

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Gergely Alexandra Daniella

A POLINOMOK GYÖKHELYEIRŐL

SZAKDOLGOZAT



Témavezető:
Ágoston István

Budapest, 2014.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	4
2. Polinomok	5
2.1. Alapvető definíciók és tulajdonságok	5
2.2. Gyökök keresése	7
2.3. Történet	9
3. Speciális magasabbfokú egyenletek	10
3.1. Racionális gyökteszt	10
3.2. x^n polinomjai	11
3.3. Reciprok egyenletek	12
4. Általános gyökhelytétel	16
4.1. Első becslések	16
4.2. Becslések a gyökök abszolút értékére	18
4.3. A polinom és deriváltjának gyökei a komplex számsíkon	22
4.4. Az előjelváltások és a gyökök közötti összefüggések	26
5. Irodalomjegyzék	30

1. Bevezetés

Életünk során rengeteg helyen találkozunk egyenletekkel, a legegyszerűbbektől az egészen bonyolultakig. Általános iskola 6. osztályától kezdve a diákok már nem csak számokkal, hanem algebrai kifejezésekkel is végeznek műveleteket (összevonás, kiemelés, stb.), és elsőfokú egyenletek különböző fajtáit oldják meg (leginkább mérlegelvvel). Szintén 6. osztályban előkerülnek az egyszerűbb kétismeretlenes egyenletek, majd a gimnázium 10. osztályában a másodfokú, illetve a másodfokúra visszavezethető magasabbfokú egyenletekig jutunk el. Bár a tantervek alapján az egyenletek tanulási folyamata itt véget ér, a matematika iránt érdeklődő motivált diákokkal szakkörön foglalkozhatunk a magasabb fokú egyenletek megoldhatóságával.

A szakdolgozatom célja többek között az is, hogy az általam összegyűjtött tételek alapján bárki tudjon nyilatkozni egy polinom gyökeinek elhelyezkedéséről, még akkor is, ha a konkrét gyököket nem ismeri. Sokszor ugyanis nem az a fontos, hogy mik a pontos gyökök, hiszen már az is nagy segítség lehet, ha nagyjából el tudjuk őket helyezni a komplex számsíkon.

Bevezetesként összefoglalom a polinomokkal kapcsolatos legfontosabb definíciókat és tételeket. A második részben speciálisabb polinomokkal és azok megoldási módszereivel foglalkozom, míg az utolsó fejezetben olyan tételeket és hozzájuk tartozó bizonyításokat gyűjtöttem össze, amelyek segítségével könnyen megbecsülhetjük a polinomok gyökeit.

2. Polinomok

2.1. Alapvető definíciók és tulajdonságok

A továbbiakban a polinomokkal kapcsolatos alapdefiníciókat sorolom föl, vázlatosan, hiszen ezek a szokásos egyetemi tananyagok részét képezik. Főként azok a definíciók, tételek szerepelnek a szakdolgozatomban, melyekre a későbbi bizonyítások során szükség lesz. Az egyszerűség kedvéért általában valós, komplex, racionális vagy egész együtthatójú polinomokkal fogok dolgozni, mert a középiskolában elsősorban ezek kerülnek elő. Ahol szükséges, külön megemlítem, hogy milyen együtthatójú polinomokról beszélek, de általában R alatt egy egységelemes, kommutatív gyűrűt fogok érteni.

2.1. Definíció. *Komplex együtthatós polinomnak nevezzük az $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ formális kifejezéseket ($n \geq 0$ egész szám), ahol $a_n \in \mathbb{C}$. Hasonlóan beszélhetünk valós, racionális, egész, stb. együtthatós polinomokról is. Az a_jx^j a polinom egy tagja, melyben a_j a j -edfokú tag együtthatója. Az a_0 -t nevezzük a polinom konstans tagjának. Az egyhatározatlanú komplex együtthatós polinomok halmazát $\mathbb{C}[x]$ jelöli.*

Legyen $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$ polinom, ahol $a_k \neq 0$. Ekkor a polinom foka k , jelölése $gr f = k$. Az a_kx^k a polinom főtagja, a_k pedig a főegyütthatója.

Az alábbi két tétel fontos dolgot mond ki a polinomok műveletei és a fokszámok kapcsolata között:

2.2. Állítás. *Két polinom összegének a foka legfeljebb akkora, mint a két polinom fokai közül a nem kisebb:*

$$gr(f + g) \leq \max(gr(f), gr(g))$$

Biztosan egyenlőség áll fenn, ha a két polinom foka különböző.

2.3. Állítás. *Két nemnulla polinom szorzatának foka a két polinom fokának összege:*

$$gr(fg) = gr(f) + gr(g)$$

Elengedhetetlen definiálni, hogy mit értünk egy polinom gyökei alatt:

2.4. Definíció. $\alpha \in \mathbb{C}$, $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, $f \in \mathbb{C}[x]$.

Az $f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n \in \mathbb{C}$ összefüggéssel értelmezett $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényt az f -hez tartozó polinomfüggvénynek nevezzük.

2.5. Definíció. Ha $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in R[x]$, és $\alpha \in R$, akkor az α behelyettesítése az $f(x)$ polinomba legyen:

$$f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n \in R$$

2.6. Definíció. Az $\alpha \in R$ gyöke az $f \in R[x]$ polinomnak, ha $f(\alpha) = 0$.

Fontos tulajdonsága a polinomoknak az alábbi:

2.7. Állítás. $\alpha \in R$ akkor és csak akkor gyöke $f \in R[x]$ -nek, ha $f(x) = (x - \alpha)g(x)$ valamely $g(x) \in R[x]$ polinomra. Az $(x - \alpha)$ tényezőt az α -hoz tartozó gyöktényezőnek nevezzük.

A szokásos ($R = \mathbb{C}, \mathbb{R}$) együtthatók esetében az előző állításnál több is igaz:

2.8. Állítás. Bármely $f \in R[x]$ (\mathbb{R}, \mathbb{C}) esetén létezik $f(x) = (x - \alpha_1)\dots(x - \alpha_k)g(x)$, ahol $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in R$ az f polinom összes R -beli gyöke, és $g(x)$ -nek R -ben nincs gyöke.

Speciálisan $\mathbb{C}[x]$ -beli polinomokra:

2.9. Állítás. Bármely $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom $f(x) = c(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$ alakba írható, ahol $c \in \mathbb{C}$. Ezt nevezzük a polinom gyöktényezős alakjának.

A gyöktényezős alakban egy tényező többször is szerepelhet:

$f(x) = x(x - d_1)^{k_1}(x - d_2)^{k_2} \dots (x - d_m)^{k_m}$, ahol d_1, \dots, d_m gyökök már páronként különbözőek. Ezt az összevont alakot kanonikus alaknak nevezzük, a k_j számot pedig a d_j gyök multiplicitásának hívjuk.

