Differenciálegyenletek felállítása és megoldása fizikai példákon keresztül

Rujp Veronika

Matematika BSC

Szakdolgozat

Témavezető: Gémes Margit

műszaki gazdasági tanár

Analízis Tanszék

Budapest,2013

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés, motiváció

A differenciálegyenleteket Isaac Newton (1642-1727) alkotta meg. Olyan fontosnak tartotta a felfedezését, hogy anagramma formájában rejtjelezte, melynek jelentését csak később adta meg. Ez mai megfogalmazásban a következő: "A természet törvényeit differenciálegyenletek fejezik ki."[8]
A differenciálegyenletek sok feladat megoldását teszik lehetővé a fizika, a kémia, a közgazdaságtudomány és más szakterületek terén is. Matematika-fizika tanár szakos hallgatóként tanulmányaim során én is számtalanszor találkoztam differenciálegyenletekkel és azok megoldásával. Célom a közönséges differenciálegyenletek bemutatása fizikai példákon keresztül, hogy ne csak a differenciálegyenletek megoldásainak módszereit lássuk, hanem azok szerepét is a természettudományokban.

2. A differenciálegyenletek fogalma, megoldása

A matematikában azokat az egyenleteket nevezzük differenciálegyenleteknek, amelyekben az ismeretlen kifejezés egy differenciálható függvény, és az egyenlet a függvény és annak deriváltja között teremt kapcsolatot.

2.1. A közönséges differenciálegyenletek

Közönséges differenciálegyenletekről beszélünk, ha a bennük előforduló ismeretlen függvény egyváltozós.
Általános alakja:

$$\phi(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

Típusai:

- n-ed rendű differenciálegyenletek

  Bennük az ismeretlen függvény legmagasabb rendű deriváltja n-ed rendű.

Az n-ed rendű explicit differenciálegyenlet általános alakja:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

ahol $y^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$,$(n = 1, 2, \ldots)$ és f általában egy adott $(n+1)$ változós függvény.

Az n-ed rendű implicit differenciálegyenlet általános alakja:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

ahol $y^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$,$(n = 1, 2, \ldots)$ és F általában egy adott $(n+2)$ változós függvény.

- lineáris differenciálegyenletek

  A differenciálegyenlet az ismeretlen függvényre és a deriváltjaira nézve lineáris. (Például: $y' = 6y - 4x^2$ egy explicit alakú, elsőrendű, lineáris differenciálegyenlet)

  Az n-ed rendű lineáris differenciálegyenlet általános alakja:

  $$b(x) = a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y$$

  ahol $a_n(x) \neq 0$.

  Fajtái:

  - homogén az egyenlet, ha $b(x) = 0$.
    (Pl.:$y^{(4)} - 2y'' + y = 0$ egy negyedrendű, lineáris, homogén differenciálegyenlet)
  - inhomogén az egyenlet, ha $b(x)$ nem azonosan nulla.
    (Pl.:$xy' - x^2y + e^x = 0$ egy elsőrendű, inhomogén differenciálegyenlet)
  - állandó együtthatójú az egyenlet, ha az y és y összes deriváltjának az együtthatója konstans.
    (Pl.:$9y''(x) + 4y'(x) = 5x^{12}$ egy másodrendű, állandó együtthatós, lineáris, inhomogén differenciálegyenlet.)

- nemlineáris differenciálegyenletek

  (Pl.:$y'y^2e^{-x} = 4x^2 + 1$ egy elsőrendű, nemlineáris differenciálegyenlet)

Egy n-ed rendű differenciálegyenlet megoldása:

Legyen $y(x)$ az I intervallumon értelmezett n-szer differenciálható függvény.
Egy n-ed rendű differenciálegyenlet megoldásfüggvénye (megoldása) ezen az intervallumon az $y(x)$ függvény, ha a differenciálegyenlet az $y(x)$ függvény behelyettesítése után azonossággá válik az I intervallumon. Az $y(x)$ megoldás grafikonját a differenciálegyenlet integrálgörbéjének (megoldásgörbéjének) nevezzük.
Egy differenciálegyenletet azonosan kielégítő függvényt az egyenlet általános megoldásának nevezzük, ha pontosan annyi egymástól független tetszőleges állandót tartalmaz, ahányad rendű a differenciálegyenlet.[6]
A differenciálegyenletek megoldásakor kétféle megoldástípust különböztetünk meg. Ha a differenciálegyenlet általános megoldásában szereplő állandók helyére meghatározott értékeket írunk, akkor az egyenlet partikuláris megoldását kapjuk. Azt a megoldást pedig, amely az általános megoldásból semmilyen paraméter választásából sem következtethető szinguláris megoldásnak nevezzük.
A partikuláris megoldást adott mellékfeltételek mellett tudjuk előállítani. Ha a differenciálegyenlethez megadjuk még egy adott pontban a keresett megoldásfüggvénynek és a deriváltjainak értékét, akkor kezdeti feltételt adunk meg. Ha pedig egy elsőnél magasabb rendű differenciálegyenletnél mellékfeltételként előírjuk a megoldásfüggvény és deriváltjainak értékét legalább két pontban, akkor kerületi (perem-) feltételről beszélünk.
Amikor egy kezdetiérték problémát szeretnénk megoldani, akkor valójában azt az integrálgörbét keressük, ami egy előre megadott ponton megy át.
A differenciálegyenletek fontosságát, vagyis hogy mennyire van szükségünk rájuk az alkalmazásainkban, jól példázza a szabadesés, ha a közegellenállást elhanyagoljuk. Ekkor a szabadon eső test sebességét a $v(t) = -gt$ összefüggés adja meg, melyben g a gravitációs állandót, t pedig az időt jelöli. Legyen a $t_0 = 0$ és jelölje h_0 a kezdeti magasságot. Azt, hogy milyen magasan van t időpillanatban a test a következő differenciálegyenlet adja meg:

$$\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} = v(t) = -gt$$

A $h(t_0) = h_0$ kezdeti feltétel mellett az előző differenciálegyenletnek az alábbi h függvények tesznek eleget:

$$h(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t = \int -gt\,\mathrm{d}t = -\frac{gt^2}{2} + c$$

