. Vagy másképp, ha $\mathbf{A} \in \mathbf{C} + \langle \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3, \ldots, \mathbf{O}_8 \rangle$.

A feladat megoldása: Vegyük észre, hogy

$$\sum_k \mathbf{S}_k + \sum_k \mathbf{O}_k = \mathbf{0} \quad \text{és} \sum_{k \text{ páratlan}} \mathbf{S}_k + \sum_{k \text{ páros}} \mathbf{O}_k = \mathbf{A} \tag{1}$$

Ez a korábbiakhoz hasonlóan pontosan azt jelenti, hogy a teljesen fehér sakktáblához tartozó $\mathbf{0}$ mátrixból elérhető az eredeti $\mathbf{A}$ mátrix, és fordítva. Így azok a színezések javíthatók meg, amelyek $\mathbf{C}$ mátrixa megkapható a nullmátrixból a sortündéreknek és az oszloptündéreknek megfelelő mátrixok lineáris kombinációjaként, azaz ha létezik $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{Z}_2$, hogy

$$\mathbf{C} = \sum_{i=2}^{8} \lambda_i \mathbf{S}_i + \sum_{i=1}^{8} \mu_i \mathbf{O}_i \tag{2}$$

A tündéreknek megfelelő mátrixok közül csupán 15 szerepel a fenti lináris kombinációban, mivel a 16 tündérmátrix közül mindössze 15 független $\mathbb{Z}_2$ felett, az első sor előállítható a többi lineáris kombinációjaként. Így az is megállapítható, hogy összesen 2^{15} mátrix tesz eleget a feltételeknek, tehát 2^{15} olyan sakktábla színezés van, amely megjavítható. □

2.5.1. Kapcsolat a középiskolai megoldással

Az algebrai megoldás eredményeként megkaptuk azokat a $\mathbf{C}$ mátrixokat, amelyekből elérhető az $\mathbf{A}$ mátrix. Feladatunk az algebrai feltételek lefordítása úgy, hogy középiskolai szinten is megfogalmazhassuk, hogy mely sakktábla színezések lesznek megjavíthatók. Ehhez vizsgáljuk a (2) egyenletet:

(i) A $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{Z}_2$ tulajdonság szerint a mátrixok együtthatója 0 vagy 1 lehet. Ami megfelel annak, hogy feltehető, hogy az egyes tündérek 0-szor vagy 1-szer változtatnak.

(ii) Az összeadás kommutativitása éppen azt jelenti, hogy a tündérek tetszőleges sorrenben változtathatnak.

(iii) Az, hogy az $\mathbf{S}_1$ mátrix nem szerepel (2)-ben, nem jelent mást, mint hogy feltehetjük, hogy az első sortündér nem változtat.

Nézzük meg, hogy milyen mátrixok kaphatók meg (2) eredményeként. Az (iii) feltétel miatt a $\mathbf{C}$ mátrix első sorát az $\mathbf{O}_i$ mátrixok határozzák meg. Jelölje c_{ij} a $\mathbf{C}$ mátrix i. sorának j. elemét. Ha $c_{1j} = 1$, akkor az $\mathbf{O}_j$ mátrix együtthatója 1, ha $c_{1j} = 0$, akkor a mátrix együtthatója is 0. Az $\mathbf{S}_j$ mátrixok együtthatóját pedig az első oszlopban szereplő elemek segítségével kaphatjuk meg az előzőhöz hasonló módon. Ezzel a módszerrel vagy megkapjuk a $\mathbf{C}$ mátrixot, vagy ha nem, akkor nem is érhető el. Tehát kaptunk egy algoritmust, amely segítségével könnyen meghatározhatjuk, hogy mely sakktábla színezésekből érhető el az eredeti. Először az oszloptündérek segítségével beállítjuk az első sor megfelelő színezését, majd a sortündérekkel az első oszlopét. Így vagy elérjük a kívánt állapotot, vagy az nem is lehetséges.

Most pedig nézzük meg, hogy mit is jelent ez szemléletesen. $\mathbf{C}$ mátrixban bármely két sor vagy megegyezik, vagy épp egymás ellentettje. Mivel a mátrixok és a sakktáblák között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés adtunk meg, ezért ugyanez lesz igaz a megjavítható sakktáblákra is.

