

SZAKDOLGOZAT

Kvaterniók és forgatások

Kovács Adél

Matematika Bsc, tanári szakirány



Témavezető:

Hermann Péter

egyetemi docens

Algebra és Számelmélet Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természertudományi Kar

2014.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Elméleti áttekintés	4
2.1. Kvaterniók	4
2.1.1. Kvaternió tulajdonságok:	4
2.1.2. Műveletek kvaterniókkal	5
2.1.3. Tisztán képzetes kvaterniók	7
2.2. Forgatások	8
2.3. Lineáris transzformációk	8
2.3.1. Lineáris transzformáció mátrixa	9
2.4. Forgatások reprezentálása mátrixokkal	9
2.5. Reprezentálás kvaterniókkal	10
2.5.1. A Φ_L leképezés tulajdonságai	10
2.5.2. A Φ_L és Φ_R transzformációk reprezentálása mátrixokkal	11
2.5.3. Forgásszög meghatározása	12
3. Forgatások a négydimenziós térben	12
3.1. Speciális esetek	13
4. Forgatások a háromdimenziós térben	15
4.1. Forgástengely meghatározása	15
4.2. Bizonyítás a 4-dimenziós forgatások segítségével	15
5. Tükrözések	16
6. Alkalmazások	17
6.1. Geometriában	17
6.1.1. Origón átmenő tetszőleges tengely körüli forgatás	20
6.2. Fizikában	23
6.2.1. Merev testek forgatása	23
6.2.2. Pauli mátrixok	25

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Hermann Péternek, aki mindig segítette tanácsaival munkámat, ha kérdésem volt mindig szívesen fogadott.

1. Bevezetés

Kvaterniókról William Rowan Hamilton írt először.

Hamilton így emlékezett az egyik, fiához írott levélben, amelyet a kor szokásos kissé dagályos stílusában vetett papírra:

Október 16-odik napja volt, egy hétfői nap, az Ír Királyi Akadémia Tanácsa ülésének napja, ahol nekem kellett elnökölnöm. Anyáddal együtt indultam oda a Királyi csatorna mentén: bár beszéltem hozzád valamit, egyáltalán nem fogtam fel, amit mond, mert a tudatomban valami derengeni kezdett. Váratlanul mintha zárult volna egy áramkör: fellobbant egy szikra, amely bevilágította sok hosszú év egy irányba fordított gondolatait, az én - vagy ha úgy alakul, akkor mások munkáját, ha még elegendő tudatos életem adatik meg nekem, hogy tájékoztassam a világot felfedezésemről. Nem tudtam leküzdeni magamban azt a vágyat, hogy késsel a híd puha kövébe véssem az i , j , k szimbólumok közötti alapvető összefüggéseket:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

amely megoldotta a problémát, persze a felirat régen lekopott. De sokkal tartósabb feljegyzés maradt erről a napról az Akadémiai Tanács Feljegyzések Könyvében, ahol feljegyezték, hogy engedélyt kértem és kaptam arra, hogy a szakosztály első ülésén előadást tartsak a kvaterniókról. Az előadást meg is tartottam a következő hónap november 13-ának napján, hétfőn.

Az egyetemi tananyagban a kvaterniók teste elsősorban érdekes és egyedi példaként szerepel (mint az egyetlen nem kommutatív test, ami a valós test fölött véges dimenziós). A dolgozatban a kvaterniók alkalmazására szeretnék példát mutatni, elsősorban a geometriában a térbeli forgatások elegáns leírásával.

2. Elméleti áttekintés

2.1. Kvaterniók

A kvaterniók a komplex számok 4 dimenzióra való kiterjesztése.

Definíció: $q = a + bi + cj + dk$ alakú formális kifejezésekből, az úgynevezett kvaterniókból áll, ahol a, b, c, d valós számok, i, j, k pedig a \mathbf{Q} kvaterniócsoport elemei.

2.1.1. Kvaternió tulajdonságok:

- q konjugáltja : $\bar{q} = a - bi - cj - dk$
konjugálás tulajdonságai:
 - $\overline{(\bar{q})} = q$, a konjugált konjugáltja az eredeti kvaternió
 - $\overline{q_1 + q_2} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2$ és $\overline{\lambda q} = \lambda \cdot \bar{q}$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}$ esetén, vagyis a konjugálás lineáris leképezés \mathbf{R} fölött
 - $\overline{q_1 \cdot q_2} = \bar{q}_2 \cdot \bar{q}_1$
- q normája : $N_q = q\bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$
- kvaternió valós része: $\mathbf{Re}q = a$
- kvaternió képzetes része: $\mathbf{Im}q = bi + cj + dk$
- a q kvaternió képzetes részéhez tartozó egységvektor $\hat{q} = \frac{\mathbf{Im}q}{N(\mathbf{Im}q)}$
- inverz $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{N_q}$
- trigonometrikus alak : $q = \sqrt{N_q}(\cos\theta + \hat{q}\sin\theta)$
ahol

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{N_q}}$$

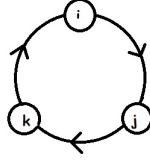
és

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}{\sqrt{N_q}}$$

$N_q = 1$ esetén egység kvaternióról beszélünk.

- exponenciális alak: $q = N_q \cdot e^{\hat{q}\theta}$

- Kvaterniók szorzása nem kommutatív: például $ij \neq ji$



Szorzástáblázat:

Q	1	i	j	k	-1	-i	-j	-k
1	1	i	j	k	-1	$-i$	$-j$	$-k$
i	i	-1	k	$-j$	$-i$	1	k	j
j	j	$-k$	-1	i	$-j$	k	1	$-i$
k	k	j	$-i$	-1	$-k$	$-j$	i	1
-1	-1	$-i$	$-j$	$-k$	1	i	j	k
-i	$-i$	1	$-k$	j	i	-1	k	$-j$
-j	$-j$	k	1	$-i$	j	$-k$	-1	i
-k	$-k$	$-j$	i	1	k	j	$-i$	-1

2.1.2. Műveletek kvaterniókkal

- Összeadás:

$$q_1 + q_2 = (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k$$

Legyen $S(q)$ a q kvaternió valós része, $V(q)$ pedig a képzetes része. Tehát $q = S(q) + V(q)$.

- Szorzás:

$$q_1q_2 = (S(q_1) + V(q_1))(S(q_2) + V(q_2)) = S(q_1)S(q_2) + V(q_1)S(q_2) + S(q_1)V(q_2) + V(q_1)V(q_2)$$

a képzetes részek egymással való szorzása a szorzástáblázat alapján történik.

