Szélsőérték-számítás

Csikó Csaba László
matematika tanári szakirányos hallgató
ELTE TTK

Témavezető:
Dr. Mezei István
adjunktus
ELTE TTK Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem Budapest, 2014.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

1.1. A szakdolgozat felépítése

A szakdolgozatban szélsőérték feladatok megoldását tűztem ki célul. Mindennapjainkban folyamatosan tapasztaljuk a minimum, maximum vagy legalább, legfeljebb kifejezéseket. Ezek a fogalmak megjelennek különböző tudományokban is. Az első félévben analízis gyakorlaton témavezetőmmel találkoztam, aki megmutatta, hogyan is működnek ezek a kérdések. Ezúton is szeretném megköszönni Mezei István tanár úrnak, hogy lefektette az analízis alapjait, melynek végeredménye a szakdolgozati témám lett. Ő keltette fel az érdeklődésem az analízis precizitására, amelyben a számtani-mértani közép közti egyenlőtlenség egy nagy "fegyvernek" számított. Ezután jöttek az egyre finomabb módszerek, amelyek kifogyhatatlannak látszottak. Szakdolgozatom 3 nagy részre tagolódik.Minden rész elején összefoglaltam a legfontosabb elméleti összefüggéseket és megoldási módszereket. Első részben mutatom be, hogyan lehet elemi úton megoldani a különböző szélsőérték feladatokat. Ezeket akár középiskolai szakkörön vagy órán is jól lehet feldolgozni. A második részben a deriválás, mint emelt szintű középiskolai tananyag és egyetemi elvárt tudást igényel. A harmadik részben pedig a többváltozós függvények szélsőértékeivel foglalkoztam, ezek leginkább egyetemi tananyagként hasznosíthatók.Izgalmas feladatokat próbáltam válogatni, amelyek különböző korosztályokban lehetnek hasznosak, hétköznapi "történetek"-ként.

2. fejezet

Számtani és mértani középpel megoldható feladatok

2.1. Felhasznált definíciók és tételek

2.1.1. Definíció. *Az* a_1,..., a_n valós számok számtani (aritmetikai) közepén értjük, és A(a_1,..., a_n)-nel vagy röviden A-val jelöljük e számok összegének n-ed részét:

$$A = \frac{a_1 + ... + a_n}{n}$$

2.1.2. Definíció. *Az* a_1,..., a_n nemnegatív valós számok mértani (geometriai) közepén értjük, és G(a_1,..., a_n)-nel vagy röviden csak G-vel jelöljük e számok szorzatának nem negatív n-edik gyökét:

$$G = \sqrt[n]{a_1 \cdot ... \cdot a_n}$$

2.1.3. Tétel. *n nem negatív szám mértani közepe mindig kisebb, ill. legfeljebb akkora, mint e számok számtani közepe:*

$$\frac{a_1 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot ... \cdot a_n}$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a_1 = a_2 = ... = a_n$

2.1.4. Tétel. *Ha az* a_1,..., a_n *nem negatív számok összege állandó:*

$$a_1 + ... + a_n = S,$$

akkor a

$$P = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$$

szorzat

$$a_1 = a_2 = ... = a_n$$

esetén lesz a lehető legnagyobb. $P_{max}=\left(\frac{S}{n}\right)^n$

2.1.5. Tétel. *Ha az* a_1,..., a_n *nem negatív számok szorzata állandó:*

$$a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$$

akkor a

$$a_1 + ... + a_n = S,$$

összeg

$$a_1 = a_2 = ... = a_n$$

esetén lesz a lehető legkisebb: ez a minimum: $n \cdot \sqrt[n]{P}$

2.1.6. Tétel. *Feltéve, hogy az* a_1,..., a_n *nem negatív számok összege állandó:*

$$a_1 + ... + a_n = S,$$

a

$$\sum = a_1^2 + a_2^2 ... + a_n^2$$

négyzetösszeg értéke

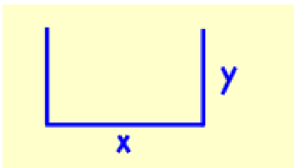
$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n$$

esetén lesz a lehető legkisebb: $\frac{S^2}{n}$.

2.2. Feladatok

2.2.1. Feladat. *Egy patakpartján egy* $3200m^2$ *nagyságú, téglalap alakú kertet szeretnénk elkeríteni víziszárnyasaink részére. Mekkorának válasszuk a téglalap méreteit, hogy a legrövidebb kerítésre legyen szükség?*

2.2.2. Megjegyzés. *A patakparton nem állítunk kerítést.*



2.2.3. Megoldás. *Jelöljük a téglalap oldalait az ábra szerint* x*-szel, illetve* y*-nal! (*$x>$ *0,*y*>0)*

A téglalap területe xy*=3200* m^2*, a kerítés hossza* $K = 2x + y$*.*

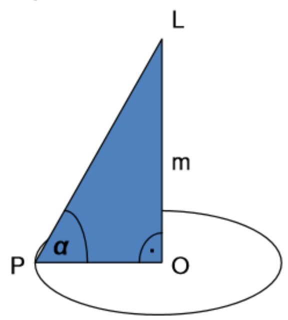
Alkalmazzuk $2x$*-re és* y*-ra a számtani és mértani közép közötti összefüggést!*

$$\frac{2x + y}{2} \geq \sqrt{2xy} = \sqrt{6400} = 80.$$

A kerítés minimális, ha egyenlőség áll fenn, azaz ha $2x = y$*. Ezt visszahelyettesítve a területképletbe,* $x = 40$ *és* $y = 80$ *adódik.*

Tehát a minimális hosszúságú kerítést igénylő téglalap oldalai 40 m*, ill. 80* m*, és* $K_{min} = 160$ *m.*

2.2.4. Feladat. *Egy* r *sugarú kerek asztal közepe felett van egy fel- és letolható lámpa. Milyen magasra kell a lámpát helyeznünk, hogy az asztal körül ülők legjobban lássanak?*



2.2.5. Megoldás. *Keressük* m*-et, hogy az* I *(fényintenzitás) maximális legyen* P*-ben. Hiszen az asztal körül ülünk, itt szeretnénk a legnagyobb fényt elérni.*
I *egyenesen arányos* $\sin\alpha$*-val és fordítottan arányos az* LP *távolság négyzetével.*

$$I(\alpha)=k \cdot \tfrac{\sin\alpha}{PL^2} = \frac{k}{r^2} \cdot \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha,$$

ahol $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$,$0 < k$,$0 < r$ *állandó.*
$I(\alpha)$ *akkor lesz maximális, ha* I^2 *maximális* $(0 < I)$ *miatt.*

$$I^2(\alpha) = \frac{k^2}{r^4} \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos^4\alpha.$$

$\sin^2\alpha \cdot \cos^4\alpha = (1-\cos^2\alpha) \cdot \cos^2\alpha \cdot \cos^2\alpha =: T.$
A számtani- mértani közép közti egyenlőtlenséget fogjuk kihasználni.

$$2T = (2-2\cos^2\alpha)\cdot\cos^2\alpha\cdot\cos^2\alpha \leq \left(\frac{(2-2\cos^2\alpha)+\cos^2\alpha+\cos^2\alpha}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

2.2.6. Megjegyzés. *A bal oldal akkor lesz maximális, ha egyenlők a tényezők*

Tehát

$$2-2\cos^2\alpha = \cos^2\alpha\cos^2\alpha = \frac{2}{3}$$

, amiből következik, hogy $\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

$\sin^2\alpha = \frac{1}{3}$, *így* $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

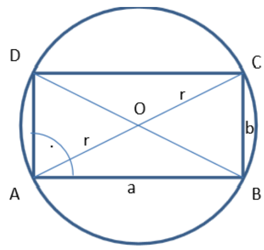
Tehát

$$m = r\cdot\tan\alpha = r\cdot\frac{sin\alpha}{\cos\alpha} = r\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{3} = r\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

érték esetén a fény intenzitása maximális lesz.

