

Matematikai játékok

SZAKDOLGOZAT

Nyitrai Orsolya Katalin

Matematika BSc., tanári szakirány

Témavezető:

Héger Tamás

tudományos segédmunkatárs



Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Budapest, 2014.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	3
1. Fejezet: Alapfogalmak, definíciók	3
2. Fejezet: Kezdő feladatok	8
1. 1. Lepakolós játék.....	8
1. 2. Foglalós játékok.....	9
3. Fejezet: Kupacos játékok.....	12
3. 1. Egyszerű egykupacos játék.....	12
3. 2. Nim-játék és nim-összeadás	13
3. 3. A Nim-játék nyerő stratégiája.....	14
3. 4. Összegjátékok	16
4. Fejezet: Grundy-számok.....	18
5. Fejezet: További játékok és a Nim-játék variánsai.....	22
5. 1. Korábban előfordult játékok Grundy-számai	22
5. 2. Játékok korongokkal.....	23
5. 3. A Nim-játék variánsai.....	26
5. 4. Fibonacci-nim.....	30
Irodalomjegyzék	35

Bevezetés

Szakterdolgozatomhoz olyan témát kerestem, amit későbbi tanári pályám során felhasználhatok. Nagyon fontos számomra, hogy a fiatalok érdeklődését felkeltsem a matematika iránt, hogy élvezettel merülhessenek bele a megoldandó problémákba, feladatokba. Ezért esett választásom a matematikai játékokra.

Dolgozatom lényegét kétszemélyes stratégiai játékok képezik, melyeknek nyerési lehetőségeit matematikai módszerek segítségével tanulmányoztam. Sok játékot magam is kipróbáltam, és sok tapasztalatot szereztem, miközben rengeteg élménnyel gazdagodtam. Véleményem szerint ezek a játékok alkalmasak a logikus gondolkodás fejlesztésére. Középiskolás szakkörön, vagy fakultáción érdemes egy-egy példával színesebbé tenni a foglalkozásokat.

Az alapfogalmak definiálása és tisztázása után a könnyebb játékokon keresztül eljutunk a különböző nehézségű „kupacos-kavicsos” játékokhoz. Az elméleti háttér kidolgozása során bemutatom a nim-összeadás és a Grundy-számok rejtelmét, melyek segítségével a játékok nyerő stratégiái átláthatóvá válnak.

Az általam legtöbbet használt forrás Csirmaz László [2] cikke volt.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni Török Judit tanárnőnek, hogy felkeltette bennem a téma iránti érdeklődést. Valamint köszönöm Héger Tamásnak ez úton is a rengeteg segítségét, és rám áldozott idejét, amivel nagymértékben hozzájárult a szakterdolgozatom elkészüléséhez.

1. Fejezet: Alapfogalmak, definíciók

A játékok elemzése során mindenképp szükséges, hogy felállítsunk bizonyos szabályokat és megnevezzünk fogalmakat, tulajdonságokat.

A dolgozatban bemutatott játékok mindegyike kétszemélyes játék, amelyekben két játékos felváltott sorrendben kerül játéklehetőséghez. Általában kezdő vagy első, illetve második játékos néven említem őket.

Az összes játék során feltételezzük, hogy mindkét játékos a legjobb tudása alapján játszik, és mindig a számukra lehető legjobb lépést teszi meg (nem rontanak). Ez azt jelenti, hogy ha későbbiekben az fog szerepelni, hogy az egyik játékos nem nyerhet egy játékban, azt úgy kell érteni, hogy a másik tud úgy játszani, hogy nyerjen (és úgy is fog játszani, hogy nyerjen).

Tipikusan diszkrét játékokról fogunk foglalkozni, melyeknek tulajdonsága, hogy különböző, jól elhatárolt állapotok, állások vannak bennük. Tehát a játék állásainak tekintjük az összes előfordulható, egymástól jól elkülöníthető állapotokat.

Definíció (lépés): *A matematikai játékok során lépésnek nevezzük az állásból állásba való átmenetet, amit mindig a soron következő játékos választ meg a játékszabálynak megfelelő lehetőségek közül, és amely egyértelműen leírható egy állaspárral, ami tartalmazza a kiindulási és érkezési állást.*

Szükségünk lesz vesztes, és nyerő állások fogalmára is, melyeket a soron következő játékos szempontjából nevezünk el.

Definíció (vesztes, nyerő állás): *Nevezzük a továbbiakban a játék vesztes állásainak (vagy pozícióinak, helyzeteinek) azokat az állásokat, melyekből indulva a soron következő játékos semmiképpen sem tudja megnyerni a játékot, azaz veszít. Más esetben, ha egy állásból indulva lehetőség van nyeresre, nyerő állásról beszélünk.*

Ezek alapján a vesztes állások, pontosabban azok előállítása lesz a nyerő játékos számára kedvező és fontos. A játékokban olyan stratégiákat kell kidolgoznunk, amelyek során az ellenfél vesztes állásból nem tud újabb vesztes állásra lépni, míg a kialakult nyerőből mindig tudunk vesztes állást létrehozni. Ezeket fogjuk a továbbiakban nyerő stratégiáknak nevezni.

Definíció (nyerő stratégia): *Nyerő stratégia alatt olyan stratégiát értünk, melyet alkalmazva az ellenféljátékos tetszőleges stratégiája ellen garantáltan nyerni tudunk.*

Megjegyzés: Ha egy játékosnak létezik nyerő stratégiája, akkor az megegyezik azzal, hogy meg is nyeri a játékot. Épp ezt jelenti a fent leírt „nem ront” feltételezésének elve.

Az eddigi fogalmak biztos elsajátítása és ellenőrzésére érdekében tekintsük az alábbi játékot¹:

0. Játék: *Egy 10 x 8-as tábla jobb felső sarkában áll egy királynő, amellyel lefelé, balra vagy átlósan balra léphetnek (akármennyit) a játékosok. Az nyer, aki a bal alsó sarokba helyezi a királynőt. Ki nyer, milyen stratégiával?*

Jelöljük az 1.1-es ábra szerint a játéktáblán „+” jellel a nyerő állásokat, vagyis azokat a mezőket, ahonnan indulva a soron következő játékosnak van nyerő stratégiája, és „V” betűvel a vesztes állásokat, amelyekről indulva a kezdő nem nyerhet.

8	+	+	+	+	V	+	+	+	+	+
7	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
6	+	+	+	V	+	+	+	+	+	+
5	+	+	+	+	+	+	+	V	+	+
4	+	+	+	+	+	V	+	+	+	+
3	+	V	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	V	+	+	+	+	+	+	+
1	V	+	+	+	+	+	+	+	+	+
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

1.1 ábra

Ez jó példa arra, hogy rekurzív módon minden mezőről megállapítható, hogy nyerő vagy vesztes állás-e. A bal alsó mező vesztes, mert onnan nincs több lépési lehetőség. Azok a mezők, melyekről erre közvetlenül rá tudunk lépni, nyertes állások lesznek. Mindkét játékos célja, hogy vesztes mezőre lépjen a bábuval, hiszen onnan ellenfele akárhova is lép, a következő körben újabb vesztes helyre tudja tenni a királynőt, és így tovább. Jól látható, hogy ebben a játékban a kezdő játékosnak van nyerő stratégiája, ráadásul két vesztes mezőre is léphet kezdésképp.

¹ Az [5] számú Elemi matematika feladatgyűjteményből származó példa alapján

Az állások, és szabályos lépések összefoglalhatóak egy fogalommal; megmutatjuk, hogyan.

Definíció (egyszerű gráf): Vegyünk két diszjunkt halmazt, jelölje ezeket V és E , ahol V nemüres. Legyen E a V -beli elemekből képezhető kételemű részhalmazoknak egy halmaza. Ekkor a $G = (V, E)$ rendezett párt (egyszerű) gráfnak nevezzük, melyben V elemei a csúcsok, E elemei az élek.

Definíció (irányított gráf): Irányított egyszerű gráfról beszélünk, ha a fenti gráf definíciójában E a V -beli elemekből képezhető rendezett pároknak egy halmaza.

Megjegyzés: A továbbiakban, ha (irányított) gráfot említünk, mindig egyszerű (irányított) gráfra gondolunk.

Definíció (állapotgráf): A játék állapotgráfiának nevezzük azt speciális irányított gráfot, melyben a játék állásai a gráf csúcsainak, a lehetséges lépések a gráf éleinek felelnek meg.

A könnyebb érthetőség és az egyértelmű leírások érdekében bevezetünk egy később sokat használt fogalmat:

Definíció (rákövetkező): Egy X állás rákövetkezője az Y állás, ha X -ből közvetlenül (egy lépéssel) el tudunk jutni Y -ba, azaz ha az állapotgráfban (X, Y) él (más szóval az X -nek kiszomszédja az Y).

Definíció (véges játék): Véges játékról beszélünk, ha állapotgráfiájában minden csúcshoz tartozik egy nemnegatív egész szám úgy, hogy azok minden kiszomszédjához rendelt szám kisebb az övéénél (pl.: a hátralévő lépések maximális száma). Ezt a számot nevezzük az állás szintjének.

Ez alapján tegyük fel, hogy az állapotgráf csúcsai számozva vannak. Ekkor az állások szintjei a lépések során szigorúan monoton csökkennek.

Következmény: Véges játék állapotgráfja nem tartalmaz irányított kört, azaz aciklikus.

Bizonyítás: Ha tartalmazna kört, akkor lenne olyan állás a játékban, ami többször is előfordulhatna, vagyis lenne olyan X_1, X_2, \dots, X_k lépéssorozat, ahol minden X_{i+1} állás az

X_i állás rákövetkezője, és X_k -nak kiszomszédja X_1 . Azonban a véges játék definíciója szerint egy állás rákövetkezőjének a szintje kisebb, mint az állás szintje, ezért X_k -nak nem lehet X_1 a rákövetkezője, mert akkor a hozzárendelt szám nagyobb kéne, legyen X_1 számánál, ami ellentmondás. \square

Definíció: *Normál játéknak nevezük a továbbiakban azokat a játékokat, melyekben az a játékos veszít, aki nem tud többet lépni, másképp fogalmazva: az nyer, aki az utolsó lépést teszi.*

Megjegyzés: Általában a dolgozatban hozott játékok ilyen normál játékok.