mivel $(\int v(t)\,\mathrm{d}t)' = v(t)$. Ez megadja az összes lehetséges $h(t)$ megoldást. A $t_0 = 0$ és $h(t_0) = h_0$ kezdeti feltételekből $c = h_0$ adódik, így a megoldás:

$$h(t) = -\frac{gt^2}{2} + h_0$$

A differenciálegyenletek megadása geometriailag azt jelenti, hogy a (t, h) sík pontjaiban adottak bizonyos irányok. Ha adott egy bizonyos iránymező, olyan görbéket keresünk, amelyeknek érintője minden pontban ez a megadott irány. Ezeket a görbéket a iránymező integrálgörbéinek nevezzük.
Az imént megadott $h(t) = -\frac{gt^2}{2} + c$ egyenletek által meghatározott görbeseregek $(t, h(t))$ ponton átmenő $-\frac{gt^2}{2} + c$ parabolák érintőinek iránytangense éppen $v(t)$.

3. Nevezetes differenciálegyenlet típusok

3.1. Szeparábilis (szétválasztható változójú) differenciálegyenletek

Tétel

Legyenek I,J intervallumok és $f : I \to \mathbb{R}$ $g : J \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ adott függvények. Tegyük fel, hogy létezik $\int f$ I-n és $\int \frac{1}{g}$ J-n, valamint $F \in \int f$ és $G \in \int \frac{1}{g}$ primitív függvények. Ekkor egy $I_1 \subset I$ intervallumon az $y : I_1 \to J$ függvény akkor és csak akkor megoldása az $y' = f(x)g(y)$ differenciálegyenletnek, ha $G(y(x)) = F(x) + c$ minden $x \in I_1$-re, valamely $c \in \mathbb{R}$ esetén.[5]
Azokat az elsőrendű differenciálegyenleteket nevezzük szétválasztható változójú (szeparábilis) differenciálegyenleteknek, amelyek felírhatók

$$f_1(x)g_1(y)\mathrm{d}x + f_2(x)g_2(y)\mathrm{d}y = 0$$

alakban.

A szeparábilis differenciálegyenletek általános megoldása

Ha $g_1(y)f_2(x) \neq 0$, akkor ezzel elosztjuk az egyenletet és az alábbi kifejezést írhatjuk fel:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\mathrm{d}x + \frac{g_1(y)}{g_2(y)}\mathrm{d}y = 0$$

ez más jelöléssel:

$$F(x)\mathrm{d}x + G(y)\mathrm{d}y = 0$$

Így az x és y változókat szétválasztottuk. A differenciálegyenlet általános megoldása ennek az integrálásával kapható:

$$\int F(x)\mathrm{d}x + \int G(y)\mathrm{d}y = C$$

ahol C konstans.

3.1.1. Alkalmazások

1.Példa (Newton-féle hűlési törvény)[2]. A 100 ^oC-os meleg lekvárt kirakjuk hűlni (a levegő 20 ^oC-os). Hőmérséklete 10 órakor 30 ^oC , 11-kor 25 ^oC. Mikor raktuk ki?

Megoldás. Newton törvénye szerint a test hűlési sebessége arányos a test és környezete hőmérsékletének különbségével.[4]

Mivel a hőmérséklet-különbség változása miatt a test lehűlésének sebessége is változik, a folyamat során a lekvár lehűlésének differenciálegyenlete:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\tau} = k(T - t)$$

ahol T a lekvár hőmérséklete, t a környező levegő hőmérséklete, k az arányossági tényező, $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\tau}$ a lekvár lehűlési sebessége és τ a lehűlési idő. A változókat szétválasztva, a feladat vizsgált feltételeit behelyettesítve és mindkét oldalt integrálva a következő összefüggéshez jutunk:

$$\int \frac{\mathrm{d}T}{T - 20} = \int k\mathrm{d}\tau$$

vagyis

$$ln\,|T - 20| = k\tau + c$$

Ha mindkét oldalt az e alapra emeljük, az

$$e^{ln(T-20)} = e^{k\tau+c}$$

egyenlet adódik, mivel $T > 20$. Legyen $e^c = C$, ekkor

$$T = 20 + Ce^{k\tau}$$

A C állandót a $T(10) = 30$ és $T(11) = 25$ kezdeti feltételekből számoljuk. A megoldás $C = 2^{10} \cdot 10$ és $e^k = \frac{1}{2}$. Ezeket az adatokat az előző egyenletbe visszaírva a $\tau = 7$ megoldást kapjuk.
Tehát a lekvárt reggel 4 órakor raktuk ki.

2.Példa (A radioaktív bomlás egyenlete)[4]. A rádium bomlási sebessége minden időpillanatban arányos a jelenlevő tömegével. Határozzuk meg, hogy m_0 tömegű rádiumnak hány százaléka bomlik el 200 év alatt, ha tudjuk, hogy a rádium felezési ideje 1590 év.

Tétel. Ha $f(t)$ differenciálható az I intervallumon és $f'(t) = kf(t)$ I-n, akkor létezik olyan c állandó, melyre minden $t \in I$-re teljesül, hogy $f(t) = ce^{kt}$. A tételben használt jelölések:

- $f'(t)$ a változás sebessége
- k az arányossági tényező
- $f(t)$ a jelenlevő anyagmennyiség

A feladat matematikai felírása: $m'(t) = -km(t)$, ahol $k > 0$ és $m(t)$ a t időpillanatban jelenlevő anyag tömege.

Megoldás. Ez az egyenlet egy szétválasztható változójú differenciálegyenlet. Az általános megoldásba behelyettesítve az adatokat a következő egyenlőséghez jutunk:

$$m = Ce^{-kt}$$

Az $m = m_0$ és $t = 0$ kezdeti feltételekből az alábbi összefügés adódik:

$$m_0 = Ce^{-k\cdot 0}$$

Ebből C-re a

$$C = m_0$$

egyenlőséget kapjuk.
A k arányossági tényezőt a rádium felezési idejének felhasználásával számoljuk:

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-1590k}$$

vagyis

$$-1590k = -ln2.$$

A keresett függvény a következő:

$$m(t) = m_0 e^{-tln2}.$$

A 200 év múlva elbomlott rádium mennyisége:

$$m(200) = m_0 e^{-200ln2} \approx 0,915 m_0.$$

Ebből következik, hogy a rádiumnak 200 év alatt 8,5%-a bomlik el.