2.2.7. Megjegyzés. *Megoldásunk csak pontszerű fényforrás esetén érvényes. A valóságos izzólámpák nem tekinthetők ilyennek. Burába helyezve vagy anélkül különböző irányokba különböző fényt sugároznak, tehát nem követik azt az egyszerű törvényt, melyet felhasználtunk számításunk során.*

2.2.8. Feladat. *A gerenda teherbíró képessége egyenesen arányos a szélességével és magasságának négyzetével.*
Hogyan vágjuk ki egy egyenes fatörzsből a maximális teherbírású gerendát?



2.2.9. Megoldás. *Legyen r a fatörzs (henger) alapjának sugara (r>0), a a henger szélessége, b a magassága, K pedig a teherbíró képessége.*

$K(a,b) = k \cdot a \cdot b^2$, *ahol 0<$a<2r$ és 0<b<2r.*

Ennek a függvénynek keressük a maximumát, ahol k állandó.

Pitagorasz tételt alkalmazva: $a^2 + b^2 = 4r^2$,amiből $b^2 = 4r^2 - a^2$.
Ezt behelyettesítve kapjuk: $K(a)$=$k \cdot a \cdot (4r^2 - a^2) = k \cdot (4r^2 - a^3)$ függvényt, amely harmadfokú.
A függvény szélsőértékeinek meghatározásához későbbi ismeretek szükségesek (derivált függvény fogalma, alkalmazása), így elemi úton vizsgálódunk.

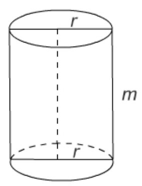
$$K^2(a,b) = k^2 \cdot a^2 \cdot b^4 = k^2 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot b^2 = 4k^2 \cdot a^2 \cdot \frac{b^2}{2} \cdot \frac{b^2}{2} \leq 4k^2 \cdot \left(\frac{a^2 + \frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{2}}{3} \right) = \left(\frac{4k^2}{3} \right)^3$$

állandót kapjuk.

2.2.10. Megjegyzés. *K^2 maximális, ha a tényezők egyenlők, így $a = \frac{2r}{\sqrt{3}}$, b=$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot r$*

Mivel $0 < a < 2r$ és $0 < b < 2r$ így megfelelnek a feladat megoldásának.

2.2.11. Feladat. *Egységnyi térfogatú nyitott egyenes hengerek közül, melyiknek legkisebb a felszíne?*



2.2.12. Megoldás. *Legyen hengerünk alapkörének sugara r, magassága m, térfogata V, palástja és körlapja területének összege T.*

Tudjuk, hogy $V = r^2 \cdot \pi \cdot m$ *és* $T = r^2\pi + 2r\pi \cdot m$
Feladatunk: Adjuk meg, hogy adott V mellett mikor lesz legkisebb T értéke.
Kifejezzük m-et V és r segítségével, majd helyettesítsük be T kifejezésébe:

$$m = \frac{V}{r^2 \cdot \pi}$$

Tehát

$$T = r^2 \cdot \pi + 2r\pi \cdot \frac{V}{r^2 \cdot \pi} = r^2 \cdot \pi + \frac{2V}{r} = r^2 \cdot \pi + \frac{V}{r} + \frac{V}{r}.$$

Így T olyan három pozitív szám összegeként tekinthető, amelyeknek szorzata állandó:

$$r^2 \cdot \pi \cdot \frac{V}{r} \cdot \frac{V}{r} = V^2 \cdot \pi.$$

Következésképpen T akkor lesz minimális, amikor a szóban forgó összeg tagjai mind egyenlők:

$$\frac{V}{r} = \sqrt[3]{V^2\pi},$$

, ahonnan

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$$

Ekkor

$$m = \frac{V}{r^2 \cdot \pi} = \frac{V}{\frac{V}{r}} = r$$

és

$$T_{min} = 3\sqrt[3]{V^2\pi}$$

.

2.2.13. Megjegyzés. *Látjuk, hogy a legkevesebb anyag felhasználásával készült egyenes hengernek a magassága ugyanakkora, mint alapkörének sugara. Ez meglehetősen, széles, öblös. Gondolhatnánk, hogy ha az ilyen alakú mérőedények járnak a legkevesebb a anyagmennyiséggel, akkor a hétköznapi életben, miért nem ilyenekkel találkozunk. Ennek oka, hogy a folyadékok mérésekor elkerülhetetlen az "elfolyatás" bizonyos mértékben, e csökkentése érdekében pedig a keskenyebb, henger alakú mércéket használják. Tehát a mérendő anyag takarékosságához szabják az edény alakját.*

2.2.1. Egy feladat nem triviális megoldása

2.2.14. Feladat. *Fontos nevezetes sorozat az*

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

2.2.15. Megjegyzés. *Bármely $n \in N^+$ esetén $a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 4$. Ezt igazolhatjuk számtani-mértani közép közti egyenlőtlenséggel:*

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot ... \cdot \frac{n+1}{n} \leq \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + n \cdot \frac{n+1}{n}}{n+2}\right)^{n+2} = 1$$

Mutassuk meg, hogy van kisebb felső korlátja a sorozatnak!