- Skaláris szorzás:

$$N_q = q\bar{q} = (S(q) + V(q))(S(q) - V(q)) = S^2(q) + V(q)V(q) = S^2(q) + N_{V(q)}$$

Ezek alapján definiálható két kvaternió skaláris szorzata. Tehát belső szorzatként definiáljuk : $\langle p, q \rangle = S(p\bar{q})$

A skaláris szorzattól megkövetelt alaptulajdonságok egyszerűen beláthatók:

- $\langle p, q \rangle = S(p\bar{q}) = S(\overline{p\bar{q}}) = S(q\bar{p}) = \langle q, p \rangle$
- $\langle p, q + r \rangle = S(p\overline{(q+r)}) = S(p\bar{q} + p\bar{r}) = \langle p, q \rangle + \langle p, r \rangle$
- $\alpha \in \mathbf{R}, \alpha \langle p, q \rangle = \langle \alpha p, q \rangle = \langle p, \alpha q \rangle$
- $\langle p, p \rangle = S(p\bar{p}) = N_p \geq 0$; csak akkor egyenlő, ha $p = 0$.

A belső szorzatnak megfelelően a p és q kvaterniók közti szög :

$$\cos \lambda = \frac{S(p\bar{q})}{\sqrt{N_p}\sqrt{N_q}}$$

- Vektoriális szorzat:

Felidézük a már ismert vektoriális szorzatot, és megpróbáljuk kvaterniók segítségével kifejezni, ami a következőképpen fog kinézni:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix} = (c_1d_2 - d_1c_2)i - (b_1d_2 - d_1b_2)j + (b_1c_2 - c_1b_2)k$$

Tehát

$$p \times q = (c_1d_2 - d_1c_2)i + (d_1b_2 - b_1d_2)j + (b_1c_2 - c_1b_2)k$$

Mondjuk p -t és q -t egymásra *merőlegesnek*, ha $S(p\bar{q}) = 0$ és *párhuzamosnak*, ha $V(p\bar{q}) = 0$. Egy tetszőleges kvaternió esetén a valós rész és a vektor rész merőlegesek egymásra:

A skalár illetve a vektor rész konjugáltját az alábbi módon írjuk fel:

$$S(q) = \frac{q+\bar{q}}{2} \text{ és } \overline{V(q)} = \frac{\bar{q}-q}{2}$$

Ekkor

$$S(S(p)\overline{V(p)}) = \frac{1}{4}S((\bar{p}+p)(\bar{p}-p)) = \frac{1}{4}S(\bar{p}\bar{p} - pp)$$

továbbá felhasználva, hogy $S(p\bar{p}) = S(\bar{p}p)$

$$\frac{1}{4}S(\bar{p}\bar{p} - pp) = \frac{1}{8}(\bar{p}\bar{p} - pp + \overline{[\bar{p}\bar{p} - pp]}) = \frac{1}{8}(\bar{p}\bar{p} - pp + pp - \bar{p}\bar{p}) = 0$$

Vagyis a skalár és vektor rész tényleg merőlegesek egymásra, a fent definiált módon.

2.1.3. Tisztán képzetes kvaterniók

Mivel dolgozatomban számos helyen előfordulnak tisztán képzetes kvaterniók, így ezekre külön megnézzük néhány tulajdonságot. Tisztán képzetes kvaterniók azok, ahol a valós rész 0. Ezeknek a kvaternióknak a halmaza három dimenziós vektortér, melynek bázisa $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$. Ezért legfontosabb hasznuk, hogy tisztán képzetes kvaterniókkal leírható a háromdimenziós vektortér.

- Vektoriális szorzat:

Vezessünk be egy $[A, B] = A \cdot B - B \cdot A$ kommutátort, ami megmutatja, hogy az A és a B elemek felcserélhetők-e. Ha ez az érték 0 a két elem felcserélhető. A kommutátor segítségével a vektoriális szorzat egyszerűen megadható, p és q kvaterniók képzetes részének vektoriális szorzata a két kvaternió kommutátorának kétszerese:

$$V(p) \times V(q) = \frac{p \cdot q - q \cdot p}{2} = \frac{[p, q]}{2}$$

ugyanis

$$\begin{aligned} p \cdot q &= (-b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (c_1 d_2 - d_1 c_2)i + (d_1 b_2 - b_1 d_2)j + (b_1 c_2 - c_1 b_2)k \\ q \cdot p &= (-b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (d_1 c_2 - c_1 d_2)i + (b_1 d_2 - d_1 b_2)j + (c_1 b_2 - b_1 c_2)k \end{aligned}$$

tehát

$$p \cdot q - q \cdot p = 2 \cdot \left((c_1 d_2 - d_1 c_2)i + (d_1 b_2 - b_1 d_2)j + (b_1 c_2 - c_1 b_2)k \right)$$

- p és q legyenek tisztán képzetes kvaterniók, akkor

$$\begin{aligned} \vec{p}\vec{q} &= (b_1 i + c_1 j + d_1 k)(b_2 i + c_2 j + d_2 k) = \\ &= -b_1 b_2 + b_1 c_2 k - b_1 d_2 j - c_1 c_2 - c_1 b_2 k + c_1 d_2 i - d_1 d_2 + d_1 b_2 j - d_1 c_2 i = \\ &= -(b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) + \left((c_1 d_2 - d_1 c_2)i + (d_1 b_2 - b_1 d_2)j + (b_1 c_2 - c_1 b_2)k \right) = \\ &= -\vec{p} \cdot \vec{q} + \vec{p} \times \vec{q} \end{aligned}$$

Vagyis a tisztán képzetes kvaterniók szorzata a két vektor skaláris szorzatának (-1) -szereséből és vektoriális szorzatából áll össze.

- Négyzetük valós és nem pozitív.

$$\begin{aligned} (\vec{q})^2 &= (b i + c j + d k)(b i + c j + d k) = \\ &= -b^2 + b c k - b d j - c b k - c^2 + c d i + d b j - d c i - d^2 = -(b^2 + c^2 + d^2) \end{aligned}$$

2.2. Forgatások

A kvaterniók segítségével könnyen leírhatók a forgatások 3 és 4 dimenzióban. Forgatások alatt értem: síkban a pont körüli forgatást és térben a tengely körüli forgatást, majd felidézem a forgatások jellemzőit. Minden forgatás egybevágóság, tehát távolságtartó és ebből következően szögtartó.

Pont körüli forgatás: Pont körüli forgatásnál adott a síkban egy pont, a forgatás középpontja és adott egy előjeles szög, amely a forgatás mértékét és irányát adja meg.

