

Fejezetek a merevségelméletből

Szakdolgozat

Készítette: **Kleizer Eszter**

Matematika BSc, Matematika tanári szakirány

Témavezető: **Naszódi Márton** adjunktus

Geometriai Tanszék



Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Budapest

2014

Tartalomjegyzék

Bevezetés	3
1. Rúd-csukló szerkezetek merevsége	4
1.1. Alapfogalmak	4
1.2. Példák globális és lokális merevségre	5
1.3. Infinitesimális merevség	6
1.4. A merevségi mátrix	9
1.5. A merevség szükséges feltétele	11
2. Cauchy-féle merevségi tétel	12
2.1. Az Euler-formula következménye	12
2.2. Cauchy-féle karlemma	15
2.3. Cauchy tétele merev poliéderekről	18
Befejezés	21
Köszönetnyilvánítás	23
Irodalomjegyzék	24
Nyilatkozat	26

Bevezetés

A szakdolgozatom témájául választott geometriai rész tárgyalása során a síkbeli rúd-csuklós szerkezetek merevségétől a Cauchy-féle merevségi tételig fogok eljutni. Ahogy haladtam előre az anyag feldolgozásában és megértésében a következő fogalmazódott meg bennem: egy kicsit olyan ez, mint az a rajzos játék, ahol a megszámozott pontok összekötése eredményeképpen egy kép rajzolódik elénk. A megszámozott pontokat ez esetben a csuklók, az összekötő vonalakat pedig a rudak helyettesítik. Ezen rudak és csuklók megfelelő módon történő megválasztásából adódnak a különböző merevségű szerkezeteket.

Az első fejezetben kimondásra kerülnek a téma megértését elősegítő, gráfmerevségre vonatkozó alapfogalmak. Továbbá bevezetésre kerül az infinitezimális mozgás definíciója, valamint megtörténik a szemléletes leírása is. A negyedik alfejezetben a már definiált infinitezimális mozgások alkalmazásával készítetek egy együtthető mátrixot, amely felhasználásával eljutok az infinitezimális merevség fogalmáig. A továbbiakban pár példát mutatok ezen merevségi típusra. Végül az utolsó alfejezetben a merevség szükséges feltételét boncolgatom.

A második fejezetben kimondásra és bizonyításra kerül – „A Könyv” [3] alapján – Cauchy háromdimenziós poliéderekre vonatkozó merevségi problémája, valamint olvasható ezen tétel bizonyítását elősegítő karlemma is.

1. fejezet

Rúd-csukló szerkezetek merevsége

Ebben a fejezetben bevezetem a gráfmerevségre vonatkozó alapfogalmakat, valamint ismertetem a témához kapcsolódó alapvető tételeket, állításokat.

1.1. Alapfogalmak

1.1.1. Definíció (Realizáció). Adott egy $G = (V, E)$ gráf, $h : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ leképezés, ahol V a csúcsok halmazát, E pedig az élek halmazát jelöli. A (G, h) egy *realizációja* egy $f : V \rightarrow \mathbb{R}^d$ leképezés ($d = 2$ esetben síkbeli, $d = 3$ esetben térbeli realizációt értünk), amelyre ha $\{i, j\} \in E$, ekkor $d(f(i), f(j)) = h(\{i, j\})$.

1.1.2. Definíció. Adott egy $G = (V, E)$ gráf, $h : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ leképezés. Ekkor a (G, h) pár f realizációját *rúd-csuklós szerkezetnek* nevezzük.

1.1.3. Definíció. A (G, h) szerkezet f és g realizációja *kongruensek*, ha minden $i, j \in V$ csúcsra $|f(i) - f(j)| = |g(i) - g(j)|$ teljesül.

Az 1.1.1. Definíció feltételeit felhasználva kimondhatjuk az alábbiakat.

1.1.4. Definíció (Globális merevség). (G, h) globálisan merev, ha bármely két f, g realizációjához létezik $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ izometria, hogy $g = \varphi \circ f$.

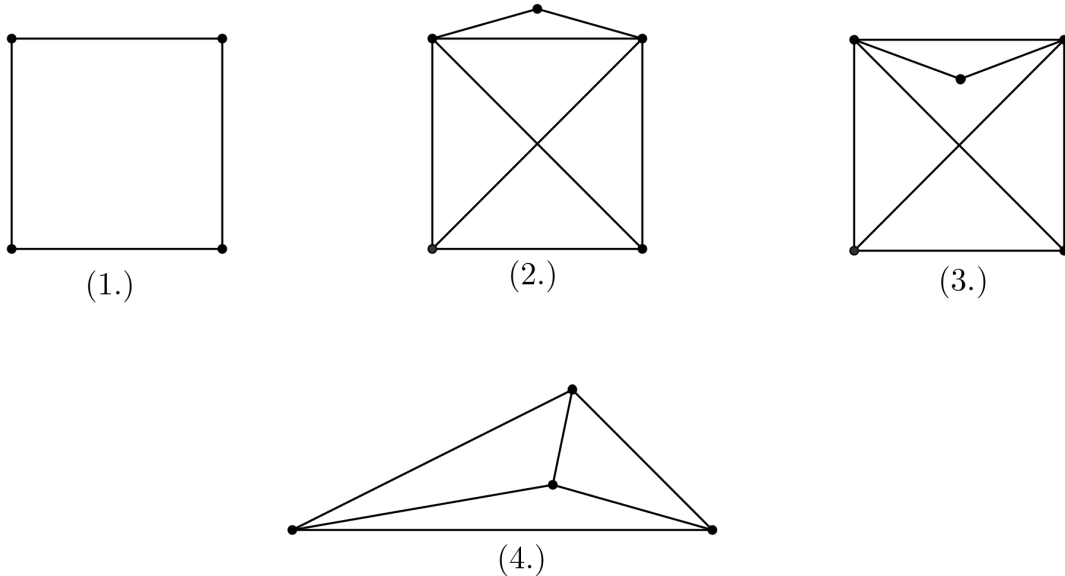
Tehát mondhatjuk, hogy itt a globális arra mutat rá, hogy bármilyen másik realizációt veszünk, az egybevágó marad az eredetivel.

