SZÉLSŐÉRTÉKKEL KAPCSOLATOS TÉTELEK, PÉLDÁK, ELLENPÉLDÁK

SZAKDOLGOZAT

KÉSZÍTETTE: **Kovács Dorottya**

Matematika Bsc, tanári szakirány

TÉMAVEZETŐ: **Gémes Margit**

Műszaki gazdasági tanár

Analízis tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2014

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Szakdolgozatom témája a szélsőértékek. Azért ezt a címet kapta a dolgozatom, hogy szélsőértékkel kapcsolatos tételek, példák, ellenpéldák, mert olyan különleges függvényeket próbálok bemutatni, amelyeknek érdekessége a szélsőértékekben rejlik. Igyekszem minél színesebb, változatosabb példákon keresztül ismertetni az alapvető tételek szükséges feltételeit, tételek alkalmazásait.

Dolgozatom három részre tagolódik, az elején a fontosabb definíciókat vezetem fel, azt követően a szakdolgozatban használt legfontosabb tételekről írok, illetve bizonyítom azokat. A maradék részben pedig igyekszem olyan példákat, ellenpéldákat ismertetni, melyek felkeltik az olvasók figyelmét, azt remélve, hogy egy átfogó képet tudok nyújtani a szélsőértékekről.

Gyakran megjelenítem a függvényeket a könnyebb elképzelhetőség miatt. Ábrázolásom során a wolframalphát, illetve a geogebrát használom.

Remélem olyan szakdolgozatot sikerül összeállítanom, melyet a jövőben, pályafutásom során sikerül felhasználni, amely példákkal feltudom majd kelteni a tanulók érdeklődését is a függvények, illetve a matematika iránt.

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom a témavezetőmnek, Gémes Margitnak, aki mindig készségesen segített felvetéseivel, építő ötleteivel szakdolgozat írásom során. Ha kérdésem volt mindig szívesen fogadott, időt nem sajnálva szakdolgozatom elkészülésére.

Köszönettel tartozom még szüleimnek, testvéremnek, akik mindig támogattak és bíztattak szavaikkal, valamint barátaimnak, akik mindvégig mellettem álltak, motiváltak.

1. Alapfogalmak

Definíció: Adott két halmaz, A és B. Tegyük fel, hogy minden $a \in A$-hoz valamilyen módon hozzá van rendelve egy $b \in B$ elem, amelyet úgy jelölünk,hogy $b = f(a)$. Ezt a hozzárendelést függvénynek vagy leképezésnek nevezzük.

Jelölés: $f: A \to B$, azaz f leképezi A-t B-be. Az A halmazt f értelmezési tartományának nevezzük, melynek jelölése $A = D(f)$. Azon $b \in B$ halmazát, amelyek megfelelnek valamely $a \in A$ – nak, f értékkészletének nevezzük, és $R(f)$ – fel jelöljük.

Definíció: Az f *függvény alulról (felülről) korlátos* az $A \subset \mathbb{R}$ halmazon, ha $A \subset D(f)$, és van olyan K szám, hogy $\forall x \in A - ra\, f(x) \geq K$ $(\forall x \in A - ra\, f(x) \leq K)$.

Definíció: Az f *korlátos* az $A \subset \mathbb{R}$ halmazon, ha alulról és felülről is korlátos az A –n.

Definíció: Legyen f értelmezve az A halmazon. Ha az A halmazhoz tartozó $R(f)$ értékkészletnek van legnagyobb eleme (van legkisebb eleme), akkor ezt az f függvény A-n felvett *(abszolút) maximum*ának *((abszolút) minimum*ának*)* nevezzük és $maxf(A)$-val ($minf(A)$ -val) vagy $maxf(x)$- szel ($minf(x)$)-szel jelöljük.

Ha $a \in A$ és $f(a) = maxf(A)$ ($f(a) = minf(A)$), akkor azt mondjuk, hogy a az f függvény A-hoz tartozó *abszolút maximumhelye (minimumhelye).*

Példa: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{x}\}$ függvény [0,2]-ben korlátos, értékkészletének felső határa 1, de a függvény sehol nem 1. Tehát a függvénynek nincs maximális függvényértéke [0,2]-ben.

Definíció: $\boldsymbol{f}$ függvénynek az a pontban $lokális\ maximuma$ ($illetve\ minimuma$) van, ha a-nak van olyan U környezete, amelyben f értelmezve van, és minden $x \in U$-ra $f(x) \leq f(a)$ (illetve $f(x) \geq f(a)$). Ekkor az a pontot az f függvény $lokális\ maximumhelyének$ (illetve $lokális\ minimumhelyének$) nevezzük.

Ha minden $x \in U \setminus \{a\}$-ra $f(x) < f(a)$ (illetve $f(x) > f(a)$), akkor szigorú lokális maximumról és maximumhelyről (illetve minimumról és minimumhelyről) beszélünk.

2. Korlátos, zárt intervallumban folytonos függvények

Definíció: Legyen $a < b$. Az f függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumban, ha minden $x \in (a, b)$ helyen folytonos, továbbá a-ban jobbról, b-ben balról folytonos.

Jelölés: Az $[a, b]$ korlátos, zárt intervallumban folytonos függvények összességét $C[a, b]$-vel jelöljük.

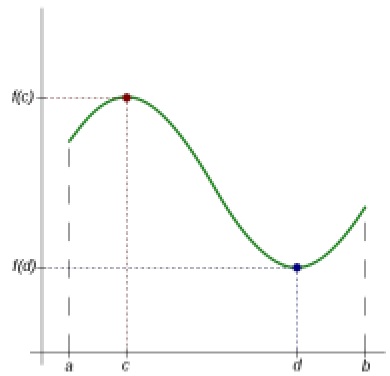
Tétel: Ha $f \in C[a, b]$, akkor f korlátos $[a, b]$-ben.

Bizonyítása: A tétel bizonyítása indirekt módszerrel történik. Tegyük fel, hogy f nem korlátos $[a, b]$-ben. Ekkor semmilyen K számra nem teljesülhet, hogy $|f(x)| \leq K$ minden $x \in [a, b]$-ra. Így minden n-hez létezik olyan $x_n \in [a, b]$, amelyre $|f(x_n)| > n$.

