Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Kecskeméti Judit

Többváltozós szélsőérték keresés korlátos halmazokon

Matematika BSc szakdolgozat

tanári szakirány

Témavezető: Keszthelyi Gabriella

Analízis tanszék

Budapest, 2015

Tartalomjegyzék

Bevezetés **3**

1. A módszer bemutatása **5**

1.1. Kancsóöblítés a folyónál 5

1.2. Grafikus megközelítés 6

1.3. A módszer működése 11

2. Feladatok I. **14**

2.1. Feladat 14

2.2. Feladat 17

2.3. Feladat 19

2.4. Feladat 23

3. Több megszorítás egyszerre **26**

4. Feladatok II. **30**

5. Záró gondolatok **34**

Köszönetnyilvánítás **35**

Irodalomjegyzék **36**

Bevezetés

Vajon minek a segítségével lehet a címbeli hosszan leírt problémát megoldani? Szakdolgozatom címe a rendkívül hasznos Lagrange multiplikátorok módszerére utal. A névadó francia matematikus *Méchanique analitique* című 1788-as művében vezette be részletesen és kidolgozottan ezt a módszert, amely szoros kapcsolatban áll a virtuális elmozdulás alapelvével. Röviden bemutatva, testek egyensúlyi helyzetét szeretnénk meghatározni. Virtuális elmozdulás alatt azt értjük, ami egy egyensúlyi helyzetben levő testre akkor hatna, ha az egyensúlyából kibillenne. A testre ható erők akkor lesznek egyensúlyban, ha éppen ellentétes mennyiségűek a virtuális elmozdulással. Így egy test akkor és csak akkor lesz egyensúlyi helyzetben, ha a rá ható virtuális erők összege nulla. Végül megkapjuk, hogy egy olyan pont egyensúlyát, amelyre három erő hat, a következő egyenlet írja le általánosan:

$$Pdp + Qdq + Rdr = 0$$

A könyvben Lagrange kiemeli, hogy fontos tisztán analitikus műveletekre redukálni a mechanikai kifejezéseket, éppen ezért vezeti be a multiplikátorok módszerét. Ennek segítségével az előbb leírt probléma sokkal általánosabban és egyszerűbben megoldhatóvá válik, és a későbbiekben a korlátos egyensúlyt tanulmányozza részletesen. [1]

Azért ezt a témát választottam, mert egyetemi tanulmányaim alatt a függvénytan volt a kedvencem, és a Lagrange multiplikátorok módszerével tanári szakirányon nem foglalkoztunk. Ezen kívül, ami megfogott a témával kapcsolatban az, hogy talán beállítottságom következtében főképp a matematika megfogható, jól elképzelhető része vonz. Ez a módszer pedig nagyon jól ábrázolható alacsonyabb dimenzióban, ami nagyban segíti a megértését. Éppen ezért szeretném a szakdolgozatomban olyan részletességgel felvezetni a témát, ami alapján mások is elsajátíthatják azt.