1.1.5. Definíció. Adott (G, h) pár két realizációja: f és g . A két realizáció távolságán a következőt értjük: $d(f, g) = \max_{j \in V} \{|f(j) - g(j)|\}$.

1.1.6. Definíció (Lokális merevség). Adott (G, h) párnak egy f realizációja. Ezt *lokálisan merevnek* nevezünk, ha létezik $\varepsilon > 0$, hogy minden g realizációra, melyre $d(f, g) < \varepsilon$, létezik $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ izometria, hogy $g = \varphi \circ f$.

Ennél a merevségi típusnál a szerkezet csúcsainak megengedett egy minimális mértékű elmozdulása, de ebben az esetben csak egy kongruens szerkezetet kapunk az eredetihez képest.

1.2. Példák globális és lokális merevségre



Az első ábrán jól látható, hogy a kiindulási alakzatunk egy négyzet, amely 4 csuklóból és 4 rúdból tevődik össze, azaz nincs az átlói mentén merevítve. Ebből kifolyólag a négyzet könnyen deformálható. Mivel az esetleges alakváltoztatás során megváltozik a csuklók távolsága, ezért a kiindulási négyzetünk nem volt merev. A második ábra már merev, de csak lokálisan, erre a harmadik ábra szolgál bizonyítékkal, mivel jelen esetben ha a felső háromszöget tükrözzük, akkor a kapott ábránk ugyanannak a (G, h) párnak egy másik realizációja lesz, tehát nem kongruens szerkezetet kapunk. Az utolsó ábra pedig egy globálisan merev szerkezetre példa.

1.3. Infinitézimális merevség

1.3.1. Definíció (Infinitézimális mozgás). Egy (G, h) pár f síkbeli realizációjának *infinitézimális mozgásán* egy olyan $X : V \rightarrow \mathbb{R}^d$ hozzárendelést értünk, melyre teljesül a következő összefüggés:

$$(f(i) - f(j))(X(i) - X(j)) = 0 \quad (1.1)$$

minden $i, j \in E$ esetén.

A mozgást jelen esetben olyan függvénynek tekinthetjük, amely adott t időpillanatban megadja a gráf csúcsainak pillanatnyi sebességét.

Szemléletesebben az imént említett definíciót a következőképpen értelmezhetjük. Legyen adott $f(V) = \{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\} \subset \mathbb{R}^d$. A \mathbf{p}_i pályája egy deformáció során legyen $\gamma_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^d$ differenciálható leképezés, ahol $\gamma_i(0) = \mathbf{p}_i$ és $\gamma_i'(0) = X_i$. Tegyük fel, hogy $\{i, j\} \in E$. Ekkor a következőket tekintve:

$$|\gamma_i(t) - \gamma_j(t)| \text{ állandó} \iff |\gamma_i(t) - \gamma_j(t)|^2 \text{ állandó,}$$

ezt kifejtve

$$|\gamma_i(t) - \gamma_j(t)|^2 = \gamma_i(t)^2 + \gamma_j(t)^2 - 2\gamma_i(t)\gamma_j(t).$$

A kompozíció függvény deriváltjára vonatkozó tétel miatt a következő adódik:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} &= 0 \\ \left(2\gamma_i(t)\gamma_i'(t) + 2\gamma_j(t)\gamma_j'(t) - 2\gamma_i(t)\gamma_j'(t) - 2\gamma_i'(t)\gamma_j(t) \right) \Big|_{t=0} &= 0 \\ \underbrace{(\gamma_i(0) - \gamma_j(0))}_{(f(i)-f(j))} \underbrace{(\gamma_i'(0) - \gamma_j'(0))}_{(X(i)-X(j))} &= 0. \end{aligned}$$

Bevezetjük a triviális infinitézimális mozgásokat, amelyek a sík (illetve a tér) infinitézimális izometriáinak felelnek meg.

1.3.2. Definíció. Legyen $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ folytonos leképezés, ahol $\varepsilon > 0$ és amelyre az alábbiak teljesülnek:

- $\varphi(0, \cdot) = id_{\mathbb{R}^d}$
- $\varphi(t, \cdot) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ izometria, tetszőleges $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ -re
- $\varphi(\cdot, \mathbf{p}) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^d$ differenciálható pályán fut végig, tetszőleges $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$ -re.

Ekkor φ -t *egyparaméteres izometria seregnek* hívjuk.

Ez esetben φ meghatároz egy $\mathbf{v} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ vektormezőt az alábbi módon:

$$\mathbf{v}(\mathbf{p}) = \left. \frac{d}{dt} \varphi(t, \mathbf{p}) \right|_{t=0}. \quad (1.2)$$

Ezt a \mathbf{v} -t egy *infinitézimális izometriának* hívjuk.

1.3.3. Definíció. Legyen a (G, h) párnak $f : V \rightarrow \mathbb{R}^d$ egy realizációja. Egy infinitézimális izometria megszorítását a (véges) $f(V)$ halmazra, *triviális infinitézimális mozgásnak* nevezzük.

A következő tétel eddigi tanulmányainkól [9] már ismert.

1.3.4. Tétel. Legyen $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ egy izometria. Ekkor

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} + \mathbf{b}, \quad (1.3)$$

ahol A ortogonális mátrix és \mathbf{b} egy \mathbb{R}^d -beli vektor.