Fontosabb tulajdonságai:

- Ha a forgatás szöge a teljes szög bármely többszörösétől eltérő mértékű, akkor egyetlen fix pont van, a forgatás középpontja. Ha a forgatás szöge a teljes szög többszöröse, akkor a sík minden pontja fixpont.
- A pont körüli forgatás iránytartó.
- A pont körüli forgatás az egyenest olyan egyenesbe viszi át, amely az eredeti egyenessel a forgatás szögével megegyező szöget zár be.

Egyenes körüli forgatás a térben: Adott egy térbeli L egyenes és α szög. Az L körüli α szögű elforgatás bármely L -re merőleges S síkban az $L \cap S$ metszéspont körüli α szögű forgatás, mégpedig minden merőleges síkban ugyanabban az irányban.

2.3. Lineáris transzformációk

Továbbá szükséges idézni a már tanult lineáris transzformációkat is.

Definíció: T test, az $A : T^n \mapsto T^n$ függvény lineáris transzformáció, ha $\forall v, w \in T^n$ vektorra és λ skalárra teljesül, hogy

$$A(v + w) = A(v) + A(w)$$

és

$$A(\lambda v) = \lambda A(v)$$

Tehát tetszőleges A lineáris transzformáció összegtartó és skalárszoros tartó. Mátrixokkal reprezentálhatóak a lineáris transzformációk, így a forgatások is.

2.3.1. Lineáris transzformáció mátrixa

Nézzük meg, hogyan lehetséges a mátrixokkal való reprezentálás. Legyen $A : T^2 \mapsto T^2$ lineáris transzformáció. Ha

$$A = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ és } A = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}, \text{ akkor } A \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{bmatrix}.$$

Tehát megmutattuk, hogy ez a reprezentáció nem lehet más mint 2×2 -es mátrixal történő balról való szorzás. Tehát:

$$A \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{bmatrix}$$

2.4. Forgatások reprezentálása mátrixokkal

Ezek után nézzük, hogy a már felidézett forgatásoknak milyen mátrixok felelnek meg.

A sík O origó körüli α szöggel való elforgatása a síknak az a transzformációja, amelynél az O pont önmagára képződik le. Az (x, y) koordinátájú P pont az (x_1, y_1) koordinátájú P_1 pontra képződik le, ahol

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y_1 &= x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{aligned}$$

Síkban az origó körüli α szögű elforgatás mátrixa:

$$M = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Térben egy adott tengely körüli forgatások az alábbi mátrixokkal írhatók le. Például: x-tengely körüli α szögű forgatás mátrixa:

$$M_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

y-tengely körüli α szögű forgatás mátrixa:

$$M_y = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

z-tengely körüli α szögű forgatás mátrixa:

$$M_z = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a fenti mátrixokban az α szög az óramutató járásával ellentétes irányú szög. Ezeket a forgatásokat fogjuk a kvaterniókkal reprezentálni.

2.5. Reprezentálás kvaterniókkal

A forgatásokat erre alkalmas kvaterniókkal való szorzásként szeretnénk megadni. Mivel a kvaterniók tulajdonságánál láttuk, hogy szorzásuk nem kommutatív így jobb és bal oldalról való szorzás megadására külön leképezéseket kell megadnunk. Rögzítsünk le egy q egység hosszú kvaterniót és erre nézzük az alábbi transzformációkat.

Legyen a q -val való bal oldalról való szorzás :

$$\Phi_L : x \mapsto qx$$

a q -val jobb oldalról való szorzás pedig :

$$\Phi_R : x \mapsto xq$$

ahol x tetszőleges .

Megmutatjuk, hogy ezek a ϕ_L és ϕ_R leképezések 1 determinánsú ortogonális transzformációknak felelnek meg. Először is azt kell megmutatni, hogy a leképezések egybevágóságok:

2.5.1. A Φ_L leképezés tulajdonságai

Hossztartás

Legyen $x \in \mathbf{Q}$ (q az előzőekben rögzített kvaternió amiről tudjuk, hogy $N_q = 1$). Akkor

$$N_{qx} = N_q N_x = N_x$$

Tehát a kvaterniókon értelmezett Φ_L leképezés hossztartó.

Szögtartás

Legyen $x, y \in \mathbf{Q}$ és λ az x és y által bezárt szög, aminek a nagyságát definíció szerint $\cos \lambda$ -val adhatunk meg, ekkor

$$\cos \lambda = \frac{S(xy)}{\sqrt{N_x} \sqrt{N_y}}.$$

A q -val való szorzás után qx és qy által bezárt szög λ' , ahol

$$\cos \lambda' = \frac{S(qx\overline{(qy)})}{\sqrt{N_{qx}}\sqrt{N_{qy}}} = \frac{S(qx\overline{yq})}{\sqrt{N_q}\sqrt{N_x}\sqrt{N_q}\sqrt{N_y}} = \frac{S(\overline{yq}qx)}{N_q\sqrt{N_x}\sqrt{N_y}} = \frac{N_q S(\overline{yx})}{N_q\sqrt{N_x}\sqrt{N_y}} = \frac{S(x\overline{y})}{\sqrt{N_x}\sqrt{N_y}} = \cos \lambda$$

Tehát $\cos \lambda' = \cos \lambda$ vagyis a leképezés szögtartó, mivel a $\cos \lambda$ egyértelműen meghatározza a közrezárt szög nagyságát.

Ez a két tulajdonság együtt bizonyítja, hogy a leképezés egybevágóság. A bizonyítás a Φ_R leképezésekre hasonlóan működik.

2.5.2. A Φ_L és Φ_R transzformációk reprezentálása mátrixokkal

Mivel ezek nyilván valóan lineáris transzformációk, ezért a ϕ_R és ϕ_L leképezések esetén nézhetjük az $1, \hat{i}, \hat{j}$ és \hat{k} képét:

Jelölje $q = a + b\hat{i} + c\hat{j} + d\hat{k}$ a rögzített kvaterniót.

$$\begin{aligned}\Phi_L(1) &= a + b\hat{i} + c\hat{j} + d\hat{k} \\ \Phi_L(\hat{i}) &= -b + a\hat{i} + d\hat{j} - c\hat{k} \\ \Phi_L(\hat{j}) &= -c - d\hat{i} + a\hat{j} + b\hat{k} \\ \Phi_L(\hat{k}) &= -d + c\hat{i} - b\hat{j} + a\hat{k}\end{aligned}$$

Jobbról való szorzás esetén:

$$\begin{aligned}\Phi_R(1) &= a + b\hat{i} + c\hat{j} + d\hat{k} \\ \Phi_R(\hat{i}) &= -b + a\hat{i} - d\hat{j} + c\hat{k} \\ \Phi_R(\hat{j}) &= -c + d\hat{i} + a\hat{j} - b\hat{k} \\ \Phi_R(\hat{k}) &= -d - c\hat{i} + b\hat{j} + a\hat{k}\end{aligned}$$