2.2. Gyökök keresése

Bármely $f(x) = a_1x + a_0 \in R[x]$ elsőfokú polinom egyetlen gyöke az $\alpha = -a_0/a_1$ szám. Megjegyzendő, hogy $\alpha \in R$ nem minden esetben teljesül, hiszen például a $2x + 1 = 0$ egyenletnek az egész számok halmazán nincs megoldása. Az $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ másodfokú polinom általánosan ismert formája az alábbi: $ax^2 + bx + c = 0$, melynek összes megoldását az

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

képletből megkapjuk.

Az

$$ay^3 + by^2 + cy + d = 0$$

harmadfokú egyenletet (ahol $a \neq 0$) az $x = y - w$ helyettesítéssel egyszerűbb alakra tudjuk hozni, és $w = \frac{-b}{3a}$ választással az x^2 -es tagot kiküszöböljük az egyenletből. Ekkor az x -es tag még mindig nem tűnik el, így köbgyökvonással még nem kapjuk meg egyből a megoldásokat. Ekkor már csak az

$$x^3 + px + q = 0$$

alakú egyenletet kell megoldanunk. Az $(u + v)^3$ átrendezésével a következőt kapjuk:

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v),$$

azaz

$$(u + v)^3 - 3uv(u + v) - (u^3 + v^3) = 0.$$

Ez az azonosság hasonlít a fent kapott $x^3 + px + q = 0$ egyenlethez. Ekkor $u^3 + v^3 = -q$ és $u^3v^3 = (-p/3)^3$, ezért az u^3 és v^3 a $z^2 + qz - (p/3)^3 = 0$ másodfokú megoldásai. Ezt a másodfokú egyenletet megoldva kapjuk a Cardano-képletet:

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(-\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(-\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Az $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ egyenlet megoldásához f -et két másodfokú polinom szorzatára szeretnénk felbontani. Ezt a két tényezőt a $g(x) - h(x)$ és $g(x) + h(x)$ alakban keressük. Legyen

$$g(x) = x^2 + \frac{a}{2}x + u$$

(Megjegyzés: Az x -es tag együtthatóját azért választjuk $a/2$ -nek, hogy $g(x)$ négyzetre emelésekor az x^3 -es tag együtthatója ugyanaz legyen, mint $f(x)$ -ben.) Ekkor

$$f(x) = g(x)^2 - \left(\left(2u + \frac{a^2}{4} - b \right) x^2 + (au - c)x + (u^2 - d) \right).$$

A zárójelben levő polinom akkor lesz egy $h(x)$ polinom négyzete, ha a diszkriminánsa nulla, azaz ha

$$k(u) = (au - c)^2 - (8u + a^2 - 4b)(u^2 - d) = 0$$

Ezt az u -ban harmadfokú polinomot nevezzük az $f(x)$ polinom rezolvensének. Ezt megoldva az f polinomot fel tudjuk bontani két másodfokú polinom szorzatára, melyek már könnyen megoldhatók.

2.3. Történet

Másodfokú egyenleteket már i.e. 2000 körül is oldottak meg Mezopotámiában, de a megoldóképlet felírása még sokáig váratott magára. A maihoz hasonló formáját Michael Stifel dolgozta ki a 15. században, de még ő is bonyolultabb jelölésekkel dolgozott. A 16. században adott megoldóképletet a harmadfokú egyenletekre Girolamo Cardano (1501 – 1576). Az ő neve után szokás ezt a megoldóképletet Cardano-képletnek nevezni. A negyedfokú egyenlet megoldóképlete már annyira bonyolult, hogy azt nem is szokás fölírni. Helyette a teljes négyzetté alakítás módszerét alkalmazzák ezekre az egyenletekre, mely Cardano tanítványától, Ludovico Ferraritól (1522 – 1565) származik. Az ötöd- és annál magasabb fokú egyenletek megoldóképletét sokan próbálták meg felírni, sikertelenül. 1799-ben Paolo Ruffini adott egy bizonyítást arra, hogy negyedfokúnál magasabb egyenletekre nincs megoldóképlet, de ez a bizonyítás hiányos volt. Végül 1824-ben Niels Henrik Abelnek sikerült bebizonyítania az alábbi, kettejükről elnevezett tételt:

2.10. Tétel (Abel-Ruffini-tétel). *Az általános n -edfokú egyenletre $n \geq 5$ esetén nem létezik gyökképlet.*

Végül Évariste Galois (1811 – 1832) kimondta, hogy egy polinom gyökei pontosan akkor gyökkifejezések, ha a polinom Galois-csoportja föloldható, és mivel ez a csoport $n \geq 5$ esetén nem feltétlenül föloldható, így négynél magasabb fokú egyenletekre nem létezhet általános gyökképlet. Ezzel lezárult a megoldóképletek keresésének folyamata.

3. Speciális magasabbfokú egyenletek

Ugyan az Abel-Ruffini-tétel kimondja, hogy a négynél magasabbfokú egyenletek általában nem oldhatók meg pusztán a négy alapművelet és a gyökvonás segítségével, ez mégsem jelenti azt, hogy semelyik négynél magasabbfokú egyenletet nem tudjuk megoldani ezekkel az eszközökkel. Gondoljunk például a triviális $x^n - a = 0$ típusú egyenletekre, melyek megoldásait az a szám n -edik gyökei adják. Ebben a fejezetben néhány speciális alakú egyenlet megoldási módszereit.

3.1. Racionális gyökteszt

Ezt a tételt jól hasznosíthatjuk akár középiskolában is, hiszen ott legtöbbször egész együtthatós polinomokkal foglalkozunk. Segítségével könnyen ki tudjuk számolni az egyenlet racionális megoldásait, mely jobb esetben akár az összes gyököt is jelentheti. A tétel ugyan egész együtthatós polinomokra vonatkozik, de egy racionális együtthatójú polinomot az együtthatóinak legkisebb közös többszörösével beszorozva visszavezethetjük a megoldást az egész együtthatós esetre.

3.1. Tétel (racionális gyökteszt). *Tegyük fel, hogy a p/q már nem egyszerűsíthető tört gyöke az f egész együtthatós polinomnak. Ekkor a számláló osztja f konstans tagját, a nevező pedig a főegyütthatóját.*

1. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi egyenlet összes megoldását: $x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 18x^2 + 22x - 12 = 0$, azaz határozzuk meg a $p(x) = x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 18x^2 + 22x - 12$ polinom gyökeit!*

Megoldás. A tétel alapján a racionális gyökök csak olyan törtek lehetnek, melyek számlálója -12 -nek osztója (azaz $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$), nevezője pedig 1 osztója (azaz ± 1). Tehát a lehetséges racionális gyökök: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$. Behelyettesítés után kapjuk, hogy a polinom racionális gyökei: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$. Ebből, a gyöktényezők lépésenkénti kiemelésével, a

polinomot az alábbi alakban írhatjuk fel: $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x^2 + 2) = 0$
 Látható, hogy az $(x^2 + 2)$ polinomnak már nincsenek valós gyökei \mathbb{C} -ben.
 Gyökei: $x_4 = i\sqrt{2}$ és $x_5 = -i\sqrt{2}$.