2.6. Algebrai megoldás - Mátrixok sor- és oszloptere

Az első megoldás túl absztrakt, inkább matematikus szakos hallgatóknak való. A második mindenki által könnyen elérhető, így kiváló példa arra, amit e dolgozatban demonstrálni szeretnénk. Szerencsére a feladat tündérei olyan szépen viselkednek, hogy tudunk mutatni egy még kevésbé absztrakt mátrixos bizonyítást.

Legyen $\mathbf{A}$ a sakktáblának megfelelő szokásos 8-szor 8-as mátrix, ahol $a_{ij} = 1$, ha az (i, j)-edik mező fekete és $a_{ij} = 0$, ha fehér. Egészítsünk ki minden 8-szor 8-as mátrixot egy 9-szer 9-es mátrixszá az alábbi módon: ragasszunk hozzá egy 9. sort és 9. oszlopot, amelyek minden koordinátája 1, kivéve az utolsó. A sakktábla-színezésből például az alábbi mátrix adódik:

$$\mathbf{S}^{ext} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A sor és oszloptündérek hatása nem más, mint az utolsó sor, illetve oszlop hozzáadása az i-edik sorhoz, oszlophoz. Ha Gauss-eliminálunk először az utolsó sor, majd az utolsó oszlop segítségével, akkor a $\mathbf{0}^{ext}$-mátrix kiterjesztését kapjuk:

$$\mathbf{0}^{ext} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A Gauss-elimináció megfordíthatósága miatt így egy színezésből pontosan akkor érhető el az eredeti színezés, ha az a színezés elérhető a $\mathbf{0}^{ext}$ mátrixból.

Az is látható, hogy $rk_{\mathbb{Z}_2}\mathbf{0}^{ext} = 2$, így minden elérhető kiterjesztett mátrix rangja 2. Az utolsó sort és oszlopot elhagyva 0-,1- vagy 2-rangú mátrixhoz jutunk. Az alábbi állításhoz szinte nem is kell ez a megállapítás. Egy **A** mátrixból pontosan akkor érhető el a szokásos sakktábla-mátrix, ha **A** előáll valamely **R** és **C** mátrixok összegeként, ahol **R** minden sora és **C** minden oszlopa csupa 1 vagy csupa 0. Az eredeti kérdés tehát egy ilyen mátrix szép leírását keresi. Mivel **C** egyrangú, és a 9. oszlop generálja az oszlopterét, **R** pedig minden sort vagy fixen hagy, vagy az ellentettjére változtat, ismét az előző leírásokhoz jutunk. □

Egész más ötleten alapul az alábbi megoldás:

2.7. Algebrai megoldás - Művelettáblák

Legyen most a fekete négyzet a 0 és a fehér négyzet az 1. Az eredeti sakktáblán címkézzünk meg minden sort és oszlopot az első elemével. Legyenek a címkék o_1, o_2, ..., o_8, s_1, s_2, ..., s_8, melyekre $o_1 = a_{11}$, $o_2 = a_{12}$, $s_3 = a_{31}$ stb. Ekkor az (i, j) helyen épp az i-edik sor és j-edik oszlop címkéinek az összege áll, azaz

$$a_{ij} = s_i + o_j (= a_{i1} + a_{1j})$$

Így egy összeadás művelettáblánk van. Amikor egy tündér változtat, akkor egyúttal változtassa meg a sorának vagy oszlopának címkéjét is. Ekkor egyet ad hozzá a sorához (oszlopához) és

$$a_{ij} + 1 = o_j + (s_i + 1)$$

miatt művelettáblából ismét művelettáblát kapunk. Tehát minden elérhető színezés egy műveletábla.