1. fejezet

A módszer bemutatása

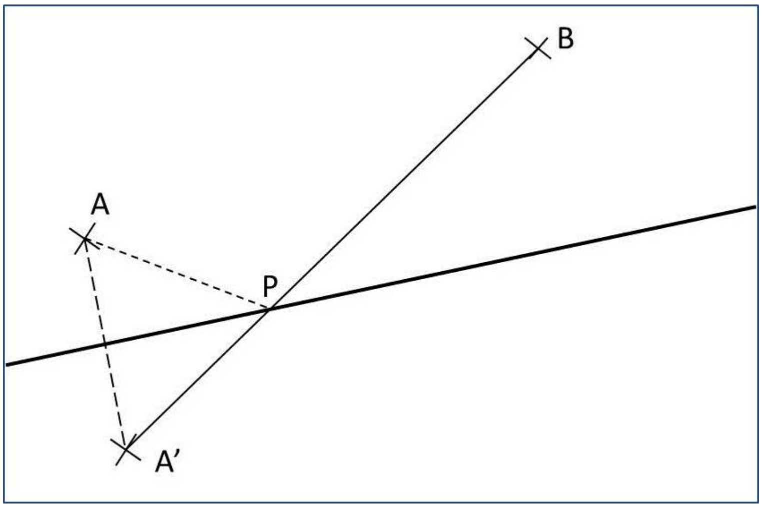
1.1. Kancsóöblítés a folyónál

A Lagrange multiplikátor módszer abban különbözik az általános szélsőérték kereséstől, hogy ebben az esetben van egy (vagy akár több) megszorításunk, függvény(ek) formájában. A legegyszerűbb egy, már minden elemi matematika kurzust elvégzett diák által is ismert példán keresztül szemléltetni a dolgot, kis változtatással. Ez a tehenészlány problémája, amit annyiféleképpen hallottunk, ahány tanárnál tanultuk. Én a forrásom által használt formában írom le.

Az alapfeladat tehát így szól:

Fejés ideje van a farmon, és a tehenészlánynak el kell menni összegyűjteni a napi tejet. Sietnie kell, mivel randevúja lesz a helyes birkapásztorral, ezért olyan gyorsan szeretne végezni, amennyire csak lehet. A fejés előtt viszont mindenképp el kell mennie a közeli folyóhoz, hogy annak vizében kiöblítse a kancsóját. A folyó melyik pontjához menjen, hogy útja a lehető legrövidebb legyen? [2]

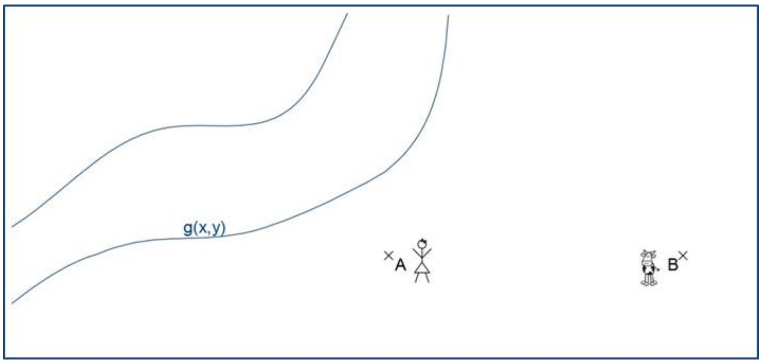
A világunk annyiban ideális, hogy a felület legyen sík, így két pont között az őket összekötő szakasz a legrövidebb út, illetve legyen a folyópart bármely pontja ugyanannyira megfelelő vízszerzésre. Ki kell még kötnünk továbbá, hogy a folyó egy egyenes, és így a megoldást legegyszerűbben tükrözéssel kaphatjuk meg. Ha a lány (A) helyzetét tükrözzük a folyóra, akkor a lány képe (A') és a tehén (B) közötti szakasz lesz a legrövidebb út kettejük között. Ennek a szakasznak és a folyónak a metszéspontja (P) meghatározza a keresett pontot (mivel $A'P = AP$), azaz azt a helyet, ahova a tehenészlánynak mennie kell a folyóhoz. Ehhez nincs szükségünk se függvényekre, se multiplikátorokra.



1.1. ábra.

1.2. Grafikus megközelítés

Most nézzük a főfeladatot, amin keresztül bemutatom a módszert. Legyen ekkor a tehenészlány által bejárt út az $f(x, y)$ függvény, amit minimalizálni szeretnénk, mert a legrövidebb utat keressük. A mi eggyel valósághűbb esetünkben a folyó nem egyenes vonal, hanem a közelebbi partjának egy szakasza leírható egy $g(x, y) = 0$ görbével, ez lesz az úgynevezett megszorításunk.



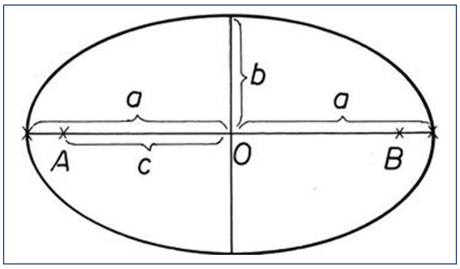
1.2. ábra.