□

3.2. x^n polinomjai

A szakdolgozatom elején már megemlítettem a másodfokúra visszavezethető magasabb fokú egyenleteket. Ezt a módszert a következő speciális alakú polinomokra tudjuk alkalmazni:

$$f(x) = ax^{2n} + bx^n + c,$$

ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$. Ekkor $x^n = y$ helyettesítést alkalmazva a következő (már csak) másodfokú polinomot kapjuk:

$$f(y) = ay^2 + by + c.$$

Ebből az $ay^2 + by + c = 0$ másodfokú egyenletet megoldva kapjuk y_1, y_2 értékeket, melyeket visszahelyettesítve az $x^n = y$ egyenletbe x^n gyökeit is megkapjuk n -edik gyökvonással.

2. Feladat. *Oldjuk meg az $x^8 - 10x^4 + 21 = 0$ nyolcadfokú egyenletet!*

Megoldás. Látható, hogy itt az $x^4 = y$ helyettesítés alkalmazható. Ekkor kapjuk az

$$y^2 - 10y + 21 = 0$$

másodfokú egyenletet, melynek két gyöke $y_1 = 3$ és $y_2 = 7$. Az $y_{1,2}$ gyököket helyettesítsük vissza az $x^4 = y$ egyenletbe:

$x^4 = 3$ és $x^4 = 7$. Ebből negyedik gyökvonással megkapjuk a gyököket:
 $x_1 = \sqrt[4]{3}$, $x_2 = -\sqrt[4]{3}$, $x_3 = i\sqrt[4]{3}$, $x_4 = -i\sqrt[4]{3}$. □

3.3. Reciprok egyenletek

Az $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$ egyenletet akkor nevezzük reciprok egyenletnek, ha bármely $x = \alpha$ gyök esetén $x = \frac{1}{\alpha}$ is gyöke f -nek, és a gyökök multiplicitása is megegyezik. Ebből a definícióból következik, hogy ezeknek a típusú egyenleteknek a nulla sohasem gyöke.

Az $f(x)$ egyenlet akkor és csak akkor reciprok egyenlet, ha az együtthatói szimmetrikusak ($a_0 = a_n, a_1 = a_{n-1}, \dots$) vagy antiszimmetrikusak ($a_0 = -a_n, a_1 = -a_{n-1}, \dots$).

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ polinomnak az $\alpha \in R$ ($\alpha \neq 0$) k -szoros gyöke. Ekkor az $(x - \alpha)^k$ gyöktényező kiemelhető $f(x)$ -ből az alábbi módon:

$$f(x) = (x - \alpha)^k f_1(x),$$

ahol $f_1(\alpha) \neq 0$.

Vegyünk egy $g(x) \in R[x]$ polinomot, melyre az alábbi egyenlőség teljesül:

$$g(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ebből a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} g(x) &= x^n \left(a_0 \frac{1}{x^n} + a_1 \frac{1}{x^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{1}{x} + a_n \right) \\ &= a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = 0 \end{aligned}$$

Ekkor látható, hogy a $g(x)$ polinomnak az $x = \frac{1}{\alpha} \neq 0$ legalább k -szoros gyöke, hiszen:

$$\begin{aligned}
g(x) &= x^n \left(\frac{1}{x} - \alpha\right)^k f_1\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= x^k \left(\frac{1}{x} - \alpha\right)^k x^{n-k} f_1\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= (1 - \alpha x)^k x^{n-k} f_1\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \alpha^k x^{n-k} f_1\left(\frac{1}{x}\right) \left(\frac{1}{\alpha} - x\right)^k.
\end{aligned}$$

Mivel $f(x)$ gyökeinek többszörösségét összeadva ugyanúgy n -et kapunk, mint $g(x)$ esetében, így az $x = \frac{1}{\alpha}$ pontosan ugyanannyiszoros gyöke a $g(x)$ -nek, mint $x = \alpha$ az $f(x)$ -nek. Ezek szerint $f(x)$ akkor és csak akkor reciprok egyenlet, ha gyökeinek halmaza megegyezik a $g(x)$ egyenlet gyökeinek halmazával. Ekkor fennáll közöttük a következő egyenlőség: $f(x) = cg(x)$. ($c \neq 0$). Az együtthatókra nézve ez a következőt jelenti:

$a_0 = ca_n, a_1 = ca_{n-1}, \dots, a_n = ca_0$ Ebből az első és utolsó egyenletet összeszorozva azt kapjuk, hogy $a_0 a_n = c^2 a_n a_0$, ami $a_0 a_n \neq 0$ miatt azt jelenti, hogy $c^2 = 1$ tehát $c = \pm 1$. Tehát valóban, egy polinom akkor és csak akkor reciprok egyenlet, ha $f(x) = g(x)$ vagy $f(x) = -g(x)$, ami pontosan azt jelenti, hogy az együtthatói szimmetrikusak vagy antiszimmetrikusak.

□

Az

$$a_0 x^{2m} + a_1 x^{2m-1} + \dots + a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

egy páros fokú szimmetrikus reciprok egyenlet. Ezt a $2m$ fokszámú páros reciprok egyenletet könnyen leredukálhatjuk az alábbi módszerrel egy m -edfokú egyenletté: Osszuk el az egyenletet x^m -mel, így kapjuk a következő egyenletet:

$$a_0 \left(x^m + \frac{1}{x^m}\right) + a_1 \left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}\right) + \dots + a_{m-1} \left(x + \frac{1}{x}\right) + a_m = 0.$$

Vezessük be az $y = x + \frac{1}{x}$ új ismeretlent. Mivel itt x -nek mindenféle hatványa előfordul, szükségünk lesz az alábbiakra:

$$\begin{aligned}x^2 + \frac{1}{x^2} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = y^2 - 2 \\x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = y^3 - 3y \\x^4 + \frac{1}{x^4} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^4 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 6 = y^4 - 4y^2 + 2\end{aligned}$$

Rekurzióval minden további $x^n + \frac{1}{x^n}$ polinom felírható $y = x + \frac{1}{x}$ n -edfokú polinomjaként.

$$\begin{aligned}x^n + \frac{1}{x^n} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^n - \binom{n}{1} \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) - \\&\quad - \binom{n}{2} \left(x^{n-4} + \frac{1}{x^{n-4}}\right) - \dots - \binom{n}{k} \left(x^{n-k-2} + \frac{1}{x^{n-k-2}}\right)\end{aligned}$$

Ilyen módon már csak a következő m -edfokú egyenletet kell megoldanunk:

$$a_0 y^m + a_1 y^{m-1} + \dots + a_m = 0.$$

Az így kapott y_1, \dots, y_m gyököket visszahelyettesítve az $y = x + \frac{1}{x}$ egyenletbe kapunk m darab

$$x + \frac{1}{x} = y_k$$

egyenletet, azaz

$$x^2 - y_k x + 1 = 0$$

másodfokú egyenletet, melynek már könnyedén meghatározzuk a gyökeit.