2. Fejezet: Kezdő feladatok

Dolgozatom elején szeretnék bemutatni egy-két többnyire széles körben elterjedt, egyszerűbb matematikai játékot. Mindegyik korosztály számára található megfelelő szintű és nehézségű feladat, vagy játék, amivel felkelthető a gyerekek érdeklődése. Meg lehet mutatni nekik, hogy a matematikának van ilyen szórakoztató része is. Persze, az lenne a legjobb, ha ezekben tudnák alkalmazni és kamatoztatni a korábban tanultakat.

1. 1. Lepakolás játék

1. játék: *Két játékos felváltva helyez korongokat egy asztalra. Az veszít, aki nem tud úgy több korongot elhelyezni az asztalon, hogy az ne fedjen egy már lent fekvőt. Kinek van nyerő stratégiája?*

Ez a játék több tankönyvben is szerepel. Tapasztalataim szerint ez inkább elvi, gondolati játék, mert a gyakorlatba nehezen kivitelezhető. A korongok vagy érmék (hol mi szerepel) könnyen egymásra csúszhatnak, vagy nem mindig egyértelmű a helyzetük. Mindemelllett a játék megoldása pofonegyszerű, a gyerekek is hamar rájöhetnek. Arra az eredményre jutunk, hogy mindig az első játékos nyer. A jó stratégia pedig az, ha először középre tesszük a kezdő korongot (minden esetben van ilyen, ha kerek az asztal, ha szögletes, lényeg, hogy az középpontosan szimmetrikus legyen), és a következőkben mindig az ellenfél lépésének középpontos tükörképét lépjük. Ezt a stratégiát játszva a kezdő játékos nem tud veszteni, hiszen ha van még hely a második játékos lépésének, akkor biztosan szabad lehetőség annak képe is.

Érdekességként vegyük észre, hogy ennek az asztalra pakolás játéknak végtelen sok állapota létezik, hiszen végtelen sok pontra helyezhető egy korong. Mégis véges játéknak tekinthetjük, mert a lépések során az asztal szabad területe csökken, vagyis egyre csökken a megtehető lépések maximális száma is, míg előbb-utóbb eljutunk abba az állapotba, hogy több korong már nem fér az asztalra.

Ezzel együtt megpróbálhatjuk az eredetit véges állapotszámú játékká tenni; ez az ötlet szakdolgozat írása közben merült fel. A játékot gyakorlatban négyzetrácsos papíron lehetne játszani.

2. Játék: Adott egy $(n \times k)$ -as téglalap alakú játéktábla. Két játékosnak úgy kell felváltva (előre lefixált) egyforma méretű négyzeteket beszíneznie a táblán, hogy azok ne takarják egymást. Az veszít, aki nem tud többet lépni. Kérdés, hogy melyik játékos nyer.

Csupa 1×1 -es négyzetek színezése nem hoz lázba senki, mert a győztes csak a játéktáblát alkotó négyzetek számától függ: ha páros sok négyzetből áll a tábla, a második, páratlan számú négyzet esetén az első számú játékos nyer. Vizsgáljuk most a játékot 2×2 -es négyzetek színezése esetén. Nem nehéz felismerni, hogy ha a játéktábla $(2k \times 2k)$ -es négyzet vagy $(2k \times 2l)$ -es téglalap alakú (tetszőleges $k, l \in \mathbb{N}$ esetén), akkor működik rá a fent tárgyalt, középpontos szimmetrián alapuló stratégia. Azonban a többi esetben $((2k+1) \times (2l+1))$ -es vagy $(2k) \times (2l+1)$ -es játéktáblánál ezt nem tudjuk kihasználni, mert nincs középső négyes, amivel kezdhethénk a színezést. Hogyan játszunk ilyenkor? Van-e egyáltalán abszolút nyertes? Nézzünk egy kisebb konkrét példát.

Állítás: $(3 \times 2k)$ -as táblán játszva az első játékosnak van nyerő stratégiája.

Bizonyítás: Vegyük észre, hogy a páros hosszú oldal felezőmerőlegese rácsvonalon halad, így kihasználhatjuk az erre a tengelyre való szimmetriát. Kettő olyan (2×2) -es négyzet van, melyen eme tengely áthalad, de ezek közül csak egy színezhető. Ha a kezdő elsőként az egyik ilyen színezi be, akkor ellenfele tetszőleges lépését tükrözve a tükörtengelyre övé lesz az utolsó lépés. \square

A $2 \times n$ -es játéktáblán való játékokra és annak nyerő stratégiájára a későbbiekben majd még visszatérünk (ld. 5. fejezet). A többi esetről nem lesz szó, kipróbálásukat tudom ajánlani.

1. 2. Foglalós játékok

Foglalkozzunk kicsit a foglalós típusú játékokkal. Ezeket azért szokás így nevezni, mert adott játéktáblán játsszák úgy, hogy felváltva elfoglalnak egy-egy mezőt (tesznek rá egy-egy saját színű jelet), és a játék győztese az, aki az előre kijelölt nyertes mezőcsoportok valamelyikét először el tudja foglalni. Ilyen foglalós játékokra példa a mindenki által jól ismert, angol nevén Tic-tac-toe, mely során a játékosok egy 3×3 -as négyzetbe a szokásos X és kör jeleket rakosgatják, és az nyer, aki először tudja három egyforma jelét egy vonalba helyezni (tehát a három sor, a három oszlop, és a két átló a kijelölt nyertes mezőcsoportok). A foglalós játékok nem tekinthetők normál játékoknak,

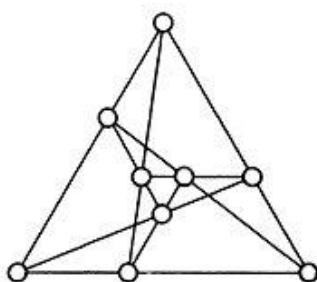
mert kialakulhat döntetlen állás is, amikor azért nem tudnak többet lépni a játékosok, mert a táblán a lehetőségek elfogytak, de senki sem nyert.

Állítás: A foglalós játékokban a második játékos sosem nyerhet. (Legfeljebb döntetlenre vezető stratégiája lehet.)

Bizonyítás: Indirekte tegyük fel, hogy a második játékosnak van nyerő stratégiája. Ilyen helyzetben a kezdő tudja alkalmazni a „stratégialopást”. Ez azt jelenti, hogy a kezdő játékos lép valamit, majd innentől úgy fogja fel a játékot, mintha csak most kezdődne, és a második játékos nyerő stratégiája szerint játszik tovább. Akkor merülhetne fel probléma, ha azt a mezőt kéne elfoglalnia, melyre az első lépéskor lépett, ám ez nem gond, mivel ezen már az ő jele szerepel, tehát mi sem egyszerűbb, bárhova máshova tehet. Ezzel a módszerrel az első játékosnak nyernie kellene, holott a másodiknak van nyerő stratégiája, ellentmondás. \square

Gondoljuk meg a következő konkrét foglalós játékot a nyerő stratégia szempontjából.

3. Játék (Trihex): Az 1.1. ábra szerinti játéktáblára két játékos felváltva helyez egy piros, illetve egy kék korongot valamelyik még üres körre. Az győz, akinek elsőként sikerül három egyszínű korongot helyezni a kilenc egyenes vonal valamelyikére.



1.1. Ábra: A trihex játék táblája

Tétel: A Trihex játékban az I. játékos nyer.

Bizonyítás: A tétel bizonyításában szükségünk lesz két fogalomra: *szabad egyeneseknek* nevezzük azokat az egyeneseket, melyeken egyetlen korong sincs; és egy játékos számára *félszabad egyenes* az az egyenes, amelyen van az ő színének megfelelő színű korong, de mentes az ellenfele korongjaitól. A bizonyítás során kollineárisnak nevezünk három mezőt, ha azok a játék tábláján egyazon egyenesre illeszkednek.

Az ábra úgy van megalkotva, hogy minden egyenesen három üres kör szerepel, ahova a korongokat el kell helyezni, továbbá minden ponton át három egyenes megy át. Megegyezés alapján I. játékos használja a piros korongokat, ellenfele a kékeket. Kezdként az első lépést mindenképp az egyik olyan mezőre tegyük, mely a nagy háromszög oldalán, de nem a csúcsán helyezkedik el. Ellenfelünk lépésétől függően két fajta állás jöhet létre, amit külön kell vizsgálnunk:

- a) Ha II. nem oldalpontra tesz, akkor lépését úgy kell követnünk, hogy a két piros korongunk egyazon félszabad egyenesen legyen. Ezután biztosan adódni fog legalább két ilyen félszabad egyenes. Ezzel a lépéssel kényszerítettük a második játékos, hogy kék korongját ezen egyenes harmadik mezőjére helyezze, hogy megakadályozza a győzelmünket. Figyeljünk rá, hogy a félszabad egyenesek közül olyat, és annak olyan a pontját válasszuk, melyen a harmadik – még üres hely – nincs egy egyenesen a kék koronggal (ellenőrizhető, hogy lesz ilyen), hogy ezzel ne segítsük ellenfelünket. Ellenkező esetben megelőlegezzük magunknak a kényszerhelyzetet. Az ezutáni körben – a pálya sajátosságai miatt – lesz olyan mező, ami két 1-1 piros korongot tartalmazó félszabad egyenes metszéspontja. Foglaljuk el ezt a mezőt. Innen könnyen látható, hogy megnyerjük a játékot.
- b) Második eset, ha ellenfelünk egy másik oldalpontra (de nem csúcsra) teszi kék korongját. Az oldalpontok tulajdonsága, hogy minden ponttal kollineárisak, csak egymással nem. Tegyük most a harmadik oldalpontra. Ekkor a második játékos akármit léphet, mi fogunk nyerni. Ugyanis: a két piros színű oldalpontnak az összes még szabad mezővel van közös egyenese, tehát bármelyik pontra is leszünk kénytelenek tenni (ellenfelünk győzelmének megakadályozása érdekében), az biztosan két olyan félszabad egyenesnek lesz metszéspontja, ami tartalmaz 1-1 piros színű korongot. Innen pedig egyértelműen mi nyerünk. □

3. Fejezet: Kupacos játékok

Közkedvelt matematikai játékok a kupacokba, vagy halmokba rendezett tárgyak (kavicsok, gyufák, korongok, stb.) alkotta játékok, melyekben különböző szabályok szerint szabad elvenni bizonyos számú elemet. Ebben a fejezetben kupacokba rendezett kavicsokról lesz szó. Továbbra is a jó stratégia megtalálása a cél.