Visszafelé, induljunk ki egy tetszőleges műveletáblából. Minden tündér érje el, hogy a sorának (oszlopának) első eleme megegyezzen az eredeti színezéssel. A lépések közben végig, így a változtatások végén is műveletáblákat kapunk. Mivel az első sor és oszlop megegyezik az eredetivel, a többi négyzet színének is meg kell egyezni az eredetivel. Tehát visszakaptuk az eredeti színezést. Ebből látható, hogy pontosan azok a színezések javíthatók meg, amelyeknek ezzel a módszerrel megfeleltethető egy műveletábla. □

3. Alkalmazások

3.1. 2×2 -es

Pisti kapott egy szép sakktáblát karácsonyra. Ám éjszaka a gonosz boszorkány megváltoztatta a színezését: néhány fekete mezőt fehérre színezett, egyes fehéreket pedig feketévé változtatott. Mikor ezt Pisti meglátta, nagyon elszomorodott, de szerencsére jótündérek siettek a segítségére. Bármely 2×2-es négyzethez tartozik egy jótündér, aki azzal a különleges képességgel bír, hogy abban a színezést az ellentettjére tudja változtatni. Tehát egy lépésben az adott 2×2-es négyzetben minden feketét fehérre, és minden fehéret feketére színez át.

Vissza tudják-e állítani a jótündérek az eredeti sakktábla színezést?

3.2. Megoldás - 2×2-es

Egy kis 2×2-es négyzetet egyértelműen meghatározunk, ha megadjuk a bal felső sarkát. Például, ha a sakktábla bal felső sarkában levő 2×2-es négyzetről szeretnénk beszélni, akkor mondhatjuk, hogy az az első sor első kis négyzetéhez tartozó 2×2-es négyzet. Jelöljük t_{ij}-vel az i. sor j. négyzetéhez tartozó 2×2-es négyzetet. Egy kis 2×2-es négyzet bal felső sarkát 49 féleképpen választhatjuk ki a sakktábla mezőiből, hiszen ez a sarok nem lehet sem az utolsó sorban, sem az utolsó oszlopban. Így összesen 49 darab tündérünk van. Minden tündérnek megfeleltetünk egy $\mathbf{T}_{ij}$ 8×8-as mátrixot, amelyben a t_{ij} helyen 1-esek vannak, mindenhol máshol pedig 0-k.

Keressük azokat a mátrixokat, amelyek előállíthatók a $\mathbf{0}$-mátrixból. Egy $\mathbf{B}$ mátrix elérhető, ha előáll $\mathbf{B} = \sum \lambda_{ij}\mathbf{T}_{ij}$ alakban. Jelölje $\underline{1}$ a csupa 1-esből álló oszlopvektort. $\mathbf{T}_{ij} \cdot \underline{1} = \underline{0}$, hiszen ennek a vektornak minden koordinátája a $\mathbf{T}_{ij}$ mátrixok adott sorában levő 1-esek összege modulo 2. Az előzőből következik, hogy $\mathbf{B} \cdot \underline{1} = \underline{0}$, vagyis hogy minden sorban a számok összege 0 modulo 2. Ugyanez az oszlopokra is elmondható, tehát ott is érvényes az a feltétel, hogy minden oszlopban a számok összege 0 modulo 2. Ez összesen 16 feltétel (minden sorra és minden oszlopra 1), de ezek közül csak 15 független, amit könnyen lehet ellenőrizni Gauss-eliminációval. A 49 tündér is független, hiszen a bal felső 7×7-es négyzetet szabadon előállíthatjuk a segítségükkel. Ebből következik, hogy 49 dimenziós az az altér, amit a tündérmátrixok generálnak. De $15+49 = 64$, és a generált altér dimenziójának és a feltételek dimenziójának összege mindig a teljes vektortér dimenzióját adja, amiből látszik, hogy nincs is több feltétel. Az eredeti színezésre teljesül a feltétel, így előáll a $\mathbf{0}$-mátrixból. Így, egy színezésből pontosan akkor áll elő a sakktábla, ha minden sorban és minden oszlopban páros sok 1-es van. $\square$

3.2.1. Kapcsolat a középiskolai megoldással

Az algebrai megoldás gondolatmenetét követve, az egyes feltételeket megfogalmazhatjuk a sakktáblák szintjén, mellyel eljutunk a középiskolában alkalmazható levezetéshez. Az algebrai megoldás során megállapítottuk, hogy 49 jótündér segíthet a sakktábla helyreállításában. Hasonlóan az első példához, ebben az esetben is látható, hogy a tündérek sorrendje nem számít, valamint feltehető, hogy minden tündér legfeljebb egyszer változtat. Tehát a tündérek segítségével sorban megjavítva a sakktábla mezőit az utolsó sor, illetve oszlop kivételével most is vagy elérjük a kívánt színezést, vagy az nem is lehetséges. Ezt azonban igen hosszú feladat lenne papíron végigjátszani. Itt is egy olyan feltételt keresünk, amely segítségével egyszerűen és gyorsan eldönthető, hogy egy adott színezés megjavítható-e.