Alkalmazzuk a szokásos megfeleltetéseket:

$$1 \equiv (1, 0, 0, 0), \hat{i} \equiv (0, 1, 0, 0), \hat{j} \equiv (0, 0, 1, 0), \hat{k} \equiv (0, 0, 0, 1)$$

Ezeket felhasználva a Φ_L és Φ_R lineáris transzformációk mátrix reprezentációi:

$$A_{\Phi_L} = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix}$$

és hasonlóan

$$A_{\Phi_R} = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix}$$

Vegyük észre, hogy az A_{Φ_L} és A_{Φ_R} mátrixok ortogonálisak, ami azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} A_{\Phi_L} A_{\Phi_L}^T &= I \\ A_{\Phi_R} A_{\Phi_R}^T &= I \end{aligned}$$

,ahol I az egységmátrix, továbbá $\det(A_{\Phi_L}) = 1$, $\det(A_{\Phi_R}) = 1$. Tehát az (A_{Φ_L}) és az (A_{Φ_R}) mátrixok elemei az $SO(4)$ -nek azaz az 1 determinánsú, 4×4 -es ortogonális mátrixokból álló csoportnak.

2.5.3. Forgásszög meghatározása

Legyen ω az x és a qx kvaterniók közötti szög, ahol $q = \cos\theta + \hat{q}\sin\theta$. Ekkor:

$$\cos\omega = \frac{S(x\overline{qx})}{\sqrt{N_x}\sqrt{N_{qx}}} = \frac{S(x\overline{x\hat{q}})}{N_x\sqrt{N_q}} = \frac{S(\hat{q})}{\sqrt{N_q}} = \frac{S(q)}{\sqrt{N_q}} = S(q) = \cos\theta$$

Tehát az ω szög nagysága megegyezik a θ szög nagyságával, vagyis a szög csak q -től függ. Ebben az értelemben beszélhetünk forgatásról, amikor az x és a képe által bezárt szög állandó és ez az ω szög lesz a forgatás szöge.

3. Forgatások a négydimenziós térben

Nézzük meg, hogy mely forgatásokat kapunk meg ezen a módon. Mint ahogy már fentebb is definiáltuk, vesszük a

$$q = \cos\theta + \hat{q}\sin\theta$$

egységkvaterniót (tehát $N_q = 1$) és legyen x egy tetszőleges kvaternió. Alkalmazzuk a Φ_L transzformációt az x és $\hat{q}x$ kvaterniókra:

$$qx = x \cos\theta + (\hat{q}x) \sin\theta$$

és

$$q(\hat{q}x) = \hat{q}x \cos\theta - x \sin\theta$$

Vezessük be az $x_1 = \hat{q}x$ jelölést. Az így kapott x_1 és az x kvaterniók merőlegesek egymásra, mivel:

$$S(x\overline{\hat{q}x}) = S(-x\overline{x\hat{q}}) = -x\overline{x}S(\hat{q}) = 0$$

Tehát azt kaptuk hogy az x és x_1 által kifeszített sík invariáns a transzformációra, mivel

$$qx = x \cos \theta + x_1 \sin \theta$$

illetve

$$qx_1 = -x \sin \theta + x_1 \cos \theta.$$

Mátrix alakba felírva:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

vagyis az x és x_1 által kifeszített síkra való megszorítása θ szöggel pozitív irányba történő forgatás.

A Φ_R transzformáció alkalmazásával pedig a következő eredményeket kapjuk: Hasonlóan bevezetjük a $x_2 = x\hat{q}$ jelölést. Ekkor

$$xq = x \cos \theta + x_2 \sin \theta$$

és

$$x_2q = -x \sin \theta + x_2 \cos \theta$$

Tehát itt megkaptuk hogy az x és x_2 által kifeszített síkban való forgatást θ szöggel negatív irányba.

Mivel láttuk, hogy az x és x_1 által kifeszített sík invariáns a ϕ_L transzformációra-ami ortogonális- így a sík merőleges kiegészítő síkja is invariáns lesz a ϕ_L -re nézve.

3.1. Speciális esetek

Nézzük meg a következő esetet:

Válasszuk tetszőleges kvaterniónak az $x = 1$ -et, akkor kapjuk , hogy $x_1 = \hat{q}$. Ebben az esetben a fenti kiszámolt eredmények a következők lesznek:

Φ_L transzformációval:

$$q1 = \cos \theta + \hat{q} \sin \theta$$

és

$$q\hat{q} = -\sin \theta + \hat{q} \cos \theta$$

Így megkaptuk az 1 és \hat{q} elemek által kifeszített síkban való pozitív irányba forgatást θ szöggel.

Φ_R **transzformációval:**

$$1q = \cos \theta + \hat{q} \sin \theta$$

és

$$\hat{q}q = -\sin \theta + \hat{q} \cos \theta,$$

ami pedig a negatív irányba történő forgatás θ szöggel az 1 és \hat{q} elemek által meghatározott síkban.

Nézzük a \hat{v} , \hat{w} , \hat{q} tisztán képzetes kvaterniókat, melyek páronként merőlegesek egymásra és jobbrendszeret alkotnak. Ekkor nyilván a skalár-szorzatok:

$$\hat{v} \cdot \hat{w} = 0, \hat{v} \cdot \hat{q} = 0, \hat{w} \cdot \hat{q} = 0$$

a vektoriális szorzatok pedig:

$$\hat{v} \times \hat{w} = \hat{q}, \hat{w} \times \hat{q} = \hat{v}, \hat{q} \times \hat{v} = \hat{w}$$

Most válasszuk az x -et \hat{v} -nak. Ebben az esetben a transzformációkkal a következőket kapjuk :

Φ_L **transzformációval:**

$x_1 = \hat{q}\hat{v} = \hat{q} \times \hat{v} = \hat{w}$, így

$$q\hat{v} = \hat{v} \cos \theta + \hat{q}\hat{v} \sin \theta = \hat{v} \cos \theta + \hat{w} \sin \theta$$

és

$$q\hat{w} = \hat{w} \cos \theta + \hat{q}\hat{w} \sin \theta = -\hat{v} \sin \theta + \hat{w} \cos \theta$$

Így megkaptuk a \hat{v} és \hat{w} tisztán képzetes kvaterniók által meghatározott síkban való pozitív irányú forgatást θ szöggel.