Már csak azt kell megmutatnunk, hogy páratlan fokszámú szimmetrikus és antiszimmetrikus, valamint páros fokszámú antiszimmetrikus reciprok egyenlet visszavezethető a páros fokszámú szimmetrikus esetre: Az

$$f(x) = a_0 x^{2m+1} + a_1 x^{2m} + \dots + a_m x^{m+1} \pm (a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0)$$

páratlan fokú reciprok egyenletnek szimmetrikus esetben $x = -1$, antiszimmetrikus esetben $x = 1$ mindig gyöke, és így az $x \pm 1$ gyöktényezők egyikével leosztva a polinomot, eggyel alacsonyabb fokú (páros fokú szimmetrikus vagy antiszimmetrikus) egyenletet kapunk. Az

$$f(x) = a_0x^{2m} + a_1x^{2m-1} + \dots + a_{m-1}x^{m+1} - (a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x + a_0) = 0$$

páros fokú antiszimmetrikus egyenletnek az $x = -1$ is és $x = 1$ is mindig gyöke, így az $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$ tagokat kiemelve végül páros fokú szimmetrikus egyenlethez jutunk. Tehát valóban, bármely reciprok egyenlet az $x - 1$, illetve az $x + 1$ gyöktényező ismételt kiemelésével visszavezettük a páros fokú szimmetrikus reciprok egyenletre, amit már a fentebb bemutatott módszerrel meg tudunk oldani. Mivel negyedfokú egyenleteket elvben még meg tudunk oldani megoldóképlet segítségével, így ezzel a módszerrel bármely legfeljebb 9-edfokú reciprok egyenlet megoldható a négy alapművelettel és gyökvonással.

3. Feladat. *Oldjuk meg az $x^9 + 2x^8 + 3x^7 + 4x^6 + 5x^5 - 5x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 2x - 1 = 0$ egyenletet!*

Megoldás. Látható, hogy ez az egyenlet egy páratlan fokszámú antiszimmetrikus reciprok egyenlet, így ennek $x = +1$ biztosan gyöke. Az $(x - 1)$ gyöktényezővel leosztva a következő 8-adfokú egyenletet kapjuk:

$$x^8 + 3x^7 + 6x^6 + 10x^5 + 15x^4 + 10x^3 + 6x^2 + 3x + 1 = 0$$

Ez az egyenlet már páros fokszámú szimmetrikus reciprok egyenlet, így x^4 -nel leosztva, majd a megfelelő y polinom helyettesítés után kapjuk ezt a negyedfokú egyenletet:

$$\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) + 3\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 10\left(x + \frac{1}{x}\right) + 15 = y^4 + 3y^3 + 2y^2 + y + 5$$

Így visszavezettük a 9-edfokú egyenletet egy negyedfokú egyenletre, amit már elméletileg meg tudunk oldani az ismert módszerekkel.

□

4. Általános gyökhelytételek

Néha ránézésre is tudunk nyilatkozni egy polinom gyökeinek elhelyezkedéséről: Egy olyan polinomnak, melynek minden együtthatója pozitív, valós gyökei biztosan negatívak, és ha ráadásul ennek a polinomnak minden kitevője páros, akkor azt is biztosan állíthatjuk, hogy a gyökei nem valós számok. Azoknak a polinomoknak, melyeknek konstans tagja nulla, biztosan gyöke a nulla, és fordítva, ha egy polinom konstans tagja nemnulla, akkor a nulla biztosan nem megoldása az egyenletnek. Ez persze csak néhány apróbb észrevétel, melyekkel még mindig nem tudunk meg sok mindent a gyökök elhelyezkedéséről. Ebben a fejezetben összegyűjtöttem néhány számomra érdekesebb tételt, melyek segítségével bővebb információkat tudunk meg a polinom gyökeinek elhelyezkedéséről.

4.1. Első becslések

Az alábbiakban kimondok egy olyan tételt (bizonyítás nélkül), melynek érdekes következményei lesznek:

4.1. Tétel (Rouché tétele). *Legyenek $f(x)$ és $g(x)$ polinomok és vegyünk egy $\gamma > 0$ sugarú kört a komplex számsíkon. Ha a γ sugarú körön mindenütt teljesül, hogy*

$$|g(z)| < |f(z)|,$$

bármely $z \in \gamma$, akkor ezen a γ sugarú körön belül f -nek és $f + g$ -nek ugyanannyi gyöke van.

A bizonyítást itt nem részletezzük, mert bár az állítás egyszerű, és bizonyítása sem lenne bonyolult, olyan topológiai/ komplex függvénytanai eszközöket kellene használnom, melyet az egyetemi tananyag nem tartalmazott. Rouché tételét általában nem polinomokra, hanem f és g analitikus függvényekre mondják ki, nekünk azonban nem lesz szükségünk az általános ál-

lításra. A tétel erejét mutatja, hogy alkalmazásával az algebra alaptételét könnyen bebizonyíthatjuk.

4.2. Tétel (Az algebra alaptétele). *Legyen $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ komplex együtthatójú n -edfokú polinom. Ekkor f -nek pontosan n darab gyöke van.*

Bizonyítás. Legyen $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$ komplex együtthatós polinom, ahol $a_n \neq 0$ és legyen R olyan pozitív szám, hogy az R sugarú körön teljesüljön a következő egyenlőtlenség:

$$|a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}| \leq \sum_{j=0}^{n-1} |a_j| R^j < |a_n| R^n = |a_n x^n|$$

minden x -re, melyre $|x| = R$.

Mivel $a_n x^n$ -nek n darab gyöke van az $|x| < R$ körön belül, ebből következik, hogy az $f(x)$ polinomnak is ugyanennyi gyöke van a kör belsejében. \square

Rouché tételével nemcsak az algebra alaptételét tudjuk bebizonyítani, hanem egy becslést is tudunk adni a polinom gyökeire.

