Analízis a bűnüldözésben

Szakdolgozat

Írta: Katona Edina Mária

Matematika Bsc szak

Tanári szakirány

Témavezető:

Gémes Margit, műszaki gazdasági tanár

Analízis Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2015.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

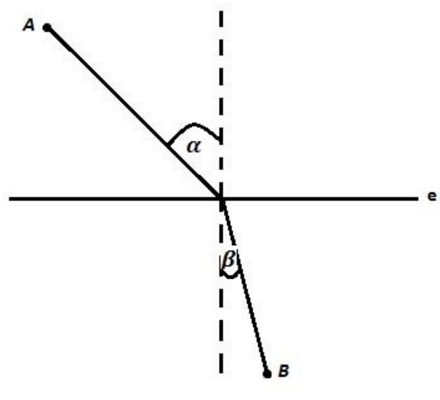
Szakdolgozatomban az analízis két fő témakörével foglalkozom, a szélsőérték, valamint az ívhossz számítással. A dolgozatomban szeretném bemutatni, hogy a számomra preferált területen a bűnüldözésben is mennyire hasznos lehet a matematikai tudás. Különböző példákkal támasztom alá azt, hogy számos eseteknél az analízis ismerete mekkora segítséget nyújt egy-egy bűneset elkövetőjének elkapásához.

Először a szélsőérték számítással foglalkozom és a rendőr, rabló viszonyában mutatom be, hogy mennyivel előnyösebb egy menekülés során ennek az alkalmazása. A dolgozat második felében, pedig egy rövid elméleti bevezető és néhány példa után, az ívhossz kiszámolásával támasztom alá, hogy a gyanúsítottak, a bűneset elkövetése pillanatában a helyszínen tartózkodhattak-e.

Az okos rendőr és a buta rabló

1. Kedvezőtlen kimenetelű bankrablás

Hétfő délelőtt rablást kísérelt meg egy ismeretlen férfi a fővárosi bankban. A rabló figyelmetlenül járt el, ugyanis egy óvatlan pillanatában az egyik dolgozónak sikerült megnyomnia a riasztó gombját és így értesítenie a rendőrséget. A férfi észrevette a bankfiókban dolgozó hölgy tettét és ennek hatására pánikba esettt, és nem is tudott már semmire koncentrálni, így jobbnak látta, ha zsákmányát hátrahagyva elmenekül a helyszínről, hiszen nem akarta megkockáztatni azt, hogy esetlegesen börtönbe kerüljön. A rendőrség sem tétlenkedett a riasztást követően, egyből a helyszínre siettek, ahol látva, hogy a bankrabló futva próbál meg elmenekülni, a bank melleti építkezési terület előnyeit kihasználva, hiszen itt rendőrautóval nem tudják követni, az egyik járőr a kocsiból kiszállva, azonnal üldözőbe vette. Feltehetően a gépjárművéhez igyekezett az ismeretlen férfi, amit egy közelben lévő autópálya mellett rejtett el, és úgy gondolta, hogy akkor tud a leggyorsabban odaérni, ha egyenesvonalban halad. Ezzel szemben a rendőr sejtve, hogy hova tart az üldözött, tudta, hogy gyorsabban odaér, ha figyelembe veszi, hogy a homokos, gödrös területen és a betonúton eltérő sebességgel tud haladni, így másik útvonalat választott (lásd 1. ábra). Hosszas üldözést követően végül a bankrablót sikerült elfogni és börtönbe zárni, ezzel bebizonyítva, hogy a járőr jó logikát követett.



1. ábra

Hogy miért volt sikeresebb a rendőr gondolkodása?

Két különböző talajról van szó, ahol is az üldözés folyt. Legyen az első talaj, ahol a bank található, a homokos terület, itt 10 $m/_{s}$ sebességgel haladnak, míg a második talajon, azaz a betonúton, ahol az autó várta a rablót és, ahol letartóztatták, 13,5 $m/_{s}$-mal futottak. Legyen e

egyenes az, amely a két talajt elválasztja és az első félsíkban található bank az A pont, míg a másikban található letartóztatási helyszín a B pont. A kérdés, hogy milyen pályán kell haladnia a rendőrnek, hogy a banktól, azaz az A-tól a letartóztatás helyszínéig vagyis a B-ig a lehető legrövidebb idő alatt jusson el.

Legyen az e egyenes az x tengely, és legyenek A koordinátái (a_1, b_1), B koordinátái pedig (a_2, b_2). Egyértelmű, hogy mindkét közegben a rendőrnek egyenes pályán kell haladnia, a kérdés csak az, hogy az x tengelyt mely pontban metszi a pálya, azaz hol változik meg az útvonal.

Tegyük fel, hogy a pálya az x pontban metszi az abszcissza tengelyt, ekkor az út megtételéhez szükséges idő a következőképpen írható fel:

$$f(x) = \frac{1}{v_1} \cdot \sqrt{(x-a_1)^2 + {b_1}^2} + \frac{1}{v_2} \cdot \sqrt{(x-a_2)^2 + {b_2}^2}\ ,$$

ahol $v_1 = 10\,{}^{m}/_{s}$, $v_2 = 13{,}5\,{}^{m}/_{s}$, valamint az A koordinátái $(400, 490)$ és a B koordinátái $(900, 1445)$.

Az előző egyenletből,

$$f'(x) = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{x-a_1}{\sqrt{(x-a_1)^2+{b_1}^2}} + \frac{1}{v_2} \cdot \frac{x-a_2}{\sqrt{(x-a_2)^2+{b_2}^2}}\ .$$

Feladatunk f minimumhelyének meghatározása. Mivel $x < 400$ esetén $f(x) > f(400)$ és $x > 900$ esetén $f(x) > f(900)$, ezért elegendő f minimumát a $[400, 900]$ intervallumban meghatározni. Mivel f folytonos, így a Weierstrass tétele miatt a $[400, 900]$-ban van minimuma. A minimumhely lehet az intervallum szélén, vagy az intervallum belsejében, de akkor egyben lokális minimum is. Az f függvény differenciálható, és a lokális minimumhelyeken a deriváltja nulla. Ezért a minimumhelyeket a végpontokban, illetve azokban a belső pontokban kell keresni, ahol a derivált nulla.