3. 1. Egyszerű egykupacos játék

4. Játék: *Egy kupacban 21 kavics van. Két játékos játszik, akik felváltva 1, 2 vagy 3 darabot vehetnek el. Ez normál játék, vagyis az nyer, aki az utolsó(ka)t veszi el. Kinek van nyerő stratégiája?*

Visszafele gondolkodva: aki előtt már csak 3 vagy kevesebb korong lesz, az meg tudja nyerni a játékot, hiszen a legfeljebb 3 korongot elvehet. Ez nyerő állás. A 4 darab kavics ugyanebből a megfontolásból vesztes állás, hiszen akárhány (1, 2 vagy 3) darabot veszünk is el, ellenfelünk elveheti a maradékot, és ezzel nyer. Továbbgondolva, minden $4 \cdot k$ ($k = 0, 1, \dots, n$) darab kavics vesztes állás, mert abból lépve az elemek számának négygyel oszthatósága nem megtartható, tehát vesztes állásból vesztes állásba nem lehet lépni, viszont bármely más esetből meg lehet játszani azokat. Speciálisan itt a vesztes állások: 4, 8, 12, 16, 20 db korong. Ennek megfelelően 21 kavics esetén a kezdő játékosnak van nyerő stratégiája: mégpedig először 20-ra csökkentve a kavicsok számát.

Érdeemes meggondolni ezt a feladatot általánosabban is:

4. Játék általánosítása: *Adott egy n elemű kupac, melyből két játékos felváltva vesz el 1-től m darabig akárhány kavicsot. Az vesz, aki nem tud lépni. Kinek van nyerő stratégiája, és mi az?*

Állítás: Ha $m + 1 \mid n$, akkor a kezdő játékos veszít, ellenkező esetben viszont neki van nyerő stratégiája.

Bizonyítás: Ebben a játékban biztosan az nyer, akinek először sikerül $(m+1)$ -gyel osztható elemszámba lépni. Ilyen helyzetből indulva bárhogy is lépünk, nem tudunk újabb $(m+1)$ -gyel oszthatóvá tenni a kupac méretét, míg ellenfelünk – akárhogy is léptünk – a következő körben csökkenteni tudja az elemszámot újabb $(m+1)$ -gyel oszthatóvá. Vegyük észre, hogy a 0 végső vesztes állás is osztható $(m+1)$ -gyel. Ezek

értelmében minden $(m + 1) \cdot k$ ($k = 0 \dots n$) darab korong esetén alakul ki vesztes állás. Tehát, aki ebből kényszerül lépni, az veszít.

Ha a játék kezdőállásakor a kupac méretét osztja $(m+1)$, akkor ugyanebből a megfontolásból következik, hogy a kezdő játékos nem tud nyerni. \square

Továbbra is kupacokkal és azokból álló feladatokkal foglalkozunk. A következőkben egy általánosabb játékcsoportról lesz szó.

3. 2. Nim-játék és nim-összeadás

A Nim-játék Kínából származó, ma már széles körben ismert matematikai játék. A menete a következő:

Nim-játék: *adott n db kupac, melyek rendre $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ darab kavicsot tartalmaznak. Két játékos játszik, akik felváltva vesznek el akárhány, de legalább 1 kavicsot valamelyik tetszőleges kupacból. Az nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi. Kérdés, hogy kinek van nyerő stratégiája.*

Ezek, vagy az ehhez hasonló feladványok megoldásában segítségünkre lesz egy új fogalom, a „nim-összeadás”.

Definíció (nim-összeadás): *Vegyük a nemnegatív egész számok halmazát, és azon úgy értelmezzük a nim-összeadást, hogy elemeit kettes számrendszerbeli alakjukban felírva adjuk össze modulo 2, azaz nem törődve az egyes helyiértékeken adódó maradékokkal.*

Példa: $12 \oplus 25 = 21$, hiszen $1100_2 + 11001_2 = 10101_2$.

Világosabbá válik a nim-összeadás, ha a szokásos módon, egymás alá írva adjuk össze őket:

$$\begin{array}{r} 1100_2 \\ \oplus \quad 11001_2 \\ \hline 10101_2 \end{array}$$

Ezt a definíciót megfogalmazhatjuk másképpen is:

Definíció: *Jelölje \mathbf{F}_2 a kételemű testet (azaz a modulo 2 számkört), és legyen \mathbf{F}_2^∞ ennek végtelen diszkrét direktorzozata, vagyis az a végtelen dimenziós vektortér, amelyben olyan*

0 és 1 koordinátákat tartalmazó vektorok vannak, melyekben csak véges sok 1-es szám szerepel.

Tekintsük a következő kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést \mathbb{N} és \mathbf{F}_2^∞ között: írjunk fel egy adott számot kettes számrendszerben, de fordított sorrendben, azaz jobbról balra. Vegyük azt a végtelen hosszú vektort, melynek az első koordinátái éppen ennek a számnak a „fordított” kettes számrendszerbeli alakjának számjegyeivel egyezik meg, majd ezeket végtelen sok nulla követi. Ez egy egyértelmű megfeleltetést ad \mathbb{N} és \mathbf{F}_2^∞ elemei között, hiszen egy szám egyetlen vektornak felel meg. Azaz, ha $n = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot 2^i$, ahol $a_i = 0$ vagy 1 , akkor az ennek megfelelő vektor (a_0, a_1, a_2, \dots) .

Tétel: A nim-összeadás Ábel-csoportot alkot.

Bizonyítás: Tudjuk, hogy a vektorösszeadás Ábel-csoportot alkot. Az előzőekben adott egyértelmű megfeleltetéssel látható, hogy az \mathbf{F}_2^∞ -beli végtelen hosszú vektorok összeadása és a nim-összeadás ekvivalens művelet, ezért a nim-összeadás is Ábel-csoportot alkot. \square

A nim-összeadás további tulajdonságai:

1. Állítás: Minden a számra $a \oplus a = 0$.

Bizonyítás: Nem nehéz megmondani, hogy ha a kettes számrendszerben két azonos számot adunk nim-össze, akkor mivel abban az 1-esek és 0-k ugyanazon a helyiértéken állnak, az összeadásukkor azok mind lenullázódnak ($1 + 1 = 0 + 0 = 0$). \square

2. Állítás: Tetszőleges a és b pozitív egészekre teljesül: $0 \leq a \oplus b \leq a + b$.

Ezt nem bizonyítom, de végiggondolható.

3.3. A Nim-játék nyerő stratégiája

Az egykupacos Nim-játék nagyon egyszerű, nem is nevezhető játéknak, hiszen a kezdő játékos elsőre felmarkolhatja az egész kupacot, és vége a játéknak. Nem ilyen könnyű elsőre átlátni a több kupacos normál Nim-játékot.

Vezessük be a $\text{Nim}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ jelölést arra az n kupacos Nim-játékra, ahol a_1, a_2, \dots, a_n a különböző kupacok elemszáma.

Tétel:

- 1) Ha egy $\text{Nim}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ játék kupacméreteinek nim-összege $a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n \neq 0$, akkor biztosan létezik olyan lépés, hogy a kapott $\text{Nim}(a_1', a_2', a_3', \dots, a_n')$ játékra $a_1' \oplus a_2' \oplus \dots \oplus a_n' = 0$.
- 2) Ha egy $\text{Nim}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ játékban $a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n = 0$, akkor bármely lépés után a kapott $\text{Nim}(a_1', a_2', a_3', \dots, a_n')$ játékra a nim-összeg $a_1' \oplus a_2' \oplus \dots \oplus a_n' \neq 0$.

Bizonyítás:

- 1) Először írjuk fel egymás alá a kupacok méretét kettes számrendszerben, és adjuk össze őket nim szerint! A célunk az, hogy ezt a kapott összeget olyan módon 0-ra tudjuk változtatni, ami megfeleltethető egy játékbeli lépéssel. Ehhez keressük meg azt a legnagyobb helyiértéket (vagyis balról az első olyan oszlopot), ahol páratlan sok 1-es szerepel - ugyanis ezen a helyiértéken a nim-összegben is 1-es fog szerepelni -, és válasszuk ki ebből az egyik 1-est; legyen ez a_i felírásában. Most változtassuk meg ezt az 1-est 0-ra, és a_i ettől jobbra lévő bináris számjegyeit is cseréljük 1-esre vagy 0-ra úgy, hogy végül az egész összeg 0-ra csökkenjen. (Ez megtehető, és ezt akkor érjük el, ha minden oszlopban páros számú 1-es lesz.) Ezzel a lépéssel átértünk a $\text{Nim}(a_1', a_2', a_3', \dots, a_n')$ játékra, ahol $a_j' = a_j$, kivéve $j = i$ -re; és ebben 0 a nim-összeg. A felírásban egy sor a játékban egy kupac elemszámának felel meg, és egy tetszőleges sort alkotó szám csökkentése valamennyivel, ekvivalens azzal, hogy a neki megfelelő kupacból ugyanennyi elemet elveszünk. Már csak azt kell belátnunk, hogy az eljárás során valóban az egyik kupac elemszámát csökkentettük (nem növeltük), tehát létezik ilyen lépés. Ezt nem nehéz meggondolni, mert a legnagyobb helyiértéken álló 1-est 0-ra cseréltük – legyen ez a 2^k helyiérték –, és mögötte a változtatások után legfeljebb $k-1$ darab 1-es állhat, melyek értéke tízes számrendszerben legfeljebb $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1$, ami biztosan kisebb az előző számnál. Tehát a leírt lépések során valóban csökkentettük a kupacok méretét.
- 2) Ezt a bizonyítást egész egyszerűen át lehet gondolni az előzőek alapján. Láttuk, hogy a játék lépéseit hogyan tudjuk másképp leírni, elvégezni. A levezetésből látszik az, hogy 0 nim-összegeből újabb 0 nim-összegű állást nem tudunk elérni: $a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n = 0$ esetén semelyik oszlopban sem lesz páratlan számú 1-es, amit megcserélve jól járnánk, viszont egy sorban legalább egy számot ki kell cserélnünk, mert lépni muszáj. Tehát lesz olyan oszlop a lépésünk után, melyben páratlan számú 1-es fog állni, így az összegben is legalább egy 1-es szerepelni fog. \square

Következmény: A $\text{Nim}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ játék akkor nyerhető meg biztosan, ha a kezdő játékos előtt lévő kupacokban lévő kavicsok számának Nim-összege $a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n \neq 0$.