3.Példa (Radioaktív kormeghatározás)[5]. Egy bizonyos élő fafajtában a C_{14} szénizotóp aránya a teljes szénmennyiséghez viszonyítva α. Találunk egy ugyanilyen fajtájú fadarabot, amelyben a C_{14} aránya a teljes szénmennyiséghez viszonyítva $0,9\alpha$. Hány évvel ezelőtt vágták ki a fát?

Megoldás. Az élő anyagokban a radioaktív C_{14} szénizotóp és az elemi C_{12} szén mennyiségének aránya állandó. Ha az élő anyag elpusztul, akkor benne a C_{14} izotóp nem pótlódik, hanem C_{12}-vé bomlik 5730 éves felezési idővel.
A fa kivágásakor a fában lévő 1 grammnyi szénben a C_{14} mennyisége α volt. A C_{14} bomlását a következő függvény írja le:

$$c \cdot e^{kt}$$

amelyből $c \cdot e^{kt} = \alpha$. Ebbe $t = 0$-t behelyettesítve a $c = \alpha$ egyenlőséghez jutunk. Tudjuk, hogy $\alpha \cdot e^{5730k} = \frac{\alpha}{2}$, amelyből $k = -1,21 \cdot 10^{-4}$ adódik.
Ha a fát t évvel ezelőtt vágták ki, akkor $\alpha \cdot e^{kt} = 0,9\alpha$, amiből $t = \frac{1}{k} \cdot \ln 0,9 \approx 870$ év.
Tehát kb. 870 évvel ezelőtt vágták ki a fát.

További feladatok.

- Egy motorcsónak sebessége állóvízben $v_0 = 20$ (km/h) teljes sebességgel halad, majd a motor leáll, és ezután 40 s alatt a csónak sebessége $v_1 = 8$ (km/h)-ra csökken.
  A víz ellenállása arányos a csónak sebességével. Mekkora a csónak sebessége 2 perccel a motor kikapcsolása után? [4]

- Szigetelt vezetőre $Q_0 = 1000$ (elektrosztatikus egység) töltést juttatunk. A szigetelés tökéletlen, ezért a vezető fokozatosan elveszti töltését. A töltésvesztés sebessége egy adott pillanatban arányos a vezetőn jelenlevő töltés mennyiségével. Mennyi töltés marad a vezetőn $t = 10$ perc múlva, ha az első percben 100 elektrosztatikus egység a veszteség? [4]

3.2. Szétválasztható változójúra visszavezethető differenciálegyenletek

Szétválasztható változójúra visszavezethető differenciálegyenleteknek az
$y' = f(x + y)$ és az $y' = f(\frac{y}{x})$ alakú egyenleteket nevezzük.

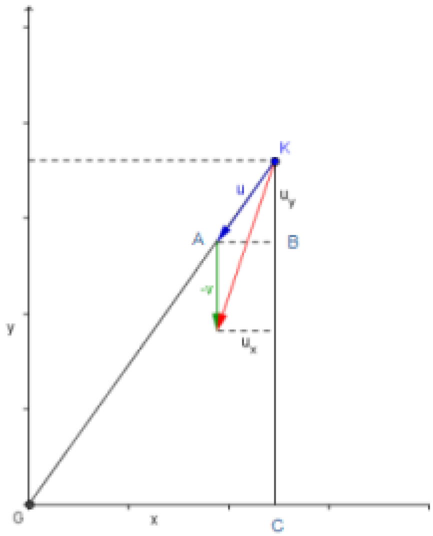
Általános megoldás

- Ha a differenciálegyenlet $y' = f(x+y)$ alakú. Legyen $z = x+y$, ekkor $y = z-x$ és $y' = z' - 1$, ebbe az előző megfeleltetéseket beleírva $z' - 1 = f(z)$,vagyis $z' = f(z) + 1$, ami már szétválasztható változójú differenciálegyenlet.

- Ha a differenciálegyenlet $y' = f(\frac{y}{x})$ alakú. Legyen $\frac{y}{x} = z$,tehát $zx = y$. Az előző összefüggéseket ebbe behelyettesítve $f(z) = z + xz'$ azaz $\frac{f(z)-z}{x} = z'$, ami már szeparábilis egyenlet.

3.2.1. Alkalmazások

1.Példa (Kutyaúsztatás)[2]. Egy kutya (K) u állandó sebességgel úszik, mindig a gazdája (G) felé az állandó $-v$ sebességű folyóban. Mi a kutya pályája?



Megoldás. Az y' eredő sebességvektor (piros) iránytangense:

$$y' = \frac{u_y - v}{u_x} = \frac{u_y}{u_x} - \frac{v}{u_x}$$

Az ABK háromszög és a GCK háromszög hasonlóak, mert szögeik egyenlőek. Tehát e két háromszög oldalainak hosszára a következő összefüggés érvényes:

$$\frac{-u_y}{-u_x} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{u}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-u_x}{x} \to u_x = \frac{-ux}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

A kapott adatokat visszaírva az eredő sebbességvektorra felírt kifejezésbe, az alábbi differnciálegyenletet kapjuk:

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{v}{\frac{-ux}{\sqrt{x^2+y^2}}} = \frac{y}{x} + \frac{v}{u}\sqrt{1 + (\frac{y}{x})^2}$$

Legyen $z = \frac{y}{x}$, ekkor a következő szeparábilis egyenlethez jutunk:

$$z' = \frac{z + \frac{v}{u}\sqrt{1+z^2} - z}{x} = \frac{\frac{v}{u}\sqrt{1+z^2}}{x}$$

A differenciálegyenletet megoldva, mivel $x > 0$, z-re a követekező egyenlőség áll fenn:

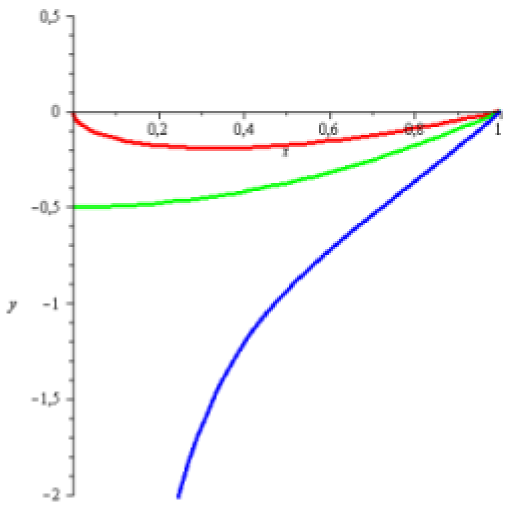
$$z = sh(\frac{v}{u}(\ln x + c))$$

Ebből

$$y = x \cdot sh(\frac{v}{u}(\ln x + c))$$

A kutya pályája az alábbi esetekben, ha a kutya a (1,0) pontból indul és a gazdája a (0,0) pontban helyezkedik el:

- $c = 0$ és $v = \frac{u}{2}$ (piros görbe)
- $c = 0$ és $v = u$ (zöld görbe)
- $c = 0$ és $v = 2u$ (kék görbe)



3.3. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

Elsőrendű lineáris differenciálegyenleteknek nevezzük az $y' + py = q$ alakú egyenleteket, ahol $y : I \to \mathbb{R}$ $I \subset \mathbb{R}$ keresendő, és $p, q : I \to \mathbb{R}$ adott függvények.

- $q = 0$ esetén az egyenlet homogén
- $q \neq 0$ esetén az egyenlet inhomogén

Általános megoldás [1]

1. Integráló tényező módszere:

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$$

$$y'(x)r + p(x)y(x)r = q(x)r$$

ahol r egy tetszőleges differenciálható függvény.

Azt szeretnénk, hogy az $y'(x)r + p(x)y(x)r$ kifejezés egy derivált legyen.

$$(y(x)r)' = y'(x)r + r'y(x) = y'(x)r + p(x)y(x)r,$$

ha $r' = p(x)r$.

Ilyen választással:

$$(y(x)r)' = q(x)r$$
$$y(x)r = \int q(x)r + c$$
$$y(x) = \frac{1}{r}\int q(x)r + \frac{1}{r}c$$

Az $r' = p(x)r$ szétválasztható változójú differenciálegyenlet egy megoldása:

$$r = e^{\int p(x)}.$$

2. Állandó variálásának módszere

Ezt a megoldási módszert a következő példán szeretném szemléltetni. Legyen a differenciálegyenletünk $xy' + 3y = x^2$, ahol $x > 0$. Ahhoz, hogy ezt az egyenletet az elsőrendű lineáris differenciálegyenletek általános alakjára hozzuk, mind a két oldalt el kell osztanunk x-el. Ezért a megoldásokat olyan intervallumokon keressük, amelyek a 0-t nem tartalmazzák. Így a megoldás két lépésből áll.

Először homogén ($y' + p(x)y = 0$) egyenletet oldunk meg, melynek megoldása mindig $y_h(x) = kY(x)$ alakú, ahol $k \in \mathbb{R}$ és $Y : I \to \mathbb{R}$.

Az inhomogén egyenlet megoldását a $y(x) = C(x)Y(x)$ alakban keressük. A $C(x)Y(x)$-et behelyettesítve az inhomogén egyenletbe a következő összefüggéshez jutunk:

$$((C(x)Y(x))' + p(x)C(x)Y(x) = q(x)$$

Ezt alakítjuk:

$$C'(x)Y(x) + C(x)Y'(x) + p(x)C(x)Y(x) = q(x)$$

$$C'(x)Y(x) + C(x)(Y'(x) + p(x)Y(x))$$

Mivel Y megoldása a homogén egyenletnek a kifejezés második tagja nullával egyenlő. Tehát $C'(x)Y(x) = q(x)$, azaz $C'(x) = \frac{q(x)}{Y(x)}$, melyből $C = \int \frac{q(x)}{Y(x)}$ és $y_p(x) = C(x)Y(x)$ Így az elsőrendű lineáris differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

ahol $y_h(x)$ az összes homogén megoldást, $y_p(x)$ pedig egy partikuláris megoldást jelöl.

3.3.1. Alkalmazások

1.Példa (A kis hangya és a gonosz manó meséje)[5]. A kis hangya egy 10 cm hosszú gumiszalag jobb végpontjából indul $1\frac{cm}{s}$ sebességgel a szalag rögzített bal végpontja felé. Ugyanakkor a gonosz manó a szalag jobb szélét megragadva szaladni kezd $100\frac{cm}{s}$ sebességgel, a rögzített végponttól jobbra távolodva. Beérkezhet-e a hangya a bal végpontba?

Megoldás. Legyen $y(t)$ a hangya távolsága a faltól t időpillanatban. Így a hangya sebessége a távolodás és a közeledés sebességének összege:

$$y'(t) = 100\frac{y(t)}{10 + 100t} - 1$$

Az egyenletet rendezve:

$$y'(t) - 10\frac{y(t)}{1 + 10t} = -1$$

Ez egy elsőrendű lineáris közönséges differenciálegyenlet, az alábbi megfeleltetéssel:

$$p(x) = -\frac{10}{1 + 10t},\ q(x) = -1$$

Azt szeretnénk, hogy $y'r - \frac{10}{1+10t}yr = -r$ egy derivált legyen, ahol r az integráló tényező. Az $(yr)' = y'r + r'y = y'r - \frac{10}{1+10t}ry$ egyenlőség akkor teljesül, ha