Φ_R **transzformációval:**

$x_2 = \hat{v}\hat{q} = \hat{v} \times \hat{q} = -\hat{w}$, így

$$\hat{v}q = \hat{v} \cos \theta + \hat{v}\hat{q} \sin \theta = \hat{v} \cos \theta - \hat{w} \sin \theta$$

és

$$\hat{w}q = \hat{w} \cos \theta + \hat{w}\hat{q} \sin \theta = \hat{v} \sin \theta + \hat{w} \cos \theta$$

amivel megkaptuk a negatív irányú θ szöggel történő forgatást a \hat{v} és \hat{w} által meghatározott síkban.

4. Forgatások a háromdimenziós térben

Láttuk, hogy a Φ_R és Φ_L transzformációk forgatások. A két forgatást egyesítve megkaphatjuk a qxq^{-1} műveletet. Ez az új transzformáció 2θ szöggel forgat a \hat{q} tengely körül tisztán képzetes kvaterniókat. Ugyanis tisztán képzetes kvaterniókra alkalmazva a transzformációt, szintén tisztán képzetes kvaterniót kapunk. Ezt majd a következőkben bizonyítani is fogjuk.

Definiáljuk a következő transzformációt, amiről be szeretnénk látni, hogy alkalmazva a 3 dimenziós térben, forgatást kapunk:

$$\phi_q(x) = qxq^{-1}$$

ahol:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{N_x}(\cos \phi + \hat{x} \sin \phi) \\ q &= \cos \theta + \hat{q} \sin \theta \text{ ugyanis } N_q = 1 \\ \hat{x}^2 &= -1 \text{ és } \hat{q}^2 = -1 \end{aligned}$$

Szeretnénk megmutatni, hogy ez a transzformáció az x vektor részének 2θ szöggel történő forgatása a q vektor része (valójában \hat{q}) körül.

4.1. Forgástengely meghatározása

Ehhez először megnézzük hogy a ϕ_q leképezés fixen hagyja-e $V(q)$ -t azaz a q képzetes részét:

$$\begin{aligned} \phi_q(V(q)) &= qV(q)q^{-1} = (S(q) + V(q))V(q)\left[\frac{1}{N_q}(S(q) - V(q))\right] = \\ &= \frac{1}{N_q}(S(q) + V(q))[S(q)V(q) - V(q)V(q)] = \\ &= \frac{1}{N_q}(S(q) + V(q))[S(q)V(q) - V(q)V(q)] = q[q^{-1}V(q)] = V(q) \end{aligned}$$

Tehát mivel $V(q)$ -t fixen hagyja, így ez kell, hogy legyen a forgatás tengelye.

4.2. Bizonyítás a 4-dimenziós forgatások segítségével

Az eddig leírtak tudatában, a 3-dimenziós forgatás bizonyítása egyszerűen történik.

Az x pontosan akkor képzetes kvaternió ha

$$\bar{x} = -x.$$

Tehát, elég a transzformációra ezt megmutatni:

$$\overline{qxq^{-1}} = \overline{qx\bar{q}} = \overline{\bar{q}xq} = \overline{q\bar{x}q} = -q\bar{x}q = -qxq^{-1}.$$

Így bebizonyosodott, hogy a $x \mapsto qxq^{-1}$ transzformáció 3-dimenziós forgatása x vektor részének 2θ szöggel q vektor része körül. Tehát sikerült minden 3-dimenziós forgatást így előállítani.

5. Tükrözések

Megmutatjuk, hogy a forgatás 2 merőleges síkra való tükrözéssel előállítható. Síkbeli forgatásokról tudjuk, hogy előállnak két egymás utáni tükrözésből. Valójában, minden 3-dimenziós forgatás felbontható 2 síkra való tükrözésre, ahol a síkok metszészvonala a forgatás tengely. A forgatás szöge pedig a két sík által bezárt szög kétszerese lesz.

Legyen \hat{q} a forgástengely és w egy vektor. A w vektor θ szögű elforgatotják q körül, az alábbi módon írhatjuk fel:

$$w_R = qwq^{-1}$$

ahol $q = \cos \frac{\theta}{2} + \hat{q} \sin \frac{\theta}{2}$. A két sík legyen d és d' a hozzájuk tartozó normál vektorok pedig \hat{n} és \hat{n}' . A két sík metszészvonala pedig a \hat{q} által meghatározott egyenes. Ekkor

$$\hat{n} \times \hat{n} = \hat{q} \sin \beta \text{ és } \hat{n} \cdot \hat{n} = \cos \beta$$

ha a két sík β szöget zár be egymással.

Tükrözzük w -t a d síkra, ekkor kapjuk, hogy

$$w' = \hat{n}w\hat{n}$$

majd w' -t tükrözzük a d' síkra:

$$w'' = \hat{n}'(\hat{n}w\hat{n})\hat{n}' = (\hat{n}'\hat{n})w(\hat{n}\hat{n}')$$

A kvaternió tulajdonságokat alkalmazva:

$$\begin{aligned} \hat{n}\hat{n}' &= -\hat{n} \cdot \hat{n}' + \hat{n} \times \hat{n}' = -\cos \beta + \hat{q} \sin \beta \\ \hat{n}'\hat{n} &= -\hat{n}' \cdot \hat{n} + \hat{n}' \times \hat{n} = -\cos \beta - \hat{q} \sin \beta \end{aligned}$$

De mivel

$$(\hat{n}'\hat{n})^{-1} = (-\cos \beta - \hat{q} \sin \beta)^{-1} = (-\cos \beta + \hat{q} \sin \beta) = \hat{n}\hat{n}'$$

Ezért

$$w'' = (\hat{n}'\hat{n})w(\hat{n}\hat{n}')^{-1}$$

Ha $\beta = \frac{\theta}{2}$ akkor $w'' = w_R$ ami bizonyítja az állítást.

Legyen ϕ egy leképezés a w tisztán képzetes kvaternión:

$$\phi : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^3 \quad \phi(w) = qwq^{-1}$$

$N_q = 1$ és \mathbf{R}^3 bázisa $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$.

Legyen $q = a + b\hat{i} + c\hat{j} + d\hat{k}$ ekkor

$$\begin{aligned}\phi(\hat{i}) &= \hat{i}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) + \hat{j}(2ad + 2bc) + \hat{k}(2bd - 2ac) \\ \phi(\hat{j}) &= \hat{i}(-2ad + 2bc) + \hat{j}(a^2 + c^2 - b^2 - d^2) + \hat{k}(2ad + 2cd) \\ \phi(\hat{k}) &= \hat{i}(2ac + 2bd) + \hat{j}(2cd - 2ab) + \hat{k}(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)\end{aligned}$$

tehát a leképezést az alábbi mátrixszal reprezentálhatjuk:

$$M = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & -2ad + 2bc & 2ac + 2bd \\ 2ad + 2bc & a^2 + c^2 - b^2 - d^2 & 2cd - 2ab \\ 2bd - 2ac & 2ad + 2cd & a^2 + d^2 - b^2 - c^2 \end{bmatrix}$$

Könnyű ellenőrizni, hogy az M mátrix ortogonális: $MM^T = I$ és $\det M = 1$.