1.3.5. Tétel. A sík minden $\mathbf{v} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ infinitézimális izometriája az alábbi módon írható fel:

$$\mathbf{v}(\mathbf{p}) = M(\mathbf{p}) + \mathbf{w},$$

ahol M egy ferdén szimmetrikus mátrixot jelöl, vagyis a következőképpen írható fel:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Bizonyítás: Mivel $\varphi(t)$ egy irányítástartó izometria minden t -re, ezért az (1.3)-as egyenlet alapján felírhatjuk a következőket:

$$\varphi(t, \mathbf{p}) = A(t)\mathbf{p} + \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} \cos \beta(t) & -\sin \beta(t) \\ \sin \beta(t) & \cos \beta(t) \end{pmatrix} \mathbf{p} + \mathbf{b}(t).$$

Ez esetben az $A(0) = id_{\mathbb{R}^2}$ és $\mathbf{b}(0) = \mathbf{0}$, mivel $\varphi(0) = id_{\mathbb{R}^2}$ akkor $\beta(0) = 0$ is teljesül. Majd keressük az (1.3)-as megfeleltetés alapján a $\mathbf{v}(\mathbf{p})$ vektort.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{p}) &= \left. \frac{d}{dt} \varphi(t, \mathbf{p}) \right|_{t=0} = \beta'(0) \begin{pmatrix} -\sin \beta(t) & -\cos \beta(t) \\ \cos \beta(t) & -\sin \beta(t) \end{pmatrix} \Big|_{t=0} \mathbf{p} + \mathbf{b}'(0) = \\ &= \beta'(0) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{p} + \mathbf{w}. \end{aligned}$$

$\beta'(0)$ -t inentől jelölje ω . Ekkor a következő adódik:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \mathbf{p} + \mathbf{w}.$$

Tehát ezzel a tételt beláttuk, mivel megkapjuk az állításban szereplő ferdén szimmetrikus mátrixot.

■

1.3.6. Következmény. *A síkbeli triviális infinitezimális mozgások egy három dimenziós vektorteret alkotnak.*

1.4. A merevségi mátrix

A már definiált infinitezimális mozgások felhasználásával készítünk egy mátrixot, amely felhasználásával eljutunk az infinitezimális merevség fogalmáig. [6]

1.4.1. Definíció. Ha úgy gondolunk az infinitezimális mozgásokra, mint nd dimenziós vektorokra, akkor egy (G, h) pár f realizációjának infinitezimális mozgásai egy lineáris alteret alkotnak \mathbb{R}^{nd} -ben, amelyet $|E|$ darab (1.1) alakú homogén lineáris egyenlet határoz meg. Ennek a homogén lineáris egyenletrendszernek az együtttható mátrixát nevezzük a szerkezet *merevségi mátriának*.

1.4.2. Definíció. Egy (G, h) pár d -dimenziós f realizációjának merevségi mátrixát jelölje: $R(G, h, f)$. Az $R(G, h, f)$ -nak $|E|$ sora és $d|V|$ oszlopa van. A mátrix $e = \{i, j\}$ élének megfelelő k -adik sora az alábbi módon néz ki:

$$\left(0 \quad \dots \quad (f_{1_i} - f_{1_j}) \quad (f_{2_i} - f_{2_j}) \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad (f_{1_j} - f_{1_i}) \quad (f_{2_j} - f_{2_i}) \quad \dots \quad 0 \right).$$

A (G, h) pár f realizációjának az X , az (1.1) alapján, pontosan akkor infinitezimális mozgása a síknak, ha teljesül az alábbi egyenlőség:

$$R(G, h, f)X = 0,$$

ahol $X = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ alakú $nd \times 1$ -es oszlopvektort jelöl. Azaz X egy infinitezimális mozgása a szerkezetnek, ha $X \in Ker R$.

1.4.3. Definíció. A (G, h) pár f realizációját *infinitezimálisan merevnek* nevezzük, ha az összes infinitezimális mozgása a szerkezetnek triviális infinitezimális mozgás.

1.4.4. Állítás. A síkbeli (G, h) szerkezet f realizációja *infinitezimálisan merev akkor és csak akkor, ha a merevségi mátrixának rangjára igaz a következő:*

$$r(R(G, h, f)) = 2|V| - 3.$$

Bizonyítás: Az 1.4.3. definíció alapján: egy szerkezet infinitezimálisan merev, ha az összes infinitezimális mozgása triviális infinitezimális mozgás. Ebből következik, hogy $\dim(Ker(R(G, h, f))) = 3$.

$$\begin{aligned} \dim(Ker(R(G, h, f))) &= 2|V| - r(R(G, h, f)) \\ 3 &= 2|V| - r(R(G, h, f)). \end{aligned}$$

Ez az egyenletet átrendezve:

$$r(R(G, h, f)) = 2|V| - 3$$

egyenlőséget kapjuk, ami megegyezik az állításban szereplő összefüggéssel.

■

A következő tétel bizonyítás nélkül kerül kimondásra.

1.4.5. Tétel (Merevség és az infinitezimális merevség kapcsolata). *Ha egy (G, h) szerkezet infinitezimálisan merev, akkor lokálisan merev.*

A tétel megfordítása ugyanakkor nem igaz, mert léteznek olyan szerkezetek, amelyek lokálisan merevek, de nem infinitezimálisan merevek.

1.4.6. Példa. Vegyük azt a három csúcsból és három élből álló rúd-csuklós szerkezetet, melyet a következő vektorok határoznak meg: $(0, 0)$, $(2, 3)$, $(3, 0)$. Ekkor:

$$\mathbf{R}(\mathbf{G}, \mathbf{h}) = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Megnézve a kapott mátrix sorait, láthatjuk, hogy lineárisan függetlenek, tehát a sorrangja 3-mal egyenlő. Ebből az következik, hogy $\dim(Ker) = 6 - 3 = 3$, ami megegyezik a triviális infinitezimális mozgások dimenziójával. Vagyis az általunk megadott gráf infinitezimálisan merev, és az 1.4.5. tétel alapján lokálisan merev.