Bizonyítás: Ha 0-tól különböző szám a kupacok elemszámának összege, akkor az előző tétel alapján a kezdő játékos tud kialakítani olyan $\text{Nim}(a_1', a_2', a_3', \dots, a_n')$ játékot, amire $a_1' \oplus a_2' \oplus \dots \oplus a_n' = 0$. Azt is beláttuk, hogy ilyen állásból semmilyen lépéssel nem lehet újabb 0 nim-összegűt létrehozni, viszont ellenfele tetszőleges lépése után a kezdő mindig fog tudni úgy lépni, hogy ismét 0 legyen a kupacok számának nim-összege, és így tovább. Mivel a végső vesztes állásban is 0 a kupacméretek nim-összege, és oda csak a kezdő tud lépni, ezért a $\text{Nim}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ játékot a kezdő játékos nyeri.

□

3. 4. Összegjátékok

Összegjátékról beszélünk, ha több J véges játékot egyszerre játszunk úgy, hogy egy lépés alatt a soron következő játékos csak az egyik játékban léphet. A Nim-játék is összegjáték, amely felfogható akképp is, hogy egyszerre több egykupacos játékot játszunk, és a soron következő játékos egyszerre csak az egyik kupacot csökkentheti.

Több ugyanolyan játék összegét (mint például a Nim) jelöljük $n \cdot J$ -vel, ahol J az eredeti egyszeri játék, $n \in \mathbb{N}$ pedig azt mutatja meg, hányszor vesszük ezt a játékot.

Előfordulhat, hogy több különböző játék összegére vagyunk kíváncsiak, akkor jelölésben meg kell különböztetnünk őket egymástól. Legyen az előző mintájára ezen összegjáték

$$\sum_{i=0}^n J_i$$

ahol n megegyezik a játékok számával, és i az eltérő játékokat jelöli. Így például két különböző játék összegének jelölése (J_1+J_2) .

Figyeljük meg, hogy az összegjátékok is véges játékok, hiszen a véges játékok összege is véges játék, előbb-utóbb véget érnek.

Először nézzük ugyanannak a játéknak a valahányszoros összegét, és keressük meg azok nyerő játékosait, illetve a jó stratégiájukat!

Tétel: Páratlan n esetén az nJ összegjátékot mindig az nyeri, akinek az egyszeri J játékban van nyerő stratégiája; páros n esetén az nJ összegjátékban mindig a második játékos győz.

Bizonyítás:

Páratlan számú J -t összeadva

- a) nJ -ben az első játékos nyer, ha J -ben neki van nyerő stratégiája. Jó stratégiának az bizonyul, ha kezdésképp bármelyik játékot elkezdi J jó stratégiája szerint, majd ha ellenfele ebben a játékban válaszol, ő is itt folytatja tovább, ha pedig második másik játékba kezd bele, akkor az első egy harmadik játékban lépi ugyanazokat.
- b) nJ -t a második játékos nyeri, ha neki van J -ben nyerő stratégiája. Ha a második játékos tudja megnyerni a J játékot, akkor az nJ összeg megnyeréséhez a kezdő játékos által választott bármelyik játékot kell folytatnia a J -beli nyerő stratégiája szerint. Ezzel a módszerrel a második játékos megnyeri az összes J játékot, így az összegüket is.

Páros számú J összege esetén mindig a második játékosnak van nyerő stratégiája, mégpedig úgy kell játszania, hogy a kezdő minden lépését leutánozza egy általa kiválasztott másik játékban, így lépései után azonos állás alakul ki mindkét játékban. Ha első tud lépni, második is megteszi azt a lépést a másik játékban, végül ő nyer. \square

Speciálisan, ezt az elvet ismerve könnyedén megmondhatjuk – a nim-összeg használata nélkül is – hogy egy tetszőleges kupacs számú Nim-játékban ki nyer. Ismerjük az egykupacos Nim-játék győztesét, ugyanis a kezdő játékos elveheti elsőként az összes kavicsot, amivel ő nyer. Használva az előző tételt, megállapíthatjuk, hogy azonos méretű páratlan számú kupac esetén az első játékos, páros kupacs számnál a második játékos nyeri a belőlük képzett Nim-játékot.

Nem ilyen egyszerű a helyzet, ha különböző játékokat adunk össze. A következő fejezetben ilyenekre is hozunk példát.

4. Fejezet: Grundy-számok

A következőkben egy általánosabb elmélet kerül bemutatásra, amit a játékoknak egy széles csoportján, az egyszerű játékok körében fogunk használni.

Definíció (egyszerű játék): *Egyszerű játéknak nevezzük azt a normál, kétszemélyes véges játékot, melyben minden állásnak véges a kifoka, a játék során a játékosok bármely állásból ugyanazokat a lépéseket tehetik meg (azaz szimmetrikus), teljesen ismerik az aktuális állást, valamint szabadon, akaratuk szerint választják meg lépéseiket a szabály adta lehetőségek közül.*

Először bonyolultnak tűnhet a definíció, ezért mutatunk egy-egy példát nemegyszerű játéokra a könnyebb megértés céljából.

1. *Példa:* A kártyajátékok általában nem egyszerű játékok, mert ott a játék közben az ellenfél lapjairól nem tudunk semmit, legfeljebb következtetni tudunk azokra. Ezzel ellentétben a fent említett Nim-játék olyan, melyben minden információt (állásokat, lépéseket) ismerünk.

2. *Példa:* Nem szimmetrikus játékra példa a sakk, hiszen ott csak a saját bábuinkkal léphetünk, az ellenfél bábúhoz nem nyúlhatunk. Tehát nem ugyanazokat a lépéseket tehetjük meg egyazon állásból. Így a sakk nem egyszerű játék.

3. *Példa:* Ha egy játék során a lépések számát valamilyen véletlen generálja, például annyit léphetünk, ahányat dobunk a kockával, akkor ebben a játékban nem a játékosok határozzák meg a saját lépésüket, ezért ez sem tekinthető egyszerű játéknak.

A továbbiakban csak egyszerű játékokról lesz szó, emiatt ezt a tulajdonságot általában nem fogjuk külön hangsúlyozni.

Ahogy már fentebb utaltam rá, egy általánosabb módot mutatunk a nyerő stratégia megtalálására. A játékok állásaihoz számokat fogunk rendelni, hasonlóan, mint azt a többkupacos Nim-játéknál tettük. Ehhez azonban szükségünk lesz a következő fogalomra.

Definíció (legkisebb kizárt): Az x_1, x_2, \dots, x_n számok legkisebb kizártján azt a legkisebb nemnegatív egész számot értjük, amely nem fordul elő az x_1, x_2, \dots, x_n számok között.

Jelölés²: $\text{mex}(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Most már tudunk egy egyszerű játék minden pozíciójához rendelni ún. Grundy-számot az alább leírt módon. Nem látszik azonnal, hogy ez valóban jó és működő definíció, de rögtön utána belátjuk, hogy így van.

Definíció (állás Grundy-száma): Egy véges játék állásának Grundy-száma 0, ha nincs rákövetkezője (azaz az ebből induló játékos veszít), illetve ha egy állás minden rákövetkezőjének számát ismerjük, akkor a kérdéses állás Grundy-száma ezek legkisebb kizártja.

Jelölés: egy tetszőleges X_i állás Grundy-számát $G(X_i)$ jelöli.

Tétel: Egy véges játék minden pozíciójának van Grundy-száma.

Bizonyítás³: Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben semelyik álláshoz nem lehet már számot rendelni, mégis létezik egy olyan X_1 pozíció, aminek nincs Grundy-száma. Ez abban az esetben X_1 -nek kell, legyen olyan rákövetkezője, aminek szintén nincs száma. Ha nem lenne rákövetkezője, $G(X_1)=0$ lenne, ha pedig minden rákövetkezőjéhez lenne rendelve Grundy-szám, akkor azok legkisebb kizártja megadná a kérdéses $G(X_1)$ -et. Legyen X_2 az X_1 -nek egy ilyen szám nélküli rákövetkezője. Ha X_2 -nek nincs száma, neki is létezik X_3 rákövetkezője, amihez szintén nem tartozik Grundy-szám, X_3 -nak X_4 ilyen, és így tovább. Mivel véges játékról van szó, véges sok lépésben véget kell érjen a játék, így a kapott $X_1, X_2, X_3, X_4, \dots$ sorban, ahol minden X_{i+1} az X_i rákövetkezője, előbb-utóbb ismétlődnie kell az egyik állásnak. Azonban ilyenkor lenne kör az állapotgráfban, ami ellentmond a véges játékok ciklusmentességének. □

Definíció: Egy véges játék Grundy-száma a játék kezdőállásának Grundy-száma.