$r' = -\frac{10}{1+10t}r$. Ez az utóbbi egyenlet egy szétválasztható differenciálegyenlet r-re nézve, melynek egyik megoldása:

$$r = e^{\int -\frac{10}{1+10t}\mathrm{d}t} = e^{-\ln|1+10t|+c}$$

amely $c = 0$ esetén, mivel t nemnegatív, az $r = \frac{1}{1+10t}$ egyenlőséget adja.
Ezt az $ry' - \frac{10}{1+10t}ry = -r$ egyenletbe beírva:

$$\frac{1}{1+10t}y' - \frac{10}{(1+10t)^2}y = \frac{-1}{1+10t}$$

Felhasználva az $(yr)' = -r$ összefüggést:

$$(\frac{1}{1+10t}y)' = \frac{-1}{1+10t}$$

Mindkét oldalt integráljuk:

$$\frac{1}{1+10t}y = -\frac{\ln|1+10t|}{10} + c$$

Ebből:

$$y(t) = -\frac{1+10t}{10}\ln|1+10t| + c(1+10t)$$

Mivel $y(0) = 10 = c$, $y(t)$-re a következő összefüggás áll fenn:

$$y(t) = -\frac{1+10t}{10}\ln(1+10t) + 10(1+10t)$$

Tehát a hangya t másodperc alatt eléri a falat. t-t a következők alapján számolhatjuk. $\ln(1+10t) = 100$, azaz $1+10t = e^{100}$,tehát $t \approx 2,7 \cdot 10^{42}s$.

2.Példa [4]. A C kapacitású kondenzátort egy E feszültségű R ellenállású áramkörbe kötik. Határozzuk meg a kondenzátor Q töltését a bekapcsolás utáni valamely t időpillanatban.

Megoldás. A kondenzátor töltése a t időpillanatban Q, az áramerőssége pedig $I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$. Az áramkörben ebben a t időpillanatban a V elektromotoros erő hat, amely az alábbi összefüggéssel adható meg:

$$V = E - \frac{Q}{C}$$

ahol E az áramkör, $\frac{Q}{C}$ pedig a kondenzátor feszültsége. Az áramerősség Ohm törvénye szerint az $I = \frac{U}{R}$ kifejezésből számolható, tehát az áramerősség, az elekromotoros erő és az ellenállás között a következő kapcsolat áll fenn:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{E - \frac{Q}{C}}{R}$$

Így a folyamat differenciálegyenlete:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{CR}Q(t) = \frac{E}{R}$$

Ebből a homogén egyenlet:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{CR}Q(t) = 0$$

melynek megoldása:

$$Q_h(t) = ke^{-\frac{1}{CR}t}$$

ahol $k \in \mathbb{R}$. Az $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{CR}Q(t) = \frac{E}{R}$ inhomogén egyenlet megoldását $Q(t) = c_1(t)e^{-\frac{1}{CR}t}$ alakban keressük. Ez utóbbi kifejezést beírva az inhomogén egyenletbe, az alábbi összefüggéshez jutunk:

$$(c_1(t)e^{-\frac{1}{CR}t})' + \frac{c_1(t)e^{-\frac{1}{CR}t}}{CR} = \frac{E}{R}$$

Elvégezve a deriválást és rendezve az egyenletet a következőket kapjuk:

$$c_1'(t) = \frac{E}{Re^{-\frac{1}{CR}t}}$$

Ha ezt az egyenletet integráljuk, c_1-re az alábbi megoldást írhatjuk fel:

$$c_1 = ECe^{\frac{1}{CR}t} + \frac{E}{R}k_2$$

ahol $k_2 \in \mathbb{R}$. Innen az inhomogén egyenlet megoldása:

$$Q_p(t) = CE + \frac{E}{R}k_2e^{-\frac{1}{CR}t}$$

Ebbe a két egyenletbe behelyettesítjük a $t = 0$ kezdeti feltételt, és vesszük az inhomogén egyenlet egy konkrét $k_2 = 0$ partikuláris megoldását, melyből c_1-re a $c_1 = Q_p(t) = CE$ egyenlőség adódik. Tehát a kondenzátor Q töltését a t időpillanatban a $Q(t) = Q_h(t) + Q_p(t)$ összefüggésből adódóan a kövezkező egyenlőség fejezi ki:

$$Q(t) = ke^{-\frac{1}{CR}t} + CE$$

További feladatok.

- Egy áramkörben sorba van kapcsolva egy $R = 100\Omega$ ellenállás, egy $L = 0,25H$ önindukciós együtthatójú tekercs és egy U belső feszültségű áramforrás. Írjuk fel az áramerősség változását az idő függvényében! Határozzuk meg, hogy az áramkör zárása után mennyi idővel éri el az áramerősség a maximális áramerősség 99%-át? [7]

3.4. Másodrendű homogén lineáris differenciálegyenletek

Az $y''(x) + g(x)y'(x) + h(x)y(x) = 0$ alakú differenciálegyenleteket másodrendű homogén lineáris differenciálegyenleteknek nevezzük. Ahol $g : I \to \mathbb{R}, h : I \to \mathbb{R}$ adott függvények.

A megoldáshoz szükséges tudnivalók [2]

Legyen $y : I \to \mathbb{R}$ az $y''(x) + g(x)y'(x) + h(x)y(x) = 0$ egyenlet megoldása I-n minden $x \in I$-re. Tegyük fel, hogy létezik g-nek G primitív függvénye I-n. Ekkor a másodrendű homogén lineáris differenciálegyenletek megoldásaira a következő állítások teljesülnek:
Az $y(x) = 0$ mindig megoldás

1. Ha y_1 és y_2 a $y'' + gy' + hy = 0$ megoldása, akkor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ esetén $c_1y_1 + c_2y_2$ is megoldás. Tehát a megoldások vektorteret alkotnak.
2. Ha y_1 és y_2 megoldások, akkor $(y_1y_2' - y_1'y_2)e^G$ állandó I-n.
3. Ha y_1 és y_2 a $y'' + gy' + hy = 0$ megoldása, akkor $(y_1y_2' - y_1'y_2) \equiv 0$, vagy seholse 0.
4. Ha y_1 és y_2 megoldások és létezik $J \subset I$ intervallum, melyen $y_1 \neq 0$ és ezen az intervallumon $\frac{y_2}{y_1}$ nem konstans, akkor $(y_1y_2' - y_1'y_2) \neq 0$.
5. Ha y_1 és y_2 a $y'' + gy' + hy = 0$ megoldása és $(y_1y_2' - y_1'y_2) \neq 0$, akkor minden megoldás $\gamma_1y_1 + \gamma_2y_2$ alakú, ahol $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$. Azaz a megoldások vektortere kétdimenziós.