Tehát a $\phi(w) = qwq^{-1}$ lineáris leképezés forgatást ad \mathbf{R}^3 -ban.

Másrészről, ha a lineáris leképezés

$$\theta : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^3 \quad \theta(w) = \hat{q}w\hat{q}$$

akkor a leképezés mátrix reprezentációja

$$N = \begin{bmatrix} -b^2 + c^2 + a^2 & -2bc & -2bd \\ -2bc & -c^2 + b^2 + d^2 & -2cd \\ -2bd & -2cd & -d^2 + b^2 + c^2 \end{bmatrix}$$

Itt az N mátrix szintén ortogonális, viszont $\det N = -1$, tehát tükrözésről van szó, mégpedig w tükrözése a \hat{q} normálvektorú síkra.

6. Alkalmazások

Mint azt ahogy azt már korábban leírtam a kvaterniók alkalmasak a forgatások leírására. Ezért számos helyen alkalmazzák.

6.1. Geometriában

Azt már az előzőekben láttuk, hogy az origón átmenő tengelyű 3-dimenziós forgatások mindegyike előáll az $x \mapsto qxq^{-1}$ transzformációval. Hasonlóan teljesül nem origón átmenő forgás tengely esetén is, tehát minden esetben. Most ezt szeretném megmutatni.

Legyen q egy általános egységkvaternió, x tetszőleges vektor, amit forgatni szeretnénk. Ekkor a következő függvény adja meg a forgatást:

$$x \mapsto q(x + e)q^{-1} - e$$

ahol e egy vektor, melynek segítségével a forgástengelyt és a forgatni kívánt vektort az origóba toljuk, majd a forgatás után visszatoljuk. Az így kapott művelet szintén forgatás:

$$q(x + e)q^{-1} - e = qxq^{-1} + (qeq^{-1} - e)$$

mivel az $qeq^{-1} - e$ vektor nem függ az x -től, így helyettesíthetjük egy v vektorral. Így a forgatás általános alakja 3-dimenziós forgatások esetén:

$$x \mapsto qxq^{-1} + v$$

Ezek után megnézhetjük, hogy két (általános helyzetű) egyenes esetén, az egyik egyenes körüli forgatás, majd a másik egyenes körüli forgatás együtt forgatást ad-e. Legyen q_1 és q_2 tengely körüli forgatás, v_1, v_2 vektorok, ekkor a két forgatás egymásutánja:

$$q_2(q_1xq_1^{-1} + v_2)q_2^{-1} + v_1 = (q_2q_1)x(q_2q_1)^{-1} + q_2v_2q_2^{-1} + v_1$$

mivel $q_2v_2q_2^{-1} + v_2$ független x -től így helyettesíthetjük egy w vektorral. Vagyis ekkor is forgatást kapunk, melynek alakja:

$$(q_2q_1)x(q_2q_1)^{-1} + w$$

Ennek bizonyítása kvaterniókkal egyszerű, geometriai úton viszont nehezebben mutatható meg.

Nézzünk meg példákat kvaterniókkal való forgatásokra:

Első példa

Forgassuk el a koordináta-rendszert z -tengely körül -60° -kal. Határozzuk meg a $P(2, 3, -4)$ pont koordinátáit az új rendszerben.

Megoldás mátrixszal

$$\begin{aligned} \cos(-60^\circ) &= \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \\ \sin(-60^\circ) &= -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ -\sqrt{3} + \frac{3}{2} \\ -4 \end{pmatrix} \\ P' &= \left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{3} + \frac{3}{2}, -4\right) \end{aligned}$$

Megoldás kvaterniókkal

$$\begin{aligned}
 q &= \cos 30^\circ - k \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}k \\
 x &= 2i + 3j - 4k \\
 qxq^{-1} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}k\right)(2i + 3j - 4k)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}k\right) \\
 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}k\right)(2i + 3j - 4k) &= \sqrt{3}i + \frac{3\sqrt{3}}{2}j - 2\sqrt{3}k - j + \frac{3}{2}i - 2 \\
 \left(-2 + \frac{2\sqrt{3}+3}{2}i + \frac{3\sqrt{3}-2}{2}j - 2\sqrt{3}k\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}k\right) &= -\sqrt{3} - k + \frac{3+3\sqrt{3}}{4}i - \\
 \frac{2\sqrt{3}+2}{4}j + \frac{9-2\sqrt{3}}{4}j + \frac{3\sqrt{3}-2}{4}i - 3k + \sqrt{3} &= \left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i - \left(\sqrt{3} + \frac{3}{2}\right)j - 4k \\
 P' &= \left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{3} + \frac{3}{2}, -4\right)
 \end{aligned}$$

Második példa

Határozzuk meg azt a forgatást, amely az alábbi két forgatás egymás utáni elvégzésével keletkezik:

$$\begin{aligned}
 R_1: & \text{ x-tengely körüli } 90^\circ\text{-os forgatás} \\
 R_2: & \text{ z-tengely körüli } 45^\circ\text{-os forgatás}
 \end{aligned}$$

Megoldása

$$\begin{aligned}
 R_1 : q_1 &= \cos 45^\circ + \hat{i} \sin 45^\circ \\
 R_2 : q_2 &= \cos 22.5^\circ + \hat{k} \sin 22.5^\circ \\
 R_2 R_1 : q_2 q_1 &= (\cos 22.5^\circ + \hat{k} \sin 22.5^\circ)(\cos 45^\circ + \hat{i} \sin 45^\circ) = \\
 & \cos 45^\circ (\cos 22.5^\circ + \hat{i} \cos 22.5^\circ + \hat{j} \sin 22.5^\circ + \hat{k} \sin 22.5^\circ)
 \end{aligned}$$

Mivel q_1 és q_2 kvaterniók egység hosszúak és azt is tudjuk, hogy

$$q_2 q_1 = \cos \phi + \hat{n} \sin \phi$$

ezek alapján a ϕ szög meghatározható a szögfüggvények segítségével:

$$\begin{aligned}
 \cos \phi &= \cos 22.5^\circ \cos 45^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\right)} \\
 \sin \phi &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sin^2 22.5^\circ\right)} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(3 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \\
 \tan \phi &= \sqrt{\frac{3\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} = \sqrt{7 - 4\sqrt{2}} \quad \phi = 49.210^\circ
 \end{aligned}$$

Innen következik, hogy a forgatás szöge $2\phi = 98.42^\circ$, a forgatás tengelye pedig

$$\left(1, \sqrt{2} - 1, \sqrt{2} - 1\right)$$

6.1.1. Origón átmenő tetszőleges tengely körüli forgatás

A $c = (c_1, c_2, c_3)$ egységvektor által meghatározott tengely körüli γ szögű forgatás mátrixát az alábbi módon adhatjuk meg:

$$Q(c, \gamma) = \begin{bmatrix} p + qc_1^2 & qc_1c_2 + rc_3 & qc_1c_3 + rc_2 \\ qc_1c_2 + rc_3 & p + qc_2^2 & qc_2c_3 - rc_1 \\ qc_1c_3 - rc_2 & qc_2c_3 + rc_1 & p + qc_3^2 \end{bmatrix}$$

ahol $p = \cos \gamma$, $q = 1 - p$, $r = \sin \gamma$.