² Az angol **minimal excluded** (legkisebb kizárt) kifejezés rövidítése

³ A [2] cikk alapján

Világosan látszik, hogy a Nim-játék véges játék, ezért térjünk vissza az egykupacos Nim-játékra, és első példaként nézzük meg, hogyan számolhatóak ki ebben a pozíciók Grundy-számai.

Tétel: Az n kavicsot tartalmazó normál egykupacos Nim-játék Grundy-száma n .

Bizonyítás: Teljes indukciót használunk. Egyetlen olyan állás a játékban, amiből tovább nem léphetünk, vagyis nincs rákövetkezője, az a 0 kavicsos állapot. Így ennek a Grundy-száma definíció szerint 0. Jelöljük itt a különböző pozíciók Grundy-számát G_i -vel, ahol i a kupacban lévő korongok száma. Tehát $G_0 = 0$. Az 1 kavicsot tartalmazó kupacnak csak egyetlen rákövetkezője van, a 0 elemszámú kupac, aminek Grundy-számát már ismerjük, ezért ennek segítségével könnyen megállapíthatjuk, hogy $G_1 = \text{mex}(0) = 1$. Hasonlóan folytatva, a két kavicsos állás Grundy-száma $G_2 = \text{mex}(G_0, G_1) = \text{mex}(0, 1) = 2$. A továbbiakban tegyük fel, hogy $G_n = n$. Lássuk be, hogy $G_{n+1} = n + 1$. Tudjuk, hogy $G_{n+1} = \text{mex}(G_0, G_1, \dots, G_n)$. Mivel az indukciós feltevésünk alapján minden $G_i = i$, ezért $\text{mex}(G_0, G_1, \dots, G_n) = \text{mex}(0, 1, \dots, n)$, ami nem más, mint $n + 1$, tehát valóban $G_{n+1} = n + 1$. \square

Ahogy a nim-összegnél is felfedeztünk különböző tulajdonságokat, a véges játékok illetve azok állásainak Grundy-számai is rendelkeznek hasonlókkal, ezek pedig az alábbiak:

- 1) vesztes állás Grundy-száma 0;
- 2) ha egy állás Grundy-száma 0, akkor egyik rákövetkezőjének Grundy-száma sem 0;
- 3) ha egy állás Grundy-száma $n > 0$, akkor a rákövetkezői között van $n-1, n-2, \dots, 1, 0$ Grundy-számú állás is.

Tétel: Egy véges játékban a kezdő játékosnak akkor és csak akkor van nyerő stratégiája, ha a kezdő állás Grundy-száma nem 0.

Bizonyítás⁴: Ha a kiindulási pozíció 0-tól különbözik, akkor a 3) tulajdonság értelmében van olyan rákövetkező (talán több is), aminek a Grundy-száma 0. A kezdő válassza ezek közül valamelyiket. Ekkor a második játékos két eset fordulhat elő: vagy azonnal veszít – az 1) eset miatt –, vagy kénytelen pozitív Grundy-számú állást elfoglalni – 2) tulajdonság miatt. Bárhogy dönt, a kezdő játékos ismét pozitív Grundy-számú pozícióból

⁴ [2] cikk alapján

léphet, aminek szintén van 0 számú rákövetkezője. Ezt előállítva – a 3) pont értelmében megteheti –, majd ezt a stratégiát folytatva a kezdő nem veszíthet.

Ellenkező esetben, ha a kezdő állás Grundy-száma 0, akkor a második játékos tud mindig pozitív Grundy-számú pozícióból 0 Grundy-számúba lépni, ami azt jelenti, hogy ő nyeri a játékot. \square

Tétel: Több egyszerű játék összegének Grundy-száma megegyezik a játékok Grundy-számának nim-összegével. Azaz $G(X_1, \dots, X_n) = G(X_1) \oplus \dots \oplus G(X_n)$.

Bizonyítás: Legyen f szintfüggvény, melyre a rákövetkező nélküli állások szintje 0. Legyen $f(X_1, \dots, X_n) = f(X_1) + \dots + f(X_n)$, ez jó szintfüggvény; továbbá J_1, \dots, J_n direktösszege J , és annak egy állapota (X_1, \dots, X_n) .

Bizonyítandó, hogy $G(X_1, \dots, X_n) = G(X_1) \oplus \dots \oplus G(X_n)$. Ezt $f(X_1, \dots, X_n)$ szerinti indukcióval látjuk be. Az $f(X_1, \dots, X_n) = 0$ akkor és csak akkor, ha (X_1, \dots, X_n) vesztes állapot J -ben, amiknek nincsenek rákövetkezői, tehát ez rendben van. Legyen (X_1, \dots, X_n) valamilyen állapot, és tegyük fel, hogy minden $f(X_1, \dots, X_n)$ -nél kisebb szintű állapotra már beláttuk az állítást. A szint definíciója értelmében egy állapot szintje mindig nagyobb a rákövetkezői szintjénél.

Kell még, egyrészt, hogy $A = G(X_1) \oplus \dots \oplus G(X_n)$ nem áll elő (X_1, \dots, X_n) rákövetkezőjének Grundy-számaként (melyekről már tudjuk az állítást); másrészt, hogy minden A -nál kisebb szám viszont igen. Hasonlóan bizonyíthatjuk ezt a tételt, mint ahogy a nim-összegre hozott állítást is igazoltuk. A Grundy-számokat egymás alá írva, azokat össze tudjuk nim-adni. A lépések megfelelnek a Grundy-számok nim-összegének változtatásával a szokásos módon. Ennek segítségével belátható, hogy A nem, de minden A -nál kisebb szám előáll (X_1, \dots, X_n) rákövetkezőinek Grundy-számaként. Ezt azonban önálló megfontolásra bízom. \square

5. Fejezet: További játékok és a Nim-játék variánsai

Nézzünk a továbbiakban példákat olyan Nim-játékkal rokon vagy rokonítható játékokra, melyek nyertes stratégiájának felfedezéséhez szükséges a Grundy-számok használata.

5.1. Korábban előfordult játékok Grundy-számai

Vegyük újra elő azt a korábban leírt **3. feladat általánosítása** néven szerepelő egykupacos játékot, amiben n kavics van, és a szabálynak megfelelően 1 és m közti darabszámú elemet szabad elvenni. Vajon mik lesznek ebben a játékban az állások Grundy-számai?

Az egyetlen rákövetkezővel nem rendelkező állás a 0 elemű végállás, aminek Grundy-száma: $G_0 = 0$. Az 1 elemű kupacnak csak egy kiszomszédja van (a 0-állás), így az ő Grundy-száma $G_1 = 1$. A kételemű kupac Grundy-száma szintén nem túl bonyolult, hiszen innen 1-re és 0-ra léphetünk (ha $m \geq 2$), tehát $G_2 = 2$. Általánosabban: ha $k \leq m$, akkor $G_k = k$. (Ez pont ugyanaz, mint a $\text{Nim}(k)$ -nál.) A $k = m+1$ állás Grundy-száma ismét 0, azaz vesztő állás, hiszen az ebből következő játékos egy lépéssel legfeljebb m kavicsot vehet el, ami után a második el tudja venni az összes maradékot. Jól látható, hogy periodikusan ismétlődik a kiszomszédok Grundy-számainak halmaza. Ez a periódus $m+1$ hosszú. Ebből az következik, hogy minden $k > m$ elemszámú kupac esetében a $G_k = k \pmod{m+1}$, vagyis k -nak az $m+1$ -gyel vett maradéka adja a kérdéses állás Grundy-számát.

Emlékezzünk vissza az első fejezetben leírt **2. számú színezési játékra**, ami ötletként merült fel a dolgozatírás során. (A továbbiakban ez **2. játék** néven fog futni.) A nyertes stratégia kitalálásának érdekében elkezdtem kiszámolni az állások Grundy-számait. Látszólag nem mutatott semmi szépséget vagy speciális tulajdonságot az első húsz szám. Azonban továbbra is érdekelt a dolog, és kutattam az interneten.⁵ Kiderült, hogy létezik ennek megfeleltethető játék, aminek a neve angolul Dawson's Chess. Ennek menete a következő:

⁵ A <https://oeis.org/> weboldal segítségével rá lehet keresni (nevezetes) számsorozatokra, így bukkantam rá arra játékra, melynek Grundy-számai megegyeznek az általam konstruált **2. játék** Grundy-számaival

10. Játék (Dawson's Chess): Adott egy $1 \times n$ -es téglalap, melynek négyzeteibe a játékosok felváltva X -et raknak úgy, hogy az X jellel ellátott cellák szomszédosak nem lehetnek, vagyis egy X melletti négyzetbe másik X nem kerülhet. Az nyer, aki az utolsó jelet rakja.

Ha jobban meggondoljuk, a két játék megfelel egymásnak. Annyi a különbség, hogy az itteni négyzetek ott a 2×2 -es négyzetek felező vonalainak felelnek meg, és az itteni választó rácsvonalak pedig a színezős játék négyzeteivel egyeznek meg. Nézzük az alábbi 5. 1. ábrán szemléltetett példát.

Dawson's Chess tábla egy lehetséges

X			X	
---	--	--	---	--

 végállással:

A 2. játék ugyanazt jelentő végső állása:

5.1. ábra

Jól látható, hogy, a 2. játékban a 2×2 -es négyzetek határvonalai épp a Dawson's Chess-beli „tiltott mezőknek” felelnek meg - amikben nem kerülhet X jel, mert szomszédjukban már szerepel -, mert egy ilyen határvonalra nem eshet másik 2×2 -es négyzet felezővonala, hisz akkor a négyzetek takarnák egymást.

Fény derült arra⁶, hogy ennek a játéknak a Grundy-számaiból álló sorozat 34-es periodicitású, de az elején van hét kivétel: a 0, 14, 16, 17, 31, 34 és 51. helyen álló számok tekintetében. Utána beáll a valódi periodicitás. Azok az állások érdekesek számunkra a nyerő stratégia kutatása kapcsán, melyek Grundy-száma 0, mert ezek a vesztes állások. Tehát vesztes állások az elejétől kezdve: 1, 5, 9, 15, 21, 25, 29, 35 négyzetet tartalmazó kezdőállások, majd az 1, a 15 és 35 kivételével ezek $k \cdot 34$ -gyel vett összegei is vesztes állások lesznek a periodicitás miatt.