Tekintsük az (x_n) sorozatot. Ez korlátos, ugyanis minden tagja $[a, b]$-be esik, ezért van konvergens (x_{n_k}) részsorozata a Bolzano-Weierstrass tétel miatt. Legyen $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha$. Mivel $\{x_n\} \subset [a, b]$, ezért α is $[a, b]$-ben van. Mármost f folytonos α-ban, ezért az átviteli elv alapján az $(f(x_{n_k}))$ sorozat konvergens (és $f(\alpha)$-hoz tart). Következésképpen az $f(x_{n_k})$ sorozat korlátos, mivel ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos is. Ez viszont ellentmondásban van azzal, hogy $\left|f\left(x_{n_k}\right)\right| > n_k$ minden k-ra. ■

Weierstrass-tétel: Ha $f \in C[a, b]$, akkor van olyan $\alpha \in [a, b]$ és $\beta \in [a, b]$, amelyekre teljesül, hogy $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$ $minden\ x \in [a, b]$-re.

Egy korlátos, zárt intervallumban folytonos függvénynek mindig van abszolút maximum- és abszolút minimumhelye.



1. **Bizonyítás:**

Korábban már bebizonyítottuk, hogy korlátos, zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény korlátos. Tehát $f\ ([a,b])$ korlátos. Legyen $f([a,b])$ felső határa M. Ha $M \in f[a,b]$, akkor ez azt jelenti, hogy $M = \begin{matrix} maxf(x) \\ x \in [a,b] \end{matrix}$

Most már csak azt kell belátni, hogy $M \notin f([a,b])$ nem lehetséges.

Ezt indirekt módon bizonyítjuk. Ha $M \notin f([a,b])$, akkor $F(x) = M - f(x)$ függvény értéke pozitív minden $x\ \in [a,b]$-re Ebből kifolyólag az $\frac{1}{F}$ függvény is folytonos $[a,b]$-ben. Ezért itt korlátos is, azaz létezik $K > 0$, amelyre $\frac{1}{M-f(x)} \leq K$ teljesül, minden $x \in [a,b]$-re.

- Mindkét oldal reciprokát veszem
- felhasználjuk, hogy: $M - f(x) > 0$

A műveletek elvégzése után azt kapjuk, hogy $f(x) \leq M - \frac{1}{K}$, ha $x \in [a,b]$. Ez viszont ellentmond annak, hogy M az $f([a,b])$ halmaz legkisebb felső korlátja.

■

2. **Bizonyítás:**

Legyen ismét $M = supf([a,b])$. Belátjuk, hogy $M\ \in f([a,b])$. Ha n pozitív egész, akkor $M - \left(\frac{1}{n}\right)$ nem felső korlátja $f([a,b])$-nek, mert M volt $f([a.b])$ legkisebb felső korlátja.

Ezért van olyan $x_n \in [a,b]$ pont, amelyre $f(x_n) > M - \left(\frac{1}{n}\right)$. Az (x_n) sorozat korlátos, mert minden tagja az $[a,b]$ intervallumba esik, ezért a Bolzano-Weierstrass tétel miatt van konvergens részsorozata, amit (x_{n_k})-val jelölünk.

Legyen $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha$. Mivel $\{x_n\} \subset [a,b]$, ezért $\alpha \in [a,b]$-nek. Mivel f folytonos α-ban, ezért alkalmazhatjuk az átviteli elvet, ami alapján $f(x_{n_k}) \to f(\alpha)$. Ugyanis

$M - \frac{1}{n_k} < f\left(x_{n_k}\right) \leq M\ minden\ k$-ra, ezért a rendőrelv szerint: $M \leq f(\alpha) \leq M$, tehát $f(\alpha) = M$. Ezzel beláttuk, hogy $M \in f([a,b])$ teljesül. ■

Megjegyzés: $minf[a,b]$ létezése hasonlóan bizonyítható.

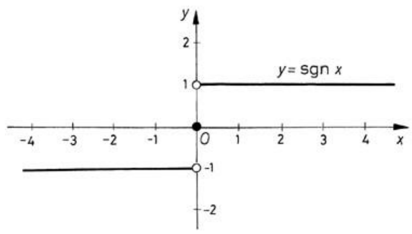
3. Példa korlátos és nem korlátos függvényre

- **korlátos függvény:**

$$sgn(x) = \begin{cases} -1, ha\ x < 0 \\ 0, ha\ x = 0 \\ 1, ha\ x < 0 \end{cases}$$

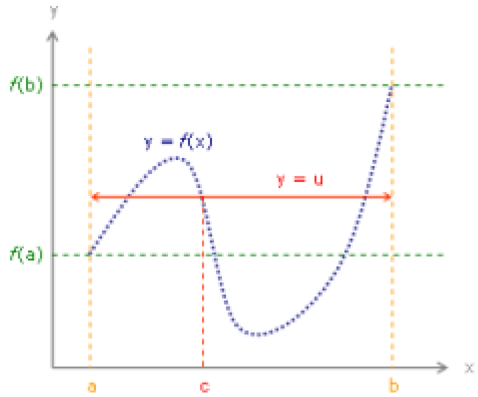
alsó korlátja : -1, felső korlátja: 1.

- **nem korlátos függvény**: x^2 csak alulról korlátos, alsó korlátja a 0, de nincs felső korlátja.



4. Folytonos függvények értékkészlete

Bolzano-Darboux tétel: Legyen $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor ha $\gamma \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $f(a) < \gamma < f(b)$ (vagy $f(b) < \gamma < f(a)$), akkor létezik olyan $c \in (a, b)$, hogy $f(c) = \gamma$ teljesül.



Bizonyítás:

Legyen például γ olyan, hogy a következő teljesül: $f(a) < \gamma < f(b)$. Ezek után definiáljuk a következő halmazt:

$$A \coloneqq \{x \in [a, b]: f(x) < \gamma\}$$

Ekkor A nem üres halmaz, mivel $a \in A$. Mindemellett A felülről korlátos, hiszen $A \subset [a, b]$, tehát b egy felső korlátja. Mivel az A felülről korlátos, így alkalmazható rá a felsőhatár axióma, ami alapján van legkisebb felső korlátja, $sup\, A \in \mathbb{R}$. Legyen

$$c \coloneqq sup\, A.$$

$A \subset [a, b]$ miatt $c \in [a, b]$ teljesül. A szupremum tulajdonságai alapján

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén } \exists x_n \in A: c - \frac{1}{n} < x_n \leq c.$$

Az így kapott $(x_n) \subset A$ sorozatra teljesül, hogy: $x_n \to c$. Alkalmazva az f függvényre a folytonosságra vonatkozó átviteli elvet, azt kapjuk, hogy:

$$f(x_n) \to f(c).$$

Mivel $f(x_n) < \gamma$ minden n-re, így $f(c) \leq \gamma$. Tegyük fel, hogy $f(c) < \gamma$. Jelölje

$\varepsilon := \frac{\gamma - f(c)}{2}$ pozitív hányadost.