Az algebrai megoldás során megkaptuk, hogy a $\mathbf{B}$ mátrixoknak megfelelő sakktáblaszínezések a megjavíthatók. A $\mathbf{B}$ mátrixról tudjuk, hogy minden sorában páros sok 1-es van. Ez nem jelent mást, mint hogy a sakktábla minden sorában páros sok fekete négyzet van. Ugyanezt megállapítottuk az oszlopokra is. Tehát azok a sakktáblák lehetnek megjavíthatók, melyek minden sorában és minden oszlopában páros sok fekete mező van. A középiskolai levezetés során ehhez azt kell észrevennünk, hogy amikor egy tündér változtat, akkor egy adott sorban (illetve oszlopban) két mező színét változtatja meg, mely során a sorban (illetve oszlopban) a feketék színének paritása nem változik. A kérdés már csak az, hogy minden ilyen sakktábla megjavítható-e. Erre a válasz igen, amit a dimenziók segítségével kaptunk meg.

3.3. Pénzérme

Egy asztalon 2000 darab pénzérme van, mindegyik a "fej"' oldalával felfelé fordítva. Egy-egy alkalommal pontosan k darab érmét a másik oldalára fordíthatunk.

Bizonyítsuk be, hogy az adott művelet ismétlésével elérhető bármely adott k szám esetén ($1 \leq k \leq 2000$), hogy a 2000 érme "írás" oldalával felfelé legyen fordítva!

(2000/01. *évi Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny: Haladók-Második forduló-II. kategória: Általános tantervű gimnáziumi tanulók*-4.*feladat)*

Bizonyítás. Legyenek most a $\underline{v}_i$, ($1 \leq k \leq 2000$) bázisvektorok a pénzérmék. Vagyis az i. érméhez hozzárendeljük a $\underline{v}_i$ 2000 dimenziós vektort, amiben 1 darab 1-es van az i. helyen, a többi helyen pedig 0-k szerepelnek. Ekkor $V = \langle \underline{v}_i | v_i \text{ pénzérme} \rangle$ egy $\mathbb{Z}_2$ fölötti 2000 dimenziós vektortér. Minden állapothoz és minden fordításhoz hozzárendelünk egy vektort. Az érmék egy állapotához hozzárendeljük az $\underline{a} = \sum_{i=1}^{2000} \lambda_i \underline{v}_i$ állapotvektort, ahol λ_i 0 vagy 1 aszerint, hogy a megfelelő érme a fej vagy az írás oldalával felfelé van-e. Ha megfordítjuk az $i_1, i_2, \ldots, i_k$ érméket, az az állapotvektorhoz hozzáadja a $\sum_{j=1}^{k} \underline{v}_{ij}$ vektort. Például, ha az első k darab érmét megfordítjuk, akkor az állapotvektorhoz azt a vektort adjuk hozzá, amelyben az első k koordináta 1, a többi pedig 0. Így a felfordítások egy $\binom{2000}{k}$ vektor által generált W altér elemei. A kérdés pedig azzal ekvivalens, hogy ebben az altérben benne van-e a csupa 1 vektor, azaz $\underline{\mathbf{1}} = \sum_{i=1}^{2000} \underline{v}_i$. Érdemes itt megjegyezni, hogy a fentieknek nagyobb a füstje mint a lángja. Aki olvasta a dolgozat elejét, annak ez már egy adott eszköztár.