5. 2. Játékok korongokkal

A következő játék a [4] könyvből származik:

⁶ Szintén a <https://oeis.org/> weboldal használatával

5. Játék: Egy asztalon sorba 10 korong van lerakva, melyeknek egyik oldala fehér, másik fekete színű. Ketten játszanak. A soron következő mindig kiválaszt egy fekete oldalával felfelé fekvő korongot, majd azt, és az összes tőle jobbra lévőt átfordítja a másik oldalára. Akkor van vége a játéknak, ha mindegyik korongnak a fehér oldala van felül. Az vesz, aki nem tud többet lépni. Kinek van nyerő stratégiája, és hogyan tud győzni?

A játék kimenetele és nyertese függ a kiindulási helyzettől. Tekintsük az alábbi konkrét kezdőállást (5. 2. ábra):



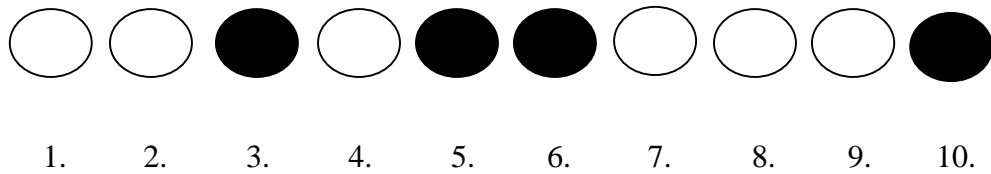
5. 2. ábra

A nyertes stratégia nem bonyolult, sőt elég kézenfekvő, ha belegondolunk; tudniillik a végeredmény egyáltalán nem a játékosok lépésein múlik, hanem csupán az utolsó korong színétől függ. Ugyanis egy korong, az utolsó helyen álló biztosan megfordul minden lépésben. Ez lépésenként váltakozva hol fehér, hol fekete oldalával lesz felül, míg ki nem alakul a végső nyertes – összes fehér – állás. Ha például kezdetben fekete az utolsó korong, akkor az mindig a kezdő játékos forgatásai nyomán fog a fehér oldalával felfelé kerülni. A játék egyszer véget ér, és tudjuk, hogy az utolsó lépés a kezdő játékosé lesz, tehát ő nyer. Ellenkező esetben - ha a kezdő állapotban fehér az utolsó korong - a második játékosé a győzelem. Tehát teljesen mindegy, hány koronggal játszunk, a győztest mindig a sorban elhelyezett utolsó korong színe fogja elárulni. Ha az a fekete oldalával felfelé fekszik, akkor a kezdő, ha fehér színe látszik, akkor a második játékos nyer. Így a fenti játékot a kezdő játékos nyeri.

Ha feladatban módosítjuk kicsit a szabályokat, akkor a megoldás is bonyolódik, és itt már fel kell használnunk a Grundy-számokat illetve a nim-összeget. A következő feladat és megoldási ötlete [2] forrásból származik.

6. Játék: Legyen ismét 10 darab korongunk az asztalra sorba lehelyezve. A játékosok kétféle lépést hajthatnak végre: vagy megfordítanak egy fekete oldalával felfelé fekvő korongot, vagy két korongot fordítanak meg, melyek közül a jobbrább levő fekete. Az vesz, aki nem tud többet lépni.

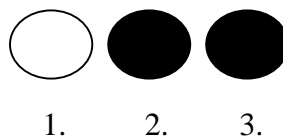
A megoldás végett számozzuk meg a korongokat balról jobbra.



5. 3. ábra

Állítás: A 6. játék egy állásának Grundy-száma épp a fekete színű korongok sorszámának nim-összege.

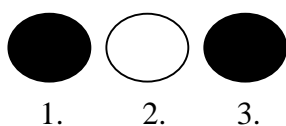
Bizonyítás: Alkossunk ebből a játékból Nim-játékot a következő képpen. Ha az i -edik korong színe fekete, akkor tekintsünk egy ekkora elemszámú kupacot a Nim-játékban, ha fehér színű egy korong, akkor nincs ilyen kupacunk. Ezzel egy szokásos Nim-játékot kapunk. Azért tehetjük meg ezt, mert a lépések épp ugyanazt eredményezik mindkét játékban: amennyiben megfordítunk egy fekete korongot, az annak felel meg, ha nim-játékban azt a kupacot teljes egészében elvesszük, és megszűnik. Ha egy fehér és egy fekete korongot fordítunk meg, melyek közül a fekete a jobb oldali, akkor azzal egyenértékű, mintha a nim-játékban bizonyos számú kavicsot elvettünk volna az addigi kupacból úgy, hogy a feketére fordított korong sorszámának megfelelő kupacméretet értünk el. (Mert a bal oldali korong sorszáma kisebb, és így kisebb elemszámú kupacot is jelent.) Tekintsünk erre magyarázatul egy példát (5. 4. ábra):



5. 4. ábra

Ebben a kis játékban illusztráljuk a korongforgatási lépések és a Nim-játék kapcsolatát. Tekintsük ennek mintájára a 2 és 3 elemszámú kupacokkal játszott Nim-játékot. Világosan látszik, hogy ha megfordítjuk például a 2. számú fekete színű korongot, és így az fehér lesz, akkor ez a lépés megegyezik azzal, hogy a Nim-játékban egy lépéssel eltüntetjük a 2 elemű kupacot. Két szabályos helyzetű korong megfordításával – legyenek

most ezek az 1. és 2. számúak – az 5.5.-ös ábrán látható állás jön létre, ami ekvivalens a Nim-játék azon lépésével, hogy a 2 elemű kupacból 1 kavicsot elveszünk.



5. 5. ábra

Két fekete korong megfordítása két kupac teljes elvételét jelentené a Nimben, ami ilyen formában nem szabályos. Azonban ha jobban meggondoljuk, ez a lépés jelentheti azt, hogy a nagyobb méretű kupacból elveszünk annyi kavicsot, hogy az egyenlő legyen a kisebb elemszámával, mert a nim-összeadás miatt két azonos méretű kupac nem befolyásolja az egész játék Grundy-számát, azaz a két kupac kiegyenlítésével, illetve teljes elvételükkel kapott Nim-állások Grundy-számai megegyeznek. \square

Az 5. 3. ábra alapján kialakult állás Grundy-száma tehát $3 \oplus 5 \oplus 6 \oplus 10 = 10$. A játék veszítő állásainak Grundy-száma 0, azaz ha ilyen állásról indul valaki, az nem tud nyerni. Ebből a pozícióból 0 Grundy-számút képezni csak a 10 elemű kupac teljes elvételével lehetséges. Tehát a 10-es számú fekete korongot kell megfordítani először a győzelemhez.

5. 3. A Nim-játék variánsai

A most következő három játékkal a [2] cikkben találkoztam:

7. Játék (Rim-játék): *Adott néhány kupac kavics. A kupacok egyikéből elvehető akármennyi kavics, de csak úgy, hogy az elvett elemek száma relatív prím legyen az elvétel előtti mennyiséghez.*

Ez a játék több egykupacos ún. „relatív prím” játéknak összege. A „relatív prím” játék egy n darab tárgyat (kavicsot) tartalmazó kupacról szól, amelyből k elemet vehetünk el, ha k és n relatív prímelek. Ebből következik, hogy 1-et mindig elvehetünk, az összes elemet azonban sosem (mert n önmagával nem relatív prím), kivéve, ha 1 darab marad a kupacban.

Jelöljük itt az i elemszámú Rim-kupacok Grundy-számát $G(R_i)$ -vel. Az első és második Grundy-szám könnyen megmondható: $G_0 = 0$, és $G_1 = \text{mex}(G_0) = 1$. Ha két elemet

tartalmaz a kiindulási kupac, akkor a szabálynak megfelelően az egyetlen lehetőség 1 kavics elvétele, ezért $G(R_2) = \text{mex}(1) = 0$. Háromelemű kezdőkupacból 1 és 2 elemet is elvehetünk, így kapjuk, hogy $G(R_3) = \text{mex}(G(R_1), G(R_2)) = \text{mex}(1, 0) = 2$. Négy elem esetén $G_4 = \text{mex}(G_1, G_3) = 0$. Hasonlóan $G_5 = \text{mex}(G(R_1), G(R_2), G(R_3), G(R_4)) = \text{mex}(1, 2, 0, 2) = 3$, és így tovább. A következő tételben meghatározzuk általánosságban $G(R_n)$ -et.

Tétel: A „relatív prím” játékban minden páros n elemszámú kupacra $G(R_n) = 0$, valamint n páratlan elemszám esetén $G(R_n) = k$, ha n legkisebb prímosztója a k -adik prímszám. (Az első prímszám a 2, második a 3, stb.)

Bizonyítás: n -re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk.

a) ha n páros: Semelyik esetben sem lehet az egész kupacot elvenni, kivéve, ha 1 kavics marad a kupacban. Láttuk, hogy $G(R_0) = G_2 = 0$. Legyen n páros. Tegyük fel, hogy minden n -nél nem nagyobb páros k számra $G(R_k) = 0$. Lássuk be ezt $(n+2)$ -re is! Mivel egy páros szám semelyik másik páros számmal sem relatív prím, ezért páros darab kavicsot nem vehetünk el a kupacból, ennek okán újabb páros elemszámú állás sem jöhet létre. Páratlan elemszámú kupac ugyan lehet $(n+2)$ kiszomszédja, de annak Grundy-száma biztosan nem 0, mert 1 kavicsot bármelyik állásból elvehetünk, így lesz a páratlan elemszámú kupac rákövetkezői között n -nél nem nagyobb páros elemszámú kupac, aminek Grundy-száma 0. Tehát $(n+2)$ elemet tartalmazó kupac rákövetkezői között nem lesz 0 Grundy-számú, így azok legkisebb kizártja épp a 0.

b) ha n páratlan: Tudjuk, hogy $G_1 = 1$ és azt is láttuk, hogy $G_3 = 2$. Itt is teljes indukciót használunk. Tegyük fel, hogy igaz a fenti állítás minden páratlan n -re. Bizonyítsuk be, hogy ez az $n+2$ páratlan számra is öröklődik. Legyen $n+2$ legkisebb prímosztója p , és annak sorszáma k . Ahhoz, hogy belássuk, hogy $G_{n+2} = k$, két dologra van szükség:

- 1) Minden k -nál kisebb szám előfordul az $n+2$ elemszámú állás valamely kiszomszédjának Grundy-számaként,
- 2) Az $n+2$ elemű kupac egyik kiszomszédjának Grundy-száma sem k .