Ez azt jelenti, hogy nem csak az f függvény minimumát keressük, hanem az f minimumát abban az esetben, ha ennek érintenie kell g-t is, azaz nem csak a tehénhez kell odamenni, hanem előtte a folyóparthoz is. Ha nem lenne ez a megszorításunk, vagyis nem kellene a kancsó kimosásával tölteni az időt, akkor csak A-ból B-be kellene eljutni, ami annyira egyszerű, hogy a két pont által meghatározott szakasz lesz a megoldásunk. Tehát fontos, hogy a parton ($g(x, y) = 0$) keressük azt a P pontot, amelyre az AP és PB távolságok összege a legkisebb ($d\,(A, P) + d\,(P, B) = min$).

Felhasználjuk az ellipszisről való geometriai tudásunkat:

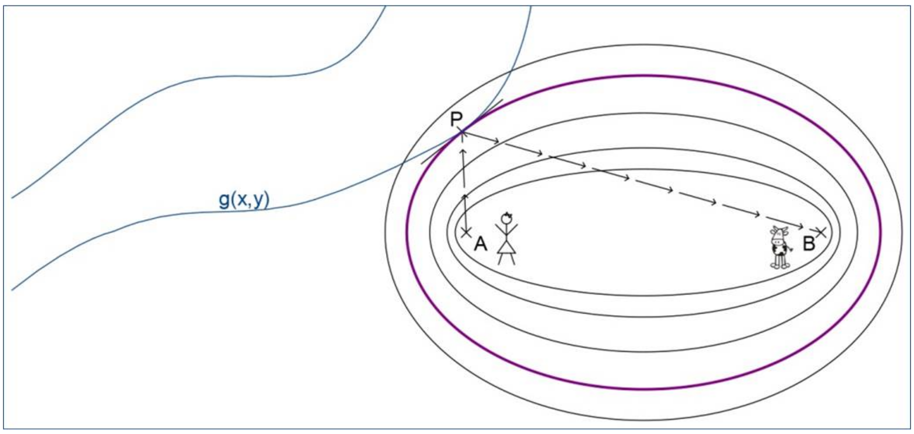
Definíció: *Adott a síkon két különböző pont; A, B (fókuszok) és egy $2a$ szám ($2a > d\,(A, B) = 2c$). Az A, B fókuszú, $2a$ nagytengelyű ellipszis:*

$$\{P \in \textit{sík} : d\,(P, A) + d\,(P, B) = 2a\}$$



1.3. ábra.

Ez a mi esetünkben azt jelenti, hogy egy adott A, B fókuszú ellipszisben a tehenészlány ugyanannyi idő alatt jut el az A kiindulópontból bármely, az ellipszisen levő P pontba, és onnan B-be. De honnan tudjuk meg, hogy milyen paraméterekkel rendelkező ellipszis jó nekünk? Az összes ilyen A, B fókuszú ellipszis megadható egy megfelelő (r, s, t) paraméterekkel ellátott $f(x, y) = t(\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{s^2})$ paraboloid segítségével, ahol minden ellipszis egy-egy szintvonala lesz $f(x, y)$-nak (tehát kielégítik az $f(x, y) = c$ egyenletet valamely c konstansra). Azaz, hogy megtaláljuk a legközelebbi P pontot, ami a g görbe által leírt part mentén van, meg kell keresnünk a legkisebb A, B fókuszú ellipszist, amely érinti a g folyóparti görbét.



1.4. ábra.

Ugyanis mindenképp el kell érnünk a partot, azaz kisebb ellipszis nem jó, viszont túlmenni sem akarunk, hiszen a legrövidebb utat keressük, amit már akkor elérünk, ha éppen odamegyünk a parthoz. Az összes lehetséges A, B fókuszú ellipszis közül tehát nekünk az lesz 'jó', amely pontosan érinti a partot, azaz a g görbét. Ekkor f és g érintési pontja lesz a keresett P pont.