2.2.16. Megoldás. *Nézzük meg, hogy mit kapunk, ha - 2 db $\frac{1}{2}$ tényező hozzá vétele helyett 3 db $\frac{2}{3}$ tényezőt veszünk.*

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot ... \cdot \frac{n+1}{n} \leq \left(\frac{\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + n \cdot \frac{n+1}{n}}{n+3}\right)^{n+3} = 1$$

Ebből felső korlátnak adódik az

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{27}{9} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

- 3 db $\frac{2}{3}$ tényező hozzá vétele helyett 4 db $\frac{3}{4}$ tényezőt veszünk.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^4 \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{n} \leq \left(\frac{4 \cdot \frac{3}{4} + n \cdot \frac{n+1}{n}}{n+4}\right)^{n+4} = 1$$

Ebből felső korlátnak adódik az

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{256}{81} = \left(\frac{4}{3}\right)^4$$

- Most vegyünk k db $\frac{k-1}{k}$ tényezőt veszünk.

$$\left(\frac{k-1}{k}\right)^k \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{k-1}{k} \cdot \ldots \frac{k-1}{k} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{n} \leq \left(\frac{k \cdot \frac{k-1}{k} + n \cdot \frac{n+1}{n}}{k+n}\right)^{k+n} = 1$$

2.2.17. Megjegyzés. *Láthatjuk, hogy ezek*

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

sorozat határértékéhez, vagyis az e *számhoz tartanak.*

3. fejezet

Szélsőértékszámítás differenciálással

3.1. Felhasznált definíciók és tételek

3.1.1. Definíció. *Differenciálhatóság*

Legyen f függvény értelmezve az a pont egy környezetében. Azt mondjuk, hogy az f függvény az a pontban differenciálható, ha a

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

véges határérték létezik. Az előbbi határértéket az f függvény a pontbeli differenciálhányadosának vagy deriváltjának nevezzük. Az a pontbeli differenciálhányadost általában $f'(a)$-val jelöljük.

3.1.2. Definíció. *Legyen f differenciálható az a pontban. Az f függvénygrafikon $(a, f(a))$ pontbeli érintőjén az $y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$ egyenletű egyenest értjük.*

3.1.3. Megjegyzés. *Az $f'(a)$ differenciálhányados szemléletes jelentése tehát az f grafikon $(a, f(a))$ pontbeli érintőjének meredeksége.*

3.1.4. Tétel. *Ha f differenciálható a-ban, akkor folytonos a-ban.*

3.1.5. Megjegyzés. *A folytonosság a differenciálhatóságnak szükséges, de nem elégséges feltétele. van olyan f függvény, amely egy a pontban folytonos, de ott nem differenciálható.*

3.1.6. Példa. *Ennél sokkal több is igaz.*

- *Van olyan függvény, amely mindenütt folytonos, de sehol sem differenciálható.*
- *Létezik olyan függvény is, amely egy a pontban differenciálható, de semmilyen más helyen nem is folytonos.*

3.1.7. Definíció. *Ha a*

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

véges határérték létezik, ezt az f függvény a-beli jobb oldali differenciálhányadosának (vagy deriváltjának) nevezzük. Analóg módon értelmezzük a bal oldali differenciálhányadost.

3.1.8. Megjegyzés. *Nyilvánvaló, hogy f akkor és csak akkor differenciálható a-ban, ha f jobb és bal oldali differenciálhányadosa is létezik a-ban, és ezek megegyeznek.(Ekkor a közös érték $f'(a)$).*

3.1.9. Definíció. *Legyen $a < b$. Azt mondjuk, hogy f differenciálható $(a; b)$-ben, ha differenciálható $(a; b)$ minden pontjában. Azt mondjuk, hogy f differenciálható $[a; b]$-ben, ha differenciálható $(a; b)$-ben, továbbá a-ban jobbról, b-ben balról differenciálható.*

3.1.10. Megjegyzés. *Legyen f értelmezve az A halmazon.*
Ha az A halmazhoz tartozó $f(A)$ értékkészletnek van legnagyobb eleme, akkor ezt

az f függvény A-n felvett (abszolút) maximumának nevezzük. Jelölés: $max f(A)-$ val *vagy* $max f(x)$

3.1.11. Definíció. *Ha $a \in A$ és $f(a) = max f(A)$, akkor azt mondjuk, hogy a az f függvény A-hoz tartozó abszolút maximumhelye.*

3.1.12. Definíció. *Ha az $f(A)$ értékkészletnek van legkisebb eleme, akkor ezt az f függvény A-n felvett (abszolút) minimumának nevezzük, és $min f(A)$-val vagy $min f(x)$-szel jelöljük.*

3.1.13. Definíció. *Ha $b \in A$ és $f(b) = min f(A)$, akkor azt mondjuk, hogy b az f függvény A-hoz tartozó abszolút minimumhelye.*

Az abszolút maximum-, illetve minimumhelyeket közösen abszolút szélsőértékhelyeknek nevezzük. Természetesen egy A halmazon egy függvénynek több abszolút maximum- (illetve minimum-) helye is lehet.

3.1.14. Definíció. Az f függvény deriváltfüggvényének nevezzük és f'-vel jelöljük azt a függvényt, amely értelmezve van mindazon x helyen, ahol f differenciálható, és ott az értéke $f'(x)$.

3.1.15. Megjegyzés. A differenciálszámításnak az a feladata, hogy a függvények és deriváltjaik közötti kapcsolatokat megállapítsa és alkalmazza. Az alkalmazásokhoz el kell tudnunk dönteni, hogy a vizsgált függvények hol differenciálhatóak, és meg kell határoznunk a deriváltjaikat.

3.1.16. Definíció. Legyen $f : R \to R$ tetszőleges függvény. Ha létezik olyan $a \in D_{(f)}$, hogy $\forall x \in D_{(f)}$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$ (ill.$f(x) \leq f(x_0)$), akkor $f(x_0)$ az f minimuma (ill. maximuma).

3.1.17. Definíció. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban lokális maximuma (illetve minimuma) van, ha a-nak van olyan U környezete, amelyben f értelmezve van, és minden $x \in U$-ra $f(x) < f(a)$(illetve $f(x) > f(a)$) Ekkor az a pontot az f függvény lokális maximumhelyének (illetve lokális minimumhelyének) nevezzük.

3.1.18. Megjegyzés. Ha minden $x \in U\{a$-ra $f(x) < f(a)$(illetve $f(x) > f(a)$) akkor szigorú lokális maximumról és maximumhelyről (illetve minimumról és minimumhelyről) beszélünk. A lokális maximumot, illetve minimumot közösen lokális szélsőértéknek, a lokális maximumhelyet, illetve minimumhelyét közösen lokális szélsőértékhelynek nevezzük.

3.1.19. Megjegyzés. Egy abszolút szélsőértékhely nem szükségképpen lokális szélsőértékhely, mert a lokális szélsőértékhelynek feltétele, hogy a függvény értelmezve legyen a pont egy környezetében.

3.1.20. Példa. A [0,3] intervallumon értelmezett x függvénynek a 0 helyen abszolút minimuma van, de ez nem lokális minimum.

3.1.21. Megjegyzés. Ha az $f : A \to R$ függvénynek az $a \in A$ pontban abszolút szélsőértéke van és A tartalmazza a egy környezetét, akkor a lokális szélsőértékhely. Egy lokális szélsőértékhely nem szükségképpen abszolút szélsőértékhely, hiszen attól, hogy az f függvénynek az a pont egy környezetében nincs $f(a)$-nál nagyobb értéke, a környezeten kívül f felvehet $f(a)$-nál nagyobb számot.