1) igazolása: 1-et és $n+1$ -et mindig léphetünk, tehát 1 és 0 Grundy-számú rákövetkezője minden állásnak van. Legyen q egy tetszőleges p -nél kisebb prím – ennek sorszáma k -nál kisebb, és az indukció szerint a q elemű állás Grundy-száma épp a q sorszáma. Ekkor meg kell mutatnunk, hogy $n+2$ -ből, aminek legkisebb prímosztója p , a q elemszámú kupacba lépés szabályos. Ez azért igaz, mert a

játékszabály értelmében egy állás elemszámának és az abból elvett mennyiségnek nincs valódi közös osztója, márpedig ekkor az eredeti kupac és annak rákövetkezőinek elemszáma is relatív prím egymáshoz. Mivel $n+2$ és q egymáshoz relatív prímekek – hiszen q nem osztja $n+2$ -t, mert annak p a legkisebb prímosztója, és $q < p$ – ezért különbségük is relatív prím mindkettőhöz, vagyis $n+2$ -ből $(n+2 - q)$ darabszámú kavics elvétele szabályos lépés.

2) *igazolása*: meg kell mutatnunk, hogy $n+2$ -ből szabályos lépés során a kapott m elemszámú kupac Grundy-száma sosem k , azaz, hogy p nem lehet m -nek legkisebb prímosztója. Ezt könnyű meggondolni, mert $n+2$ és m relatív prím tulajdonsága miatt k semmiféle osztója nem lehet m -nek. □

A Rim-játék tehát ennek az összege (avagy több kupacos verziója). Így a nyerő stratégiához elegendő a „relatív prím” játék Grundy-számait ismernünk.

8. játék (Dim-játék): *Adott több kupac kavics. A szabály értelmében úgy szabad kavicsokat elvenni az egyik tetszőleges kupacból, hogy az elvett darabok száma osztója legyen a kupac elvétel előtti elemszámának. (Itt akár egy kupac összes elemét is elvehetjük.)*

Itt is megállapíthatjuk, hogy egy nim-típusú játék összegéről van szó. Azaz elegendő tudnunk az ugyanilyen szabályú egykupacos játék Grundy-számait a nyerő stratégiához, melyből az első néhányat táblázatba foglaltuk:

Jelölje az i elemszámú Dim-játékbeli kupacok Grundy-számát az előzőhöz hasonlóan $G(D_i)$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$G(D_n)$	0	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1

Tétel: Ha $n = (2^k) \cdot m$, ahol m páratlan, akkor $G(D_n) = k + 1$.

Bizonyítás: Teljes indukcióval bizonyítunk. Tudjuk, hogy $G(D_0) = 0$ és $G(D_1) = 1$. Tegyük föl, hogy minden n -nél kisebb számra már igazoltuk az állítást, és ezt felhasználva lássuk be n -re is, amire igaz, hogy $n = (2^k) \cdot m$, ahol m páratlan. Hasonlóan az előző játék bizonyításához, itt is két dolgot kell igazolni:

1) minden $i \leq k$ számra van olyan kiszomszédja n -nek, amely Grundy-száma i .

2) Az n elemű kupac egyik kiszomszédja sem $(2^k) \cdot l$ elemű, ahol l páratlan.

1)-hez: $i = 0$ triviális eset. Kell még, hogy minden $0 < i \leq k$ -ra n -nek létezzen $2^{(i-1)} \cdot h$ alakú kiszomszédja, ahol h valamilyen páratlan szám. Gondoljuk meg, hogy az n elemszámú kupacból szabályos lépéssel át lehet lépni minden $2^{(i-1)} \cdot m$ elemű kupacba, mert n osztoí azok a 2^v számok (m -en kívül), ahol $v = 0, 1, \dots, k$, és ezen mennyiségek bármelyikét elvéve n -ből épp ilyen $2^{(i-1)} \cdot m$ alakú számokat kapunk. (Például: $24 - 2 = 2^3 \cdot 3 - 2 = 22 = 2^1 \cdot 11$.) Ezek Grundy-száma pedig éppen i .

2)-hez: Ahogy már megállapítottuk, n osztoí a 2^v számok, ahol $v = 0, 1, \dots, k$ és az m , tehát épp n és ezen számok különbségeinek megfelelő elemszámú kupacok lesznek n rákövetkezői. Ezek között azonban nem szerepelhet olyan $(2^k) \cdot l$ elemszámú kupac, ahol l páratlan, tehát azok Grundy-száma sem lehet $k+1$. \square

Következmény: A Dim-játékban minden páratlan a elemszámú kupac Grundy-száma 1.

Bizonyítás: Vegyük észre, hogy minden a páratlan szám előáll a fenti $a = (2^k) \cdot m$ alakban, ahol $2^k = 1$ és $a = m$. Ekkor $k = 0$, így az előző tétel alapján minden a páratlan számra $G(D_a) = 0 + 1 = 1$. \square

Az előző játékok keverékeként előállhat az alábbi játék:

9. Játék (Ridinim-játék): Van három kupac kavicsunk. A játék során egyszerre csak az egyik kupacból szabad elvenni kavicsokat a következő módon: az első kupacból csak a Rim-játék szabálya szerint (relatív prímekek), második kupacból csak a Dim-játék szabálya szerint (osztók), a harmadik kupacból pedig a Nim-játéknak megfelelően (akármennyit).

Megállapíthatjuk, hogy a Ridinim-játék nyertese a három játék kimenetelétől függ. Nézzünk egy konkrét példát erre a változatra. Jelölje a Rim típusú kupacot i elemszámmal R_i , a Dim- kupacot j elemszámmal D_j , és a k elemű Nim-kupacot N_k . Tartalmazzon mindegyik kupac 7 kavicsot. Ebben az esetben a korábban megállapítottak alapján $G(R_7) = 4$, $G(D_7) = 1$, $G(N_7) = 7$. Ezen számok nim-összege, azaz a játék Grundy-száma 2. Tehát a kezdő játékosnak van nyerő stratégiája, mégpedig a harmadik kupacot csökkentve 5 kavicsra. Ekkor a kupacok nim-összege 0 lesz, tehát veszítő állást hoz létre.

11. játék (Wythoff-nim): *Két kupac kavics adott. Két játékos felváltva vesz el az egyik kupacból akárhány, vagy mindkét kupacból ugyanannyi (tetszőleges) számú kavicsot. Az nyer, aki az utolsó(ka)t elveszi.*

Megjegyzés: A játék nevét a holland W. A. Wythoff matematikusról kapta, akinek 1907-ben sikerült meghatározni a játék nyerő stratégiáját.

Ez a nim-hez hasonló játék nem összegjáték (mert egyszerre nem csak az egyik játékban léphetünk), ezért a Grundy-számait nehezebb meghatározni, mert nem használhatjuk rá a jól bevált nim-összeadást. Vegyük észre, hogy ennek a játéknak egy speciális esete már szerepelt korábban, a szakdolgozat elején. Ez épp az állások bemutatására hozott királynős **0. játékkal** azonos 8 és 10 elemszámú kupacok esetén. A Wythoff-nim játékban a két kupac valamelyikének csökkentése megfelel abban a királynő nyugati vagy déli irányú mozgásának; ha pedig itt mindkét kupacból elveszünk valamennyi egyenlő számú kavicsot, az abban a játékban épp azt jelenti, hogy a bábuval délnyugat felé, azaz átlósan lépünk. A nyerő és vesztes állások ugyanazon mezők lesznek a két játékban, így a Wythoff-játék első néhány vesztes állása az $(1,1)$; $(2,3)$; $(3,2)$; $(4,6)$; stb. kupacméretek.

Az általános Wythoff-nim játékra nyerő stratégiát nem adunk a játék bonyolultsága miatt, de [1] könyv részletesen ismerteti azt.

5. 4. Fibonacci-nim

A következő játék és annak jó stratégiája az [1] könyvből származik:

13. Játék (Fibonacci-nim): *Van egy n elemű kupac, melyből két játékos vesz el kavicsokat. Az első akármennyivel csökkentheti a kupac méretét az összes elemet kivéve, utána pedig a soron következő játékos legfeljebb kétszer annyi kavicsot vehet el, mint amennyit ellenfele elvett az előző lépésben.*

Azért kapta ez a játék a Fibonacci-nim nevet, mert a nyerő stratégia megállapításához szükség van a Fibonacci-számokra és a számok Fibonacci-alakjára. A játék megoldása előtt nézzünk néhány érdekességet és hasznos tudnivalót ezekkel kapcsolatban.

Jelölje ezentúl az i -edik Fibonacci-számot a_i . Definíció szerint a Fibonacci-sorozat i -edik tagja ekképp áll elő: $a_i = a_{i-1} + a_{i-2}$.

Összegyűjtöttük az első tíz Fibonacci-számot, sorszámukkal együtt mutatja őket a következő táblázat:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_i	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Hasonlóan a nim-játéknál használt kettes számrendszerhez, definiálhatjuk a számok Fibonacci-alakját is. Ehhez azt kell tudnunk, hogy egy szám mely különböző Fibonacci-számok összegeként áll elő.

Állítás: Minden természetes szám felbomlik páronként különböző Fibonacci-számok összegére.