Ekkor $\gamma > f(c) + \varepsilon$. Az f függvény γ-beli folytonosságát kihasználva

az $\varepsilon > 0$ számhoz $\exists \delta > 0$, hogy $x \in (c - \delta, c + \delta) \cap [a, b]$ esetén $f(x) \in (f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon)$.

Ezután válasszunk egy olyan x számot, ami eleme $(c, c + \delta) \cap [a, b]$ halmaznak.

A $c = sup\, A$ definíció miatt x nincs benne az A halmazban. Másrészt a fentiek alapján

$$(f(c) - \varepsilon <) f(x) < f(c) + \varepsilon < \gamma$$

kellene teljesüljön, amiből viszont $x \in A$ következik, így ellentmondásra jutottunk. ■

4.1. Korlátos, zárt intervallumban folytonos függvény értékkészlete

Ha $f \in C[a, b]$, akkor f értékkészlete egy korlátos zárt intervallum vagy egy valós szám. Korlátos zárt intervallum esetén az értékkészlet:

$f([a, b]) = [minf(x), maxf(x)]$, ahol $x \in [a, b]$.

4.2. Példák az egész számegyenesen folytonos függvények értékkészletére

Az alábbi példák mutatják, hogy az egész számegyenesen folytonos függvények értékkészlete lehet nyílt, félig nyílt, zárt intervallum vagy egyetlen szám.

függvény	**értékkészlete $R(f)$**
x^3	$(-\infty, \infty)$
x^2	$[0, +\infty)$
$arctg(x)$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
5	5
$\sin(x)$	$[-1,1]$

5. Polinomfüggvények

Definíció: A $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt polinomfüggvénynek (polinomnak) nevezzük, ha vannak $a_0, a_1, \dots, a_n$ valós számok úgy, hogy minden x-re

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Polinomfüggvény tulajdonságai:

Ha $n > 0$ és $a_n \neq 0$, akkor a következők teljesülnek rá:

- minden pontban folytonos
- $\lim_{x\to\infty} p(x) = \begin{cases} \infty, & ha\ a_n > 0 \\ -\infty, & ha\ a_n < 0 \end{cases}$

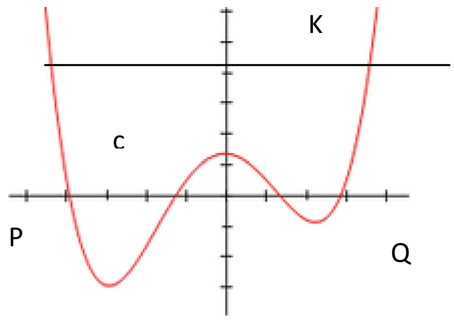
5.1. Egyváltozós polinomfüggvények

Állítás: Minden páros pozitív fokú egyváltozós polinomfüggvénynek van minimuma vagy van maximuma. Páratlan fokú polinomoknak nincs sem maximuma, sem minimuma.

Bizonyítása:

Külön vizsgálom a páros fokú polinomokra, és külön a páratlan fokú polinomokra.

1. eset: $2|n$, és $a_n > 0$



Veszek egy olyan páros fokú polinomfüggvényt, aminek a főegyütthatója pozitív.

Legyen K egy $p(0)$-nál nagyobb szám. Mivel a polinom folytonos és a határértéke végtelenben is, és mínusz végtelenben is végtelen, tehát az előző K-hoz lesz olyan P és Q, amelyre

$$x < P \implies p(x) > K$$
$$x > Q \implies p(x) > K$$

teljesülnek.

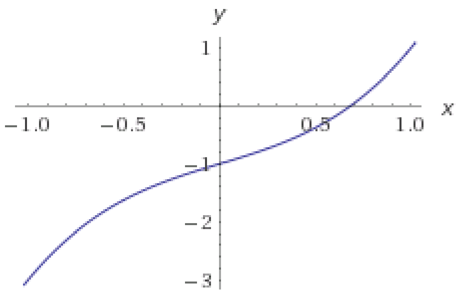
A $[P, Q]$ korlátos, zárt intervallumra alkalmazom a Weierstrass tételt, ezért lesz minimuma, a c helyen, így $p(c) < K$ teljesül.
A polinom értékkészlete ebben az esetben:

$$R\big(p(x)\big) = [p(c), \infty)$$

Ugyanis a függvénynek a c helyen van a minimuma, attól kisebb értéket nem vesz fel, s mivel a pozitív főegyütthatójú páros fokú polinom határértéke végtelen.
Megjegyzés: Belátható, hogy a pozitív páros fokú polinom értékkészlete, abban az esetben, amikor a főegyüttható negatív:

$$R\big(p(x)\big) = (-\infty, p(c)]$$

2. eset: $\boldsymbol{2 \nmid n}$



A páratlan fokú polinomok értékkészlete:

$$\boldsymbol{R\big(p_n(x)\big)} = (-\infty, \infty)$$

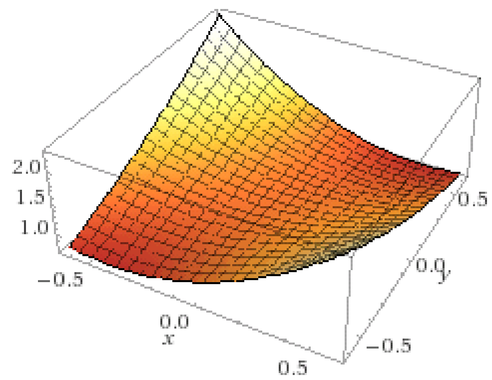
Megjegyzés:
Az előző példák alapján látható, hogy nincs olyan egyváltozós polinom, amelynek az értékkészlete $(0, \infty)$, mivel páratlan fokú polinomok értékkészlete $(-\infty, \infty)$, páros fokú polinomok értékkészlete pedig mindig félig nyílt intervallum.

5.2. Többváltozós polinomfüggvények

Már láttuk, hogy egyváltozós polinomfüggvények között nincs olyan, amelynek értékkészlete $(0, \infty)$. Most mutatok egy olyan kétváltozós polinomfüggvényt, melynek az értékkészlete a pozitív valós számok.