4.3. Tétel. *Legyen $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$, ahol $a_i \in \mathbb{C}$. Ekkor f -nek minden gyöke a $|z| = 1 + \max_i |a_i|$ egyenletű körön belül van.*

Bizonyítás. Legyen $a = \max_i |a_i|$. A $|z| = 1 + a$ körön belül a $g(z) = z^n$ polinomnak a 0 n -szere gyöke. Emiatt elegendő csak azt igazolnunk, hogy ha $|z| = 1 + a$, akkor $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$, azaz

$$|a_1 z^{n-1} + \dots + a_n| < |z|^n$$

Ha $|z| = 1 + a$, akkor

$$|a_1 z^{n-1} + \dots + a_n| \leq a(|z|^{n-1} + \dots + 1) = a \frac{|z|^n - 1}{|z| - 1} = |z|^n - 1 < |z|^n$$

\square

4. Feladat. *Becsüljük meg az $f(x) = 42x^{10} + 19x^9 - 1991x^5 + 2014x^3 - 1996$ polinom gyökeinek helyét!*

Megoldás. Alkalmazzuk erre a polinomra a fenti tételt. Az $f(x)$ polinom normált alakja:

$$f_1(x) = x^{10} + \frac{19}{42}x^9 - \frac{1991}{42}x^5 + \frac{2014}{42}x^3 - \frac{1996}{42}$$

Az $f(x)$ gyökeinek halmaza megegyezik az $f_1(x)$ polinom gyökeinek halmazával. Az előző tétel alapján a gyökök abszolútértékére a következő becslést mondhatjuk:

$$|z| \leq \frac{2014}{42} + 1 \leq 49.$$

□

Jobban belegondolva a fenti becslésekbe nem meglepő, hogy az $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ polinom együtthatóinak függvényében becslés mondható a polinom gyökeinek abszolút értékére. Az ugyanis jól jól látható, hogy a polinom főtagjának abszolút értéke gyorsabban tart a végtelenhez, mint a maradék tagok. Ez azt jelenti, hogy egy a_k együtthatótól függő konstansnál nagyobb abszolút értékű komplex szám már nem lehet gyök, mivel

$$|a_n x^n| - |a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0| \rightarrow \infty,$$

ha $x \rightarrow \infty$.

Az általános becsléseken túl számos hasznos tételt lehet találni, melyek segítségével el tudjuk helyezni egy polinom gyökeit a komplex számsíkon. Ezek közül gyűjtöttem ki a számomra érdekesebbnek tűnő tételeket, szem előtt tartva azt is, hogy mik azok a tételek és alkalmazásaik, melyekkel akár egy középiskolai szakkör keretében is fogalkozhatnak a diákok.

4.2. Becslések a gyökök abszolút értékére

Speciális alakú polinomokra gyakran mondhatunk konkrét általános eredményt, mint például az alábbi tételben a pozitív gyökök számáról:

4.4. Tétel (Cauchy tétele). Legyen $f(x) = x^n - b_1x^{n-1} - \dots - b_n$ polinom, ahol minden b_i együttható nemnegatív és közülük legalább az egyik nemnulla. Ekkor az f polinomnak van egyetlen p pozitív gyöke, ami egyszeres, és a többi gyök abszolút értéke nem haladja meg p értékét.

Bizonyítás. Az x megfelelő hatványának kiemelésével nyilván feltehető, hogy $b_n \neq 0$, azaz $x = 0$ nem gyöke a polinomnak. A bizonyításhoz vegyük az

$$F(x) = -\frac{f(x)}{x^n} = \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_n}{x^n} - 1$$

polinomot. Mivel $x = 0$ nem gyöke $f(x)$ -nek, az $f(x) = 0$ egyenletnek ugyanazok a gyökei, mint az $F(x) = 0$ egyenletnek. Legyen $x > 0$ és $x \rightarrow \infty$ esetén $F(x)$ értékei szigorúan monoton módon csökkennek $+\infty$ -tól -1 -ig. Ezért az F függvény az $x > 0$ félegyenesen egyetlen p ponton eltűnik. A derivált értéke ebben a pontban:

$$-\frac{f'(p)}{p^n} = F'(p) = -\frac{b_1}{p^2} - \dots - \frac{nb_n}{p^{n+1}} < 0,$$

ezért p egyszeres gyöke az $f(x)$ polinomnak.

Már csak azt kell belátnunk, hogy ha egy x_0 gyöke f -nek, akkor $|x_0| \leq p$. Legyen $q = |x_0| \leq p$. Tegyük fel, hogy $q > p$. Az f polinom monoton növekedéséből következik, hogy $q > p$ esetén $f(q) > f(p)$, azaz $f(q) > 0$. Másrészt viszont az $x_0^n = b_1x_0^{n-1} + \dots + b_n$ egyenlőségből azt kapjuk, hogy

$$|x_0^n| \leq b_1|x_0|^{n-1} + \dots + b_n,$$

azaz

$$q^n \leq b_1q^{n-1} + \dots + b_n.$$

Tehát $f(q) \leq 0$, ami ellentmondás.

□

Általában az nem mondható el, hogy a fenti polinom gyökeinek abszolút értéke határozottan kisebb, mint p , hiszen például az $f(x) = x^{2n} - x^n - 1$

alakú polinomnak pontosan n darab gyöke van, melyeknek abszolút értéke megegyezik a pozitív gyök, azaz p értékével. Például az $f(x) = x^4 - x^2 - 1$ polinom gyökei az alábbiak: $x_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})}$, $x_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})}$, $x_3 = i\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)}$, $x_4 = -i\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)}$. Ebben az esetben $p = x_1$, és $|x_3| = |x_4| = p$, azaz valóban n darab gyök abszolút értéke megegyezik p értékével. Cauchy tételéből kiindulva azonban Ostrowski bebizonyította, hogy bizonyos feltételek mellett fennállhat a határozott egyenlőtlenség p és a többi gyök abszolútértéke között.

4.5. Tétel (Ostrowski). *Legyen $f(x) = x^n - b_1x^{n-1} - \dots - b_n$, ahol minden b_i együttható nemnegatív, és legalább egy közülük nemnulla. Ha a b_i pozitív együtthatók indexének legnagyobb közös osztója 1, akkor az f polinomnak létezik egyetlen p pozitív gyöke, és a többi gyök abszolút értéke kisebb, mint p .*

Bizonyítás. Legyenek $b_{k_1}, b_{k_2}, \dots, b_{k_m}$ a pozitív együtthatói az f polinomnak, ahol $k_1 < k_2 < \dots < k_m$. Mivel tudjuk, hogy a k_1, \dots, k_m indexek legnagyobb közös osztója 1, így léteznek hozzájuk olyan egész s_1, \dots, s_m számok, melyekre $s_1k_1 + \dots + s_mk_m = 1$. Alkalmazzuk megint az előbbi bizonyításban szereplő $F(x)$ függvényt:

$$F(x) = \frac{b_{k_1}}{x_1^{k_1}} + \dots + \frac{b_{k_m}}{x_m^{k_m}} - 1.$$

A Cauchy-tétel alapján tudjuk, hogy az $F(x) = 0$ egyenletnek van egyetlen p pozitív gyöke. Legyen x egy másik (nemnulla) megoldása az f polinomnak. Ha $q = |x|$, akkor