A $(y_1y_2' - y_1'y_2)$ kifejezést az y_1, y_2 differenciálható függvények Wronski-determinánsának nevezzük, és $W(y_1, y_2)$-vel jelöljük. Ha y_1 és y_2 a $y'' + gy' + hy = 0$ egyenletnek két olyan megoldása, amire $W(y_1, y_2) \neq 0$, akkor azt mondjuk, hogy y_1, y_2 alaprendszert, más néven integrálbázist alkotnak.

3.4.1. Alkalmazások

1.Példa [4]. Egy l hosszúságú, egyik végén rögzített gerendát, a másik végén F erővel terhelnek. Határozzuk meg a lehajlási görbe (neutrális szál) egyenletét és a gerenda végén létrejött lehajlás h nagyságát!

Megoldás. Deformálható testek esetén egy tetszőleges keresztmetszetű gerenda neutrális szálának görbületi sugara: $R = \frac{EJ}{M}$, ahol E a gerenda rugalmassági modulusa, J a lehajlási görbére vonatkozó keresztmetszet tehetetlenségi nyomatéka, M pedig az adott tengelyhez viszonyított hajlítónyomaték. Mivel a gerenda meghajlása általában nagyon kicsi, ezért az érintő $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ iránytangense is kicsi és az $R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$ összefüggésből az y'^2 értéke elhanyagolható. Ezek ismeretében a neutrális szál differenciálegyenlete:

$$y'' = \frac{M}{EJ}$$

Ebbe behelyettesítjük az $M = F(l - x)$ összefüggést, amely az $N(x, y)$ középponti metszet lehajlási momentumára áll fenn, és megkapjuk a lehajlási görbe egyenletét:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{F}{EJ}(l - x)$$

Az egyenlet kétszeri integrálása után az általános megoldás:

$$y = \frac{F}{EJ}\frac{(l-x)^3}{6} + C_1x + C_2$$

A C_1 és C_2 állandókat az $x = 0$, $y = 0$ és $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ kezdeti feltételekből határozzuk meg. Ezek szerint

$$C_1 = \frac{F}{EJ}\frac{l^2}{2}, \qquad C_2 = -\frac{F}{EJ}\frac{l^3}{6}$$

Ezeket az általános megoldásba behelyettesítve a neutrális szál egyenletére a következő kifejezést kapjuk:

$$y = \frac{F}{2EJ}(lx^2 - \frac{x^3}{3})$$

A lehajlás nagyságát az előző egyenletből $x = l$ helyettesítés esetén kapjuk:

$$h = \frac{F}{2EJ}(l^3 - \frac{l^3}{3}) = \frac{Fl^3}{3EJ}$$

2.Példa [4]. Vizsgáljunk egy olyan m tömegű víz alatt lévő tengeralattjárót, amelynek nincs haladó mozgása. Ez a jármű a gravitáció hatására merülni kezd, miközben állandó lefelé haladó mozgást végez. Határozzuk meg a v merülési sebességet, ha a kezdeti sebesség a $t = 0$ időpillanatban $v_0 = 0$ és a tengeralattjáró T idő alatt megtett útját.

Megoldás. A testre 3 erő hat. A lefelé mutató gravitációs erő (F_{grav}), a felfelé mutató közegellenállási erő (F_k) és a felfelé mutató felhajtó erő (F_f). Ezeknek a testre ható erőknek a nagyságát a következő összefüggésekkel határozhatjuk meg:

$$F_{grav} = mg$$

$$F_k = kAv(t)$$

ahol k közegellenállási tényező, A pedig a tengeralattjáró vízszintes vetületének területe. Tehát a közegellenállásierő arányos a sebességgel.

$$F_f = \rho_v g V_{bent}$$

ahol V_{bent} a test térfogatának folyadékba eső része, ebben az esetben a tengeralattjáró térfogata. Ekkor Newton második törvénye alapján a merülő testre a következő kifejezés érvényesül:

$$F_{grav} - kAv(t) - F_f = ma(t)$$

A merülés során a felhajtó és az gravitációs erő nem változik. Legyen $F_f + F_{grav} = P$ állandó. Így a tengeralattjáró mozgásának differenciálegyenlete:

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + kA\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - P = 0$$

Vezessük be a $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v$ jelölést, majd az egyenletet osszuk el m-el. Ekkor az alábbi összefüggéshez jutunk:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{kAv}{m} - \frac{P}{m} = 0$$

Az egyenletet szétválasztva, majd integrálva a következő általános megoldást kapjuk:

$$-\frac{m}{kA}\ln C(P-kAv)=t$$

A kezdeti feltételekből meghatározhatjuk a C állandó értékét. Ezek szerint $C=\frac{1}{P}$, tehát a megoldás

$$-\frac{m}{kA}\ln\frac{1}{P}(P-kAv)=-\frac{m}{kA}\ln(1-\frac{k}{P}Av)=t$$

alakú. Ebből a következő algebrai átalakítások után

$$\ln(1-\frac{k}{P}Av)=-\frac{kA}{m}t$$

$$1-\frac{k}{P}Av=e^{-\frac{kA}{m}t}$$

kifejezzük v merülési sebesség értékét:

$$v=\frac{P}{kA}(1-e^{-\frac{kA}{m}t})$$

A T idő alatt megtett út meghatározásához az előző egyenletet az alábbi alakban írjuk fel:

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{P}{kA}(1-e^{-\frac{kA}{m}t})$$

Ha ezt a differenciálegyenletet szétválasztjuk és integráljuk, megkapjuk a következő útképletet az idő függvényeként:

$$s=\frac{P}{kA}(t+\frac{m}{kA}e^{-\frac{kA}{m}t+C})$$

A $t=0$, $s=0$ kezdeti feltételekből a $C=-\frac{m}{kA}$ adódik. Ezt visszahelyettesítve az előző egyenletbe és az alábbi kifejezéshez jutunk:

$$s=\frac{P}{kA}(t+\frac{m}{kA}e^{-\frac{kA}{m}t-\frac{m}{kA}})=\frac{P}{kA}[t-\frac{m}{kA}(1-e^{-\frac{kA}{m}t})]$$

Tehát a $t=T$ időhöz tartozó s keresett út a következő:

$$s=\frac{P}{kA}[T-\frac{m}{kA}(1-e^{-\frac{kA}{m}T})]$$

További feladatok.