A fenti egyenlet x=a_1 vagyis x=400 esetén

$$f'(a_1) = \frac{(a_1-a_2)}{v_2 \cdot \sqrt{(a_1-a_2)^2+{b_2}^2}} < 0,$$

$$f'(400) = \frac{(400-900)}{13{,}5 \cdot \sqrt{(400-900)^2+1445^2}} = -0{,}024 < 0,$$

ezért f szigorúan lokálisan csökkenő 400-ban. Így a 400 pont egy alkalmas jobb oldali környezetében f minden értéke kisebb $f(400)$-nál, tehát 400 nem lehet minimumhely. Hasonlóan x=a_2 azaz x=900 esetén,

$$f'(a_2) = \frac{(a_2-a_1)}{v_1 \cdot \sqrt{(a_2-a_1)^2+{b_1}^2}} > 0,$$

$$f'(900) = \frac{(900-400)}{10 \cdot \sqrt{(900-400)^2 + 490^2}} = 0{,}071 > 0,$$

ezért f szigorúan lokálisan nő 900-ban. Így a 900 pont egy alkalmas bal oldali környezetében f minden értéke kisebb $f(900)$-nál, tehát 900 sem lehet minimumhely. Az f függvény minimumhelye tehát olyan $x \in (400{,}900)$ pontban van, amelyben $f'(x) = 0$. Ez a feltétel a fenti egyenlet alapján azzal ekvivalens, hogy

$$\frac{x-a_1}{\sqrt{(x-a_1)^2+{b_1}^2}} : \frac{a_2-x}{\sqrt{(x-a_2)^2+{b_2}^2}} = \frac{v_1}{v_2},$$

az adatokat behelyettesítve a következőt kapjuk,

$$\frac{x-400}{\sqrt{(x-400)^2+490^2}} : \frac{900-x}{\sqrt{(x-900)^2+1445^2}} = \frac{10}{13{,}5},$$

ebből x=500.

Az is megállapítható, hogy

$$\frac{x-a_1}{\sqrt{(x-a_1)^2+{b_1}^2}} = \sin\alpha \quad \text{és} \quad \frac{a_2-x}{\sqrt{(x-a_2)^2+{b_2}^2}} = \sin\beta,$$

a helyettesítés után a következőt kapjuk,

$$\frac{500-400}{\sqrt{(500-400)^2+490^2}} = \sin\alpha \quad \text{és} \quad \frac{900-500}{\sqrt{(500-900)^2+1445^2}} = \sin\beta,$$

vagyis α = 12^o é$s\ \beta = 15^o$.

A feladat során alkalmazott gondolatmenet segítségével sikeresen levezethető a fénytörés törvénye. A Fermat-elv szerint a fény mindig úgy halad két pont között, hogy az utat a lehető legrövidebb idő alatt tegye meg, ami esetünkben hasonlít ahoz, hogy a rendőr is az idő függvényében választotta meg az útját. A fény két különböző közegben halad v_1, illetve v_2 sebességgel. Ezeket a közegeket egy x tengely választja el. A fénysugár a P_1 pont és a P_2 pont között a Fermat-elv szerint azt az utat fogja választani, amelyet a legrövidebb idő alatt tesz meg. Legyenek P_1 koordinátái (a_1, b_1), a P_2 koordinátái pedig (a_2, b_2). Ebben az esetben is az előző feladathoz hasonlóan fel tudjuk írni az út megtételéhez szükséges időt, mely a következő

$$f(x) = \frac{1}{v_1} \cdot \sqrt{(x-a_1)^2 + {b_1}^2} + \frac{1}{v_2} \cdot \sqrt{(x-a_2)^2 + {b_2}^2},$$

és ebből,

$$f'(x) = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{x-a_1}{\sqrt{(x-a_1)^2+{b_1}^2}} + \frac{1}{v_2} \cdot \frac{x-a_2}{\sqrt{(x-a_2)^2+{b_2}^2}}.$$

Célunk f abszolút minimumhelyének meghatározása, amely az előbbi feladat esetén kiderült egy olyan $x \in (a_1, a_2)$ pontban van, amelyben $f'(x) = 0$. Ez a feltétel az előző egyenlet alapján azzal ekvivalens, hogy

$$\frac{x-a_1}{\sqrt{(x-a_1)^2+b_1{}^2}} : \frac{a_2-x}{\sqrt{(x-a_2)^2+b_2{}^2}} = \frac{v_1}{v_2},$$

Az is megállapítható, hogy

$$\frac{x-a_1}{\sqrt{(x-a_1)^2+b_1{}^2}} = \sin\alpha \quad \text{és} \quad \frac{a_2-x}{\sqrt{(x-a_2)^2+b_2{}^2}} = \sin\beta,$$

ahol α és β az úgynevezett beesési, illetve törési szög. Elmondható, hogy az időben legrövidebb útvonal a két közeget elválasztó egyenest abban a pontban metszi, amelyben

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}.$$

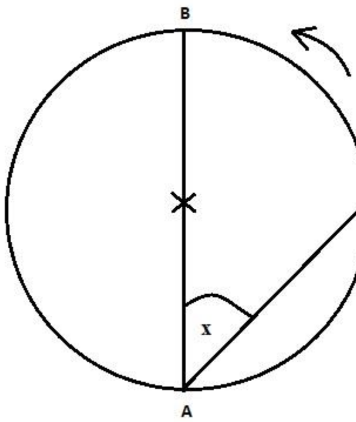
Ez a fénytörés törvénye.[1]

2. Rosszul megtervezett gyémántrablás

Egy belvárosi ékszerüzletbe péntek reggel rendőrök és helyszínelők vonultak ki, ugyanis az éjszaka folyamán rablás történt, mely során több millió forint értékű zsákmányra tett szert a betörő. A helyszínelők rögzítették a nyomokat, majd az alkalmazottak kizárása érdekében ujjlenyomatott vettek tőlük. A helyszín vizsgálata során azonban észrevették, hogy az ablak nem kívülről lett betörve, ugyanis az üveg darabok a járdán voltak, melyek arra utaltak, hogy valaki belülről törte be, vagyis az ajtón kellett bemennie. Ennek a ténynek az ismeretében egyből az alkalmazottakra terelődött a gyanú, hiszen csak olyan tehette, akinek kulcsa volt az üzlethez. A laborba visszamenve egyből elkezdték elemezni az ujjlenyomatokat és egy fiatal eladónőjé megegyezett az üvegen rögzítettel. A lakásához tartó rendőrők majdnem elkéstek, hiszen a nő számítva arra, hogy bármikor elkaphatják el akart menekülni az országból. Látva a menekülő tolvajt autós üldözésbe kezdtek a járőrök, egészen egy tó partjáig sikerült követni őt. A nő úszva próbált átjutni a túlsó partra, ahol már várta a társa. A rendőr meglátva a lehetőséget, másik útvonalat választott, egy bizonyos távot úszva, majd a maradékot a parton futva tett meg, ezzel megelőzve a tolvajt, aminek eredményeképpen sikerült letartóztatnia.

[1] Laczkovich – T. Sós: Valós analízis I.

2.1. Először is nézzük azt az esetet, amikor egy *d* átmérőjű tavat úszik át v_1 sebességgel a tolvaj egyenesvonalban haladva (2. ábra). Az őt üldöző rendőr, viszont az *A* pontból a *B* pontba való eljutás során, csak kezdetben úszik v_1-el, majd a parton fut tovább v_2 sebességgel, melynek köszönhetően el tudja kapni a nőt. Vizsgáljuk meg, hogy miért volt sikeresebb ez a döntés, és hogy az üldözött útvonalához képest mekkora szög eltéréssel kellett ehez úsznia. [2]



2. ábra

2.1.1. A rendőr által megtett út ideje a következő képpen írható fel:

$$f(x) = \frac{2r\cos x}{v_1} + \frac{2rx}{v_2},$$

ahol a $2r\cos x$ a leúszott táv hossza, míg a $2rx$ a futva megtett út. Tudjuk azt is, hogy a tó átmérője 100 méter, azaz $r = 50m$, míg a $v_1 = 1\,{}^{m}/_{s}$ és a $v_2 = 2\,{}^{m}/_{s}$.