3.1.22. Tétel. *Tegyük fel, hogy f differenciálható a-ban. Ha f-nek lokális szélsőértékhelye van a-ban, akkor $f'(a) = 0$.*

3.1.23. Megjegyzés. A tétel megfordítása nem igaz.

Abból, hogy $f'(a) = 0$, nem következik, hogy az f függvénynek lokális szélsőértékhelye van a-ban.

3.1.24. Példa. az $f(x) = x^5$ függvényre $f'(0) = 0$, de f-nek nincs 0-ban lokális szélsőértékhelye (hiszen x^5 az egész számegyenesen szigorúan monoton növekedő). Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy ha f differenciálható a-ban, akkor az $f'(a) = 0$ feltétel szükséges, de nem elégséges ahhoz, hogy f-nek lokális szélsőértéke legyen a-ban.

3.1.25. Definíció. Kritikus pont

Az f függvény kritikus pontjának nevezzük f értelmezési tartományának minden olyan pontját, amelyben az f' deriváltfüggvény értéke nulla, vagy nincs értelmezve.

3.1.26. Megjegyzés. Bár szélsőérték csak kritikus pontban vagy végpontban fordulhat elő zárt intervallum esetén, nem minden kritikus pontban vagy végpontban van szélsőérték.

3.1.27. Példa. A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^3$ függvénynek az $f'(0) = 0$, de itt nincs szélsőérték.

3.1.28. Tétel. *Legyen f differenciálható az a pont egy környezetében.*

- *Ha $f'(a) = 0$ és f' lokálisan növekedő (illetve lokálisan csökkenő) az a helyen, akkor az a pont f-nek lokális minimumhelye (illetve maximumhelye.*
- *Ha $f'(a) = 0$ és f' szigorúan lokálisan növekedő (illetve szigorúan lokálisan csökkenő) a-ban, akkor az a pont f-nek szigorú lokális minimumhelye (illetve szigorú lokális maximumhelye).*

3.1.29. Tétel. *Az első derivált és a lokális szélsőérték*

Tegyük fel, hogy a az f folytonos függvény egy kritikus pontja, és f differenciálható.

Legyen f kétszer differenciálható a-ban.

- *Ha* $f'(a) = 0$ *és* $f"(a) > 0$, *akkor* f*-nek* a*-ban szigorú lokális minimuma van.*

- *Ha* $f'(a) = 0$ *és* $f''(a) < 0$, *akkor* f*-nek* a*-ban szigorú lokális maximuma van.*

3.1.30. Megjegyzés. *A fenti tétel segítségével egy tetszőleges differenciálható függvény lokális és abszolút szélsőértékeit megkereshetjük, akkor is, ha a függvény nem egy korlátos és zárt intervallumon van értelmezve. Ugyanis a derivált előjeléből megállapíthatjuk, hogy a függvény mely intervallumokon nő és mely intervallumokon csökken, és ez általában elegendő információt ad a szélsőértékek megkereséséhez.*

3.1.31. Tétel. *Legyen* f *differenciálható az* a *pont egy környezetében.*

- *Ha* $f'(a) = 0$ *és* f' *lokálisan növekedő (illetve lokálisan csökkenő) az* a *helyen*, akkor az* a *pont f-nek lokális minimumhelye (illetve maximumhelye).*

- *Ha* $f'(a) = 0$ *és* f' *szigorúan lokálisan növekedő (illetve szigorúan lokálisan csökkenő) az* a *helyen*, akkor az* a *pont f-nek szigorúan lokális minimumhelye (illetve lokális maximumhelye).*

3.1.32. Megjegyzés. *Az* f' *függvény* a*-beli előjelváltása nem szükséges ahhoz, hogy* f*-nek az* a *pont lokális szélsőértékhelye legyen.*

3.1.33. Tétel. *Legyen* f *kétszer differenciálható* a*-ban. Ha* $f'(a) = 0$ *és* $f"(a) > 0$, *akkor* f*-nek* a*-ban szigorú lokális minimuma van. Ha* $f'(a) = 0$ *és* $f"(a) < 0$, *akkor* f*-nek* a*-ban szigorú lokális maximuma van.*

3.2. Feladatok

Feladatok megoldásánál gyakran használjuk a következő tételt.

3.2.1. Tétel. *Az első derivált és a lokális szélsőérték*

Tegyük fel, hogy a az f folytonos függvény egy kritikus pontja, és f differenciálható valamely a-t tartalmazó intervallum minden pontjában, kivéve esetleg magát az a pontot. Balról jobbra haladva:

- *ha f' az a helyen negatívról pozitívra vált, akkor f-nek lokális minimuma van az a pontban.*
- *ha f' az a helyen pozitívról negatívra vált, akkor f-nek lokális maximuma van az a helyen*
- *ha f' az a helyen nem vált előjelet (f' az a-től jobbra és balra egyaránt pozitív, vagy egyaránt negatív), akkor f-nek nincs lokális szélsőértéke az a helyen.*

3.2.2. Tétel. *A második derivált és a lokális szélsőérték*

Tegyük fel, hogy f" folytonos az $x = a$ pontot tartalmazó nyílt intervallumon.

- *ha $f'(a) = 0$ és $f" < 0$, akkor f-nek lokális maximuma van az $x = a$ pontban.*
- *ha $f'(a) = 0$ és $f" > 0$, akkor f-nek lokális minimuma van az x=a pontban.*
- *ha $f'(a) = 0$ és $f" = 0$, akkor nem állíthatunk semmi biztosat. A függvénynek lehet lokális maximuma, lokális minimuma vagy egyik sem.*

3.2.3. Feladat. *A nyomda egy plakátot* 14400 *példányban állít elő. A költségeket csak a nyomtatáshoz felhasznált nyomólemezek (klisék) darabszámának változtatásával tudják befolyásolni.*
Egy nyomólemez 2500 Ft-ba kerül, és a nyomólemezek mindegyikével óránként 100 plakát készül. A nyomólemezek árán felül, a lemezek számától függetlenül, minden nyomtatásra fordított munkaóra további 40000 *Ft költséget jelent a nyomdának.*
A ráfordított idő és az erre az időre jutó költség egyenesen arányos. A 14400 *plakát kinyomtatását a nyomda a legkisebb költséggel akarja megoldani.*
Hány nyomólemezt kell ekkor használnia?
Mennyi ebben az esetben a nyomólemezekre és a ráfordított munkaidőre jutó költségek összege?

3.2.4. Megoldás. *Ha a nyomda* x *db nyomólemezt alkalmaz, akkor ennek költsége* $2500x$ *forint.*
Az x *db lemezzel óránként* $100x$ *darab plakát készül el, ezért a* 14400 *darab kinyomtatásához*

$$\frac{14400}{100x} = \frac{144}{x}$$

órát vesz igénybe,és ez további

$$\frac{5{,}76 \cdot 10^6}{x}$$

forint költséget jelent.
A két költség összege:

$$K(x) = 2500x + \frac{5{,}76 \cdot 10^6}{x}$$

forint, ahol az x pozitív egész.

Tekintsük a pozitív valós számok halmazán a K függvényt!