1.4.7. Példa. Most úgy adjuk meg a rúd-csuklós szerkezet három csúcsát, hogy azok kollineárisak legyenek egymással, mégpedig a következő koordinátázással: $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$. Ekkor:

$$\mathbf{R}(\mathbf{G}, \mathbf{h}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ez esetben könnyen látható, hogy ha a mátrix első és harmadik sorát összeadjuk, majd megszorozzuk kettővel, akkor a második sorát kapjuk. A merevségi mátrix sorrangja: 2, mivel sorai lineárisan összefüggőek, $\dim(Ker) = 6 - 2 = 4$, ami nem egyezik meg a triviális infinitezimális mozgások dimenziójával. Tehát az $R(G, h)$ mátrix infinitezimálisan nem merev, de nyilván lokálisan merev.

1.5. A merevség szükséges feltétele

1.5.1. Tétel. *Egy \mathbb{R}^2 -beli, e rudat és n csuklót tartalmazó szerkezet merevségének szükséges feltétele, hogy*

$$e \geq 2|V| - 3$$

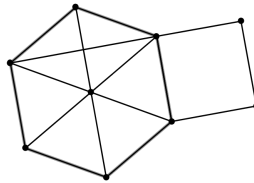
egyenlőtlenség teljesüljön.

Bizonyítás: Egy szerkezet infinitezimálisan merev, ha $r(R(G, h, f)) = 2|V| - 3$ teljesül. A szerkezet $R(G, h, f)$ merevségi mátrixának $|e|$ sora van, ezért

$$r(R(G, h, f)) \leq e.$$

■

A 1.5.1. Tétel nem ad elégséges feltételt egy (G, h) szerkezet merevségi voltaára.



1.1. ábra. 9 csuklóból álló szerkezet

1.5.2. Példa. Az (1.1.ábra) bal oldala globálisan merev, sőt még ha elveszünk belőle egy rudat, akkor is az marad. A jobb oldalán viszont láthatjuk, hogy könnyen deformálható. Ha teljes egészébe tekintünk az ábrára: 9 csuklóból és 16 rúdból áll, vagyis teljesül rá a szükséges feltétel, de ez ennél az ábránál nem elégséges a szerkezet merevségéhez.

2. fejezet

Cauchy-féle merevségi tétel

2.1. Az Euler-formula következménye

2.1.1. Definíció. G gráf összefüggő, ha G bármely két pontja között vezet út.

2.1.2. Definíció. Ha egy G gráf lerajzolható \mathbb{R}^2 -be úgy, hogy az élei nem metszik egymást, akkor a gráf *síkbarajzolható*. Síkbeli gráfról akkor beszélhetünk, ha már adott és rögzített a gráfnak egy síkba rajzolása.

Egy síkgráf a síkot tartományokra bontja, beleértve a nem korlátos külső tartományt is.

A következőkben bizonyítás nélkül kimondásra kerülő formula a síkgráfok tartományai, élei és csúcsai számára mutat összefüggést.

2.1.3. Tétel (Euler-formula). *Ha egy összefüggő síkbeli gráfnak n csúcsa, e éle és t tartománya van, akkor teljesül rá a következő:*

$$n - e + t = 2.$$

2.1.4. Állítás. *Legyen adva egy G nemüres, egyszerű síkbeli gráf. Ekkor*

- 1. G -nek van maximum ötödfokú csúcsa.*
- 2. G -nek maximum $3n - 6$ éle van, ahol n a gráf csúcsainak a számát jelöli.*
- 3. ha G éleit kiszínezzük két színnel, akkor lesz olyan csúcs, amelyből kiinduló élek ciklikus sorrendjében maximum kétszer van színváltás.*

Bizonyítás: A bizonyításhoz szükséges a következő paraméterek ismerete.

Számoljuk meg a gráf tartományait aszerint, hogy hány él határolja (azt az élt, aminek mindkét oldalán ugyanaz a tartomány van, kétszer kell számolni). Jelölje t_k a k -tartományok számát.

$$t = t_2 + t_3 + t_4 + \dots \quad (2.1)$$

Az éleket megszámlálhatjuk aszerint is, hogy mely tartományokat határolják:

$$2e = 2t_2 + 3t_3 + 4t_4 + \dots \quad (2.2)$$

Jelölje G -ben n_i az i -fokú pontok számát. Ha fokszámuk szerint megszámozzuk a csúcsokat, ahol egy csúcs foka a belőle kiinduló élek számával egyenlő, akkor a következő adódik:

$$n = n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + \dots \quad (2.3)$$

Másrészt minden élnek két végpontja van, ezért kétszer járul hozzá a fokszámok összegéhez, tehát

$$2e = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + \dots \quad (2.4)$$

Mindhárom állítás belátásához feltehető, hogy G összefüggő gráf.

1. Abból kiindulva, hogy G egyszerű gráf, mondhatjuk, hogy minden tartományának minimum három oldala van. Ezt figyelembe véve a (2.1) és a (2.2) a következőképpen írható fel:

$$t = t_3 + t_4 + t_5 + \dots$$

$$2e = 3t_3 + 4t_4 + 5t_5 + \dots,$$

ebből a $2e - 3t \geq 0$ összefüggést kapjuk. Ha minden csúcs foka minimum hat lenne, akkor a (2.3) és (2.4) felhasználásával

$$n = n_6 + n_7 + n_8 + \dots$$

$$2e = 6n_6 + 7n_7 + 8n_8 + \dots$$

Tehát $2e - 6n \geq 0$ adódik.