Keressük az előző egyenlet minimumát a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumban. Mivel a függvény folytonos, így a Weierstrass tétele szerint *f*-nek van minimuma $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$-ben. Tegyük fel, hogy az *f* az $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ pontban felveszi a legkisebb értékét. Ebben az esetben vagy $x = 0$, vagy $x = \frac{\pi}{2}$, vagy $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Mivel az *f* függvény differenciálható, ezért az $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ esetében *f*-nek minimuma van *x*-ben, ha $f'(x) = 0$.

Ezek alapján az előző egyenlet esetén,

$$f'(x) = -\frac{2r\sin x}{v_1} + \frac{2r}{v_2} = 0$$

ebből a $\sin x$-et kijezve

$$\sin x = \frac{v_1}{v_2}$$

[2] Keleti Tamás feladata alapján

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

vagyis az $x = \frac{\pi}{6}$.

Vagyis az f függvény a minimumát a 0, $\frac{\pi}{6}$, vagy $\frac{\pi}{2}$ pontok egyikében veszi fel. Az előzőeket behelyettesítve az eredeti egyenletbe, azaz

$$f(x) = \frac{2r\cos x}{v_1} + \frac{2rx}{v_2}$$

esetén a következőt kapjuk

$$f(0) = \frac{2 \cdot 50\cos 0}{1} + \frac{2 \cdot 50 \cdot 0}{2} = 100;$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2 \cdot 50\cos\frac{\pi}{6}}{1} + \frac{2 \cdot 50 \cdot \frac{\pi}{6}}{2} \approx 112{,}8;$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2 \cdot 50\cos\frac{\pi}{2}}{1} + \frac{2 \cdot 50 \cdot \frac{\pi}{2}}{2} \approx 78{,}5;$$

tehát az f függvény a $\frac{\pi}{2}$ -ben veszi fel a minimumát. Ez azt jelenti, hogy az adott feltételek mellett a rendőr az egész távot a parton futva teszi meg.

Megjegyzés: Az

$$f'(x) = -\frac{2r\sin x}{v_1} + \frac{2r}{v_2} = 0$$

egyenletből a $\sin x$-et kijezve

$$\sin x = \frac{v_1}{v_2}$$

megoldást kapjuk vagyis a $\sin x$ csak a két sebesség arányától függ. Ha a v_2-t, azaz a parton futás sebességét tovább növeljük és ezáltal a két sebesség közötti arány tovább nő, akkor a távot mindig futva kell megtennie az üldözőnek, hogy gyorsabb legyen.

2.1.2. Most nézzük meg, mi történik, ha megváltoztatjuk az adatokat, és a két sebesség aránya más lesz.

A rendőr által megetett út továbbra is

$$f(x) = \frac{2r\cos x}{v_1} + \frac{2rx}{v_2},$$

ahol a $2r\cos x$ a leúszott táv hossza, míg a $2rx$ a futva megtett út. Most a tó átmérője 300 méter, azaz $r = 150m$, míg a $v_1 = 1\, {}^{m}/_{s}$ és a $v_2 = 1{,}5\, {}^{m}/_{s}$.

Most is keressük az út megtételéhez szükséges idő minimumát a $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ intervallumban. Mivel a függvény folytonos, így a Weierstrass tétele szerint *f*-nek van minimuma $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$-ben. Tegyük fel, hogy a f az $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ pontban felveszi a legkisebb értéket. Ebben az esetben vagy $x = 0$, vagy $x = \frac{\pi}{2}$, vagy $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Mivel az f függvény differenciálható, ezért az $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ esetében *f*-nek minimuma van *x*-ben, ha $f'(x) = 0$.

Ezek alapján az előző egyenlet esetén,

$$f'(x) = -\frac{2r\sin x}{v_1} + \frac{2r}{v_2} = 0,$$

$$f'(x) = -\frac{2\cdot 150\sin x}{1} + \frac{2\cdot 150}{1{,}5} = 0,$$

ebből az $x = \frac{2\pi}{9}$.

Vagyis az f függvény a minimumát a 0, $\frac{2\pi}{9}$, vagy $\frac{\pi}{2}$ pontok egyikében veszi fel. Az előzőeket behelyettesítve az eredeti egyenletbe, azaz

$$f(x) = \frac{2r\cos x}{v_1} + \frac{2rx}{v_2},$$

esetén a következőt kapjuk

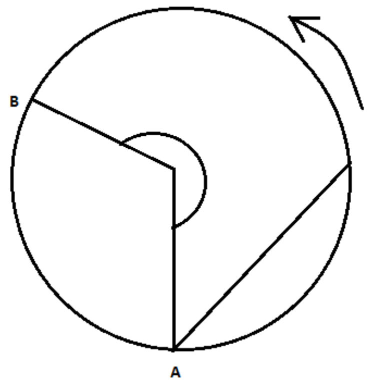
$$f(0) = \frac{2\cdot 150\cos 0}{1} + \frac{2\cdot 150\cdot 0}{1{,}5} = 300;$$

$$f\left(\frac{2\pi}{9}\right) = \frac{2\cdot 150\cos\frac{2\pi}{9}}{1} + \frac{2\cdot 150\cdot\frac{2\pi}{9}}{1{,}5} \approx 367{,}5;$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\cdot 150\cos\frac{\pi}{2}}{1} + \frac{2\cdot 150\cdot\frac{\pi}{2}}{1{,}5} \approx 314;$$

tehát az f függvény a 0 -ban veszi fel a minimumát. Ez azt jelenti, hogy az adott feltételek mellett a rendőr az egész távot úszva teszi meg.

2.2. Vizsgáljuk meg azt a lehetőséget, amikor egy *d* átmérőjű tavat v_1 sebességgel úszik át a tolvaj, de ebben az esetben a tó középpontjánál irányt vált. A középpontig tartó és a középpontból induló útvonalak 240 fokos szöget zárnak be egymással. (3. ábra). Az őt üldöző rendőr, viszont az *A* pontból a *B* pontba való eljutás során v_1 sebességgel úszik, majd a parton fut tovább v_2 sebességgel, melynek köszönhetően el tudja kapni a nőt. Fontos megjegyeznünk, hogy a rendőr csak a hosszabb íven tud futni, hiszen a kisebbiknél mocsaras terület található. Vizsgáljuk meg, hogy miért volt sikeresebb ez a döntés, és hogy az üldözött útvonalához képest mekkora szög eltéréssel kellett ehez úsznia.



3. ábra

A rendőr által megtett út ideje a következő képpen írható fel:

$$f(x) = \frac{2r\cos x}{v_1} + \frac{2rx + r\frac{\pi}{3}}{v_2},$$

ahol a $2r\cos x$ a leúszott táv hossza, míg a $2rx - r\frac{\pi}{3}$ a futva megtett út. Tudjuk azt is, hogy a tó átmérője 100 méter, azaz $r = 50m$, míg a $v_1 = 1\,{}^{m}/_{s}$ és a $v_2 = 3\,{}^{m}/_{s}$.