Jelölje $Tr(Q)$ a főátlóban lévő elemek összegét, ekkor

$$Tr(Q) = 1 + 2 \cos \gamma.$$

A mátrix és a forgásszög ismeretében a c forgástengely meghatározható az alábbi módon, ha $0 < \gamma < \pi$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2 \sin \gamma} \begin{bmatrix} Q_{32} - Q_{23} \\ Q_{13} - Q_{31} \\ Q_{21} - Q_{12} \end{bmatrix}$$

Harmadik példa

Legyen $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$! Bizonyítsuk be, hogy $A = \alpha F$, ahol α valós szám, F pedig egy valódi forgatást reprezentáló mátrix! Keressük meg, hogy mely tengely körül, és mekkora szöggel forgat az F mátrix!

Megoldás

Válasszuk α -t 3-nak, ekkor a kapott F mátrix:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Innen a forgásszög meghatározható:

$$2 = 1 + 2 \cos \gamma \text{ vagyis } \cos \gamma = \frac{1}{2}$$

tehát a forgatás szöge: $\gamma = 60^\circ$.

Az F mátrix és a forgásszög ismeretében meghatározható a forgástengely:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tehát az F mátrix 60° -os szöggel forgat a $(-1, -1, 1)$ tengely körül.

Negyedik példa

Legyen F_1 az $a = (1, 1, 1)$ vektorral megadott tengely körüli 120 fokos, F_2 pedig a $b = (1, 1, -1)$ vektorral megadott tengely körüli 60 fokos forgatás operátora! Írjuk fel a forgásmátrixokat! Számítsuk ki, hogy az $F_3 = F_1F_2$, illetve $F_4 = F_2F_1$ forgásmátrixok mely tengelyek körüli forgatnak, valamint számoljuk ki az eredőforgásszögek cosinusát!

Megoldás

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

F_1F_2 :

$$F_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

ezek alapján megkapjuk, hogy: $Tr(F_3) = -\frac{2}{3}$, amiből következik, hogy $\cos \gamma = -\frac{5}{6}$

A forgástengely pedig:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \frac{6}{2\sqrt{11}} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{\sqrt{11}}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} \end{pmatrix}$$

F_2F_1 :

$$F_4 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

ezek alapján megkapjuk, hogy: $Tr(F_4) = -\frac{2}{3}$, amiből következik, hogy $\cos \gamma = -\frac{5}{6}$

A forgástengely pedig:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \frac{6}{2\sqrt{11}} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} \end{pmatrix}$$

Megoldás kvaterniókkal

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\ \cos 60^\circ &= \frac{1}{2} \text{ és } \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ q_1 &= \cos 60^\circ + \hat{a} \sin 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k \\ \hat{b} &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\ \cos 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ és } \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \\ q_2 &= \cos 30^\circ + \hat{b} \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}i + \frac{1}{2\sqrt{3}}j - \frac{1}{2\sqrt{3}}k \\ q_3 &= q_1 q_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}i + \frac{1}{2\sqrt{3}}j - \frac{1}{2\sqrt{3}}k \right) = \\ &= 4 \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4\sqrt{3}}i + \frac{1}{4\sqrt{3}}j - \frac{1}{4\sqrt{3}}k + \frac{\sqrt{3}}{4}i - \frac{1}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3}}k + \frac{1}{4\sqrt{3}}j + \frac{\sqrt{3}}{4}j - \frac{1}{4\sqrt{3}}k - \frac{1}{4\sqrt{3}} - \\ &\quad \frac{1}{4\sqrt{3}}i + \frac{\sqrt{3}}{4}k + \frac{1}{4\sqrt{3}}j - \frac{1}{4\sqrt{3}}i + \frac{1}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}i + \frac{3}{2\sqrt{3}}j + \frac{1}{2\sqrt{3}}k. \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy

$$\cos \phi = \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ tehát } \phi \simeq 73.22^\circ \text{ vagyis a forgásszög: } \theta \simeq 146.44^\circ \text{ ami azt jelenti, hogy } \cos \theta = -\frac{5}{6}$$

$\sin \phi$ -t felhasználva a forgástengely: $\left(\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}} \right)$

$$\begin{aligned} q_4 &= q_2 q_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}i + \frac{1}{2\sqrt{3}}j - \frac{1}{2\sqrt{3}}k \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k \right) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i + \frac{\sqrt{3}}{4}j + \frac{\sqrt{3}}{4}k + \frac{1}{4\sqrt{3}}i - \frac{1}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3}}k - \frac{1}{4\sqrt{3}}j + \frac{1}{4\sqrt{3}}j - \frac{1}{4\sqrt{3}}k - \frac{1}{4\sqrt{3}} + \\ &\quad \frac{1}{4\sqrt{3}}i - \frac{1}{4\sqrt{3}}k - \frac{1}{4\sqrt{3}}j + \frac{1}{4\sqrt{3}}i + \frac{1}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{3}{2\sqrt{3}}i + \frac{1}{2\sqrt{3}}j + \frac{1}{2\sqrt{3}}k \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy

$$\cos \phi = \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ tehát } \phi \simeq 73.22^\circ \text{ vagyis a forgásszög: } \theta \simeq 146.44^\circ \text{ ami azt jelenti, hogy } \cos \theta = -\frac{5}{6}$$

$\sin \phi$ -t felhasználva a forgástengely: $\left(\frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}} \right)$

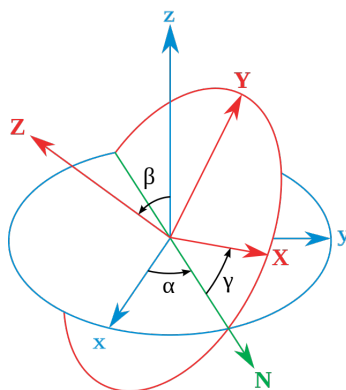
6.2. Fizikában

6.2.1. Merev testek forgatása

Merev testnek azt a testet nevezzük, amelyre tetszőleges kölcsönhatás során fennáll, hogy közben bármely két pontjának távolsága állandó. A klasszikus mechanikában, előforduló merev testek gyakran forognak egy adott tengely körül. Ilyen például a Föld tengelye körüli forgása, fogaskerekek vagy óriáskerék forgása. Ezek leírására alkalmasak az Euler-szögek. Nézzünk meg egy feladatot megoldását Euler-szögekkel és kvaternió forgatással is.