Nézzük, ezt a polinomot:

$$p(x, y) = (1 - x \cdot y)^2 + x^2$$



Annak bizonyítása, hogy értékkészlete $(0, \infty)$ egyszerűen adódik. Látszik, hogy a polinom sosem fog negatív értéket felvenni.

Annak bizonyítása, hogy a polinom 0-át sosem vesz fel a következőképpen történik:

A polinom értéke nulla úgy lehetne, ha egyszerre teljesülne, hogy:

$$(1 - x \cdot y) = 0 \text{ és } x^2 = 0$$

Viszont, ha $x^2 = 0$, ez csak úgy teljesülhet, ha $x = 0$.

Ezzel viszont ellentmondásra jutottunk, ugyanis, ha $x = 0$, akkor $(1 - 0 \cdot y) = 1$, tehát ebben az esetben $p(0, y) = 1$

Már csak azt kell belátni, hogy a polinom minden pozitív értéket fel fog venni.

Ennek bizonyítása a következő: Legyen c egy tetszőleges pozitív szám, ekkor mutatok olyan x-et, illetve y-t, amelyet behelyettesítve a polinomnak c lesz az értéke.

Legyen $x = \sqrt{c}$ és $y = \frac{1}{x}$, ekkor a polinomfüggvénybe helyettesítve:

$$p\left(\sqrt{c}, \frac{1}{\sqrt{c}}\right) = \left(1 - \sqrt{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 + (\sqrt{c})^2 = (1-1)^2 + (\sqrt{c})^2 = c$$

Tehát minden c esetén lesz olyan x, y pontpár, amelynél a polinomfüggvény értéke c lesz.

Ezzel beláttuk, hogy ennek a kétváltozós polinomfüggvénynek az értékkészlete $(0, \infty)$. ■

6. Végtelen sok szigorú lokális maximummal rendelkező folytonos függvények

6.1.Egyváltozós függvények

Állítás: Nincs olyan folytonos egyváltozós függvény, amelynek végtelen sok szigorú lokális maximuma van, és nincs egyetlen lokális minimuma sem.

Bizonyítás:

Legyen f olyan folytonos függvény, melynek végtelen sok szigorú lokális maximuma van. Kiválasztok két lokális maximumot, ezek a lokális maximumok legyenek az x_1, illetve x_2 pontokban.

Két eset lehetséges:

- Az egyik eset: Ez a függvény konstans függvény: Ilyenkor minden pontja lokális maximum és egyben lokális minimum is. Ebben az esetben végtelen sok lokális minimuma lesz.
- Második eset: Nem konstans függvény. Mivel f folytonos függvény, ezért alkalmazható rá a Weierstrass – tétel az $[x_1, x_2]$ intervallumon, tehát a függvénynek lesz minimumhelye, mivel ez csak az intervallum belső pontja lehet, ezért ez lokális minimum is egyben.

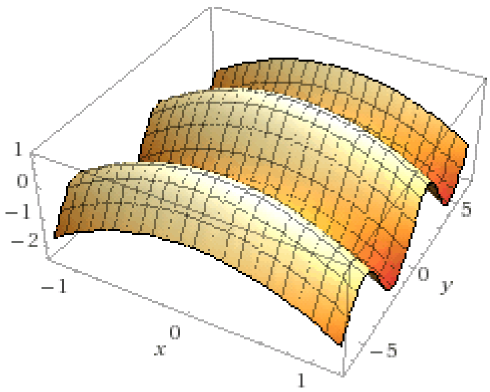
Ha végtelen sok lokális maximuma van, akkor két lokális maximuma is van, és már két lokális maximum esetén van lokális minimum, mivel ahogy már fentebb említettem, ha veszem azt az intervallumot, amelynek két végpontja lokális maximum, akkor alkalmazhatom rá a Weierstrass - tételt, így lesz lokális minimuma, abban a zárt intervallumban. Ezért végtelen sok lokális maximum esetén is lesz lokális minimum.

6.2. Többváltozós függvények

Már láttuk, hogy egyváltozós függvények körében nincs olyan folytonos függvény, melynek végtelen sok szigorú lokális maximuma van, de nincs lokális minimuma. Ez viszont már a kétváltozós függvények körében nem mondható el, így hát mutatok erre egy példát.

Példa olyan folytonos, kétváltozós függvényre, amelynek végtelen sok szigorú lokális maximuma van és nincs lokális minimuma.

$$f(x,y) = -x^2 + sin(y)$$



Bizonyítás: A függvény folytonos, hiszen folytonos függvények összegéből áll.

Annak bizonyítása, hogy végtelen sok lokális maximuma van, de nincs lokális minimuma a következőképpen történik:

1. lépésben meghatározom az elsőrendű parciális deriváltakat.

$$\partial_1 f(x,y) = -2x$$

$$\partial_2 f(x,y) = \cos y$$

Lokális szélsőérték csak ott lehet, ahol a parciális deriváltak nullával egyenlők, ezért

$$-2x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

$$\acute{e}s$$

$$\cos y = 0 \Longrightarrow y = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ ahol } k \in \mathbb{Z}$$

egyenleteknek teljesülniük kell.

Ebből kifolyólag, ha létezik lokális szélsőértéke, akkor csak az $x = 0$ és $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$ pontokban lehet.

2. lépésként meghatározom a másodrendű parciális deriváltakat

$$\partial_{11} f(x, y) = -2$$
$$\partial_{12} f(x, y) = 0$$
$$\partial_{21} f(x, y) = 0$$
$$\partial_{22} f(x, y) = -\sin y$$

Így a kapott mátrix:

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\sin y \end{pmatrix}$$

Mivel $y = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, ezért a szinusz függvény értéke függ attól, hogy az k egész szám páros vagy páratlan.

$2|k$ eset:

Legyen például $k = 0$, ilyenkor az $y = \frac{\pi}{2}$

Ebben az esetben a Hesse mátrix a következő lesz:

$$f''\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tehát, ha k páros, akkor $\sin(y)$ értéke -1, ebben az esetben a függvénynek lokális maximuma van, mivel a mátrix determinánsa 2, azaz pozitív, illetve $\partial_{11} f(x, y) < 0$. Mivel a függvénynek a periódusa 2π, ezért minden olyan esetben, amikor $x = 0$ és $y = \frac{\pi}{2} + 2 \cdot l \cdot \pi$ ($l \in \mathbb{Z}$), akkor a függvénynek lokális maximuma lesz.