Tekintsünk most 2 vektort, $\underline{v}_t$-t és $\underline{v}_s$-et, $t \neq s$ és $i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}$ t-től és s-től különböző számok. A $\underline{v}_t$ vektorban a t. helyen, $\underline{v}_s$-ben pedig az s. helyen 1-es van, a többi helyen pedig 0-k. Ekkor a $\underline{v}_t + \sum_{j=1}^{k-1} \underline{v}_{ij}$ és $\underline{v}_s + \sum_{j=1}^{k-1} \underline{v}_{ij}$ generátorok különbsége (ami ugyanaz, mint az összege) $\underline{v}_t - \underline{v}_s (= \underline{v}_t + \underline{v}_s)$. Keressük $W^{\perp}$-et. Ha egy vektor merőleges $\underline{v}_t - \underline{v}_s$-re, akkor annak a t-edik és s-edik koordinátája megegyezik. Ez minden t, s párra igaz, így a szóbajövő vektorok $\underline{\mathbf{1}}$ és $\underline{\mathbf{0}}$. Mivel mindkettő merőleges az $\underline{\mathbf{1}}$ vektorra, a csupa 1 mindig benne van W-ben.

□

3.4. Tetrisz

1. Julcsi kapott egy szép sakktáblát karácsonyra. De ő sakktábla helyett inkább azt szerette volna, hogy a herceg jöjjön fehér lovon. Persze, csak a ló jött. A gonosz boszorkány megváltoztatta a sakktábla színezését: néhány fekete mezőt fehérre színezett, egyes fehéreket pedig feketévé változtatott. Julcsi ekkor nagyon elszomorodott, ám a ló a segítségére sietett. Különleges képessége az, hogy a sakktáblán bármely ló alakzatban a színezést az ellentettjére tudja változtatni, vagyis abban az alakzatban minden fekete mezőt fehérre, és minden fehér mezőt feketére tud átszínezni.

Vissza tudja-e állítani a ló az eredeti sakktábla színezést?

Ez a feladat adta az ötletet a következő feladatokhoz:

2.a Julcsi kapott egy szép sakktáblát. A gonosz boszorkány megváltoztatta a sakktábla színezését: néhány fekete mezőt fehérre színezett, egyes fehéreket pedig feketévé változtatott. Julcsi ekkor nagyon elszomorodott, ám segítségül hívta a tetrisz figurákat. Különleges képességük, hogy a sakktáblán bármely tetrisz alakzatban a színezést az ellentettjére tudják változtatni, vagyis abban az alakzatban minden fekete mezőt fehérre, és minden fehér mezőt feketére tudnak átszínezni.

Visszaállítható-e az eredeti sakktábla színezés?

2.b. Visszaállítható-e az eredeti sakktábla színezés, ha elvész a **T** alakú figura?

2.c. Visszaállítható-e az eredeti sakktábla színezés, ha megkerül a **T** alakú figura, de elvész a többi?

2.b. Visszaállítható-e az eredeti sakktábla színezés, ha csak a ló van?

3.4.1. Algebrai megoldás - Tetrisz

A 3×3-as sakktábla esetében 16 ló van. Keressük azokat a sakktábla színezéseket, amelyek megjavíthatók, vagyis amelyekből elérhető az eredeti sakktábla. Bármely ló-változtatást kétszer elvégezve visszakapjuk a változtatás előtti állapotot. Ha egy változtatás-sorozattal egy színezésből eljutunk egy másik színezésig, akkor ugyanezeket a változtatásokat visszafelé elvégezve az előbbi színezést kapjuk vissza. Így elég azt vizsgálnunk, hogy melyek azok a színezések, amelyek az eredeti sakktáblaszínezésből elérhetők, ezekből elérhető lesz az eredeti színezés. Képlettel: $E + \sum_{i=1}^{16} \lambda_i L_i = M$, ahol E jelenti az eredeti sakktáblaszínezést, L_i a lovakat, M pedig az eredetiből elérhető mátrixokat. Ebből $\sum_{i=1}^{16} \lambda_i L_i = M - E$. Minden ló-változtatásnak egy 9 hosszú vektort feleltetünk meg. A vektorokban 0-k szerepelnek, ahol a ló nem változtat, és 1-esek vannak azokon a helyeken, amely négyzetek színét az adott ló az ellentettjére változtatja. A lovaknak megfelelő vektorokból álló mátrix a következő:

$$
\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cccccccccccccccc|c}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & b_{11} - 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & b_{12} \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b_{13} - 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & b_{21} \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & b_{22} - 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & b_{23} \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & b_{31} - 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_{32} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_{33} - 1
\end{array}\right)
$$

Ebben a mátrixban b_{11} jelöli a sakktábla 1. sorának 1. elemének színét, b_{12}

jelöli az első sor második elemének színét, ..., b_{33} pedig a 3. sor 3. elemének színét. A Gauss-eliminációt elvégezve megkapjuk a feltételt azokra a sakktáblaszínezésekre, amelyek elérhetők az eredeti színezésből (vagyis amelyekből az eredeti sakktábla elérhető).