Ha a két görbe nem lenne érintőleges, képzeljünk el egy P' pontot, ahol találkoznak. Mivel nem érintik, ezért metszik egymást, P'-ben. Mivel az ellipszis f egy szintvonala, ezért az egyik felén levő pontoknak nagyobb az értéke, míg a másik felén levőké kisebb. Mivel a g görbe mentén bármerre mozoghatunk, hogy kielégítsük a megszorítást, az *1.4 ábrán* is látható, hogy P'-t bármelyik irányba elmozdíthatjuk a folyópart mentén, az vagy csökkenni vagy nőni fog, így ez a P' pont nem lehet szélsőérték.

Definíció: *Tegyük fel, hogy e^j $\mathbb{R}^n$-beli bázisvektor, $G_1 \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz. Ha $x_1 \in G_1, 1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq n$, akkor az f leképezés i-edik komponensének j-edik változó szerinti parciális deriváltja:*

$$(\partial_j f_i)(x) = \lim_{t \to \infty} \frac{f_i(x + te^j) - f_i(x)}{t}$$

$t \in \mathbb{R}$, feltéve, hogy a határérték létezik.

Definíció: *Tegyük fel, hogy $G_1 \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, f differenciálható valós függvény, $f : G_1 \to \mathbb{R}$. Ekkor azt a vektort, melynek j-edik komponense $(\partial_j f)(x)$, $j = 1, 2, ..., n$-re, az f x-beli gradiensének nevezzük.*

$$\nabla f(x) = \sum_{j=1}^{n} (\partial_j f)(x) e^j = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix}$$

Nézzük a szintvonal és a megszorítás normálvektorait. Először is, mivel a két görbe éppen érintőleges a keresett P pontban, ez ekvivalens azzal, hogy

P-ben a normálvektoraik párhuzamosak. Másodszor, mivel az ellipszis f egy szintvonala, ezért f gradiensvektora P pontban ($\nabla f(P)$) merőleges erre a szintvonalra. Ezek együtt éppen azt jelentik, hogy egy P minimum- vagy maximumhelyen a $\nabla f(P)$ a $g = 0$ -ra is merőleges vektor lesz, azaz ha a két függvény gradiensei egy P pontban párhuzamosak, akkor ebben a pontban a szintvonalaik érintik egymást.

Megjegyzendő, hogy nem fontos a görbe ellipszis mivolta, bármilyen más zárt, differenciálható görbével is ugyanúgy működik. A vektor hossza is mindegy, hiszen bármely konstansszorosa is ugyanúgy normálvektor lesz. Ebben a lépésben rejlik a multiplikátor módszer lényege.

Adottak tehát az $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények és a $g = 0$ megszorítás. Az f-nek egy olyan szintvonalát keressük, ami éppen érinti a $g = 0$ szintvonalat. Ehhez annak kell teljesülnie, hogy adott P pontban normálvektoraik párhuzamosak legyenek. Tehát:

$$\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$$

Itt λ egy ismeretlen konstans szorzó, ami a két gradiens eltérő nagysága miatt szükséges, mert csak annyit tudunk, hogy irányuk megegyezik. Ezt a lambdát szoktuk multiplikátornak nevezni.

A megoldás során lesz 3 darab egyenletünk és 3 ismeretlenünk. A fenti egyenletben vektorokkal dolgozunk, amiből a parciális deriválás 2 db egyenletet ad, és az eredeti megszorításunkkal ($g(x, y) = 0$) lesz 3. Az ismeretlenek közül 2 darab a keresett P pont x és y koordinátáiból származik, és λ a plusz egy.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}$$

$$g(x, y) = 0$$

Az egyenletrendszer megoldása kiadja a $P(x, y)$ pontot, ahova a lánynak mennie kell a folyóhoz, ha a lehető legrövidebb idő alatt szeretné megtenni az utat.