Euler szögek

Két, közös origójú, derékszögű koordináta-rendszer egymáshoz viszonyított helyzetét egyértelműen jellemezhetjük az Euler-féle szögekkel.



A rögzített koordináta-rendszert kis betűkkel (x, y, z) , az elforgatott koordináta-rendszert pedig nagy betűkkel (X, Y, Z) jelöljük. Az xy és XY síkok metszéspontja a csomóvonal, jelölése: N .

Az Euler-szögek:

- α az x tengely és az N csomóvonal közötti szög
- β a z tengely és a Z tengely közötti szög
- γ az X tengely és az N csomóvonal közötti szög

A forgatást megvalósító mátrix:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ahol a mátrixok rendre z , N és Z tengelyek körüli forgatásokat jelölik.

Ötödik példa

Legyen $R_x(\frac{\pi}{2}) : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ az x tengely körüli $\frac{\pi}{2}$ szöggel történő forgatás, $R_y(\frac{\pi}{2}) : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ az y tengely körüli $\frac{\pi}{2}$ szöggel való forgatás. Igazoljuk, hogy $R_x(\frac{\pi}{2}) \cdot R_y(\frac{\pi}{2}) \neq R_y(\frac{\pi}{2}) \cdot R_x(\frac{\pi}{2})$!

Megoldás

$$R_x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_x\left(\frac{\pi}{2}\right)R_y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_y\left(\frac{\pi}{2}\right)R_x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hatodik példa

Az $\mathbf{n} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ tengely körül 60° -os szöggel forgassuk el az $x = (1, 1, 0)$ pontban lévő testet. Határozzuk meg, hova kerül.

Megoldás

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ 0 & -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ & 0 \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ 0 & \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{11}{8} \\ -\frac{\sqrt{3}}{8} \end{pmatrix}$$

Kvaterniókkal

$$\begin{aligned}
 q &= [\cos \frac{\phi}{6}, \mathbf{n} \cdot \sin \frac{\phi}{6}] = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}j + \frac{\sqrt{3}}{4}k \\
 q^{-1} &= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}j - \frac{\sqrt{3}}{4}k \\
 x &= i + j \\
 qxq^{-1} &= \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}j + \frac{\sqrt{3}}{4}k \right) (i + j) \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}j - \frac{\sqrt{3}}{4}k \right) \\
 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}j + \frac{\sqrt{3}}{4}k \right) (i + j) &= \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{4}k + \frac{\sqrt{3}}{4}j + \frac{\sqrt{3}}{2}j - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i \\
 \left(-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i - \frac{3\sqrt{3}}{4}j - \frac{1}{4}k \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}j - \frac{\sqrt{3}}{4}k \right) &= -\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{16}j + \frac{\sqrt{3}}{16}k + \frac{3}{8}i - \frac{\sqrt{3}}{16}k + \\
 \frac{3}{16}j + \frac{9}{8}j + \frac{3\sqrt{3}}{16} - \frac{9}{16}i - \frac{\sqrt{3}}{8}k - \frac{1}{16}i - \frac{\sqrt{3}}{16} &= -\frac{4}{16}i + \frac{22}{16}j - \frac{2\sqrt{3}}{16}k = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{11}{8} \\ -\frac{\sqrt{3}}{8} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

6.2.2. Pauli mátrixok

A kvantummechanikának fontos mátrixai a Pauli mátrixok, amelyek tulajdonképpen kvaterniókat reprezentálják, a dolgozatomban mutatott 4×4 -es mátrixok helyett 2×2 -es komplex elemű mátrixokkal.

Minden kvaternióhoz hozzárendelhető egy $A(q)$ 2×2 -es komplex mátrix:

$$A(q) = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}$$

mivel

$$\begin{aligned}
 A(i) &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \\
 A(j) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
 A(k) &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Tehát a kvaterniókat lehetséges az $U(2)$ mátrixokkal ábrázolni, ahol az egységek: $I, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, a σ_i mátrixok a Pauli mátrixok. A Pauli-mátrixok a kvantummechanika fontos mátrixai, ugyanis a skalárszorosai a spinoperátorok.

A kvaternió összefüggéseikhez hasonló összefüggések itt is megadhatók:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \\
 -i\sigma_x\sigma_y\sigma_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I
 \end{aligned}$$

Nem kommutatívak:

$$\begin{aligned}\sigma_x \cdot \sigma_y - \sigma_y \sigma_x &= 2i\sigma_z \\ \sigma_y \cdot \sigma_z - \sigma_z \sigma_y &= 2i\sigma_x \\ \sigma_z \cdot \sigma_x - \sigma_x \sigma_z &= 2i\sigma_y\end{aligned}$$

Pauli-mátrixok determinánsa:

$$\det \sigma_i = -1$$

Pauli-mátrixokkal forgatni is lehet, az alábbi módon:

$$e^{-i\frac{\alpha}{2}\sigma \cdot \mathbf{n}} = \cos \frac{\alpha}{2} \mathbf{1} - i \sin \frac{\alpha}{2} \sigma \cdot \mathbf{n}$$

ahol \mathbf{n} a forgástengely irányvektora \mathbf{R}^3 -ban, α a forgásszög ami 0 és 4π közötti értékeket vehet fel.

Továbbá használják még a forgatásokat például térbeli mozgó objektumok helyzetének leírására mint például űrhajó, repülőgép, a robotok irányításában, kameramozgásoknál vagy a geodéziában illetve a kartográfiában is. Ezeknél gyakran előfordul, hogy a forgatás leírására kvaterniókat használnak a számolások egyszerűsítésére.

Hivatkozások

- [1] J.P.Ward:Quaternions and Cayley numbers
- [2] KöMaL: 1986 november
- [3] <http://hu.wikipedia.org>
- [4] <http://en.wikipedia.org>
- [5] Tasnádi P.-Skrapits L.-Bérces Gy.: Mechanika I. (tankönyv)
- [6] Pogáts F.: Vektorgeometria
- [7] Görbe T. F.: Lineáris Algebra Feladatgyűjtemény
- [8] Dr. Szörényi M.: Szemléletes lineáris algebra (jegyzet)
- [9] Alkalmazott vektorszámítás I. (vizsgazh feladatok)