Bizonyítás⁷: Teljes indukció segítségével bizonyítunk. Ha $n = 0$ vagy $n = 1$, akkor n Fibonacci-alakja nulla- vagy egytagú összeg, tehát létezik Fibonacci-alakjuk. Tegyük fel, hogy minden n -nél kisebb pozitív egész számra teljesül a fenti állítás. Ha n maga Fibonacci-szám, akkor az ő alakja egytagú összeg (önmaga), ha n nem Fibonacci-szám, akkor legyen k az a legnagyobb egész szám, amire $a_k < n$ (ahol a_k a k -adik Fibonacci-szám). Ekkor $n - a_k < n$, ami az indukciós feltevés miatt előáll különböző Fibonacci-számok S összegeként. Ebben az összegben minden tag kisebb a_k -nál, mert $n - a_k < a_{k+1} - a_k = a_{k-1} < a_k$. Tehát az $n = a_k + S$ összegben minden tag csupa különböző Fibonacci-szám. □

Nem minden esetben egyértelmű a Fibonacci-felbontás, ugyanis egy szám több féle képpen is előállhat, ha csak annyi a kitétel, hogy az Fibonacci-számok összege legyen.

Például: $24 = 1 + 3 + 8 + 13 = 3 + 21 = \dots$

Ezért az egyértelmű Fibonacci-számokból álló alak meghatározásához úgy bontunk fel minden számot, hogy először az adott számnál nem nagyobb Fibonacci-számok legnagyobbikát, majd azok maradékából is a lehető legnagyobb Fibonacci-számot választjuk le, és így tovább (épp úgy, ahogy 2 hatványaira bontanánk fel).

⁷ [1] alapján

(Ezzel az eljárással valóban egyértelművé válik minden szám Fibonacci-alakja, ám erre külön bizonyítást nem adok.)

A Fibonacci-felbontás segítségével fel tudjuk írni a természetes számokat ún. Fibonacci-számrendszerben (ez lesz a szám Fibonacci-alakja), melyben épp úgy fognak kinézni, mintha kettes számrendszerbeli alakokkal dolgoznánk. Csupa 0 és 1-es számjegyek sorozatával fogjuk megfeleltetni őket a Fibonacci-felbontásuknak megfelelően. Nézzük a következő példát:

$$\begin{aligned} \text{Példa: } 43 &= 34 + 8 + 1 = a_9 + a_6 + a_2 = \\ &= 1 \cdot a_9 + 0 \cdot a_8 + 0 \cdot a_7 + 1 \cdot a_6 + 0 \cdot a_5 + 0 \cdot a_4 + 0 \cdot a_3 + 1 \cdot a_2 \end{aligned}$$

Jelölés: Használjuk az F indexet a Fibonacci-számrendszer jelölésére.

Így $43 = 34 + 8 + 1 = 10010001_F (= 101011_2)$. Ezt a 10010001_F számot nevezzük a 43 Fibonacci-alakjának.

Tehát egy szám Fibonacci-számrendszerben felírt alakjában hátulról az i -edik számjegy azt mutatja meg, hogy a szám Fibonacci-felbontása tartalmazza-e az a_{i+1} Fibonacci-számot.

A következő alapvető tulajdonsággal bír ez a felbontás:

Állítás: Semelyik szám Fibonacci-alakjában sem áll egymás mellett két darab 1-es számjegy.

Bizonyítás: Ez az állítás a Fibonacci-számok definíciójának következménye. Indirekte tegyük fel, hogy b olyan szám, melynek Fibonacci-felbontásában szerepel két egymás melletti Fibonacci-szám: a_m és a_{m+1} . Ekkor a Fibonacci-számok definíciója értelmében ennek a két számnak az összege is Fibonacci-szám, ami nagyobb náluk. Az viszont leválasztható lenne az eredeti számból az egyértelmű felbontást elvégezve, ami következményeként a_m és a_{m+1} nem szerepelhetne b felbontásában, azonban ez ellentmondás. □

A témához kapcsolódó fontos ismeretek megszerzése után végül térjünk vissza a Fibonacci-nim játékra, és annak nyerő stratégiájára.

Tétel: Amennyiben a Fibonacci-nim kezdő kupacának elemszáma Fibonacci-szám, az első játékos nyer, ellenkező esetben a második játékosnak van nyerő stratégiája.

Bizonyítás⁸: A bizonyításhoz szükségünk lesz az alábbi segédételre.

Lemma: Ha a_n Fibonacci-szám, és d nála kisebb pozitív egész, akkor $a_n - d$ Fibonacci-felbontásában a legkisebb tag nem nagyobb $2d$ -nél.

Bizonyítás: Indirekt tegyük fel, hogy a_n és d olyan számok, melyekre nem teljesül a fenti állítás. Legyen $a_n - d = a_{k_1} + a_{k_2} + \dots + a_{k_j}$, ahol $k_j < \dots < k_1 < n$. Ekkor a fenti feltétel értelmében $a_{k_j} > 2d$, azaz $\left\lfloor \frac{a_{k_j}}{2} \right\rfloor \geq d$, ahol a szögletes zárójel az egészrész-függvényt jelöli. Ebből adódóan

$$a_n \leq a_{k_1} + a_{k_2} + \dots + a_{k_j} + \left\lfloor \frac{a_{k_j}}{2} \right\rfloor.$$

Az $i \geq 3$ esetekben a Fibonacci-számok definíciója értelmében $a_{i-2} < \left\lfloor \frac{a_i}{2} \right\rfloor < a_{i-1}$, ezért tudjuk, hogy az $\left\lfloor \frac{a_{k_j}}{2} \right\rfloor$ szám Fibonacci-felbontásának legnagyobb tagja $a_{k_{j-2}}$.

A fenti egyenlőtlenségbe helyettesítsük be $\left\lfloor \frac{a_{k_j}}{2} \right\rfloor$ helyére annak Fibonacci-felbontását. Ekkor azt kapjuk, hogy egy a_n -nél nem kisebb szám Fibonacci-felbontásának legnagyobb tagja a_{k_1} , viszont ez nem lehetséges $k_1 < n$ miatt.

Tétel bizonyítása: Feltehetjük, hogy a kezdőkupac legalább három kavicsot tartalmaz. Legyen a kezdeti elemszám s_0 . A továbbiakban s_i az i -edik állás jelölésére szolgál.

Tekintsük először azt az esetet, amikor s_0 Fibonacci-szám, így legyen $s_0 = a_n$. A Fibonacci-számokra mindig teljesül, hogy $a_{n-1} < 2a_{n-2} = 2(a_n - a_{n-1})$. Tehát, ha a kezdő játékos a_{n-1} -re lép, akkor ellenfele elveheti az összes maradék kavicsot, és azzal nyerni a játékot. Ugyanez történik, ha kezdésként $(a_n - a_{n-1})$ -nél több kavicsot vesz el a kezdő. Ezért – mivel a kezdő nem akar azonnal veszíteni – csak a_n és a_{n-1} elemszám közötti s_1 -re csökkentheti a kupac elemszámát. Ennek az s_1 -nek legalább kéttagú a Fibonacci-felbontása, és a következő képpen áll elő: $s_1 = F + a_i + a_j$, ahol F a felbontásbeli i -nél nagyobb indexű Fibonacci-számok összege ($F=0$ -t is beleértve). Jól látható, hogy a játék véges. Belátjuk, hogy a második játékosnak van nyerő stratégiája. Ehhez azt kell megmutatni, hogy a második játékos mindig tud úgy lépni, hogy azt követően a kezdő ne vehesse el az egész kupacot. Az s_1 elemszámú kupacból folytatva a lépést, a második játékos vegye el s_1 Fibonacci-felbontásának legkisebb elemét, a_j -t, amire a segédétel $d = s_0 - s_1$ -re vett alkalmazása alapján van módja. Az így kialakult állás Fibonacci-felbontása $s_2 = F + a_i$ lesz, amiből a kezdő játékos nem léphet a végső

⁸ [1] könyv alapján

0 állásba, mert minden $j < i$ esetén fennáll, hogy $a_i = a_{i-1} + a_{i-2} > 2a_{i-2} \geq 2a_j$, így a_i -nél csak kevesebb kavicsot vehet el. Az így létrehozott kupac elemszáma legyen s_3 . Ekkor, hasonlóan az előbbiekhez, a lemmát a_i -re és $d = s_2 - s_3$ -ra tudjuk alkalmazni, amivel látjuk, hogy a második játékos elveheti a kupacból az $s_3 - F$ Fibonacci-felbontásának utolsó tagját, ami megegyezik s_3 Fibonacci-felbontásának legkisebb tagjával. Az ezt követően a kapott s_4 állásból a kezdő újfent csak kevesebb, mint ennek Fibonacci-felbontásának legkisebb tagját veheti el, míg az új s_5 állásból a második újra elveheti s_5 Fibonacci-felbontásának legkisebb tagját, és így tovább folytatódik a játék, míg a második játékos meg nem nyeri azt.

Ha a kezdőkupac elemszáma nem Fibonacci-szám, akkor az imént ismertetett nyerő stratégiát a kezdő játékos tudja alkalmazni, amivel ő nyer. \square

Irodalomjegyzék

- [1]: Csákány Béla: *Diszkrét matematikai játékok*, Polygon Kiadó, Szeged, 1998.
- [2]: Csirmaz László: *Játékok és Grundy-számaik*, KöMaL archívum,
<http://www.komal.hu/cikkek/csirmaz/grundy/grundy.h.shtml> (letöltés: 2014. május)
- [3]: Hegyvári Norbert, Hraskó András, Korándi József, Török Judit: *Elemi matematika feladatgyűjtemény*
http://dl.dropboxusercontent.com/u/100162898/elemijegyzet/elemimat_feladatgy.pdf
(letöltés ideje: 2014. április)
- [4]: Róka Sándor: *Abacus – Barangolás a matematikában*, Tóth Könyvkereskedés Kft., Debrecen, 1997.
- [5]: The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences® (OEIS®): <https://oeis.org>
(2014. május 31.)