Keressük az út megtételéhez szükséges idő minimumát a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumban. Mivel a függvény folytonos, így a Weierstrass tétele szerint f-nek van minimuma $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$-ben. Tegyük fel, hogy a f az $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ pontban felveszi a legkisebb értéket. Ebben az esetben vagy $x = 0$, vagy $x = \frac{\pi}{2}$, vagy $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Mivel az f függvény differenciálható, ezért az $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ esetében f-nek minimuma van x-ben, ha $f'(x) = 0$.

Ezek alapján az előző egyenlet esetén,

$$f'(x) = -\frac{2r\sin x}{v_1} + \frac{2r}{v_2} = 0,$$

$$f'(x) = -\frac{2 \cdot 50\sin x}{1} + \frac{2 \cdot 50}{3} = 0,$$

ebből az $x = \frac{\pi}{9}$.

Vagyis az f függvény a minimumát a 0, $\frac{\pi}{9}$, vagy $\frac{\pi}{2}$ pontok egyikében veszi fel. Az előzőeket behelyettesítve az eredeti egyenletbe, azaz

$$f(x) = \frac{2r\cos x}{v_1} + \frac{2rx + r\frac{\pi}{3}}{v_2} = 0$$

esetén a következőt kapjuk

$$f(0) = \frac{2 \cdot 50 \cos 0}{1} + \frac{2 \cdot 50 \cdot 0 + 50 \cdot \frac{\pi}{3}}{3} \approx 117{,}4;$$

$$f\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{2 \cdot 50 \cos \frac{\pi}{9}}{1} + \frac{2 \cdot 50 \cdot \frac{\pi}{9} + 50 \cdot \frac{\pi}{3}}{3} \approx 123;$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2 \cdot 50 \cos \frac{\pi}{2}}{1} + \frac{2 \cdot 50 \cdot \frac{\pi}{2} + 50 \cdot \frac{\pi}{3}}{3} \approx 69{,}7;$$

tehát az f függvény a $\frac{\pi}{2}$-ben veszi fel a minimumát. Ez azt jelenti, hogy az adott feltételek mellett a rendőr az egész távot a parton futva teszi meg.

Megjegyzés: Ha a futás sebessége nem elég magas az úszásához képest, akkor az üldöző nem tudja elkapni a tolvajt, kivétel, ha megengedett, hogy a rövidebb húr mentén ússzon.
Nézzük meg ebben az esetben mi történik:

Ha a mocsaras terület felé kezd el úszni, akkor megtudjuk határozni a két sugár által bezárt szöget, ami $120°$ és mivel egyenlő szögű háromszögről van szó, így az $x = \frac{\pi}{6}$. Így kiszámolhatjuk a két pontot összekötő egyenes hosszát, ami $2r \cos x$ vagyis a húr hossza $2r \cos \frac{\pi}{6} = 86{,}6$.

Tehát, ha a rendőr csak úszva teszi meg a távot és a sebessége $v = 1\,{}^{m}/_{s}$, valamint a tó sugara $r = 50m$, akkor így eltudja kapni a tolvajt, hiszen az általa megtett út ideje:

$$f(x) = \frac{2r \cos x}{v},$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2 \cdot 50 \cos \frac{\pi}{6}}{1} \approx 86{,}6;$$

vagyis akkor jár a rendőr a legjobban, ha a húr mentén úszik.

Rejtélyes gyilkosságok nyomában

Az analízis alapfeladatának tekinthető a függvénygrafikonok hosszúságának az értelmezése, így a következőkben ezzel ismerkedünk meg.

A $p, q \in \mathbb{R}^2$ pontokat összekötő szakaszt $[p, q]$-val jelöljük, azaz

$$[p, q] = \{p + t(q - p): t \in [0,1]\}.$$

A $[p, q]$ szakasz végpontjainak a távolsága, vagyis $|q - p|$ adja meg a szakasz hosszát. A csatlakozó szakaszok uniói adják azokat a halmazokat, melyeket töröttvonalnak nevezünk. Egy töröttvonal tehát $[p_0, p_1] \cup [p_1, p_2] \cup \ldots \cup [p_{n-1}, p_n]$ alakú, ahol $p_0 \ldots p_n$ a sík tetszőleges pontjai. A töröttvonal hossza az alkotó szakaszok hosszainak összege, azaz

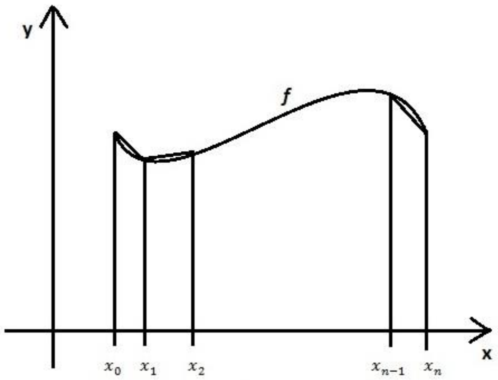
$$|p_1 - p_0| + |p_2 - p_1| + \ldots + |p_n - p_{n-1}|.$$

<u>Definíció:</u> Legyen $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény és legyen $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ az $[a, b]$ intervallum egy F felosztása. Az *f* függvény grafikonjának az F felosztáshoz tartozó beírt poligonján az $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, (fx_n))$ pontokat összekötő poligont értjük. A graph *f*, mely az $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény grafikonját jelöli, tehát ezen grafikon ívhossza az összes beírt poligon hosszaiból álló halmaz felső határa. Az f grafikonjának ívhosszát $s(f; [a, b])$-vel jelöljük. Így

$$s(f; [a, b]) = sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |p_i - p_{i-1}| \coloneqq a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,\right.$$

$$\left. p_i = (x_i, f(x_i))\ (i = 0, \ldots, n)\right\}.$$

Azt mondjuk, hogy graph *f* rektifikálható, ha $s(f; [a, b])$ véges.



I. ábra

Megjegyzés: Ha $a = b$, akkor $s(f;[a,b]) = 0$ minden f függvényre.

Tétel: (i) Tetszőleges $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ függvényre

$$\sqrt{(b-a)^2 + (f(b)-f(a))^2} \leq s(f;[a,b]),$$

és így $a < b$ esetén $s(f;[a,b]) > 0$.

(ii) Ha $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ monoton, akkor graph f rektifikálható, és

$$s(f;[a,b]) \leq (b-a) + |f(b)-f(a)|.$$

Tétel: Legyen f differenciálható $[a,b]$-ben, és tegyük fel, hogy f' folytonos. Ekkor f grafikonja rektifikálható. Jelöljük $s(x)$-szel a graph f grafikon $[a,x]$ fölötti részének ívhosszát, vagyis legyen $s(x) = s(f;[a,x])$. Ekkor s is differenciálható, és $s' = \sqrt{1+(f'(x))^2}$ minden $x \in [a,b]$-re.