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{b_{k_1}}{x^{k_1}} + \dots + \frac{b_{k_m}}{x^{k_m}} \\ &\leq \left| \frac{b_{k_1}}{x^{k_1}} \right| + \dots + \left| \frac{b_{k_m}}{x^{k_m}} \right| \\ &= \frac{b_{k_1}}{q^{k_1}} + \dots + \frac{b_{k_m}}{q^{k_m}}, \end{aligned}$$

azaz $F(q) \geq 0$. Az $F(q) = 0$ egyenlőség azonban csak abban az esetben áll fenn, ha

$$\frac{b_{k_s}}{x^{k_s}} = \left| \frac{b_{k_s}}{x^{k_s}} \right| > 0 \text{ minden } i\text{-re. De ebben az esetben}$$

$$\frac{b_{k_1}^{s_1} \dots b_{k_m}^{s_m}}{x} = \left(\frac{b_{k_1}}{x^{k_1}} \right)^{s_1} \dots \left(\frac{b_{k_m}}{x^{k_m}} \right)^{s_m} > 0,$$

azaz $x > 0$. Ez ellentmond annak, p az egyetlen pozitív gyöke az $F(x) = 0$ egyenletnek. Így $F(q) > 0$, amiből következik, hogy $q < p$, mivel $F(x)$ monoton pozitív x -ekre nézve. \square

Az előző két tétel alapján pozitív együtthatós polinomok gyökeinek abszolút értékére is mondhatunk egy becslést:

4.6. Tétel (Eneström-Kekeya tétele).

(a) Ha a $g(x) = a_0x^{n-1} + \dots + a_{n-1}$ polinomnak minden együtthatója pozitív, akkor a polinom minden ξ gyökére

$$\min_{1 \leq i \leq n-1} \frac{a_i}{a_{i-1}} = \delta \leq |\xi| \leq \gamma = \max_{1 \leq i \leq n-1} \frac{a_i}{a_{i-1}}.$$

(b) (Ostrowski) Legyen $\frac{a_k}{a_{k-1}} < \gamma$ bármely $k = k_1, \dots, k_m$ -re. Ha n, k_1, \dots, k_m legnagyobb közös osztója 1, akkor $|\xi| < \gamma$.

Bizonyítás. Vegyük a következő polinomot:

$$(x - \gamma)g(x) = a_0x^n - (\gamma a_0 - a_1)x^{n-1} - \dots - (\gamma a_{n-2} - a_{n-1})x - \gamma a_{n-1}.$$

A feltétel alapján $\gamma \geq \frac{a_i}{a_{i-1}}$, azaz $\gamma a_{i-1} - a_i \geq 0$. Cauchy tétele alapján γ az egyetlen pozitív gyöke az $(x - \gamma)g(x)$ polinomnak és a többi gyök abszolútértéke $\leq \gamma$. Ez azt jelenti, hogy a $g(x)$ polinom gyökeinek abszolút értéke

legfeljebb γ . Ha ξ gyöke g -nek, akkor az $\eta = \frac{1}{|\xi|}$ gyöke az $a_{n-1}y^{n-1} + \dots + a_0$ polinomnak. Ezért a most bizonyítottak szerint:

$$\frac{1}{|\xi|} = |\eta| = \max_{1 \leq i \leq n-1} \frac{a_{i-1}}{a_i} = \frac{1}{\min_{1 \leq i \leq n-1} \frac{a_i}{a_{i-1}}},$$

azaz

$$|\xi| \geq \delta = \min_{1 \leq i \leq n-1} \frac{a_i}{a_{i-1}}.$$

A (b) feltételnek megfelelő γ -ra az $(x-\gamma)g(x)$ polinom gyökeinek abszolút értéke határozottan kisebb lesz, mint γ .

□

4.3. A polinom és deriváltjának gyökei a komplex számsíkon

Ebben a részben három olyan tételt ismertetek, mely a polinom és a derivált polinom gyökeinek elhelyezkedése közötti összefüggésekre mutat rá. Különösen szép az első állítás egyszerűen kiszámítható eredménye.

4.7. Tétel (Gauss-Lucas tétel). *Ha $P(z)$ egy komplex együtthatós polinom, akkor $P'(z)$ minden gyöke a $P(z)$ gyökeinek komplex burkában van.*

Bizonyítás. Írjuk fel $P(z)$ gyöktényezős alakját: $P(z) = (z - z_1)\dots(z - z_n)$. Ekkor a szokásos deriválási összefüggések alapján:

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z - z_1} + \dots + \frac{1}{z - z_n}.$$

Legyen w $P'(z)$ egy gyöke, ekkor $P(w) \neq 0$ és tegyük fel, hogy w nincs benne a z_1, \dots, z_n gyökök konvex burkában. Ezek szerint tudunk úgy állítani w -n keresztül egy egyenest, hogy az nem halad át z_1, \dots, z_n konvex burkán. Így az

$$\frac{1}{w - z_1}, \dots, \frac{1}{w - z_n}$$

vektorok szintén az egyik félsíkon vannak, hiszen

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Ehhez viszont az összegük nem lehet nulla, azaz:

$$\frac{P'(w)}{P(w)} = \frac{1}{w - z_1} + \dots + \frac{1}{w - z_n} \neq 0.$$

Ez ellentmondás, így w valóban benne van P konvex burkában. \square

A következő tétel, melyet bizonyítás nélkül mondok ki, egy még pontosabb geometriai összefüggésre mutat rá egy harmadfokú polinom és deriváltjának gyökei között.

4.8. Tétel (van der Berg-tétele). *Legyenek egy P harmadfokú polinom gyökei egy ABC háromszög csúcsai a komplex síkon. Ekkor P' gyökei annak az ellipszisnek a fókuszpontjaiban helyezkednek el, mely oldalainak felezőpontjaiban érinti a háromszög oldalait.*

Az alábbi tétel a derivált polinom nemvalós gyökeinek elhelyezkedéséről ad információt:

4.9. Definíció (Jensen-kör). *Legyen $f \in \mathbb{R}[x]$ valós együtthatós polinom. Tudjuk, hogy minden $z \in \mathbb{C}$ -re, ha z gyöke f -nek, akkor \bar{z} is gyöke f -nek. Vegyünk egy ilyen gyökpárt, és tekintsük azt a körlapot, amelynek átmérője a z és \bar{z} végpontú szakasz. Egy ilyen körlapot az f -hez tartozó Jensen-körnek nevezzük.*

4.10. Tétel (Jensen tétele). *Minden nemvalós gyöke az f' polinomnak az f valamelyik Jensen-körén belül, vagy annak határán helyezkedik el.*

Bizonyítás. Legyenek z_1, \dots, z_n az f polinom gyökei. Írjuk fel f gyöktényezőző alakját:

$$f(z) = c(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n)$$

Ekkor az $f(z)$ z szerinti deriváltja:

$$f'(z) = c(z-z_2)\dots(z-z_n) + c(z-z_1)(z-z_3)\dots(z-z_n) + \dots + c(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_{n-1})$$

Ebből azt kapjuk, hogy:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2} + \dots + \frac{1}{z-z_n} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{z-z_j}.$$