$2 \nmid k$ eset:

Legyen $k = 1$, ilyenkor az $y = \frac{3\pi}{2}$

Ilyenkor a Hesse mátrix:

$$f''\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tehát, ha k páratlan, akkor a mátrix determinánsa negatív, azaz ezekben a pontokban a függvénynek nyeregpontja van.

Ezzel beláttuk, hogy a függvénynek végtelen sok lokális maximuma van, de nincs lokális minimuma.■

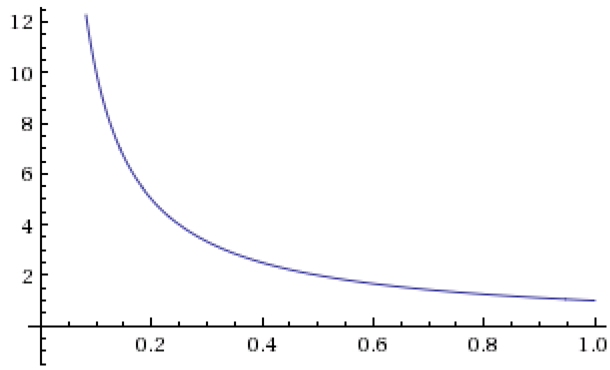
7. Példák arra, hogy a Weierstrass - tétel feltételei szükségesek

A Weierstrass tételről a dolgozat elején már szó volt, viszont, most megmutatom, hogy egy-egy feltétel elhagyásával nem teljesül a tétel.

Emlékeztető: $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonos, akkor létezik, $maximum$ és $minimum$ értéke, ezen a zárt intervallumon.

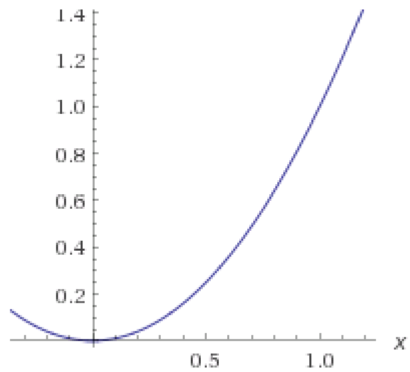
- zártság nem hagyható el

  $f(x) = \frac{1}{x}$ folytonos a korlátos, $(0,1]$ intervallumban, de f -nek itt nincs maximuma.



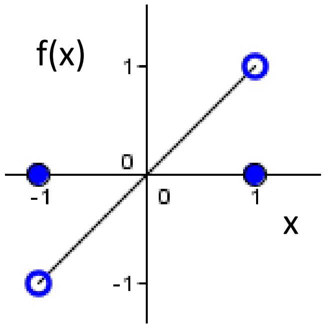
- intervallum korlátossága sem hagyható el

  $f(x) = x^2$ függvény folytonos $[0, \infty)$-ben, de nincs maximuma.



- folytonosság sem hagyható el

$$f(x) = \begin{cases} x, & ha\ x \in (-1,1) \\ 0, & ha\ x = 1\ vagy\ x = -1 \end{cases}$$

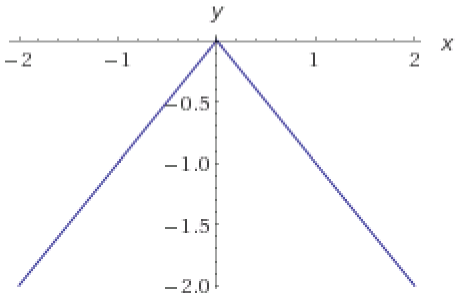


8. Monotonitás és a lokális szélsőértékek kapcsolatára példák

Példa olyan $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre, amelyik

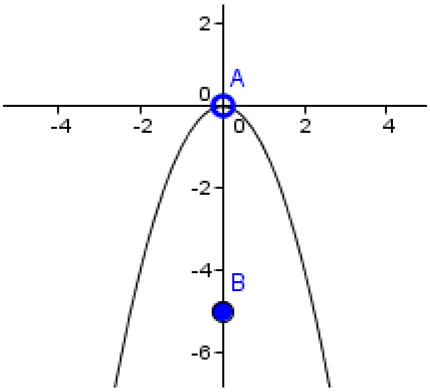
- szigorúan monoton nő $(-\infty, 0)$-ban, szigorúan monoton csökken $(0,\infty)$-ben, és 0-ban szigorú lokális maximuma van

$$f(x) = -|x|$$



- szigorú monoton nő $(-\infty, 0)$-ban, szigorúan monoton csökken $(0, \infty)$-ben, és 0-ban szigorú lokális minimuma van

$$f(x) = \begin{cases} x^2, ha\ x \neq 0 \\ -5, ha\ x = 0 \end{cases}$$



Állítás: A folytonos függvények között nincs olyan függvény, amely szigorúan monoton nő $(-\infty, 0)$-ban, szigorúan monoton csökken $(0, \infty)$-ben, és 0-ban lokális minimuma van.

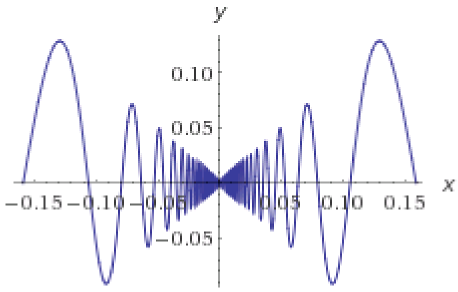
Bizonyítás: Legyen $-\frac{1}{n} \to 0$ sorozat, mivel f folytonos függvénynek kell lennie, ezért a folytonosságra vonatkozó átviteli elv miatt $f(-\frac{1}{n}) \longrightarrow f(0)$ teljesül. Az f függvény monoton nő, ezért minden n-re: $f\left(-\frac{1}{n}\right) \leq \lim_{n\to\infty} f\left(-\frac{1}{n}\right) = 0$, így a nulla minden bal oldali környezetében van olyan pont, ahol a függvényérték kisebb vagy egyenlő, mint $f(0)$, tehát $f(0)$ nem lehet lokális minimum.■

9. Példák lokális szélsőértékekre

Példa olyan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre, amelyiknek

- végtelen sok szigorú lokális maximuma van

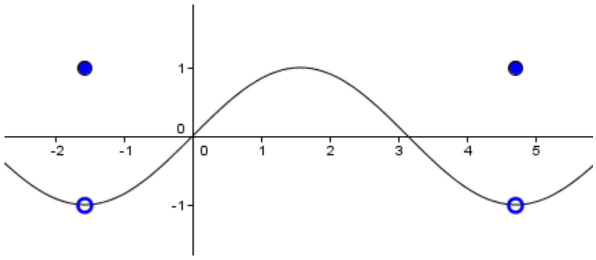
$$f(x) = \begin{cases} x \cdot sin\frac{1}{x}, & ha\ x \neq 0 \\ 0, & ha\ x = 0 \end{cases}$$



Bizonyítás: Később, ahol már van derivált is, ott lesz bizonyítva.