A két egyenlőtlenséget összegezve

$$(2e - 6n) + 2(2e - 3t) \geq 0$$

$$6e - 6n - 6t \geq 0$$

$$6(e - n - t) \geq 0$$

$$e \geq n + t$$

adódik, ami viszont ellentmond az Euler-formulának.

2. Az Euler-formula és a $2e - 3t \geq 0$ összefüggés alapján látható, hogy

$$3n - 6 = 3(e - t + 2) = 3e - 3t \geq e.$$

3. Legyen c azoknak a szögeknek a száma, amelyeknél színváltás van.

Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz. Ekkor $c \geq 4n$ színváltás van, mivel minden csúcsnál páros sok a váltás. Minden $2k$ vagy $2k + 1$ oldalú tartománynak maximum $2k$ ilyen szöge van, amiből a (2.3)-at és (2.4)-et felhasználva, arra következtethetünk, hogy

$$\begin{aligned} 4n &\leq c \leq 2t_3 + 4t_4 + 4t_5 + 6t_6 + 6t_7 + 8t_8 + \dots \\ &\leq 2t_3 + 4t_4 + 6t_5 + 8t_6 + 10t_7 + \dots \\ &= 2(3t_3 + 4t_4 + 5t_5 + 6t_6 + 7t_7 + \dots) - 4(t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 + \dots) \\ &= 4e - 4t. \end{aligned}$$

Leegyszerűsítve újfent az $e \geq n + t$ összefüggést kapjuk, ami még mindig ellentmond az Euler formulának.

■

2.2. Cauchy-féle karlemma

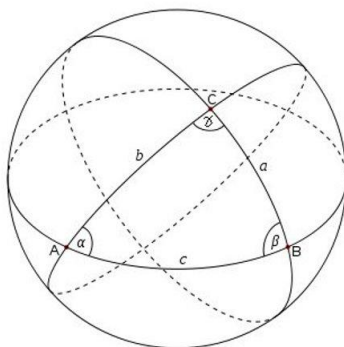
2.2.1. Definíció. Az olyan térbeli, korlátos alakzatokat, amelyeknek van belső pontjuk és előállnak véges sok féltér metszeteként, *konvex poliédereknek* nevezzük.

2.2.2. Definíció. Két konvex poliéder akkor *kombinatorikusan ekvivalens*, ha laphálójuk izomorfak, tehát ha tudunk létesíteni egy tartalmazástartó hármass bijekciót a két poliéder lapjai, élei, illetve csúcsai között.

2.2.3. Lemma (Oldalakra vonatkozó koszinusztétel). [1] *A szférán adott egy háromszög, melynek oldalai a, b, c legyenek. A c oldallal szemközti szögét jelölje γ . Ekkor a következő egyenlőség teljesül:*

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma.$$

Bizonyítás: A (2.1. ábra) alapján használt jelöléseket tekintve: Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok



2.1. ábra. Gömbháromszög

hajlásszögeit tekintsük a gömbháromszög oldalainak:

$$a = (\mathbf{b}, \mathbf{c})_{\triangleleft}, \quad b = (\mathbf{c}, \mathbf{a})_{\triangleleft}, \quad c = (\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\triangleleft}.$$

A $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$, $\mathbf{c} \times \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ merőlegesek a gömbháromszög oldalainak síkjára. Hajlásszögeik a gömbháromszög szögeinek kiegészítő szögei:

$$\pi - \alpha = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}), \quad \pi - \beta = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}), \quad \pi - \gamma = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{c} \times \mathbf{a}).$$

Az \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} vektorok jobbrszert alkotnak. Tekintsük például az \mathbf{a} vektort, ami az \mathbf{b} , \mathbf{c} vektorok síkjának ugyanarra az oldalára mutat, mint $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$. Ezekszerint $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ és $\mathbf{c} \times \mathbf{a}$ egy α szögű lapszög lapjaira merőleges.

Majd az előbb bevezetett vektorokkal képezzük a

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{c})(\mathbf{c} \times \mathbf{a})$$

szorzatot. Ezt követően a kifejtési és a felcserélési tétel alkalmazásával a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned} (\mathbf{b} \times \mathbf{c})(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) &= \mathbf{b}[\mathbf{c} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a})] = \mathbf{b}[(\mathbf{ac})\mathbf{c} - (\mathbf{cc})\mathbf{a}] = (\mathbf{ac})(\mathbf{bc}) - (\mathbf{cc})(\mathbf{ba}) = \\ &= \cos b \cos a - \cos c \end{aligned}$$

$$\cos b \cos a - \cos c = |\mathbf{b} \times \mathbf{c}| |\mathbf{c} \times \mathbf{a}| \cos(\pi - \gamma) = -\sin a \sin b \cos \gamma$$

Az egyenletet rendezve:

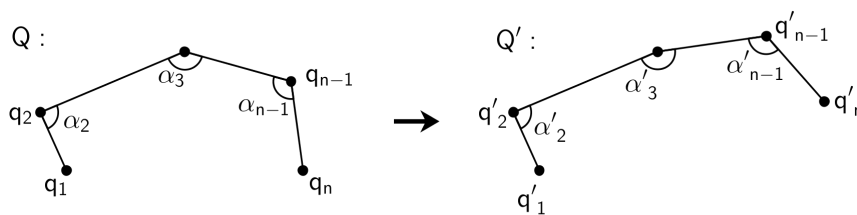
$$\cos b \cos a - \cos c = -\sin a \sin b \cos \gamma$$

$$\cos c = \cos a + \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

összefügés adódik, amely éppen a kiindulási egyenletünk volt. A térbeli esetben az a , b , c hosszakat az egységsugarú gömb felszínén mérjük, így a $[0, \pi]$ intervallumba esnek az értékeik.