- Egy hajó egy lejtőn csúszik a vízbe. Mennyi idő alatt ér a vízbe a hajó a rögzítőkötelek elávágásától számítva, ha a lejtő hossza $s = 50m$, a lejtő hajlásszöge $\alpha = 25^o$, a súrlódási együttható pedig $k = 0,4$? [7]
- Határozzuk meg, hogy mekkora sebességel tér vissza a v_1 sebességgel függőlegesen fellőtt lövedék a kiindulási helyére, ha tudjuk, hogy a levegőnek az eső testre gyakorolt ellenállása $-kv^2$.

3.5. Állandó együtthatós másodrendű homogén lineáris differenciálegyenletek

Az $x'' + px' + gx = 0$ alakú egyenleteket, ahol $p, q \in \mathbb{R}$ állandó együtthatós másodrendű homogén lineáris differenciálegyenleteknek nevezzük.

Általános megoldás [3]

Az egyenlet megoldásait az $x(t) = e^{\lambda t}(\lambda \in \mathbb{R})$ fügvények között próbáljuk keresni.
$x(t)$-t az $x'' + px' + gx = 0$ egyenletbe helyettesítve az alábbi összefüggést kapjuk:

$$(\lambda^2 + p\lambda + q)e^{\lambda t} = 0$$

Az $e^{\lambda t} \neq 0$ $(t \in \mathbb{R})$ kifejezés teljesül, ezért a $t \to e^{\lambda t}$ függvény akkor és csak akkor lesz megoldása az $x'' + px' + gx = 0$ egyenletnek, ha $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Az utóbbi másodfokú egyenletet az $x'' + px' + gx = 0$ differenciálegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenletnek nevezzük.
A karakterisztikus egyenlet megoldásakor 3 esetet különböztethetünk meg:

1. Az egyenletnek két különböző valós gyöke van, azaz $p^2 - 4q > 0$. Ekkor

$$\lambda_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \lambda_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

   Eszerint $\phi_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ és a $\phi_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ függvények az $x'' + px' + gx = 0$ egyenlet megoldásai és ϕ_1, ϕ_2 alaprendszert alkotnak.

Így az $x'' + px' + gx = 0$ differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\phi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2. A karakterisztikus egyenletnek egy megoldása van, azaz $p^2 = 4q$. Ekkor

$$\lambda = -\frac{p}{2}$$

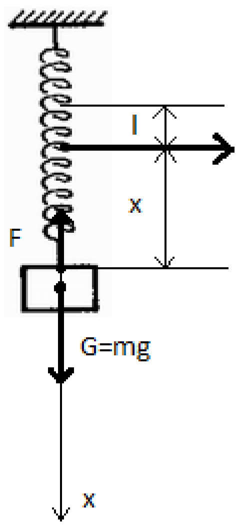
A $\phi_1(t) = e^{\lambda t}$ megoldása az egyneletnek, az alaprendszer másik eleme pedig az $(\lambda_2, t) \to e^{\lambda_2 t}$ függvénynek a λ_2 változó szerinti parciális deriváltja $te^{\lambda_1 t}$.

3. A karakterisztikus egyenletnek nincs valós megoldása, azaz $p^2 < 4q$. Ekkor $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ alakúak, ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ és $\beta \neq 0$.

   Ebben az esetben $\phi_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ és $\phi_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ alaprendszert alkotnak.

3.5.1. Alkalmazások

1.Példa (Harmonikus rezgőmozgás) [4]. Függőleges rugóra G súlyú testet függesztünk. Ez a rugót l hosszúsággal nyújtja meg. Húzzuk a felfüggesztett súlyt a hosszúsággal lejjebb, majd engedjük szabadon mozogni. Határozzuk meg a rugó mozgásegyenletét úgy, hogy minden egyéb hatást figyelmen kívül hagyunk, és a rugó súlyát elhanyagoljuk.



Megoldás. A felfüggesztett súlyra tetszőleges $A(x)$ helyzetben két erő hat. Egy lefelé ható $G = mg$ súlyerő és egy felfelé ható F_r rugóerő, amely próbálja visszatéríteni a testet. Mivel a rugóerő arányos a rugó megnyúlásával, az F_r rugóerőre a következő összefüggés áll fenn:

$$F_r = -Dx$$

ahol $D = \frac{mg}{l}$ a rugóállandó, x pedig a megnyúlás mértéke.
Newton II. tövénye ($F = ma$) alapján a rugó mozgásegyenlete:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{mg}{l}x$$

Az egyenletet átrendezve a következőt kapjuk:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}x = 0$$

Ezt integrálva az általános megoldáshoz jutunk:

$$x = c_1 \sin\sqrt{\frac{g}{l}}t + c_2 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

A test legalsó helyzetében felhasználva a kezdeti feltételeket ($t = 0$, $x = a$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$) meghatározzuk a c_1 és c_2 értékét. Eszerint $c_1 = 0$ és $c_2 = a$ egyenlőségekhez jutunk. Ezeket behelyettesítve az differenciálegyenlet általános megoldásába az $x = a\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t$ kifejezést kapjuk eredményül.