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccccc|c}
0&1&0&1&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0& b_{11}+b_{12}-1\\
0&1&0&1&1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&1&0& b_{13}-1\\
0&0&1&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1& b_{11}+b_{21}-1\\
0&1&1&0&0&1&0&1&0&1&0&1&1&0&0&1& b_{22}-1\\
0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&1&0&0&1& b_{23}\\
0&0&1&0&1&0&1&0&0&1&0&0&1&1&1&1& b_{11}+b_{31}\\
0&1&1&0&0&0&1&0&1&1&1&1&0&1&0&0& b_{32}\\
0&0&0&1&0&1&1&0&1&0&0&1&0&1&0&0& b_{33}-1
\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccccc|c}
0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&1&1&1&0&1&0& b_{11}+b_{12}+b_{13}\\
0&0&1&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1& b_{11}+b_{21}-1\\
0&0&1&1&0&1&0&1&0&0&1&0&0&0&0&1& b_{11}+b_{12}+b_{22}\\
0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&1&0&0&1& b_{23}\\
0&0&1&0&1&0&1&0&0&1&0&0&1&1&1&1& b_{11}+b_{31}\\
0&0&1&1&0&0&1&0&1&0&0&0&1&1&0&0& b_{11}+b_{12}+b_{32}-1\\
0&0&0&1&0&1&1&0&1&0&0&1&0&1&0&0& b_{33}-1
\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccccc|c}
0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&1&1&1&0&1&0& b_{11}+b_{12}+b_{13}\\
0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0& b_{12}+b_{21}+b_{22}-1\\
0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&1&0&0&1& b_{23}\\
0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&0&0&1&0&1&0& b_{21}+b_{31}-1\\
0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&1&0&0&1& b_{12}+b_{21}+b_{32}\\
0&0&0&1&0&1&1&0&1&0&0&1&0&1&0&0& b_{33}-1
\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccccc|c}
0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&1&1&1&0&1&0& b_{11}+b_{12}+b_{13}\\
0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&1&0&1&1&0&1& b_{12}+b_{21}+b_{22}+b_{23}-1\\
0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&0&0&1&0&1&0& b_{21}+b_{31}-1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0& b_{12}+b_{21}+b_{23}+b_{32}\\
0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&1& b_{23}+b_{33}-1
\end{array}\right)$$

Ebből leolvasható, hogy $b_{12}+b_{21}+b_{23}+b_{32}=0$, vagyis ezeken a helyeken a sakktáblában páros sok fekete kell legyen ahhoz, hogy a színezés megjavítható legyen. Másképp: a sakktáblán a fehér mezők helyén páros sok feketének kell lennie.

További Gauss-eliminációval:

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccccc|c} 0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&1&0&1&1&0&1 & b_{12}+b_{21}+b_{22}+b_{23}-1 \\ 0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&0&0&1&0&1&0 & b_{21}+b_{31}-1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&1&1&1 & b_{11}+b_{12}+b_{13}+b_{23}+b_{33}-1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccccc|c} 0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&1&1&1 & b_{12}+b_{22}+b_{23}+b_{31} \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&1&1&1 & b_{11}+b_{12}+b_{13}+b_{23}+b_{33}-1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccccc|c} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 & b_{11}+b_{13}+b_{22}+b_{31}+b_{33}-1 \end{array}\right)$$

Ebből pedig kiderül, hogy $b_{11}+b_{13}+b_{22}+b_{31}+b_{33}-1=0$, vagyis $b_{11}+b_{13}+b_{22}+b_{31}+b_{33}=1$, tehát ezeken a helyeken páratlan sok fekete kell hogy legyen. A megjavítható sakktáblák tehát azok, amelyekben a fekete mezők helyén páratlan sok fekete mező, a fehérek helyén pedig páros sok fekete mező van.