Legyen $\alpha = a + bi$ és $\bar{\alpha} = a - bi$ f -nek egy konjugált gyökpárja, és vegyük a hozzájuk tartozó Jensen-kört. Abban az esetben, ha z nincs benne f -nek ebben a Jensen-körében, akkor megmutatjuk, hogy:

$$\operatorname{sgn} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{z-\alpha} + \frac{1}{z-\beta} \right) = -\operatorname{sgn} \operatorname{Im} z.$$

Vizsgáljuk meg $\left(\frac{1}{z-\alpha} + \frac{1}{z-\bar{\alpha}} \right)$ előjelét:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-a-bi} + \frac{1}{z-a+bi} &= \frac{(z-a+bi) + (z-a-bi)}{(z-a-bi)(z-a+bi)} = \\ &= \frac{2z - (\alpha + \bar{\alpha})}{z^2 - (\alpha + \bar{\alpha})z + \alpha\bar{\alpha}} = \frac{2(z-a)}{z^2 - (2a)z + (a^2 + b^2)} \end{aligned}$$

Ezt a törtet beszorozva a nevező konjugáltjával, alul egy pozitív számot kapunk, így annak előjelét már nem kell vizsgálni:

$$\frac{2(z-a)((\bar{z}-a)^2 + b^2)}{|(z-a)^2 + b^2|^2}$$

A számlálót tovább alakítva:

$$(z-a)((\bar{z}-a)^2 + b^2) = 2(\bar{z}-a)|z-a|^2 + 2(z-a)b^2$$

A valós részeket elhagyva kapjuk:

$$\operatorname{Im} ((\bar{z} - a)|z - a|^2 + (z - a)b^2) = \operatorname{Im} (\bar{z}|z - a|^2 + zb^2) = (\operatorname{Im} z)(b^2 - |z - a|^2)$$

Az $\alpha = a + bi$ és $\bar{\alpha} = a - bi$ olyan körlapot határoznak meg, melynek középpontja az $(a, 0)$ pont, sugarának pedig b . Ha z nincs rajta ezen a körlapon, akkor z -nek a kör középpontjától vett távolságának nagyobbak kell lennie, mint b^2 :

$$|z - a|^2 > b^2,$$

azaz

$$b^2 - |z - a|^2 < 0.$$

Tehát valóban

$$\operatorname{sgn} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{z - \alpha} + \frac{1}{z - \beta} \right) = -\operatorname{sgn} \operatorname{Im} z.$$

Megmutatjuk, hogy ha $z \notin \mathbb{R}$ és $z_j = a \in \mathbb{R}$, akkor

$$\operatorname{sgn} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{z - z_j} \right) = -\operatorname{sgn} \operatorname{Im} z$$

Azaz,

$$\frac{1}{z - a} - \frac{1}{\bar{z} - a} = \frac{\bar{z} - z}{|z - a|^2} = \frac{(-2\operatorname{Im} z)i}{|z - a|^2}.$$

Ezek alapján azt mondhatjuk, hogy ha $z \notin \mathbb{R}$ és f -nek egyik Jensen-köre sem tartalmazza z -t, akkor

$$\operatorname{sgn} \operatorname{Im} \frac{f'(z)}{f(z)} = -\operatorname{sgn} \operatorname{Im} z \neq 0.$$

Ebből azt kaptuk, hogy $f'(z) \neq 0$, tehát z nem gyöke f' -nek.

□

4.4. Az előjelváltások és a gyökök közötti összefüggések

Elsőként egy olyan tételt mondok ki bizonyítás nélkül, melynek nagyon szép következménye lesz:

4.11. Tétel (Fourier-Budan-tétel). *Legyen $f(x) \in R[x]$ n -ed fokú polinom és jelölje $N(x)$ a jelváltások számát az alábbi sorozatban:*

$$f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x).$$

Ekkor az (a, b) nyílt intervallumon, ahol $f(a) \neq 0$ és $f(b) \neq 0$ és $a < b$ az $f(x)$ polinom gyökeinek száma, multiplicitással számolva, nem haladhatja meg $N(a) - N(b)$ számát.

4.12. Következmény (Descartes-szabály). *Az $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ polinom pozitív gyökeinek száma nem haladhatja meg az a_0, a_1, \dots, a_n együtt-hatók jelváltásainak számát.*

Érdekes észrevétel, hogy a Cauchy-tételben szereplő $f(x) = x^n - b_1x^{n-1} - \dots - b_n$ polinom együtthatóinak sorozatában egy előjelváltás van, tehát a Descartes szabály alapján (is) egyetlen pozitív gyöke van az $f(x)$ polinomnak.

A alábbiakban egy polinom Sturm-sorozatáról és az abból megállapítható gyökök számáról lesz szó.

Legyen $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$. Tegyük fel, hogy az $f(x)$ polinomnak nincsenek többszörös gyökei, és számoljuk ki az (f, f') legnagyobb közös osztóját az euklideszi algoritmussal:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= q_0(x)f_1(x) - f_2(x) \\ f_1(x) &= q_1(x)f_2(x) - f_3(x) \\ f_2(x) &= q_2(x)f_3(x) - f_4(x) \\ f_{k-1}(x) &= q_{k-1}(x)f_k(x) - f_{k+1}(x) \\ f_{n-1}(x) &= q_{n-1}(x)f_n(x). \end{aligned}$$

Legyen $f_0(x) = f(x)$ és $f_1(x) = f'(x)$. A többi tagot az euklideszi algoritmus megfelelő tagjának átrendezéséből kapjuk:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= q_0(x)f_1(x) - f_0(x) \\ f_3(x) &= q_1(x)f_2(x) - f_1(x) \\ f_{n-1}(x) &= q_{n-1}(x)f_n(x) \end{aligned}$$

Az $f_n(x)$ az f és f' legnagyobb közös osztója, feltevésünk szerint most konstans.