Legyen az $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonosan differenciálható. Ekkor az előző tétel alapján f grafikonja rektifikálható. Továbbá, ha $s(x)$ jelöli a grafikon $[a,x]$ fölötti részének ívhosszát, akkor s is differenciálható, és $s' = \sqrt{1+(f'(x))^2}$ minden $x \in [a,b]$-re. Mivel f grafikonjának ívhossza $s(b) = s(b) - s(a)$, így a Newton-Leibniz-formulából kapjuk a következő tételt.

Tétel: Ha az $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonosan differenciálható, akkor a grafikonjának ívhossza $\int_b^a \sqrt{1+(f'(x))^2}$dx.

A függvénygrafikonoknál általánosabb görbék ívhosszának kiszámításhoz először is szükséges a görbe fogalmát megállapítani. Görbének nevezzük a $g:[a,b] \to \mathbb{R}^d$ alakú leképezéseket. Ha $d = 2$, akkor síkgörbéről, ha pedig $d = 3$, akkor térgörbéről beszélünk. Fontos, hogy a görbén magát a leképezést értjük, nem pedig a leképezés képhalmazát, értékkészletét. Tehát a görbe leképezés, nem pedig $\mathbb{R}^d$-beli halmaz. Ha a H halmaz megegyezik a $g:[a,b] \to \mathbb{R}^d$ görbe képhalmazával, vagyis $H = g([a,b])$, akkor azt mondjuk, hogy a g a H halmaz paraméterezése.

A függvénygrafikon ívhosszához hasonlóan definiáljuk a görbék ívhosszát is. Töröttvonalnak vagy poligonnak nevezzük azokat a halmazokat, amelyek csatlakozó szakaszok uniói. Ha $a_0 \dots a_n$ az $\mathbb{R}^d$ tér tetszőleges pontjai, akkor az a_i pontokat összekötő poligon az $[a_0, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_{n-1}, a_n]$ szakaszokból áll.
Tudjuk, hogy két pont között a lehető legrövidebb út az egyenes, ebből kifolyólag egy görbe hossza nem lehet kisebb a végpontjai távolságánál. Ha a görbébe beírjuk a

$$[a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \dots \cup [a_{n-1}, a_n]$$

töröttvonalat, akkor tehát a a_{i-1} és a a_i pontokat összekötő részív hossza legalább $|a_i - a_{i-1}|$, és így a teljes görbe hossza legalább

$$|a_1 - a_0| + |a_2 - a_1| + \ldots + |a_n - a_{n-1}|$$

kell, hogy legyen. Egy elég finom beírt töröttvonal annyira megközelíti a görbét, hogy a hosszúsága is közel lesz a görbe hosszához. Ezekből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a görbe ívhossza egyenlő a beírt töröttvonalak szuprémumával.

Definíció: A $g: [a, b] \to \mathbb{R}^d$ görbe beírt poligonjának nevezzük a $g(t_0), g(t_1), \dots, g(t_n)$ pontokat összekötő poligont, ahol $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ az $[a, b]$ intervallum tetszőleges felosztása. A g görbe ívhossza a beírt poligon hosszaiból álló halmaz felső határa. A g görbe ívhosszát $s(g)$-vel jelöljük. Így

$$s(g) = sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})| : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b, n = 1,2, \dots\right\}.$$

Azt mondjuk, hogy a g görbe rektifikálható, ha $s(g) < \infty$.

Nem minden görbe rektifikálható. Láthatjuk, hogy ha $g: [a, b] \to \mathbb{R}^d$ görbe képhalmaza nem korlátos, akkor léteznek akármilyen hosszú g-be írt poligonok, és így $s(g) = \infty$.

Tétel: Tekintsünk egy $g: [a, b] \to \mathbb{R}^d$ görbét. Ha g folytonosan differenciálható, akkor rektifikálható.
Egy görbe rektifikálhatóságára az elöző tétel elégséges feltételeket ad.

Tétel: Tegyük fel, hogy a $g: [a, b] \to \mathbb{R}^d$ görbe differenciálható, és a g koordinátafüggvényeinek deriváltjai integrálhatóak $[a, b]$-n. Ekkor g rektifikálható és

$$s(g) = \int_a^b \sqrt{(g_1'(t))^2 + \ldots + (g_d'(t))^2} dt.$$

Megjegyzés: Tegyük fel, hogy a $g: [a, b] \to \mathbb{R}^d$ görbe differenciálható. Legyenek g koordinátafüggvényei $g_1, \dots, g_d$. Ha t_0 és t az $[a, b]$ intervallum különböző pontjai, akkor

$$\frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} = \left(\frac{g_1(t) - g_1(t_0)}{t - t_0}, \dots, \frac{g_d(t) - g_d(t_0)}{t - t_0}\right).$$

Egyszerűbb a $(g_1'(t_0), \dots, g_d'(t_0))$ vektort a g görbe t_0 pontbeli deriváltjának nevezni és $g'(t_0)$-lel jelölni. Ezzel a jelöléssel a következőt kapjuk

$$s(g) = \int_a^b |g'(t)|\, dt.$$

A g' derivált fizikai jelentése a g görbe mentén mozgó pont sebességvektora. Valóban, az elmozdulása a t_0 és a t időpontok között $g(t) - g(t_0)$. A $g(t) - g(t_0)/(t - t_0)$ vektor a mozgó pont időegység alatti átlagos elmozdulását mutatja a $[t_0, t]$ időintervallumban. Ha $t \to t_0$, akkor ez az átlag a pont sebességvektorához tart. Mivel $g(t) - g(t_0)/(t - t_0)$ koordinátánként tart a $g'(t_0)$ vektorhoz, így $g'(t_0)$ éppen a sebességvektor.
Másrészt a $|g(t) - g(t_0)/(t - t_0)|$ érték a mozgó pont időegység alatti átlagos elmozdulásának nagyságát mutatja a $[t_0, t]$ időintervallumban. Ennek a határértéke $t \to t_0$ esetén a mozgó pont pillanatnyi sebessége. A pillanatnyi sebesség, tehát a $g'(t_0)$ sebességvektor abszolút értéke, azaz $|\, g'(t_0)\, |$.

Néhány példa a fenti elmélet alkalmazására:

1. Számítsuk ki az $f(x) = x^{3/2} + 25$ függvénygrafikon ívhosszát, ahol $x \in [0,12]$.

Először is megadjuk, hogy

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

Ezután fel tudjuk írni a függvénygrafikon ívhosszát,

$$s(f) = \int_0^{12} \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx =$$

$$\int_0^{12} \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}\, dx = \int_0^{12} \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx =$$

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}\right]_0^{12} =$$

$$\frac{1185{,}3}{27} - \frac{8}{27} = \frac{1177{,}3}{27}$$

A függvénygrafikon ívhossza, azaz $s(f) = 43{,}6$.