1.3. A módszer működése

Az előző feladat $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ esetre is általánosítható, az $f(x_1, \ldots x_n)$ görbét kell a $g(x_1, \ldots x_n) = 0$ megszorításnak alávetnünk. Ahhoz, hogy a Lagrange multiplikátor módszer működjön, kell, hogy f és g legalább egyszer folytonosan differenciálható függvények legyenek. Mivel g egy szintvonalát vesszük, ezért a feladat nem más, mint egy folytonos függvény szélsőértékeinek megtalálása egy zárt és korlátos tartományon. Ekkor a gradiens vektor meghatározásánál a parciális deriválásokkal és a megszorítás egyenletével $n+1$ egyenletünk és $n+1$ ismeretlenünk lesz, és az egyenletrendszer általában egyértelmű megoldást ad.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1} &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} \\
\frac{\partial f}{\partial x_2} &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} \\
&\vdots \\
\frac{\partial f}{\partial x_n} &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n} \\
g(x_1, \ldots, x_n) &= 0
\end{aligned}$$

A számolások elvégzése után kapott megoldásokat kritikus pontonak nevezzük. A Lagrange multiplikátor módszer elégséges feltételt nyújt a fenti módon leírt optimalizálási problémákhoz, így a szélsőértékek a kritikus pontok halmazában fognak elhelyezkedni. Természetesen vannak olyan esetek, ahol több megoldás születik, sőt az is előfordulhat, hogy végtelen sok megoldást kapunk, ha elfajuló görbékkel dolgozunk. Az előző feladatban például, ha a tehenészlány és a tehén is eleve a folyóparton vannak, ami pontosan egy egyenes. Az is egy speciális eset, ha $g(P) = 0$ és $\nabla g(P) = 0$ egyszerre teljesül. Ekkor ez szintén egy kritikus pont, ahol λ nem fejezhető ki. Ettől függetlenül, ez még mindig szélsőérték lehet, abban az esetben, ha $\nabla f(P) = 0$.

Sok esetben magának a Lagrange multiplikátornak, lambdának az értéke nem kifejezetten fontos, de szolgálhat hasznos információkkal. Közgazdaságtanban például, ha profitot szeretnénk maximalizálni valamilyen korlátozott erőforrás mellett, akkor λ az az érték, amennyivel a profit javulna, ha az adott erőforrásból egy egységgel több állna rendelkezésünkre. Ez az úgynevezett árnyékár. [3]

A módszert másképp is végiggondolhatjuk. Ebben az esetben van egy $f(P)$ görbénk, amelynek a szélsőértékeit keressük azzal a megszorítással, hogy $g(P) = 0$ is teljesül. Ilyenkor általában azt nézzük, hol lesz 0 a függvény deriváltja, azaz $\nabla f(P) = 0$. Ebbe viszont még valahogy be kell csempésznünk a megszorításunkat is. Az egyik lehetőség, hogy egy új ismeretlent vezetünk be, λ-t, és így egy új függvény szélsőértékeit keressük.

$$L(P, \lambda) = f(P) - \lambda g(P)$$

Ezt nevezzük Lagrange függvénynek.

Ekkor $\nabla L(P, \lambda) = 0$ ($P(x_1, \ldots, x_n)$) vektoregyenletet bontjuk $n + 1$ egyenletre, ahol az egyik egyenlet a λ szerinti parciális derivált. Ez éppen a korlátozó görbénket adja ki, $g(P) = 0$ -t. Eközben a gradiens többi egyenlete λ-t állandóként kezeli, így ez ki fog esni. A maradék egyenletünk pedig éppen a grafikus megközelítésben leírt n egyenlettel egyezik meg.