- végtelen sok szigorú lokális maximuma van, de nincs egyetlen lokális minimuma sem

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x), ha\ x \neq \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \\ 1, ha\ x = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \end{cases}, \text{ ahol } k \in \mathbb{Z}$$



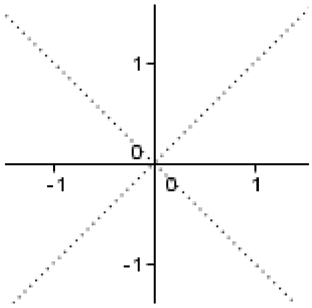
- minden pontban van lokális szélsőértéke, de a függvény nem konstans

$$D(x) = \begin{cases} 1, ha\ \ x\ racionális \\ 0, ha\ x\ irracionális \end{cases}$$

Mivel a függvény egynél nem vesz fel nagyobb értéket, így a maximuma egy, nullnál nem vesz fel kisebb értéket, így a minimuma nulla.

- sehol sincs lokális szélsőértéke, de a függvény egyetlen intervallumban sem monoton

$$f(x) = \begin{cases} x, \ ha \ x \ racionális \\ -x, \ ha \ x \ irracionális \end{cases}$$



Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$. Az x_0 szám minden környezetében van racionális és irracionális szám is. Ha $x_0 > 0$, akkor a függvény x_0 minden jobb oldali, ha $x_0 < 0$, akkor a függvény x_0 minden bal oldali környezetében felvesz $f(x_0)$-nál nagyobb és kisebb értéket is. Ha $x_0 = 0$, akkor x_0 minden környezetében lesz pozitív és negatív függvényérték is.

10. Az első derivált és a szélsőérték kapcsolatáról szóló tételek

10.1. Az első derivált és a lokális szélsőérték I.

Ha az f függvénynek lokális maximuma vagy lokális minimuma van értelmezési tartományának valamely c belső pontjában, és f' értelmezve van a c pontban, akkor $f'(c) = 0$.

Bizonyítás:

Ötlet: $f'(c)$ nem lehet pozitív, sem negatív. Ezért $f'(c)$ olyan szám lehet, amely se nem pozitív, se nem negatív, ilyen szám csak egy darab van, a nulla.

Tegyük fel, hogy az f függvénynek az $x = c$ pontban lokális maximuma van, azaz $f(x) - f(c) \leq 0$ minden olyan x értékre, amely elég közel van c –hez.

Mivel c az értelmezési tartomány belső pontja, $f'(c)$ a

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

kétoldali határértékkel van értelmezve. Ez azt jelenti, hogy jobb oldali és bal oldali határértéke is létezik az $x = c$ helyen, és egyenlő $f'(c)$-vel.

Külön megvizsgáljuk ezeket a határértékeket:

$$f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0, \text{ ugyanis } (x - c) > 0 \text{ és } f(x) \leq f(c)$$

$$illetve$$

$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0, \text{ ugyanis } (x - c) < 0 \text{ és } f(x) \leq f(c)$$

A két egyenlőségekből együttesen következik, hogy $f'(c) = 0$.

Megjegyzés: Lokális minimum esete hasonlóan bizonyítható.

10.2. Az első derivált és a lokális szélsőérték II.

Tegyük fel, hogy c az f folytonos függvény egy kritikus pontja, és f differenciálható valamely c-t tartalmazó intervallum minden pontjában, kivéve esetleg magát a c pontot.

(**Megjegyzés:** kritikus pont: Az f függvény kritikus pontjának nevezzük f értelmezési tartományának minden olyan pontját, amelyben az f' derivált függvény értéke nulla, vagy a derivált nincs értelmezve.)

Balról jobbra haladva

1. ha f' a c helyen negatívról pozitívra vált, akkor f-nek lokális maximuma van a c pontban.
2. ha f' a c helyen pozitívról negatívra vált, akkor f-nek lokális minimuma van a c pontban.

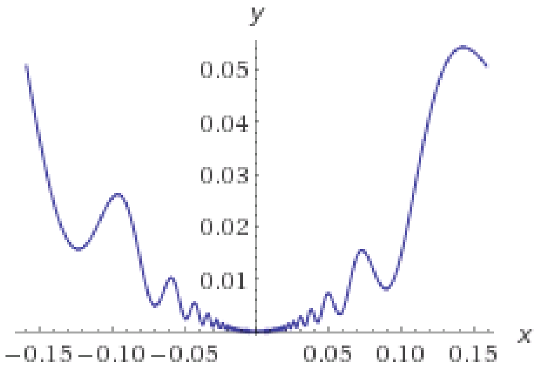
Bizonyítás:

1. állítás bizonyítása:

   Mivel f' értéke c-ben negatívról pozitívra vált, vannak olyan a és b számok, hogy $f' < 0$ az (a, c) intervallumon, és $f' > 0$ a (c, b) intervallumon. Ha $x \in (a, c)$, akkor $f(c) < f(x)$, mert f'<0-ból következik, hogy f csökkenő az $[a, c]$ intervallumon. Ha $x \in (c, b)$, akkor $f(c) < f(x)$, hiszen $f' > 0$-ból következik, hogy az f függvény növekvő a $[c, b]$ intervallumon. Ezért $f(x) \geq f(c)$ minden $x \in (a, b)$-re. Így a definíció szerint f-nek lokális maximuma van c-ben. ■

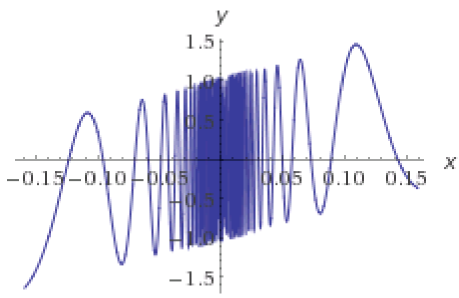
Példa olyan folytonos függvényre, aminek szigorú lokális minimuma van 0-ban, de a derivált 0-ban nem vált előjelet.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x^2 \cdot \left(sin\left(\frac{1}{x}\right) + 1\right), ha\ x \neq 0 \\ 0,\ ha\ x = 0 \end{cases}$$



Bizonyítás:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2x \cdot \left(\sin\frac{1}{x} + 1\right) + x^2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \cdot \cos\frac{1}{x}\right), & ha\ x \neq 0 \\ 0, & ha\ x = 0 \end{cases}$$



$$f'(0) = 0$$

A derivált 0-ban nem vált előjelet, mert a 0 bármely jobb és bal oldali környezetében végtelen sokszor vesz fel pozitív és negatív értéket is.