2. Ajuk meg az $f(x) = \ln(x^2 - 1)$ függvény ívhosszát, ahol $x \in [5,13]$.

Első lépésként felírjuk, hogy

$$f'(x) = 2x \cdot \frac{1}{x^2 - 1}.$$

Következő lépésben kiszámoljuk a függvény ívhosszát,

$$s(f) = \int_5^{13} \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx =$$

$$\int_5^{13} \sqrt{1 + \left(\frac{2x}{x^2 - 1}\right)^2}\, dx = \int_5^{13} \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(x^2 - 1)^2}}\, dx =$$

$$\int_5^{13} \sqrt{\frac{4x^2 + (x^2 - 1)^2}{(x^2 - 1)^2}}\, dx = \int_5^{13} \sqrt{\frac{x^4 - 2x^2 + 1 + 4x^2}{(x^2 - 1)^2}}\, dx =$$

$$\int_5^{13} \sqrt{\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}}\, dx = \int_5^{13} \sqrt{\frac{(x^2 + 1)^2}{(x^2 - 1)^2}}\, dx = \int_5^{13} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\, dx =$$

$$\int_5^{13} \frac{x^2 - 1 + 2}{x^2 - 1}\, dx = \int_5^{13} \left(1 + \frac{2}{x^2 - 1}\right) dx =$$

$$\int_5^{13} 1 dx + \int_5^{13} 2 \cdot \frac{1}{x^2 - 1}\, dx =$$

$$[x]_5^{13} + 2 \cdot \left[-ln\sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}\right]_5^{13} =$$

$$13 - 5 - 2 \cdot ln\sqrt{\frac{12}{14}} + 2 \cdot ln\sqrt{\frac{4}{6}} =$$

$$8 + ln\frac{14}{12} \cdot \frac{4}{6} = 8 + ln\frac{56}{72} = 8 + ln56 - ln72$$

A függvénygrafikon ívhossza, azaz $s(f) \approx 7{,}74$.

3. Határozzuk meg a $g = (t, \frac{2}{3}t^{3/2})$ síkgörbe ívhosszát, ahol $t \in [0{,}15]$.

Először is felírjuk, hogy

$$g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \frac{2}{3}t^{3/2} \end{pmatrix},$$

ebből megadható, hogy

$$g'(t) = \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ g_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{t} \end{pmatrix}.$$

Végül felírjuk a görbe ívhosszát

$$s(g) = \int_0^{15} \sqrt{\left(g_1'(t)\right)^2 + \left(g_2'(t)\right)^2} dt =$$

$$\int_0^{15} \sqrt{1+t} dt = \left[\frac{2}{3}(1+t)^{3/2}\right]_0^{15} =$$

$$\frac{128}{3} - \frac{2}{3} = \frac{126}{3}$$

A síkgörbe ívhossza, azaz $s(g) = 42$.

4. Adott a következő $g = (t \cdot sint + cost, t \cdot cost - sint)$ síkgörbe, ahol $t \in [0{,}18]$, számoljuk ki a görbe ívhosszát.

Felírhatjuk, hogy

$$g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cdot sint + cost \\ t \cdot cost - sint \end{pmatrix},$$

ebből következik, hogy

$$g'(t) = \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ g_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sint + t \cdot cost - sint \\ cost - t \cdot sint - cost \end{pmatrix}.$$

Végül megadjuk a görbe ívhosszát

$$s(g) = \int_0^{18} \sqrt{\left(g_1'(t)\right)^2 + \left(g_2'(t)\right)^2} dt =$$

$$\int_0^{18} \sqrt{sin^2t + 2 \cdot t \cdot sint \cdot cost - 2 \cdot sin^2t - 2 \cdot t \cdot sint \cdot cost + t^2 \cdot cos^2t + sin^2t + \atop cos^2t - 2 \cdot t \cdot sint \cdot cost + 2 \cdot t \cdot sint \cdot cost - 2 \cdot cos^2t + t^2 \cdot sin^2t + cos^2t} dt =$$

$$\int_0^{18} \sqrt{t^2 \cdot cos^2t + t^2 \cdot sin^2t}\, dt =$$

$$\int_0^{18} \sqrt{t^2(sin^2t + cos^2t)}\, dt =$$

$$\int_0^{18} \sqrt{t^2}\, dt = \int_0^{18} t\, dt = \left[\frac{1}{2} t^2\right]_0^{18}$$

A síkgörbe ívhossza, azaz $s(g) = 162$.

5. Számítsuk ki a $g = (2 + t, -t - 1, t)$ térgörbe ívhosszát, ahol $t \in [0, \pi]$.

Tehát tudjuk, hogy

$$g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ g_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + t \\ -t - 1 \\ t \end{pmatrix},$$

ebből kiszámítható, hogy

$$g'(t) = \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ g_2'(t) \\ g_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ezt követően fel tudjuk írni a görbe ívhosszát,

$$s(g) = \int_0^{\pi} \sqrt{\left(g_1'(t)\right)^2 + \left(g_2'(t)\right)^2 + \left(g_3'(t)\right)^2} dt =$$

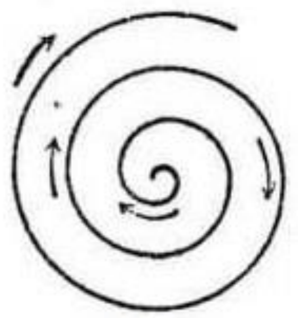
$$\int_0^{\pi} \sqrt{1 + (-1)^2 + 1} dt = \int_0^{\pi} \sqrt{3}\, dt = \left[\sqrt{3} t\right]_0^{\pi}$$

A térgörbe ívhossza, azaz $s(g) \approx 5{,}44$.

A rövid elméleti bevezető után nézzük meg a bűnügyi feladatokat.

1. Veszélyes labirintus

Egy csigavonalú labirintus (lásd 4. ábra) legbelsőbb részében holttestre bukkanak a látogatók. A kiérkező rendőrök felveszik a szemtanúk vallomásait és kiderül, hogy két lehetséges elkövető jöhet szóba, hiszen a gyilkosság észrevétele óta eltelt idő alapján ennyien jöhetnek számításba, mint lehetséges elkövetők. A helyszínelés megkezdése után figyelembe vették, hogy mekkora út megtétele szükséges a labirintusból való kiérkezéshez, illetve feljegyezték a maximális sebességet, mellyel az elkövető futhatott. Ezen adatok és a szemtanúk vallomás után kiderült, hogy egy női elkövetőről van szó, akit a pontosan megadott fantomkép alapján hamar sikerült is elkapni.



4. ábra

Vizsgáljuk meg, hogyan sikerült megtalálni a valódi elkövetőt.

Tudjuk, hogy a labirintus átmérője 4π hosszúságú, és, hogy a maximális futási sebesség $1{,}8\,{}^{m}/_{s}$. A szemtanúk vallomása szerint egy férfi távozott a sikítást követően 30 *másodperc* elteltével, valamint a másik lehetséges elkövető 45 *másodperc* után.

Feladatunk a labirintusból kivezető út hosszának a megadása.

Először is helyezzük el az r sugarú kör alakú labirintusunkat egy koordináta rendszerbe úgy, hogy az alja az *xy* síkon legyen.

Ekkor az elkövető koordinátái a *t* időpillanatban $x(t) = t\sin t\,, y(t) = t\cos t$.

A férfi pillanatnyi sebessége *t* időpillanatban $\dot{r}(t) = (\dot{x}(t),\ \dot{y}(t))$.