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{\partial f}{\partial \lambda} - \lambda \frac{\partial g}{\partial \lambda} = 0$$

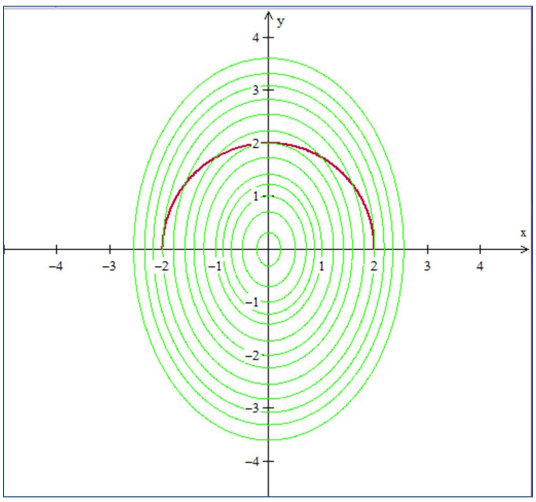
Ennek az egyenletnek a megoldásai a Lagrange függvény kritikus pontjai, amik közül kerülnek ki a szélsőértékek.

2. fejezet

Feladatok I.

2.1. Feladat

Keressük meg a $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ függvény szélsőértékét az $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$ alakú félkörön.



2.1. ábra.

Ez egy tipikus példa a módszer alkalmazására. Az f szélsőértékeit egy félkörön keressük, így ez utóbbinak az egyenletét 0-ra rendezve, hogy az eddigi jelölésekkel konzekvensek maradjunk, g-nek nevezzük. Az adataink:

$f(x, y) = 2x^2 + y^2$

$g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$, $y \geq 0$

$f(x, y) = \lambda g(x, y)$

$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$

Első lépésként helyettesítsük be a feladatban szereplő függvényeket:

$$\nabla f(2x^2 + y^2) = \lambda \nabla g(x^2 + y^2 - 4)$$

Most a gradiens kiszámolásához nézzük meg a parciális deriváltakat:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x = \lambda 2x = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y = \lambda 2y = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \tag{2.2}$$

A következő lépésben ki kell fejeznünk az ismeretleneinket. Én (2.1)-et rendeztem 0-ra:

$$0 = \lambda 2x - 4x$$

$$0 = x(\lambda - 2)$$

Itt két esetre bomlik a feladat.

1. eset: $x = 0$

Most ennek az eredménynek az ismeretében szeretnénk y-t is meghatározni. Még nem használtuk ki, hogy az eredménynek rajta kell lennie a megadott félkörön, azaz, hogy ki kell elégítenie az $x^2 + y^2 = 4$ egyenletet. Most ebbe helyettesítjük vissza az eredményül kapott $x = 0$-t.

$$0^2 + y^2 = 4$$

$$y = 2$$

Az $y = -2$ lehetőséget azért kell elvetnünk, mert a feladatban kikötöttük, hogy $y \geq 0$.

2. eset: $\lambda - 2 = 0$, ebből $\lambda = 2$

Most (2.2)-be helyettesítettem vissza:

$$2y = 2 \cdot 2y$$

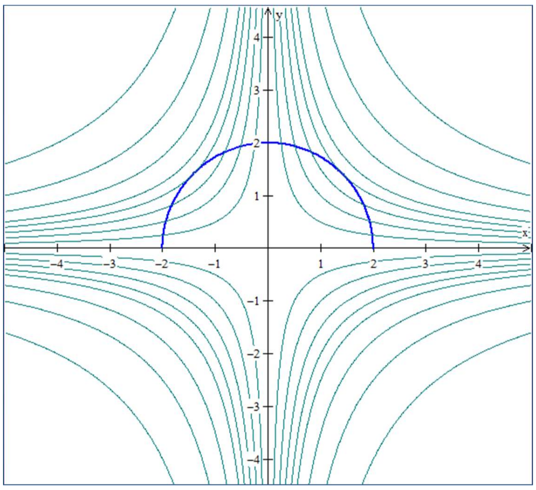
Ez csak akkor lehet, ha

$$y = 0$$

Ekkor ismét a félkör egyenletébe helyettesítve $x = 2$-t kapunk eredményül.
A két pontunk:
$P_1 = (0, 2)$
$P_2 = (2, 0)$
Ezek a pontok az ábrán is jól láthatóak, itt érinti egymást a körvonal és az egyes ellipszisek. Megtaláltuk tehát a feladatban szereplő f elliptikus paraboloidnak a félkörön való minimum- és maximumhelyeit. A felvett értékek ezekben a pontokban
$f(P_1) = 2 \cdot 0^2 + 2^2 = 4$
$f(P_2) = 2 \cdot 2^2 + 0^2 = 8$
Ebből következik, hogy az f függvénynek a P_1 pontban minimuma, a P_2 pontban pedig maximuma van a g félkör alakú megszorításunkra nézve.