■

2.2.4. Lemma (Cauchy-féle karlemma). *Ha Q és Q' olyan konvex n -szögek az euklédieszi síkon vagy a gömbön (az alábbi jelöléseket használva),*



melyekre $\overline{q_i q_{i+1}} = \overline{q'_i q'_{i+1}}$ teljesül minden $1 \leq i \leq n - 1$ -re, továbbá $\alpha_i \leq \alpha'_i$ a minden $2 \leq i \leq n - 1$ -re, akkor a „hiányzó” élhossz eleget tesz a következő egyenlőtlenségnek:

$$\overline{q_1 q_n} \leq \overline{q'_1 q'_n},$$

és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha minden i -re $\alpha_i = \alpha'_i$.

Bizonyítás: A bizonyítás menete n -szerinti indukció felhasználásával történik.

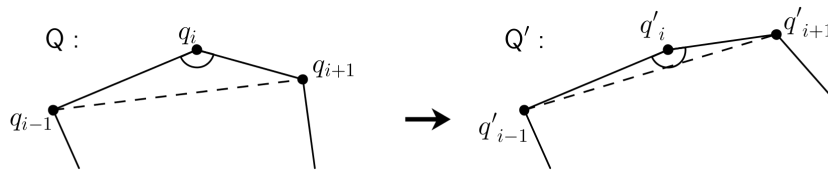
$n = 3$ esetre nézve: ha egy háromszög rögzített a és b oldala által bezárt γ szögét növeljük, akkor a harmadik, azaz c oldal hossza is nő.

Analitikus megfontolással ez a

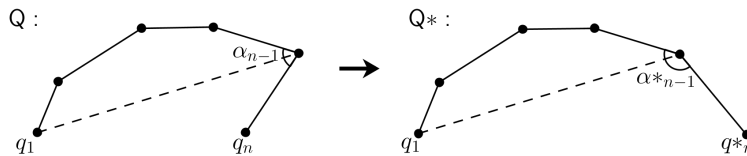
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

koszinusz tételből következik a síkbeli esetben. Ezzel analóg módon tekinthetjük a szférán a 2.2.3. lemmában kimondott egyenlőség következményét.

Vegyünk a $n \geq 4$ esetet. Ha valamely $i \in \{2, \dots, n-1\}$ -re $\alpha_i = \alpha'_i$, akkor levághatjuk a megfelelő csúcsot és helyette a q_{i-1}, q_{i+1} -et, illetve a q'_{i-1}, q'_{i+1} -et összekötő átlót húzzuk be, melyekre a $\overline{q_{i-1}q_{i+1}} = \overline{q'_{i-1}q'_{i+1}}$ teljesül. Ezzel a lépéssel az indukciót befejeztük, mostantól feltehetjük, hogy $\alpha_i < \alpha'_i$ minden $2 \leq i \leq n-1$ -re.



Ezt követően Q -ből készítünk egy új Q^* sokszöget, még pedig a következőképpen: α_{n-1} -et a lehető legnagyobb olyan $\alpha_{n-1}^* \leq \alpha'_{n-1}$ szögre cseréljük ki, amelyre Q^* konvex marad. Ehhez q_n -et q_n^* -nel helyettesítjük, viszont megtartjuk az összes többi q_i -t, az oldalhosszakat és a szögeket.

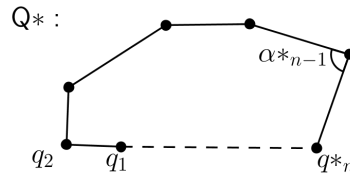


1. Abban az esetben, ha tudunk olyan az $\alpha_{n-1}^* = \alpha'_{n-1}$ szöget választani, amelyre Q^* konvex marad, akkor a

$$\overline{q_1 q_n} < \overline{q_1 q_n^*} \leq \overline{q'_1 q'_n} \quad (2.5)$$

összefüggést kapjuk, az első egyenlőtlenséghez $n = 3$ esetet, a másodikhoz pedig az előbb említett indukciót felhasználva.

2. Máskülönb ha $\alpha_{n-1}^* < \alpha'_{n-1}$, akkor a konvexitás feltétele miatt nem tudjuk továbbnyitni ezt a kart, ami csak úgy lehetséges, ha q_2, q_1 és q_n^* kollineáris, azaz egy egyenesre eső pontok.



Ez esetben a következőt kapjuk:

$$\overline{q_2 q_1} + \overline{q_1 q_n^*} = \overline{q_2 q_n^*}. \quad (2.6)$$

Ezt a Q^* -ot a Q' -vel összehasonlítva, n -szerinti indukcióval

$$\overline{q_2 q_n^*} \leq \overline{q'_2 q'_n} \quad (2.7)$$

adódik. Vagyis összegezve az eddigieket:

$$\frac{(2.5)}{q_1 q_n} < \frac{(2.6)}{q_1 q_n^*} = \frac{(2.7)}{q_2 q_n^*} - \frac{(2.7)}{q_1 q_2} \leq \frac{(2.7)}{q'_2 q'_n} - \frac{(2.7)}{q'_1 q'_2} \stackrel{(*)}{\leq} \frac{(2.7)}{q'_1 q'_n},$$

ahol $(*)$ -gal jelölt egyenlőtlenség a háromszög-egyenlőtlenségre utal.