A függvényből látszik, hogy az $x = 0$ helyen $f(x) = 0$. Ott a függvénynek minimuma lesz, mivel minden $x \neq 0$ helyen $f(x) > 0$.

Azaz :

$$x^2 + x^2 \cdot \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) + 1\right) > 0, ha\ x \neq 0$$

ugyanis $x^2 > 0, ha\ x \neq 0$, $\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) + 1\right) \geq 0 \implies x^2 \cdot \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) + 1\right) \geq 0$

$\implies$

$$x^2 + x^2 \cdot \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) + 1\right) > 0, ha\ x \neq 0$$

11. Az első és második derivált és a szélsőérték kapcsolatáról szóló tételek

Tétel: Tegyük fel, hogy f'' folytonos az $x = c$ pontot tartalmazó nyílt intervallumon.

1. Ha $f'(c) = 0$ és $f''(c) < 0$, akkor f-nek lokális maximuma van az $x = c$ pontban.
2. Ha $f'(c) = 0$ és $f''(c) > 0$, akkor f-nek lokális minimuma van az $x = c$ pontban.
3. Ha $f'(c) = 0$ és $f''(c) = 0$, akkor nem állíthatunk semmi biztosat. Ilyenkor a függvénynek lehet lokális maximuma, lokális minimuma, de lehet, hogy sem ez, sem az nincs.

Bizonyítás:

1. állítás bizonyítása:
Ha $f''(c) < 0$, akkor f'' folytonossága miatt $f''(x) < 0$ valamely, a c pontot tartalmazó nyílt I intervallumon. Emiatt f' csökkenő ezen az intervallumon. Mivel $f'(c) = 0$, a c helyen f' előjele pozitívról negatívra vált, így az első derivált teszt alapján f-nek c-ben lokális maximuma van.

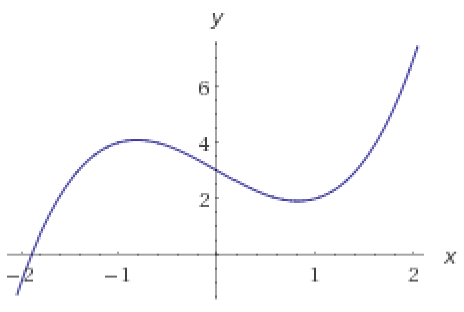
2. állítás bizonyítása: hasonlóan történik, mint az első állítás bizonyítása.

3. állítás bizonyítása: Lásd később a példánál.

Példák az előző tételre:

Példa olyan függvényre amelyre teljesül, hogy $f'(c) = 0$ és $f''(c) < 0$, és f-nek lokális maximuma van az $x = c$ pontban.

$$f(x) = x^3 - 2x + 3$$



$x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ pontban a függvény első deriváltja nulla, a függvény második deriváltjának értéke pedig kisebb nullánál. A függvénynek ebben a pontban lokális maximuma van.

$x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ pontban a függvény első deriváltja nulla, a második deriváltjának értéke nagyobb nullánál. A függvénynek ebben a pontban lokális minimuma van.

Példa olyan függvényre, amelyre teljesül, hogy $f'(c) = 0$ és $f''(c) = 0$ és lokális maximuma van.

$$f(x) = -x^4$$

$x = 0$ pontban a függvény első és második deriváltjának értéke egyaránt nulla. A függvénynek a nulla pontban maximuma van.

Példa olyan függvényre, amelyre teljesül, hogy $f'(c) = 0$ és $f''(c) = 0$ és lokális minimuma van.

$$f(x) = x^4$$

A függvénynek a nulla helyen minimuma van, viszont az első és második derivált értéke a nulla helyen szintén nulla.

Példa olyan függvényre, amelyre teljesül, hogy a függvény első és második deriváltjának értéke is nulla egy pontban, viszont a függvénynek abban a pontban nincs lokális szélsőértéke.

$$f(x) = x^3$$

$x = 0$ helyen az első és második derivált is nulla, viszont itt nincs lokális szélsőérték.

Ellenpéldák, hogy az előző állítások megfordításai nem igazak.

1. Ha f-nek lokális maximuma van az $x = c$ pontban $\not\Rightarrow f'(c) = 0$ és $f''(c) < 0$

   Példa:

   $$f(x) = -x^4$$

   A függvénynek az $x = 0$ pontban van lokális maximuma.

   $$f'(x) = -4x^3$$

   $$f'(0) = 0$$

   $$f''(x) = -12x^2$$

   $$f''(0) = 0$$

Tehát $f''(c) < 0$ nem teljesül.

2. Ha f-nek lokális minimuma van az $x = c$ pontban $\nRightarrow f'(c) = 0$ és $f''(c) > 0$

Példa:

$$f(x) = x^4$$

A függvénynek az $x = 0$ pontban van lokális minimuma, viszont az $f''(0) > 0$ nem teljsül.

Megjegyzés: Az előző példához hasonlóan belátható.

12. Folytonos függvények, melyeknek mínusz végtelenben és végtelenben vett határértéke megegyezik

Ha $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos és $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x)$, akkor f-nek vagy van legnagyobb, vagy van legkisebb értéke.

Bizonyítás: A bizonyításban három esetet külön vizsgálok.

1. eset: A függvény végtelenben vett határértéke véges szám

   Legyen $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = A$

   Ha létezik c, amelyre: $f(c) > A$, akkor ebben az esetben a függvénynek biztosan van maximuma.

   Ha létezik c, amelyre: $f(c) < A$, akkor a függvénynek biztosan van minimuma.

   Ha $\forall x \in \mathbb{R}: f(x) = A$, akkor a függvény konstans, tehát ebben az esetben van minimuma és maximuma is.