2.2. Feladat

Keressük meg az $f(x,y) = xy$ függvény szélsőértékét az $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$ alakú félkörön.



2.2. ábra.

Ebben a feladatban az $f(x,y) = xy$ görbe szélsőértékeit kell az előző feladatban szereplő félkörre korlátoznunk. A megoldandó egyenlet a következő lesz:

$$\nabla f(xy) = \lambda \nabla g(x^2 + y^2 - 4)$$

Ebből a parciális deriváltak:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y = \lambda 2x = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x = \lambda 2y = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \tag{2.4}$$

Elég szerencsés a helyzetünk, hiszen már a parciális deriválás során ki is fejeztük az ismeretleneinket. Következő lépésként helyettesítsünk be (2.3)-ba $x = \lambda 2y$-t.

$$y = \lambda 2(\lambda 2y)$$

$$y = \lambda^2 y$$

$$0 = 4\lambda^2 y - y$$

$$0 = y(4\lambda^2 - 1)$$

Ekkor két esetet kell vizsgálnunk, hiszen egy szorzat akkor lehet 0, ha az első vagy a második tényező 0.

1. eset: $y = 0$

Ekkor $0 = \lambda 2 \cdot x$ amiből $0 = \lambda x$.

Ezt újból két részre bonthatjuk, de mindkettővel ellentmondásra jutunk:

$\lambda \neq 0$ mivel lambda egy olyan skalár, amely egy vektor hosszát adja meg, ami 0 esetén nem fog megoldásra vezetni, mert a 0 vektorral minden párhuzamos.

Az $x = 0$ érték pedig nem teljesíti a megszorítást, nem megoldása az egyenletrendszernek.

2. eset: $4\lambda^2 - 1 = 0$

$$\lambda^2 = \frac{1}{4}$$

$$\lambda = \pm\frac{1}{2}$$

Ha $\lambda = \frac{1}{2}$ akkor bármelyik egyenletbe visszahelyettesítve az $x = y$ eredményt kapjuk.

Ha $\lambda = -\frac{1}{2}$ akkor szintén valamelyik egyenletbe visszahelyettesítve az $x = -y$ eredményt kapjuk.

A félkör egyenletébe ($x^2 + y^2 = 4$) visszahelyettesítve a kapott eredményeinket:

$x^2 + x^2 = 4$, illetve

$x^2 + (-x)^2 = 4$ egyenleteket kapjuk, amelyek megoldásai a feltételeket figyelembe véve a

$P_1(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ és a

$P_2(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ pontok lesznek.

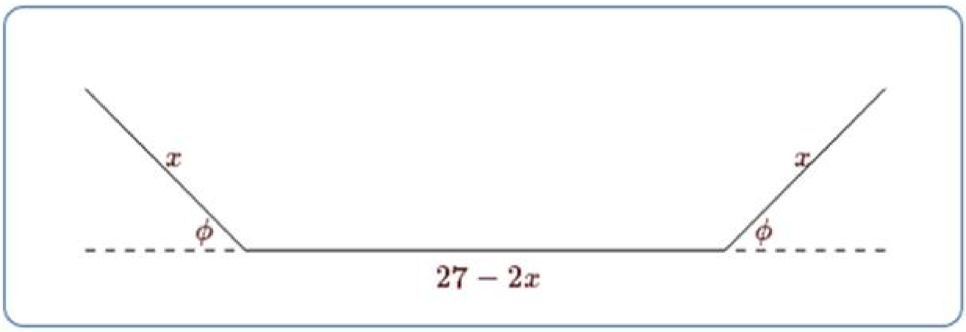
Megkaptuk tehát, hogy az $f(xy)$ görbe a g megszorítással a

P_1 helyen $f(P_1) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ lokális maximum értéket,

P_2 helyen pedig $f(P_2) = -\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = -2$ lokális minimum értéket fog felvenni.