Ha a 4-szer 4-es sakktáblára is végigcsináljuk a Gauss-eliminációt, akkor azt kapjuk, hogy mind a fekete, mind a fehér mezők helyén az előállítható színezésekben páros sok fekete mező kell, hogy szerepeljen. Könnyen látható, hogy páratlan oldalú sakktábla esetén ugyanaz a feltétel, mint a 3-szor 3-asra, páros oldalú esetén ugyanaz, mint a 4-szer 4-esre.

Az utolsó 4 feladat láthatóan szorosan kapcsolódik egymáshoz. Olyannyira, hogy 2-2-nek a végeredménye is azonos. A bizonyítási technikák megegyeznek az előző feladat első, illetve második megoldásával. Mi most csak a végeredményeket közöljük: Abban az esetben, amikor csak a ló van, az elérhető színezésekre azt a feltételt kapjuk, hogy az eredeti sakktábla fekete mezőinek helyén is és fehér mezőinek helyén is páros sok feketének kell lennie. (8-szor 8-as) A ló segítségével előállítható az összes tetrisz figura a **T** kivételével, így adódik, hogy az 1. és a 2.b. feladat feltételei ugyanazok.

Amikor minden tetrisz figurát használhatunk, akkor csak annyi a feltétele a megjavíthatóságnak, hogy az egész sakktáblán páros sok fekete mező legyen. Ugyanakkor a **T** segítségével az összes tetrisz figura előállítható, így a 2.a. és a 3. feladat feltételei is megegyeznek.

3.5. További feladatok

3.5.1. Százszög

Egy szabályos százszög csúcsaihoz tetszés szerint 1-et vagy -1-et írunk. Egy „lépésben” bármely három egymást követő csúcshoz írt szám előjelét az ellenkezőjére változtathatjuk. (Például az 1; 1; -1 hármast a -1; -1; 1 hármasra cserélhetjük.)

a) Elérhető-e ilyen „lépésekkel” tetszőleges kiindulási helyzet esetén, hogy a csúcsokhoz írt 100 szám összege 0 legyen?

b) Elérhető-e tetszőleges kiindulási helyzet esetén, hogy mindegyik csúcshoz az 1-es szám tartozzon?

(1997/98. *évi Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny: Haladók-Első forduló-I. és II. kategória: Szakközépiskolások és nem speciális tantervű gimnáziumi tanulók*-5.*feladat)*

3.5.2. Megoldás

Ebben a feladatban a csúcsok játsszák a bázisvektorok szerepét: a $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$,... $\underline{v}_{100}$ vektorok generálják a V vektorteret. Írjunk a -1-es csúcsok helyére 0-kat. Egy $0-1$ jelöléssorozattal egy $\mathbb{Z}_2$ fölötti vektort jelölünk, amely a $\underline{v}_i$ vektorok lineáris kombinációjaként áll elő. Ebben egy csúcs-vektor együtthatója 0, ha a csúcs 0-ás, és 1, ha 1-es. Most vizsgáljuk meg, mi történik, amikor megváltoztatjuk a számokat. Ekkor 3 egymást követő koordináta megváltozik. Vagyis egy $\underline{a}_i = \underline{v}_i + \underline{v}_{i+1} + \underline{v}_{i+2}$ alakú vektor adódik az eredeti színezés vektorához. Az első kérdést a következőképpen fogalmazhatjuk: tetszőleges $\underline{w} \in V$ vektorból előállítható-e egy olyan vektor, aminek a koordinátái között 50 db 1-es és 50 db 0-ás szerepel? Vegyük észre, hogy az $\underline{a}_i$, $i = 1, 2, ..., 98$ vektorok lineárisan függetlenek. Így az $\underline{a}_i$-k által generált altér legalább 98 dimenziós. Keressük $\dim\langle \underline{a}_i | 1 \le i \le 100\rangle$ értékét. Ha ez 100, akkor az $\underline{a}_i$-k az egész vektroteret generálják, vagyis bármilyen $\sum \lambda_i \underline{v}_i$ előállítható, ha pedig kevesebb, mint 100, akkor nem generálják az egész vektorteret, és így nem állítható elő minden. Számoljuk ki annak a 100×100-as mátrixnak a determinánsát, amelynek koordinátái az $\underline{a}_i$-k. Ha a determináns 0, akkor a 100 vektor nem lineárisan független, ha pedig nem 0, akkor a 100 vektor független, és az egész vektorteret generálják. A 100×100-as mátrix egy ciklikus mátrix. A determinánsa