2.Példa (Csillapított rezgőmozgás)[7]. Csillapított rezgőmozgásról akkor beszélünk, ha egy harmonikus rezgőmozgást végző pont rezgését valami, például súrlódás akadályozza. Ilyen esetekben a test kitérése arányos a gyorsulásával és a sebességével, de mind a kettővel ellenkező irányú. A folyamatot a következő differenciálegyenlet írja le:

$$my'' = -2sy' - \omega^2 my$$

ahol m a test tömege, s pedig a csillapítási tényező.
Legyen $\frac{s}{m} = k$ pozitív állandó és $\omega > 0$. Így a rezgő pont mozgását az alábbi másodrendű állandó együtthatós homogén differenciálegyenlet írja le:

$$y'' + 2ky' + \omega^2 y = 0$$

melynek karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^2 + 2k\lambda + \omega^2 = 0$$

Ezt megoldva $\lambda_1 = -k + \sqrt{k^2 - \omega^2}$ és $\lambda_2 = -k - \sqrt{k^2 - \omega^2}$ kapjuk eredményül. Attól függően, hogy k és ω állandók mekkora értéket vesznek fel 3 esetet különböztethetünk meg:

1. ha $k > \omega \to k^2 - \omega^2 > 0$, tehát a rezgést kiváltó erőhöz képest nagy a súrlódás. Ekkor a karakterisztikus egyenletnek két negatív valós gyöke van. Így a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

$y(0) = 0$ és $y'(0) = v_0 > 0$ kezdeti feltételek mellett $c_1 = \frac{v_0}{\lambda_1 - \lambda_2}$ és $c_2 = \frac{v_0}{\lambda_2 - \lambda_1}$. Innen a megoldás:

$$y = \frac{v_0}{\lambda_1 - \lambda_2}(e^{\lambda_1 t} - c_2 e^{\lambda_2 t})$$

Az ilyen rezgéseket túlcsillapított rezgéseknek nevezzük. A nagy súrlódású folyadékban kitérített inga például ilyen mozgást végez.

2. ha $k = \omega \to k^2 - \omega^2 = 0$, akkor a karakterisztikus egyenlet megoldása $\lambda_1 = \lambda_2 = -k$, a differenciálegyenlet általános megoldása pedig:

$$y = c_1 e^{-kt} + c_2 t e^{-kt}$$

A $y(0) = 0$ és $y'(0) = v_0 > 0$ kezdeti feltételeket figyelembe véve $c_1 = 0$ és $c_2 = v_0$, ahonnan a megoldás:

$$y = v_0 t e^{-kt}$$

Tehát a kitérés-idő grafikon hasonló, mint az előző esetben.

3. ha $k < \omega \to k^2 - \omega^2 < 0$, akkor a karakterisztikus egyenletnek két komplex gyöke van. Ezek az alábbiak:

$$\lambda_{1,2} = -k \pm i\sqrt{\omega^2 - k^2}$$

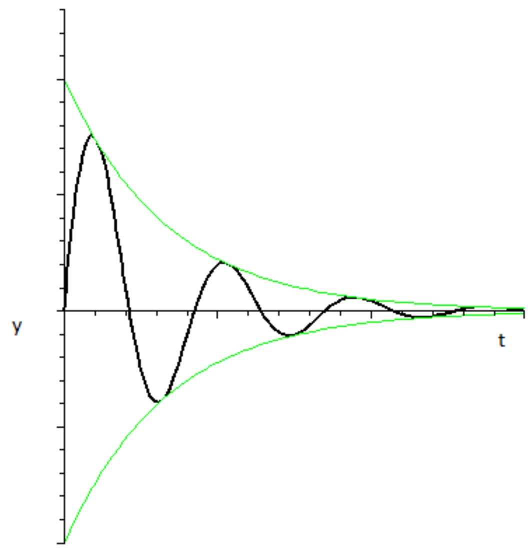
Ebből a következő általános megoldás írható fel:

$$y = e^{-kt}(c_1 \cos\sqrt{\omega^2 - k^2}t + c_2 \sin\sqrt{\omega^2 - k^2}t)$$

Az előzőekben is használt kezdeti feltételekből $c_1 = 0$ és $c_2 = \frac{v_0}{\sqrt{\omega^2 - k^2}}$ adódik. Ezeket az általános megoldásba behelyettesítve, az egyenletre az alábbi megoldást kapjuk:

$$y = \frac{v_0}{\sqrt{\omega^2 - k^2}} e^{-kt} \sin\sqrt{\omega^2 - k^2}t$$

A súrlódás fékező, csillapító hatását a következő grafikon szemlélteti.



4. Összegzés

Dolgozatomban a differenciálegyenletek típusaival és azok általános megoldásaival, alkalmazásaikkal foglalkoztam. Fő célom az volt, hogy fizikai feladatok segítségével szemléltesebbé tegyem ezeket az egyenleteket. Úgy gondolom, szükségünk van ilyen példákra, mert ezek által a matematikai összefüggések gyakorlati hasznát fedezhetjük fel. Véleményem szerint egy tanuló sokkal szívesebben foglalkozik egy olyan feladattal, amit a hétköznapi életből veszünk, hiszen ez érdekesebbnek bizonyul, mintha csak egy felírt egyenletet oldanánk meg. Tanár szakos hallgatóként pedig fontosnak tartok minden olyan módszert, amely segítségével érdekesebbé lehet tenni a tananyagot a diákok számára. Remélem, hogy dolgozatom által sikerült a Kedves Olvasónak betekintést nyernie a differenciálegyenletek világába és felismernie azok fontosságát a mindennapjainkban.

Irodalomjegyzék

1. Besenyei Ádám: *Analízis,*
   ELTE előadásjegyzet 2012/2013. tavaszi félév

2. Buczolich Zoltán: *Analízis,*
   ELTE előadásjegyzet 2011/2012. tavaszi félév

3. Hatvani László - Pintér Lajos: *Differenciálegyenletes modellek a középiskolában*
   Polygon, Szeged 1997

4. K. K. Ponomarjov: *Differenciálegyenletek felállítása és megoldása,*
   Tankönyvkiadó, Budapest 1980

5. Laczkovich Miklós - T.Sós Vera: *Analízis I.,*
   Nemzeti tankönyvkiadó, Budapest 2006

6. Raisz Péterné: *Differenciálegyenletek példatár*
   `http://www.uni-miskolc.hu/ matrpne/diffegypeldI.pdf`

7. Scharnitzky Viktor: *Differenciálegyenletek,*
   Műszaki könyvkiadó, Budapest 1983

8. V. I. Arnold: *Közönséges differenciálegyenletek,*
   Műszaki könyvkiadó, Budapest 1987