Az így megadott K függvénynek a minimumát keressük. A K függvény deriválható, $K' = 0$ *szükséges és elégséges feltételt jelent.*

$$K' = 2500 - \frac{5{,}76 \cdot 10^6}{x^2}$$

, $K' = 0$*, ha* $x = 48$*, mert* $x > 0$.

Mivel $K"(48) > 0$*, ezért a függvénynek itt lokális minimuma van és ez abszolút minimum is.*

Azaz 48 *nyomólemez alkalmazása esetén lesz minimális a költség.* 48 *darab nyomólemez alkalmazása esetén a nyomólemezekre és a ráfordított munkaidőre jutó költségek összege:*$K(48) = 240000$ *(forint).*

2. módszer

Számtani-mértani közép közti egyenlőtlenséggel is megoldhatjuk a feladatot, lássuk:

Az előző módszer alapján tudjuk, hogy a két költség összegét leíró $K(x)$ *függvény a következőképpen adható meg:* $K(x) = 2500x + \frac{5{,}76 \cdot 10^6}{x}$.

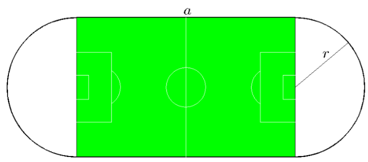
Ennek minimumát keressük, alkalmazzuk az egyenlőtlenséget:

$$2500x + \frac{5,76 \cdot 10^6}{x} \leq 2 \cdot \sqrt{2500x \cdot \frac{5,76 \cdot 10^6}{x}}$$

$$2500x + \frac{5,76 \cdot 10^6}{x} \leq 2 \cdot \sqrt{1,44 \cdot 10^{10}} = 2,4 \cdot 10^5$$

3.2.5. Feladat. *Egy épülő atlétika pályán két párhuzamos egyenes szakaszból és az őket összekötő félkörívekből áll a futópálya.*

Hogyan kell kialakítani a pálya alakját, hogy a futópálya hossza 400m legyen és a lehető legnagyobb területű, téglalap alakú focipálya férjen el a belsejében?



3.2.6. Megoldás. *A pálya területe két változó függvényeként írható fel. (Ezek a kör r sugara és a futópálya egyenes szakaszának a hossza. Az értelmezési tartomány egyszerűen meggondolható.)*

$T(a,r) = 2 \cdot r \cdot a$, *ahol* $0 \leq a \leq 200$, $0 \leq r \leq \frac{200}{\pi}$
$K = 2 \cdot r \cdot \pi + 2a = 400$ *feltétel felhasználásával egy-változós területfüggvény is írható:*

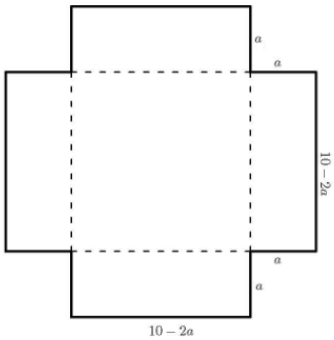
$$T(r) = 2 \cdot r \cdot (200 - r \cdot \pi) = 400r - 2r^2 \cdot \pi$$

3.2.7. Megjegyzés. *Zárt intervallumon értelmezett folytonosan differenciálható függvény szélsőértéke vagy az értelmezési tartomány végpontjában van (most ott biztosan nincs maximum, hiszen a terület mindkét végpont esetében 0), vagy olyan közbülső helyen, ahol a derivált 0.*

$T'(r) = 400 - 4 \cdot r \cdot \pi = 0$, *ekkor* $r = \frac{100}{\pi}$ *és* $T"(r) = -4\pi < 0$.

Tehát a függvénynek adott pontban maximuma van .
Ekkor $a = 200 - r \cdot \pi = 100m$

3.2.8. Feladat. *Egy* $100cm$ *területű négyzet alakú lemez sarkaiból egybevágó négyzeteket vágunk le, majd a lemez széleit felhajtjuk és dobozt készítünk. Mekkora legyen a levágott négyzetek oldala, hogy a doboz térfogata maximális legyen?*



3.2.9. Megoldás. *Térfogat kiszámítása:*

$V = T_{alap} \cdot m$=$(10-2a)^2 \cdot a$=$(100-40a+4a^2)\cdot a$=$4a^3-40a^2+100a$.

A $V(a) = 4a^3 - 40a^2 + 100a$ *függvénynek keressük a szélsőértékét, ami akkor létezhet, ha a deriváltja 0.*

$$V'(a) = 10a^2 - 80a^+100 = 0,$$

melynek gyökei: 5 *és* $\frac{5}{3}$.

Ellenőrizzük, hogy valóban maximum van-e a helyeken:

1. módszer: A második derivált segítségével. Ha az első derivált 0 az adott a *helyen, de a második derivált nem 0, akkor a függvénynek szélsőértéke van.*

A második derivált előjeléből tudjuk a szélsőérték típusát.

Ha a második derivált az a *helyen pozitív, akkor lokális minimuma van a függvénynek, ha negatív akkor lokális maximuma van.*

$$V"(a) = 24 - 80a$$

$$V"(5) = 120 - 80 = 40 > 0$$

lokális minimum.

$$V"(\frac{5}{3}) = 24 \cdot \frac{5}{3} - 80 = -40 < 0$$

lokális maximum.

A $[0, 5]$ *zárt intervallumon ez az egyetlen lokális maximum hely, ezért abszolút maximum is.*

2. módszer: Táblázat segítségével is megoldható a feladat, amit itt nem részletezek.

A táblázatból kiolvashatók az alábbiak: Ha a derivált az adott a *helyen 0 és előjelet vált, akkor szélsőértékhely van.*

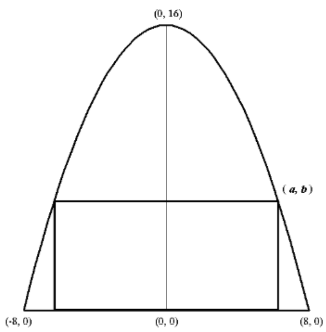
Ha a derivált pozitívból válik negatívvá, akkor lokális maximum, egyébként lokális minimum van.

A derivált előjele könnyebben vizsgálható, ha szorzattá alakítjuk.

3.2.10. Megjegyzés. *Zárt intervallumon értelmezett függvény esetében, vizsgálnunk kell az intervallum két végpontjában lévő értékeket. Most nyilvánvaló volt, hogy a végpontokban nem lehet maximum, hiszen ott a doboz térfogata 0 lenne.*

3.2.11. Feladat. *Egy parabolaszelet alakú ablak szélessége és magassága egyaránt 16 dm.*

Mekkora az a legnagyobb területű téglalap alakú mozaiklap, amely elhelyezhető úgy, hogy szimmetriatengelyük azonos legyen?



3.2.12. Megoldás. *Először határozzuk meg a parabola egyenletét:*

$$y = ax^2 + bx + c$$

Keressük a három paraméter értékét.