$$\prod_{\varepsilon^{100}=1} (1 + \varepsilon + \varepsilon^2) = 3 \cdot \prod_{\substack{\varepsilon^{100}=1 \\ \varepsilon \neq 1}} \frac{\varepsilon^3 - 1}{\varepsilon - 1} = 3 \tag{3}$$

ahol az ε-ok a 100. egységgyökök, és $(1 + \varepsilon + \varepsilon^2)$ a mátrix sajátértéke. Az utolsó egyenlőség abból adódik, hogy a 3 és a 100 relatív prímek, és így minden egységgyök pontosan egyszer szerepel a számlálóban és a nevezőben is. A determináns nem nulla mod 2, ezért a 100 vektor lineárisan független, és így generálják a teljes vektorteret. Tehát minden lehetséges jelöléssorozat előállítható. $\square$

A fenti gondolatmenet egyfajta duális problémát sugall. A (3) értéke akkor lesz 0, ha a mátrix determinánsa 0, azaz ha $3|k$, ahol k a csúcsok száma.

Ráadásul könnyű meggondolni, hogy ha $k \equiv 2(3)$, akkor a konstrukciók sokkal egyszerűbbek. Így a feladatot érdemes több sokszögre feladni:

3.5.3. K - szög

Egy szabályos k-szög csúcsaihoz tetszés szerint 1-et vagy 0-t írunk. Egy "lépésben" bármely három egymást követő csúcshoz írt számot az ellenkezőjére változtathatjuk. (Például az 1; 1; 0 hármast a 0; 0; 1 hármasra cserélhetjük.)

a) Elérhető-e ilyen "lépésekkel" a csupa 0-ból, hogy a csúcsokhoz írt szám mindegyike egy kivételével 0 legyen, ha

(i) $k = 100$

(ii) $k = 101$

(iii) $k = 102$?

b) Elérhető-e tetszőleges kiindulási helyzet esetén, hogy egy kivételével mindegyik csúcshoz a 0 szám tartozzon, ha

(i) $k = 100$

(ii) $k = 101$

(iii) $k = 102$?

3.5.4. 1996

Egy 1996×1996-os négyzetbe beírtuk 1-től 1996^2-ig a természetes számokat egymás után úgy, hogy először az első sorban balról jobbra írtuk őket, majd a második sorban is balról jobbra írtuk őket és így tovább. Válasszunk ki a beírt számok közül 1996-ot úgy, hogy mindegyik más oszlopból és más sorból való legyen! Ezeknek a számoknak az összege hány különböző értéket adhat?

*(*1995/96. *évi Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny: Kezdők-Második forduló-Speciális tantervű gimnáziumok-*2. *feladat)*

Bizonyítás. A feladat megoldása pofonegyszerű: a táblázatunk nem más, mint az egész számok összeadás táblájának egy része. Megkapható például úgy is, hogy tekintjük a 0,1,...,1995. sorok és az 1,2,...,1996. oszlopok metszeteiből képzett táblázatot. Ha egy Abel-csoport hasonló részmátrixát vesszük, azaz az $a_1, a_2, \ldots, a_k$-adik és a $b_1, b_2, \ldots, b_k$-adik oszlopok metszetét, akkor az (i, j)-helyen $a_i + b_j$ áll. Ha minden sorból és oszlopból pontosan egy elemet választunk ki, akkor minden a_i és minden b_j egy tagban fog szerepelni. Az összeadás kommutativitása miatt ezen elemek összege megegyezik az a_i-k és b_j-k összegével, azaz állandó. □

Hivatkozások

[1] Lidl,R, G. Pilz Applied abstract algebra, Springer-Verlag, New York, 1984. xviii+545 pp. ISBN: 0-387-96035

[2] Babai, L., P. Frankl Linear Algebra Methods in Combinatorics, (With Applications to Geometry and Computer Science) manuscript 1992, 206 pp

[3] Kiss Emil Bevezetés az algebrába, Második kiadás Typotex, 2007 716 pp. ISBN 978-963-2791-13-5

[4] Freud R. Gyarmati E. Lineáris algebra, Második kiadás Typotex, 2006 518 pp. ISBN 9634634710