2. eset: A határérték végtelen

   $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

   $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \ \forall P > 0\ \exists x_2 > 0\ \forall x \in D_f\ \ x > x_2: f(x) > P$

   $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \ \forall P > 0\ \exists x_1 < 0\ \forall x \in D_f\ \ x < x_1: f(x) > P$

   Ezek alapján vehetem az $[x_1, x_2]$ intervallumot, majd alkalmazom a Weierstrass tételt ezen az intervallumon. Ekkor a függvénynek az $[x_1, x_2]$ intervallumon van a függvénynek minimuma és maximuma egyaránt, de mivel a végtelenben plusz végtelenhez tart, ezért ebben az esetben a függvénynek csak abszolút minimuma lesz.

3. eset: A határérték mínusz végtelen.

   $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

Ebben az esetben a függvénynek maximuma lesz.

Megjegyzés: Hasonlóan bizonyítható, mint az előző eset.

Ezzel beláttuk, hogy mind a 3 esetben lesz a függvénynek vagy maximuma, vagy minimuma, vagy maximuma és minimuma egyaránt. ■

13. Weierstrass – tétel alkalmazására példák

1. Legyen $f: [a, b] \to (0, \infty)$ folytonos. Bizonyítandó, hogy alkalmas $\delta > 0$-ra $f(x) > \delta$ minden $x \in [a, b]$-re.

   Bizonyítás:

   Mivel az f korlátos, zárt intervallumban folytonos függvény, ezért alkalmazható rá a Weierstrass tétel.
   Tehát $\exists \alpha \in [a, b]$ és $\beta \in [a, b]$: $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$ $\forall x \in [a, b]$-re.
   Bizonyítani kell, hogy van olyan $\delta > 0$, hogy $f(x) > \delta$ $\forall x \in [a, b]$-re
   Mivel a Weierstrass tétel szerint $\exists \alpha \in [a, b]$: $f(\alpha) \leq f(x)$, ezért minden olyan pozitív δ jó választás, amire teljesül, hogy $\delta < f(\alpha)$, ilyen δ biztosan van, hiszen $\delta = \frac{f(\alpha)}{2}$ jó választás.

   Ellenpélda, hogy a zártság nem hagyható el

   Legyen például $f: (0, \infty) \to (0, \infty)$ folytonos függvény $f(x) = \frac{1}{x}$. Ekkor nem létezik olyan $\delta > 0$, hogy $f(x) > \delta$ teljesüljön minden $x \epsilon (0, \infty)$-re.

2. Legyen $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonosak és tegyük fel, hogy $f(x) < g(x)$ minden $x \in [a, b]$-re. Bizonyítandó, hogy alkalmas $\delta > 0$-ra $f(x) + \delta < g(x)$ minden $x \in [a, b]$-re.

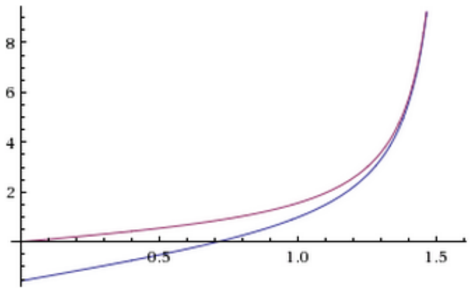
   Bizonyítás:

   Első lépésben átrendezve az egyenlőtlenséget $0 < g(x) - f(x)$ kapjuk. Ez az $F(x) = g(x) - f(x)$ függvény szintén folytonos, mivel két folytonos függvény különbsége folytonos, az is igaz, hogy mindkét függvény korlátos zárt intervallumon értelmezett, ezért a különbségükből előállított $F(X)$ függvényre is ez teljesül.

Átrendezve a bizonyítandó állítást kapjuk, hogy alkalmas $\delta > 0$ -ra $\delta < g(x) - f(x)$ teljesül, azaz $\delta < F(x)$ minden $x \in [a, b]$-re.
Mivel $F(x) > 0$, ezért az értékkészlete $(0, \infty)$. Így tehát $F(x): [a, b] \to (0, \infty)$ folytonos függvény, amire már fentebb beláttuk, hogy alkalmas $\delta > 0$-ra $F(x) > \delta$ minden $x \in [a, b]$-re.

Ellenpélda: ha $[a, b]$ helyett (a, b)-n értelmezett folytonos függvényeket veszünk, akkor az állítás nem igaz.

Legyenek $f, g: (0, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények, továbbá $f(x) = \operatorname{tg} x + x + \frac{\pi}{2}$, illetve $g(x) = \operatorname{tg} x$.



Annak a bizonyítása következik, hogy nem létezik olyan delta, amelyre igaz, hogy minden $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ esetén $f(x) + \delta < g(x)$.

1. lépés: Vonjuk ki egymásból a két függvényt.

$$g(x) - f(x) = -x + \frac{\pi}{2}$$

2. lépés: Vegyük a kapott függvénynek a határértékét

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \big(g(x) - f(x)\big) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \left(-x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Összefoglalás

Úgy gondolom sikerült megvalósítanom, amit szerettem volna, bár a későbbiek során még szeretnék a téma iránt kutakodni, illetve szeretném bővíteni tudásom, e tág témakörben

Véleményem szerint sikerült olyan példákat találni, amelyek nagy részét gimnáziumban érdemes lehet bemutatni, például szakkör keretében, és felkelthetik a diákok érdeklődését.

Meglátásom szerint, az illusztrációk nagyon sokat segítenek a függvények elképzelésében, éppen ezért fontosnak tartom, hogy ha sikerül elérni a célomat és tanár leszek, akkor a függvényeket a különböző digitális programok segítségével szemléltessem.

,

Irodalomjegyzék

[1] Laczkovich Miklós – T. Sós Vera: Analízis I.
Nemzeti Tankönyvkiadó Zrt, Budapest 2006

[2] George B. Thomas, Maurice D., Joel Hass, Frank R. Giordano Thomas-féle kalkulus 1. kötet
Második kiadás-javítási jegyzékkel kiegészítve
Typotex, Budapest 2008

[3] Sikolya Eszter: Analízis jegyzetek
http://www.cs.elte.hu/~seszter/oktatas/Sikolya_Analizis_jegyzet
http://bolyai.cs.elte.hu/~seszter/oktatas/2009_10_1/BSc_ea/BSc_analizis_I_eloadas.pdf
http://bolyai.cs.elte.hu/~seszter/oktatas/2010_11_2/BSc_mattanar_ea/analizis_IV_jegyzet2011.pdf