Ezzel az állítást beláttuk. ■

2.3. Cauchy tétele merev poliéderekről

2.3.1. Tétel (Cauchy tétele merev poliéderekről). *Ha két \mathbb{R}^3 -beli konvex poliéder P és P' kombinatorikusan ekvivalens, és megfelelő lapjaik egybevágóak, akkor megfelelő élszomszédos lappárok szögei is megegyeznek, és így P és P' egybevágóak.*

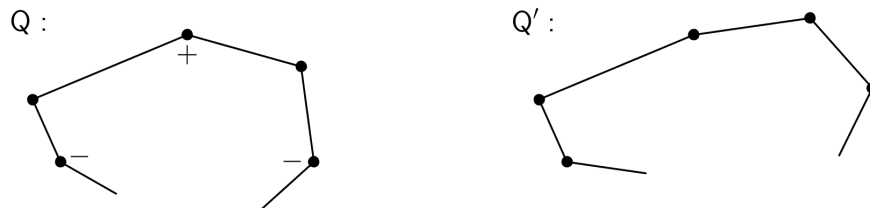
Szemléletesen, ha veszünk egy poliédert és azt a lapjai mentén darabjaira szedjük, majd újra összerakjuk a megfelelő élek mentén, akkor csak egyféleképpen tudjunk ezt megtenni.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy adott két konvex poliéder, melyeknek lapjaik páronként egybevágóak: P és P' . P éleit színezzük a következőképpen: legyen egy él fekete, ha az adott élben találkozó két lap belső szöge P' -ben nagyobb mint P -ben; és zöld, ha az előbb említett szög kisebb P' -ben, mint P -ben.

P felszínén a fekete és zöld élek egy kétszínű síkbeli gráfot határoznak meg, amelyet sugárirányú vetítéssel az S^2 felületre vetíthetünk. Vagyis veszünk egy vetítési középpontot P belsejében, majd ebből a kiválasztott pontból P minden pontjára félegyenest illesztünk. Ezt követően ha az egyeneseket elmetszük egy gömbbel, akkor a P poliéder egy centrális vetítésű képét, vagyis a gráf egy lerajzolását kapjuk S^2 -n. A szóban forgó gráf nem üres, ha P -nek és P' -nek léteznek megfelelő lappárjaik, amelyek lapszöge nem egyenlő. A 2.1.1. állítás 3. részét felhasználva található olyan p csúcs, amely illeszkedik minimum egy fekete vagy egy zöld élre, és maximum két színváltás van a belőle kiinduló élek ciklikus sorrendjében.

Messzük el P -t egy kicsi, p középpontú, ε sugarú S_ε , valamint P' -t egy szintén ε sugarú, a p -nek megfelelő p' középpontú S'_ε gömbbel. A metszés során keletkezett két konvex gömbi sokszög, Q és Q' , S_ε -ban, illetve S'_ε -ban, amelyeknek megfelelő ívei egyenlő hosszúak, mivel a két gömb sugárhossza megegyezik, illetve P és P' megfelelő lapjai egybevágóak voltak.

Jelöljük Q valamely szögét $+$ -szal, ha a neki megfelelő Q' -beli szögnél kisebb, és $-$ -szal, ha Q' -beli megfelelőjénél nagyobb. Vagyis, Q -ról Q' -re áttérve a $+$ szögek „kinyílnak”, a $-$ -ak „bezárulnak”, míg az oldalhosszak és a jelöletlen szögek nem változnak.



A p csúcs választásából tudjuk, hogy vannak vagy $+$ vagy $-$ jelölésű szögek, de előfordulhat az is, hogy mindkét jelöléstípus megtalálható, és ciklikus sorrendjükben maximum két $+/-$ váltás van. Ha csak egyféle jel fordul elő, akkor a 2.2.4. lemma segítségével rögtön ellentmondásra jutunk, hiszen ez esetben a valamelyik él hossza megváltozik és így nem teljesül a kívánt távolságtartás.

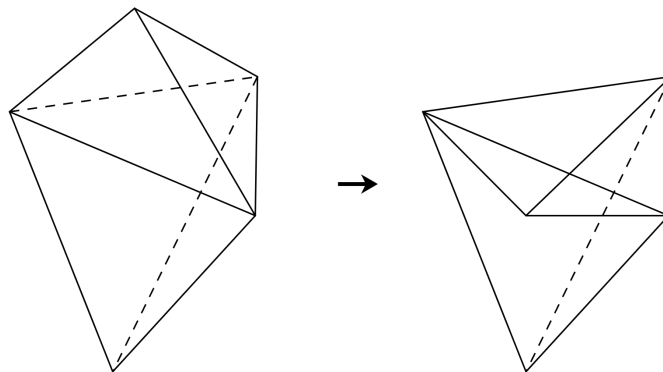


Ha mindkét előjel előfordul, van olyan elosztóvonal, mely két él felezőpontját köti össze, és elválasztja a $+$ -okat a $-$ -októl. Az alábbi lemma ez esetben is ellentmondásra vezet, hiszen ez az elválasztóvonal nem lehet egyszerre hosszabb és rövidebb is Q' -ben, mint Q -ban.



■

2.3.2. Példa. Az itt látható két alakzat kombinatorikusan ekvivalensek, és a megfelelő lapjaik egybevágók, viszont az alakzatok nem egybevágók, és szemmel láthatóan csak az első ábra konvex.



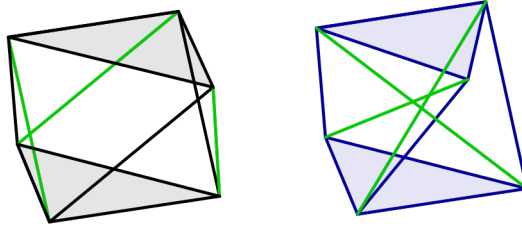
Tehát ebből a példából az szűrhető le, hogy a konvexitás szükséges feltétele a Cauchy tételnek.