Tehát tudjuk, hogy

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\sin t \\ t\cos t \end{pmatrix}$$

ebből következik, hogy

$$\dot{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin t + t\cos t \\ \cos t - t\sin t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0{,}4\pi].$$

Ezek után fel tudjuk írni a megtett út hosszát

$$L = \int_0^{4\pi} |\dot{r}(t)|dt = \int_0^{4\pi} \sqrt{\left(\dot{x}(t)\right)^2 + \left(\dot{y}(t)\right)^2}dt =$$

$$\int_0^{4\pi} \sqrt{sin^2t + 2\cdot t\cdot sint\cdot cost + t^2\cdot cos^2t + cos^2t - 2\cdot t\cdot sint\cdot cost + t^2\cdot sin^2t}\,dt =$$

$$\int_0^{4\pi} \sqrt{1+t^2}dt = \left[\frac{1}{2}\cdot t\cdot\sqrt{t^2+1} - \frac{1}{2}\cdot\log\left(\sqrt{t^2+1}-t\right)\right]_0^{4\pi}$$

Az labirintusból kivezető út hossza, tehát $L \approx 79{,}82\ méter$.

Most már csak annyi dolgunk van, hogy kiszámoljuk mennyi idő szükséges az út megtételéhez, hiszen tudjuk, hogy a sebesség $1{,}8\ {}^{m}/_{s}$.
Tudjuk, hogy

$$v = \frac{s}{t}$$

ebből esetünkben

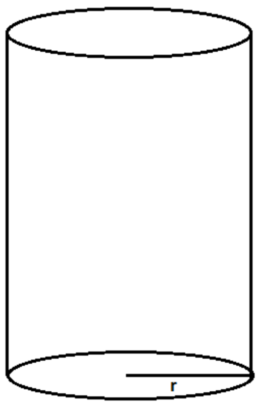
$$t = \frac{L}{v}$$

$$t \approx \frac{79{,}82}{1{,}8}$$

tehát az eltelt idő $t \approx 44{,}34$ *másodperc*.
Ezen adatok tudatában a férfit teljes mértékben kizárták, hiszen a távot nem lehet megtenni 30 *másodperc* alatt, míg a nő esetében az idő megegyezik, így a szemtanúk pontos vallomásának és a helyszínelők alapos munkájának köszönhetően sikerült elkapni a tettest.

2. Haláleset a toronyházban

Egy szombat délután a belvárosban nézelődő emberek kiabálásokra lettek figyelmesek, mely a központban lévő toronyház (lásd 5. ábra) tetejéről hallatszott. A zajra egyre többen az épület köré gyűltek, majd egy hirtelen pillanatban arra lettek figyelmesek, hogy valaki lezuhan felülről. Alig telt el egy kis idő, egy ismeretlen férfi akart távozni a helyszínről, akit azonnal letartóztattak a helyszínre érkező rendőrök, akiket még a hangzavar miatt hívtak ki, de csak a holttest látványára értek oda. A szemtanúk elmondták, hogy pontosan mikor esett a mélybe a férfi, majd a rendőrök feljegyezték a gyanúsított őrizetbe vételének időpontját is. Ezt követően megkezdődött a helyszínelés, mely bebizonyította, hogy feltehetően öngyilkosságról lehetet szó, hiszen a gyanúsított a rendelkezésre álló adatok szerint nem lehet az elkövető.



5. ábra

Nézzük meg, hogy sikerült a helyszínelőknek bebizonyítani, hogy a gyanúsíttott ártatlan.[3]
Vegyünk egy 5 m sugarú és 70 m magasságú hengert, mely megfelel a torony paramétereinek és, ahol a lépcsők 60°-ban emelkednek. Tudjuk még, hogy az esés pillanata és a gyanúsított épületből való kiérkezése között eltelt idő 45 *másodperc*, valamint a lépcsőről leggyorsabban 1,5 $m/_s$ – mal lehet leszaladni.
Először is számoljuk ki a lépcső meredekségét, amely

$$m = \operatorname{tg} \alpha\,;$$

ahol, mint tudjuk $\alpha = \frac{\pi}{3}$, így

$$m = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}\,;$$

ebből $m = \sqrt{3}$.
Helyezzük el az *r* sugarú *h* magasságú henger alakú tornyunkat egy koordináta rendszerbe úgy, hogy a torony alja az *xy* síkon legyen, a tengelye pedig a *z* tengellyel egyezzen meg.
Ekkor a férfi koordinátái a *t* időpillanatban $x(t) = r\cos t\,, y(t) = r\sin t$, valamint $z(t) = ct$.
A férfi pillanatnyi sebessége *t* időpillanatban $\dot{r}(t) = (\dot{x}(t),\ \dot{y}(t),\ \dot{z}(t))$.
Tehát tudjuk, hogy

$$r(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ct \end{pmatrix},$$

ebből következik, hogy

$$\dot{r}(t) = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ c \end{pmatrix}.$$

A sebesség vektor az érintő irányába mutat, így a *z* tengellyel 30°-os szöget zár be. Ennek segítségével meg tudjuk határozni a *c* konstanst.
Legyen $u_1 = \dot{r}(t) = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ c \end{pmatrix}$ sebességvektor, valamint $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *z* tengely irányába mutató egységvektor.
Tudjuk, hogy

$$u_1 \cdot u_2 = 0 \cdot (-r\sin t) + 0 \cdot (r\cos t) + 1 \cdot c = |u_1| \cdot |u_2| \cdot \cos\beta\,;$$

ebből,

$$c = |u_1| \cdot |u_2| \cdot \cos\beta\,;$$

[3] Gémes Margit: Ívhossz számítás a sörcsap mellett

vagyis

$$c = \sqrt{r^2 \cdot sin^2 t + r^2 \cdot cos^2 t + c^2} \cdot 1 \cdot cos\frac{\pi}{6};$$

$$c = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{r^2 \cdot sin^2 t + r^2 \cdot cos^2 t + c^2};$$

$$c = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{r^2 + c^2};$$

$$c^2 = \frac{3}{4}(r^2 + c^2);$$

$$c = \sqrt{3}r.$$

Mielőtt rátérnénk az ívhossz kiszámítására meg kell határoznunk a *t*-hez tartozó intervallumot.

Tudjuk, hogy $z(0) = 0$, míg $z(T) = h = cT = \sqrt{3}rT$, ahol h a torony magasságát jelenti, így megkapjuk, hogy $T = \frac{h}{\sqrt{3}r}$, vagyis $t \in \left[0, \frac{h}{\sqrt{3}r}\right]$.