A $P_1(0,16), P_2(-8,0)P_3(8,0)$ *pontok a parabolán vannak. Így a köveketező egyenleteket írhatjuk fel:*

$$16 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c$$

$$0 = a \cdot 64 - b \cdot 8 + 16$$

$$0 = a \cdot 64 + b \cdot 8 + 16$$

Az első egyenletből $c = 16$ *adódik. Az utóbbi két egyenletet összeadva illetve kivonva egymásból kapjuk* $a = -\frac{1}{4}$, $b = 0$

Tehát a parabola egyenlete:

$$y = -\frac{1}{4} \cdot x^2 + 16$$

Az ábrán látható téglalap területe:

$T(a,b) = 2 \cdot a \cdot b,$ *ahol* $0 \leq a \leq 8$ *és* $0 \leq b \leq 16$

Ezt visszahelyettesítve kapjuk a már egyismeretlenes függvényt, melynek szélsőértékét meghatározhatjuk.

$T(a)$=$2a \cdot (16 - \frac{1}{4}a^2)$=$32a - \frac{1}{2}a^3$, *ahol* $0 \leq a \leq 8$.

Ott lehet szélsőérték, ahol a derivált 0.

$T'(a) = 32 - \frac{3}{2} \cdot a^2 = 0$, *amiből* $a = +- \frac{8}{\sqrt{3}}$

A kapott eredmények közül csak a $\frac{8}{\sqrt{3}}$ *esik az értelmezési tartományba.*

3.2.13. Megjegyzés. *A negatív gyök a téglalap másik csúcsának x koordinátájának felel meg.*

A szélsőérték helyeinek további vizsgálatára az előző feladatban bemutatott két módszer bármelyike alkalmazható.

1. módszer

Vizsgáljuk a második deriváltat

$T"(a) = -3a\, T"(\dfrac{8}{\sqrt{3}}) = -3\cdot\dfrac{8}{\sqrt{3}} < 0$, *így T-nek* $\dfrac{8}{\sqrt{3}}$*-ban lokális maximuma van.*

2. módszer

Táblázattal.

3.2.14. Megjegyzés. *A tartományon csak egyetlen lokális maximum van, így az lesz az abszolút maximum is.*

4. fejezet

Többváltozós függvények

4.1. A két- és többváltozós függvény fogalma

4.1.1. Definíció. *Kétváltozós valós függvényen olyan függvényt értünk, amelynek értelmezési tartománya része az R^2 halmaznak, értékkészlete pedig része R-nek.*

Jelölése: $f : R^2 \to R$

4.1.2. Megjegyzés. f *értelmezési tartományát* D_f*-fel, értékkészletét* R_f*-fel jelöljük.*
Ha a függvény jele f*, az* (x, y) *számpár pedig eleme* D_f*-nek, akkor* $f(x, y)$ *a függvény (x,y) helyen vett helyettesítési értéke.*
Ha nem okoz félreértést, akkor f(x,y) a függvény jelölésére is használható.

Az $f(x, y) = z$ *jelöli a* $P(x, y, z)$ *pontokból álló halmazt amit a függvény grafikonjának nevezünk.*

Ez a ponthalmaz a gyakorlati esetek többségében egy felületet alkot (valamilyen, általunk választott koordináta-rendszerben).
Ezért szokás azt mondani, hogy a kétváltozós függvény felülettel ábrázolható.
E felület egyenlete:

$$z = f(x, y)$$

Az x és y változókat független változóknak, z-t pedig függő változónak is nevezzük.
ekkor nyilván $(x, y) \in D_f$ és $z \in R_f$

A kétváltozós függvény formálisan megadható $F(x, y, z) = 0$ úgynevezett implicit alakban is.
Hasonlóan értelmezzük az n-változós valós függvényt is. Ennek értelmezési tartománya része az R^n halmaznak, értékkészlete pedig része R-nek. Jelölése: $f(x_1,..., x_n)$ vagy általánosan: $f : R^n \to R$.

4.2. A parciális derivált fogalma

4.2.1. Definíció. *Parciális differenciálhányados*

A többváltozós valós f függvény változói közül egy kivételével az összes többit tekintsük állandónak. Az így keletkező egyváltozós függvény deriválható, ha a kiválasztott változóval a deriválhatóságra vonatkozó feltételek teljesülnek. A többváltozós függvény valamely változója szerinti deriváltját parciális deriváltnak nevezzük. Tehát az $f(x, y)$ kétváltozós függvény (x_0, y_0) helyhez tartozó x szerinti parciális differenciálhányadosán a

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0}{h}$$

határértéket értjük, majd y szerinti parciális differenciálhányadosán pedig

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0}{h}$$

határértéket értjük, feltéve, hogy ezek léteznek.

4.2.2. Megjegyzés. *A kétváltozós f függvény x szerinti, ill. y szerinti parciális deriváltján azt a kétváltozós függvényt értjük, amelynek értelmezési tartománya mindazokból a pontokból áll, ahol létezik f-nek x szerinti, ill. y szerinti parciális differenciálhányadosa és értéke itt egyenlő a parciális differenciálhányados e pontbeli értékével.*

Jelölés: f'_x ill. f'_y.

4.3. Többváltozós függvény szélsőértéke

4.3.1. Feltétel nélküli szélsőérték

Az $f(x, y)$ kétváltozós függvényre a helyi maximum és helyi minimum fogalmát ugyanúgy értelmezzük, mint az egyváltozós függvény esetén.

4.3.1. Definíció. *Az $f(x, y)$ függvénynek a $P_0(x_0, y_0)$ helyen lokális maximuma van, ha létezik P_0-nak olyan környezete, hogy minden, e környezetbe eső (x, y) helyen $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ és lokális minimuma van, ha ugyanazon feltételek mellett $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$*

4.3.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy az f függvénynek az (x_0, y_0) helyen szélsőértéke van. Ekkor mind az $f(x, y_0)$, mind az $f(x_0, y)$ egyváltozós függvénynek is szélsőértéke van itt, azaz $f'_x(x_0, y_0) = 0$ és $f'_y(x_0, y_0) = 0$.*

Ezzel megkaptuk a szélsőérték létezésének szükséges feltételét. Az (x_0, y_0) *helyet az f függvény stacionárius helyének (pontjának) nevezzük, ha* $f'_x(x_0, y_0) = 0$ *és* $f'_y(x_0, y_0) = 0$*. A függvénynek szélsőértéke tehát csak stacionárius helyen lehet. A szélsőérték létezésének elégséges feltételéhez szükségesek a második deriváltak is.*

4.3.3. Tétel. *Az* $f(x, y)$ *függvénynek az* (x_0, y_0) *helyen szélsőértéke van, ha* $f'_x(x_0, y_0) = 0$ *és* $f'_y(x_0, y_0) = 0$*, valamint* $f'_x(x_0, y_0) \cdot f'_y(x_0, y_0) - f''^2_{xx}(x_0, y_0) > 0$.
Maximuma van ,ha $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ *és minimuma van, ha* $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$.
Ha $f'_x(x_0, y_0) \cdot f'_y(x_0, y_0) - f''^2_{xx}(x_0, y_0) < 0$*, akkor az* (x_0, y_0) *helyen nincs szélsőérték, ha viszont nullával egyenlő, akkor lehet szélsőérték.*