Befejezés

A dolgozatom áttekintésének végéhez érve, az olvasóban felmerülhet néhány igen-csak jogosnak mondható kérdés. Van az említett dolgoknak hétköznapiabb alkalmazásuk? Felhasználhatók az elhangzottak a tudomány más területein is?

A válaszok természetesen igenlők.

- A rúd-csuklós szerkezetek felhasználásának jellegzetes, illetve leginkább ismeretes példái a távvezeték-tartóoszlopok, adótornyok, tűztornyok, kilátótornyok, magaslesek, darugémekek és daruhidak, szalaghidak. Természetesen ezen magasépítészeti szerkezetek megtervezésük során nem tekinthetők teljesen merevnek. Figyelembe kell venni a rácsszerkezet (a mérnöki szakzsargonon egymáshoz kapcsolt rudakból összeálló mérnöki szerkezeteket ért) alakváltoztatásainak vizsgálati eredményeit. A vizsgálat során egy-egy kiválasztott csúcsponton működő külső erőket kísérik figyelemmel. Ezek az erők nemcsak az adott csuklóval közvetlenül érintkező rudakat befolyásolják, hanem képesek akár deformációt okozni a szomszédos rudaknál, vagy akár a rácssíkoknál is. A csúcspontok elmozdulása során általában a rácssíkok által közrefogott térrész keresztmetszetének alakja változik meg. Konkretizálva: ilyen rúd-csuklós szerkezetű építmény többek között a párizsi Eiffel-torony és a Tokyo-torony.[10]
- Tensegrity szerkezetek, olyan rácsszerkezetek, amelyeknek minden egyes rúdja a terheléstől függetlenül csak nyomott vagy húzott lehet. A tensegrity mind elnevezésében, mind felépítési elvében R. B. Fuller nevéhez fűződik. A legegyszerűbb tensegrity rácsot az infinitezimálisan flexibilis térbeli szerkezetek között kell keresnünk, amit egy oktaéder-hálózatú rácsból származtathatunk.



2.2. ábra. Oktaéderből származtatott tensegrity rács

Tekintve a (2.2.ábrát), ha az oktaéderben a kék vonallal jelölt rudakat sorra kiemeljük, és őket a konjugált rúdjaikkal helyettesítjük, egy „elfajult” konkáv szerkezetet kapunk. Az új rudak hosszát azonos mértékben növelni kezdjük, ez a módszer egyre magasabb rácsszerkezetet eredményez, miközben a felső vízszintes rácssík egyre inkább elfordul az alsóhoz képest. Azonban tetszőleges mértékben nem növelhetjük a rudak hosszát, mivel bizonyos hossz elérésekor a szerkezet megfeszül. Összegezve: a kék rudakban mind húzás, a zöldekben pedig nyomás lép fel (a tensegrity tulajdonságainak megfelelően). Mivel a rácsszerkezet helybentartásához nem elegendő a rendelkezésünkre álló rudak száma, ezért a rács statikailag határozatlan. Ennek következtében egy infinitezimálisan flexibilis szerkezetet kapunk. [11]

- A nanocsöveket is rúdszerű viselkedésű rácsos tartóként modellezzük, amelyek jelenleg az anyagszerkezeti kutatások kedvenc objektumai. [10]

Remélem, dolgozatom során sikerült átadni mindazt, amit a merevség elmélet általam feldolgozott részéből fontosnak és érdekesnek találtam.

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Naszódi Mártonnak, aki érthető magyarázataival, a konzultációkon adott biztató szavaival, türelmével elősegítette a szakdolgozatom elkészülését.

Irodalomjegyzék

- [1] Hajós György: *Bevezetés a geometriába*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.
- [2] Jordán Tibor – Recski András – Szeszlér Dávid: *Rendszeroptimalizálás*, Typotex Kiadó, Budapest, 2004.
- [3] Martin Aigner – Günter M. Ziegler: *Bizonyítások a könyvből*, Typotex kiadó, Budapest, 2004.
- [4] Moussong Gábor: GEOMETRIA,
Eötvös Loránd Tudományegyetem Geometriai Tanszék, Budapest, 2013.
<http://www.math.elte.hu/~mg/tamop/geometria.pdf>
- [5] R. Connelly: Tensegrities and Global Rigidity
<http://www.math.cornell.edu/~connelly/Tensegrity-Global.pdf>
- [6] R. Connelly: The basics of rigidity
www.math.cornell.edu/~connelly/BasicsI.BasicsII.pdf
- [7] Recski András: *Matroid Theory and its Applications in Electric Network Theory and in Statics*,
Akadémia Kiadó, Budapest
- [8] Szabadka Zoltán: Rúdszerkezetek és tensegrity gráfok merevsége a síkban,
Budapest, 2010.
http://www.cs.elte.hu/math/phd_th/Szabadka_Zoltan_tezisek_magyar.pdf

- [9] Verhóczy László: Euklideszi Geometria,
ELTE TTK Matematikai Intézet Geometriai Tanszék, Budapest, 2012.
<http://www.cs.elte.hu/geometry/v1/EukGeoJe.pdf>
- [10] [http://www.epito.bme.hu/met/oktatas/feltoltesek/BMEEOME-SA8/
rudszaru_racsok.pdf](http://www.epito.bme.hu/met/oktatas/feltoltesek/BMEEOME-SA8/rudszaru_racsok.pdf)
- [11] www.epito.bme.hu/met/oktatas/feltoltesek/BMEEOME-SA8/tensegrity.doc

Nyilatkozat

Név: Kleizer Eszter

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika Bsc

Neptun kód: OVQK4Y

Szakdolgozat címe: Fejezetek a merevségelméletből

A **szakdolgozat** szerzőjeként feyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2014. január 7.

a hallgató aláírása