Az ívhossz, azaz a férfi által megtett út

$$L = \int_0^{\frac{h}{\sqrt{3}r}} |\dot{r}(t)| dt = \int_0^{\frac{h}{\sqrt{3}r}} \sqrt{\left(\dot{x}(t)\right)^2 + \left(\dot{y}(t)\right)^2 + \left(\dot{z}(t)\right)^2} dt =$$

$$\int_0^{\frac{h}{\sqrt{3}r}} \sqrt{r^2 \cdot sin^2 t + r^2 \cdot cos^2 t + c^2}\, dt = \int_0^{\frac{h}{\sqrt{3}r}} \sqrt{r^2 + c^2}\, dt = \left[\sqrt{r^2 + c^2} \cdot t\right]_0^{\frac{h}{\sqrt{3}r}};$$

tudjuk, hogy $r = 5m$ és $c = \sqrt{3}r = 5\sqrt{3}$, tehát a következőt kapjuk

$$\left[\sqrt{5^2 + (5\sqrt{3})^2} \cdot t\right]_0^{\frac{h}{\sqrt{3}r}} = 10 \cdot \frac{h}{5\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}h.$$

Tudjuk a torony magasságát, azaz hogy $h = 70\ m$, így az épületben található lépcső hossza,

$$L = \frac{140}{\sqrt{3}} méter.$$

Miután kiszámoltuk a lépcső hosszát és tudjuk, hogy maximum 1,5 $^{m}/_{s}$ –mal lehet leszaladni, így utolsó lépésként meghatározzuk az út megtételéhez szükséges időt.

Tudjuk, hogy

$$v = \frac{s}{t}$$

ebből esetünkben

$$t = \frac{L}{v}$$

$$t = \frac{\frac{140}{\sqrt{3}}}{1,5}$$

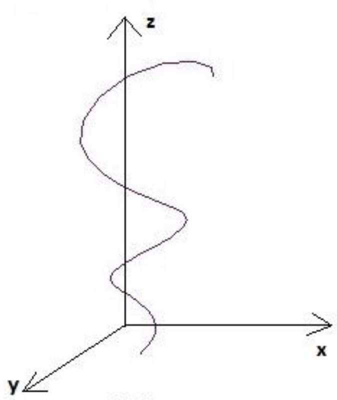
tehát az eltelt idő $t = 53{,}88$ *másodperc*.

Ezáltal bebizonyosodott, hogy a férfi nem gyilkolhatott, hiszen ő több, mint 8 *másodperccel* kevesebb idő alatt ért le az épület tetejéről.

3. A sorozatgyilkos

1993-ban egy rejtélyes gyilkossághoz riasztották a rendőrséget. A haláleset egy olyan épületben történt, amely belülről különlegesnek mondható lépcsőjének köszönhetően, amely felfelé haladva egyre jobban szélesedik (lásd 6. ábra). A kiérkező helyszínelők rögzítették a nyomokat, majd meghatározták, hogy mennyi idő alatt lehetet a tetőről lefutni és ennek köszönhetően, valamint a szemtanúk vallomásának hála, akik megtudták mondani hány ember távozott az épületből a holtest észrevétele után, a rendőrök két embert gyanúsítottak. Sajnálatos módon nem volt elég információ az esetről, így a gyilkossági ügy lezáratlan maradt egészen 2001-ig, amikor is hasonló eset történt. Az ügy során hasonlóan jártak el a helyszínelők, hiszen ugyanarról az épületről volt szó, de megint megakadtak a nyomozás során, mert több gyanúsított is felmerült, viszont összevetve a 8 évvel korábbi halálesettel egyezést találtak egy személlyel kapcsolatban, így sikerült lezárni mind a két gyilkosságot.

A következőkben nézzük meg, hogyan sikerült a helyszínelőknek meghatározni, hogy a gyilkosság elkövetése után hány perc alatt futott le a tettes a lépcsőn és így leszűkíteni a gyanúsítottak névsorát.



6. ábra

Tudjuk, hogy az épület magassága 65 *méter*, és hogy a maximális futási sebesség $1{,}6\,{}^{m}/_{s}$. A szemtanúk vallomása szerint ketten távoztak a holtest észrevétele után 81 *másodperc* múlva, valamint még hárman utánuk 15 *másodperccel*, azaz az észrevételt követően 96 *másodperc* múlva.

Helyezzük el a *h* magasságú épületünket egy koordináta rendszerbe úgy, hogy a épület alja az *xy* síkon legyen, a tengelye pedig a *z* tengellyel egyezzen meg.

A férfi pillanatnyi sebessége *t* időpillanatban $\dot{r}(t) = (\dot{x}(t),\ \dot{y}(t),\ \dot{z}(t))$.

Ekkor a férfi koordinátái a *t* időpillanatban

$$r(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \\ \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot t^{3/2} \end{pmatrix},$$

ebből következik, hogy

$$\dot{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t - t\sin t \\ \sin t + t\cos t \\ \sqrt{2t} \end{pmatrix}.$$

A sebesség vektor az érintő irányába mutat, így a z tengellyel 60°-os szöget zár be.

Legyen $u_1 = \dot{r}(t) = \begin{pmatrix} cost - t\sin t \\ sint + t\cos t \\ \sqrt{2t} \end{pmatrix}$ sebességvektor, valamint $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ z tengely irányába mutató egységvektor.

Tudjuk, hogy

$$u_1 \cdot u_2 = 0\cdot(cost - t\sin t) + 0\cdot(sint + t\cos t) + 1\cdot\sqrt{2t} = |u_1|\cdot|u_2|\cdot\cos\alpha\,;$$

ebből,

$$\sqrt{2t} = |u_1|\cdot|u_2|\cdot\cos\alpha = \dot{z}(t);$$

vagyis

$$\dot{z}(t) = \sqrt{cos^2t + 2\cdot t\cdot sint\cdot cost + t^2\cdot sin^2t + sin^2t - 2\cdot t\cdot sint\cdot cost + t^2\cdot cos^2t + 2t}\cdot 1\cdot cos\frac{\pi}{3};$$

azaz, $\dot{z}(t) = \frac{1}{2}\cdot|\dot{r}(t)|$.

Tudjuk, hogy $z(0) = 0$, míg $z(T) = h$,

ebből az következik, hogy

$$h = z(T) = [z(t)]_0^T = \int_0^T \dot{z}(t)dt = \int_0^T \frac{1}{2}\cdot|\dot{r}(t)|\,dt =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\int_0^T |\dot{r}(t)| = \frac{1}{2}L.$$

Tudjuk a torony magasságát, azaz hogy $h = 65\ m$, így az épületben található lépcső hossza,

$$L = 130\ méter.$$

Miután kiszámoltuk a lépcső hosszát és tudjuk, hogy maximum $1{,}6\ {}^{m}/_{s}$ –mal lehet leszaladni, így utolsó lépésként meghatározzuk az út megtételéhet szükséges időt.

Tudjuk, hogy

$$v = \frac{s}{t}$$

ebből esetünkben

$$t = \frac{L}{v}$$

$$t = \frac{130}{1{,}6}$$

tehát az eltelt idő $t = 81{,}25$ *másodperc*.

Ennek az adatnak a segítségével sikerült leszűkíteni a gyanúsítottakat és végül elkapni a gyilkost.

Irodalomjegyzék

[1] Laczkovich Miklós - T. Sós Vera: Valós Analízis I.
Typotex Kiadó, Budapest, 2012

[2] Obádovics J. Gyula: Integrálszámítás és alkalmazása
Scolar Kiadó, Budapest, 2013

[3] http://www.cs.elte.hu/~gemes/Tanarklub_ivhossz_140226_bovebb.pdf