4.3.4. Definíció. *Kvadratikus alak*

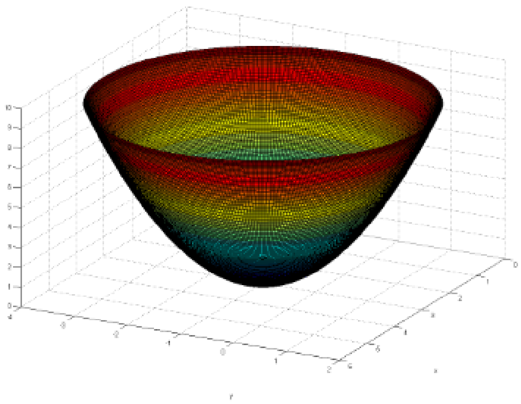
Legyen $q : R^2 \to R$ *polinom. Azt mondjuk, hogy q kvadratikus alak, ha q(x,y)=*$c_{11}x^2 + c_{21}xy + c_{12}yx + c_{22}y^2$.

4.3.5. Definíció. *Egy* $q : R^2 \to R$ *kvadratikus alak pozitív, illetve negatív definit, ha q(x,y)>0, illetve q(x,y)<0. A kvadratikus alak pozitív illetve negatív szemidefinit, ha az előbbieknél egyenlőséget is megengedjük és indefinit, ha felvesz pozitív és negatív értéket is. Egy q kvadratikus alak definitségét az együtthatókból felírt Hesse-mátrix determinánsának értéke adja.*

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

4.3.2. Feltétel nélküli szélsőérték feladatok

4.3.6. Feladat. *Határozzuk meg az* $f(x, y) = (x - 3)^2 + (y + 1)^2$ *függvény szélsőértékeit!*



4.3.7. Megoldás. *Szükséges feltétel vizsgálata*

Mivel a függvény mindenhol parciálisan differenciálható, ezért lokális szélsőértéke ott lehet, ahol mindkét parciális deriváltja 0, azaz

$$f'_x(x, y) = 2 \cdot (x - 3) = 0$$

$$f'_y(x, y) = 2 \cdot (y + 1) = 0$$

Az egyenletek megoldása egyetlen stacionárius helyet ad, a P(3,-1)pontot.

Elégséges feltétel vizsgálata

A második deriváltak a következők:

$$f'_{xx}(x, y) = 2$$

$$f'_{xy}(x, y) = 0$$

$$f'_{yx}(x, y) = 0$$

$$f'_{yy}(x, y) = 2$$

Felírva a második derivált mátrix determinánsát a P pontban

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

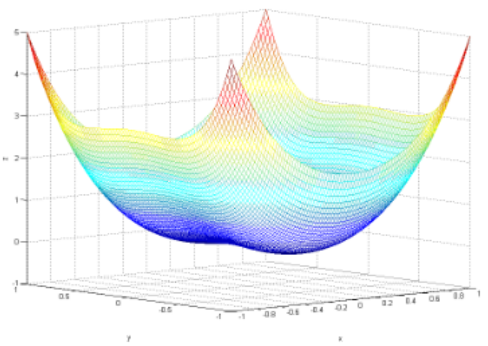
Ezért P-ben a függvénynek szélsőértéke van. Mivel $f''_{xx}(P) > 0$, ezért a függvénynek a P pontban lokális minimuma van.

4.3.8. Megjegyzés. *A második deriváltak felírása helyett elemi úton is meg-állapíthattuk volna, hogy a stacionárius pontban lokális minimum van, mert*

$$f(x, y) = (x - 3)^2 + (y + 1)^2 \geq 0$$

minden (x, y) esetén, míg a stacionárius pontban $f(P) = 0$

4.3.9. Feladat. *Keressük meg az $f(x, y) = x^4 + 2x^2 + 3y^4 - y^2$ függvény szélsőértékeit!*



4.3.10. Megoldás. *Szükséges feltétel vizsgálata*

Mivel a függvény mindenhol parciálisan differenciálható, ezért lokális szélsőértéke ott lehet, ahol mindkét parciális deriváltja 0, azaz

$$f'_x(x, y) = 4x^3 + 4x = 0$$

$$f'_y(x, y) = 12x^3 - 2y = 0$$

Az egyenletek megoldása három stacionárius helyet adnak, a $P(0,0)$, $P(0, \sqrt{\frac{1}{6}})$, $P\left(0, -\sqrt{\frac{1}{6}}\right)$ *pontot.*

Elégséges feltétel vizsgálata

A második deriváltak a következők:

$$f'_{xx}(x,y) = 12x^2 + 4$$

$$f'_{xy}(x,y) = 0$$

$$f'_{yx}(x,y) = 0$$

$$f'_{yy}(x,y) = 36y^2 - 2$$

A második derivált mátrixai:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Mivel a determináns értéke negatív, ezért P_1*-ben a függvénynek nincs szélsőértéke.*

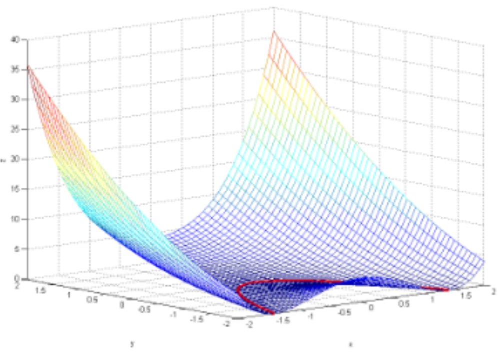
$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ezért P_2*-ben a függvénynek szélsőértéke van. Mivel* $f"_{xx}P_2 > 0$*, ezért a* P_2 *pontban a függvénynek lokális minimuma van.*

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ezért P_3-ben a függvénynek van szélsőértéke. Mivel $f"_{xx}P_3 > 0$, ezért a P_3 pontban a függvénynek lokális minimuma van.

4.3.11. Feladat. *$f(x, y) = x^4 + 2x^2 + 3y^4 - y^2$ függvény szélsőértékeit!*



4.3.12. Megoldás. *Mivel a függvény mindenhol parciálisan differenciálható, ezért lokális szélsőértéke ott lehet, ahol mindkét parciális deriváltja 0, azaz*

$f'_x(x, y) = 4xy + 4x^3 = 0$

$f'_y(x, y) = 2y + 2x^2 = 0$

Az első egyenletből $x = 0$ vagy $y = -x^2$. A másik egyenletbe behelyettesítve $x = 0$ esetén y=0 adódik. Ha $y = -x^2$-et helyettesítjük, akkor azonosságra jutunk. Tehát az f függvénynek az $y = -x^2$ parabola pontjaiban lehet szélsőértéke.