4.13. Definíció. A fenti f_0, f_1, \dots, f_n sorozatot nevezzük a polinom Sturm-sorozatának, melyre a következő tulajdonságok teljesülnek az $[a, b]$ zárt intervallumon, ha f -nek nincsenek többszörös gyökei:

- (i) Bármely $x \in [a, b]$ -re $f_n(x) \neq 0$.
- (ii) Ha valamely $1 \leq j < n$ -re és $\alpha \in [a, b]$ -re $f_j(\alpha) = 0$, akkor sem $f_{j-1}(\alpha)$, sem $f_{j+1}(\alpha)$ nem lehet nulla, sőt $f_{j-1}(\alpha) = -f_{j+1}(\alpha)$
- (iii) Ha az $f(x)$ polinomnak az $\alpha \in [a, b]$ gyöke, akkor az α elég kis környezetében $f_0(x)$ és $f_1(x)$ előjele megegyezik

Ellenőrizzük le, hogy valóban teljesülnek-e ezek a feltételek egy f polinom Sturm-sorozatára:

Bizonyítás. Azt tudjuk, hogy $\deg(f_j) > \deg(f_{j+1})$ bármely $j < n$ -re, hiszen az euklideszi algoritmussal polinomok csökkenő fokszámú sorozatát kapjuk. Tegyük fel, hogy $f_n(x)$ nem konstans polinom. Először is tudjuk, hogy f_0 -nak és f_1 -nek nincsenek közös gyökei, hiszen ha α gyöke f_0 -nak, akkor az $(x - \alpha)$ gyöktényezőt kiemelve: $f_0(x) = (x - \alpha)q(x)$, ahol $q(x)$ -nek α már biztosan nem gyöke, hiszen az $f(x)$ polinomunkról feltettük, hogy nincs többszörös gyöke. f_1 -et az f_0 polinom deriváltjaként kapjuk, azaz $f_1(x) = q(x) + (x - \alpha)q'(x)$, melybe α -t behelyettesítve azt kapjuk, hogy $f_1 = q(\alpha)$ -val, amiről pedig tudjuk, hogy nem lehet nulla, hiszen $q(x)$ -ről

feltettük, hogy α nem gyöke. Indukcióval bizonyítsuk be a többi tagra is az összefüggést:

A tagokat az alábbiak szerint képezzük: $f_{k-1}(x) = f_k(x)q_{k-1}(x) - f_{k+1}(x)$. Legyen $\alpha \in [a, b]$ gyöke az f_k polinomnak. Tegyük fel, hogy α gyöke az f_{k+1} polinomnak is. Az α -t visszahelyettesítve a képletbe azt kapjuk, hogy a jobb oldal nullával egyenlő, azaz α az f_{k+1} -nek is gyöke. Ebből tehát azt kaptuk, hogy van egy olyan α szám az $[a, b]$ intervallumon, mely gyöke az f_{k-1}, f_k, f_{k+1} polinomnak is. Rekurzióval azt kapjuk, hogy ez az α szám az összes Sturm-sorozatbeli polinomnak gyöke. A bizonyítás elején beláttuk, hogy f_0 -nak és f_1 -nek nem lehet közös gyöke, tehát ellentmondásra jutottunk. Tehát $f_{k-1}(x)$ és $f_{k+1}(x)$ valóban nem lehet nulla. Az, hogy ez a két polinom ellentétes előjelű, a képletbe való behelyettesítés után azonnal adódik: $f_{k-1}(x) = f_k(x)q_{k-1}(x) - f_{k+1}(x)$. Ha $f_k(x) = 0$, akkor $f_{k-1}(x) = -f_{k+1}(x)$. Mivel az $f(x)$ polinomról feltettük, hogy csak egyszeres gyökei vannak az $[a, b]$ intervallumon, és tudjuk, hogy a polinomfüggvény folytonos, így a gyök elég kis környezetében az $f(x)$ vagy szigorúan monoton nő, vagy szigorúan monoton csökken, ezért $f(x)$ és $f'(x)$ előjele megegyezik. \square

4.14. Tétel (Sturm tétele). *Legyen $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ valós együtthatójú polinom. Képezzük ennek a polinomnak a Sturm-sorozatát. Jelölje $S(x)$ a Sturm-sorozat tagjainak x helyen felvett helyettesítési értékeinek sorozatában a jelváltások számát. Ekkor az $f(x) = 0$ egyenletnek az (a, b) nyílt intervallumon (ahol $f(a), f(b) \neq 0$) $S(b) - S(a)$ számú valós gyöke van.*

Bizonyítás. Ha az $f(x)$ polinomnak az $\alpha \in (a, b)$ helyen gyöke van, akkor az $(x - \alpha)$ gyöktényező kiemelése után kapjuk, hogy $f(x) = (x - \alpha)q(x)$, ahol $q(x)$ -nek α már biztosan nem gyöke, hiszen $f(x)$ -ről feltettük, hogy nincsenek többszörös gyökei. $f(x) = (x - \alpha)q(x)$ -ből látszik, hogy α -hoz közeli értékeket behelyettesítve az egyik oldalon negatív, míg a másik oldalon pozitív értéket kapunk. $S(x)$ értéke akkor változik, ha valamelyik $f_k(x)$ polinom előjele megváltozik. Ez viszont csak akkor következik be, ha a sorozat valamelyik

tagjának gyöke van az adott pontban. Ezután azt kellene belátnunk, hogy az előjelváltások számának különbsége 1-gyel nő, ha $f_0(x)$ -nek van gyöke az adott intervallumon, és nem változik, ha valamelyik közbülső $f_k(x)$ -nek van gyöke. Tegyük fel, hogy valamely $f_k(x)$ polinomnak ($1 < k < n$) gyöke van az $\alpha \in (a, b)$ helyen. Ekkor a lemmából tudjuk, hogy $f_{k-1}(\alpha) = -f_{k+1}(\alpha)$, és $f(\alpha) = 0$, így az $f_{k-1}(\alpha), f_k(\alpha), f_{k+1}(\alpha)$ -nél a jelváltások száma 2, akár $f_k(\alpha) > 0$, akár $f_k(\alpha) < 0$. Ekkor összességében nem változik $S(b) - S(a)$ értéke. Legyen most az $f(x)$ polinomnak gyöke az $\alpha \in (a, b)$. Ekkor α -t közelítve először $f_0(x)$ -ra és $f_1(x)$ -ra azt kapjuk, hogy előjelük különböző, majd, amint azt már láttuk a Sturm-sorozat tulajdonságainál, azonos előjelűek lesznek. Így, a jelváltások száma eggyel változik. \square

Sturm-tételét akkor is tudjuk alkalmazni, ha az $f(x)$ polinomnak vannak többszörös gyökei. Ekkor (f, f') legnagyobb közös osztója egy $d(x)$ nem konstans polinom. Osszuk le az f_0, f_1, \dots, f_n sorozat minden tagját ezzel a $d(x)$ polinommal:

$$g_k(x) = \frac{f_k(x)}{d(x)}$$

Így kapunk egy olyan g_0, g_1, \dots, g_n sorozatot, melynek már csak egyszeres gyökei vannak.

5. Irodalomjegyzék

- [1] Victor V. Prasolov, Polynomials, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, 2004, ISBN 3-540-40714-6
- [2] Szele Tibor, Bevezetés az algebrába, Tankönyvkiadó, Budapest, 1964.
- [3] Kiss Emil, Bevezetés az algebrába, Typotex Kiadó, Budapest, 2007.
- [4] D. K. Fagyeyev-I. Sz. Szominszkij: Felsőfokú algebrai példatár, Typotex Kiadó, Budapest, 2006., ISBN 9789639132771
- [5] http://math.ucsb.edu/~padraic/mathcamp_2013/root_find_alg/Mathcamp_2013_Root-Finding_Algorithms_Day_2.pdf.