4.3.3. Feltételes szélsőérték

4.3.13. Definíció. *Ha azt tűzzük ki célul, hogy az $f(x, y)$ kétváltozós függvénynek a $K(x, y) = 0$ feltétel mellett keressük a szélsőértékeit, akkor feltételes szélsőértékszámításról beszélünk. A feladatot visszavezetjük egyváltozós szélsőértékszámításra ha a $K(x, y) = 0$ egyenletből valamelyik változót ki tudjuk fejezni és azt* *behelyettesítjük az $f(x,y)$ függvénybe. ezután megkeressük a kapott egyváltozós függvény szélsőértékeit.*

Leginkább a Lagrange-féle multiplikátor módszerét alkalmazzuk inkább.

- *Bevezetünk egy $F(x,y,L) = f(x,y) + LK(x,y)$ segédfüggvényt, ahol L egy új változó, a multiplikátor.*
- *Ha az $f(x,y)$ függvénynek a $K(x,y) = 0$ feltétel mellett az (x_0, y_0) helyen van szélsőértéke, akkor van olyan L_0 valós szám, hogy az $F(x,y,L)$ háromváltozós függvény mindhárom parciális deriváltja az (x_0, y_0, L_0) helyen nullát vesz fel.*
- *Ezért a következő egyenletrendszert oldjuk meg:*

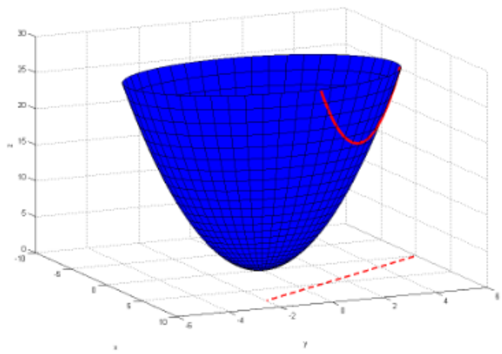
$$F'_x = f'(x) + LK'_x = 0$$
$$F'_y = f'(y) + LK'_y = 0$$
$$F'_L = K(x,y) = 0$$

- *Ebből megkapjuk L értékeit és a lehetséges szélsőértékhelyek x és y koordinátáit.*

4.3.4. Feltételes szélsőérték feladatok

4.3.14. Feladat. *Határozzuk meg az $f(x;y) = x^2 + y^2$ függvény feltételes szélsőértékeit az $x + y = 6$ feltétel mellett.*

4.3.15. Megoldás. *Fejezzük ki a feltételből az y változót:$y = 6 - x$ majd a kapott eredményt helyettesítsük vissza az f függvénybe:*



$$f(x) = x^2 + (6 - x)^2 = 2x^2 - 12x + 36$$

A kapott egyváltozós függvény szélsőértékét keressük.

Szükséges feltétel

Egyváltozós, mindenhol differenciálható függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja 0:

$f'(x) = 4x - 12 = 0$, *ebből* $x = 3$ *adódik.*

Elégségesség

Vizsgáljuk a második deriváltat az $x_0 = 3$ *helyen:*

$$f''(x) = 4 \; f''(3) = 4 > 0$$

így f*-nek az* $x = 3$ *helyen lokális minimuma van.*

A kapott egyváltozós függvény szélsőértékét keressük.
i) Szükséges feltétel

Visszahelyettesítve az eredeti problémába kapható, hogy a feltételes szélsőérték a $P(3, 3)$ *pontban van.*

4.3.16. Feladat. *Téglatest alakú dobozt szeretnénk készíteni. A térfogata legyen $875cm^3$. A doboz aljának, oldalának és fedőlapjának anyaga más-más minőségű, így költségük is különböző.*
Az alaplap $4Ft/cm^3$, az oldalél $8Ft/cm^3$, a fedőlap ára pedig $10Ft/cm^3$.
Mekkorák legyenek a téglatest alakú doboz élei, hogy a lehető legkisebb költségvetésből fizessem.

4.3.17. Megoldás. *Tegyük fel, hogy a téglatest egyik csúcsa az origón van, az alja pedig az x és y tengelyen.*
A feltétel szerint xyz=875, ezért optimalizáljuk az anyagárat:
$f(x, y, z) = 10xy + 4xy + 16xz + 16yz = 14xy + 16xz + 16yz.$
Legyen segéd függvény k.
Ekkor $f(x, y, z, k) = 14xy + 16xz + 16yz + k(xyz - 875).$
Keressük azokat a pontokat, ahol f minden változója szerinti parciális derivált 0 értéket vesz fel.

$$f'x = 14y + 16z + kyz = 0$$

$$f'y = 14x + 16z + kxz = 0$$

$$f'z = 16x + 16y + kxz = 0$$

$$f'k = z - 875 = 0$$

Kivonva egymásból az első két egyenletet kapjuk, hogy

$$(14 + kz)(y - x) = 0$$

Két esetet kell vizsgálnunk, amikor $kz = -14$ *vagy* $y = x$.

Ha $kz = -14$*, akkor ezt beírva az első egyenletbe* $14y + 16z - 14y = 0$ *adódik, így* $z = 0$*, ami nem lehetséges, hiszen nem kapnánk dobozt.*

Ha $y = x$*, akkor ezt a 3. egyenletbe írva kapjuk, hogy* $16x + 16x + kx^2 = 0$*.*
Mivel $x > 0$*, ezért* $kx = -32$*. Ezt beírjuk a második egyenletbe:*
$14x + 16z - 32z = 0$*, amiből* $z = \frac{14}{16}x = \frac{7}{8}x$*.*

Az utolsó egyenletbe $y = x$ *és* $z = \frac{7}{8}x$ *-et behelyettesítve már egyismeretlenes egyenletet kapunk:*

$$\frac{7}{8}x^3 - 875 = 0$$

Tehát a megoldás:

$$x = 10 \;\; y = 10 \;\; z = 8,75$$

Irodalomjegyzék

[1] *Lackovich Miklós-T. Sós Vera: Analízis I.Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2006.*

[2] *George B.Thomas, Maurice D. Weir, Joel Hass. Frank R. Giorando: Thomas- féle kalkulus I.Typotex, 2006.*

[3] *Sikolya Eszter: Analízis előadásjegyzet, ELTE, 2010/2011. II. félév*

[4] *Denkinger Géza, Gyurkó Lajos: Analízis gyakorlatok. Tankönyvkiadó, 1991.*

[5] *Fekete Zoltán, Zalay Miklós: Többváltozós függvények analízise.Műszaki Kiadó, 2007.*

[6] *Emelt szintű matematika érettségi feladatok, 2011. május*

[7] *Király Balázs: Analízis,gyakorlattámogató jegyzet, PTE, 2011.*

[8] *Obádovics J. Gyula-Szarka Zoltán: Felsőbb matematika. Scolar Kiadó, 2009*

[9] *Hódi Endre: Szélsőérték-feladatok elemi megoldása, Typotex kiadó, Budapest, 1994.*