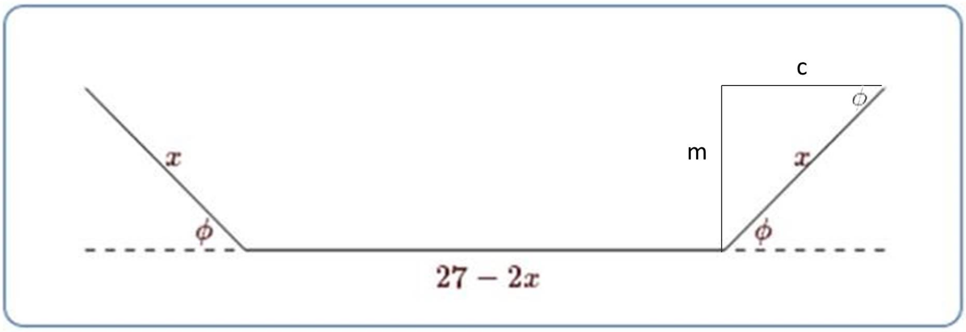
2.3. Feladat

Egy darab vaslemezből vályút készítenek a két szélének felhajlításával, a képen látható módon. Keressük azt az x és ϕ értéket, amelyekkel a trapéz alakú keresztmetszet területe a lehető legnagyobb lesz, ha tudjuk, hogy a lemez szélessége 27 centiméter (azaz $2x + y = 27$)



2.3. ábra.

Ezt a feladatot ismét a multiplikátor módszerrel fogom megoldani. A feladatból könnyen látszik, mi lesz a feltétel, ami határt szab annak, hogy tetszőlegesen nagy területet alkossak. Ez pedig az, hogy csupán 27 centiméter anyag áll rendelkezésre, tehát $g(x,y,\phi) = 2x + y - 27$. A cél a terület maximaizálása, ehhez meg kell találni a szükséges adatokat. Egy trapéz területét kell maximalizálnunk, amihez szükségünk van a két alap hosszára illetve a magasságára. Húzzuk be az m magasságot az alap egyik végpontjába, és ekkor a keletkezett derékszögű háromszög eddig el nem nevezett oldala legyen c.



2.4. ábra.

Az egyik alap adott, y; a másik pedig $2c$-vel lesz hosszabb, amit m-mel együtt a szögfügvényekkel ki tudunk fejezni. A derékszögű háromszögünkben a c és x oldalak által bezárt szög is ϕ, lévén váltószögek. Ekkor:

$$\sin\phi = \frac{m}{x} \text{ amiből } m = x \cdot \sin\phi$$
$$\cos\phi = \frac{c}{x} \text{ amiből } c = x \cdot \cos\phi$$

Így már mindent meghatároztunk ahhoz, hogy fel tudjuk írni a terület függvényét:

$$T = f(x,y,\phi) = \frac{y + (y + 2c)}{2} \cdot m = (y + x \cdot \cos\phi) \cdot x \cdot \sin\phi$$

Ezek után neki is láthatunk a számoláshoz, a parciális deriváltak által meghatározott egyenletrendszer megoldása lesz a keresett maximális terület.

$$\nabla f(x, y, \phi) = \lambda \nabla g(x, y, \phi)$$

$$\nabla(yx \cdot \sin\phi + x^2 \cdot \sin\phi \cdot \cos\phi = \lambda\nabla(2x + y - 27)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot \sin\phi + 2x \cdot \sin\phi \cdot \cos\phi = \lambda 2 = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot \sin\phi = \lambda = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = yx \cdot \cos\phi + x^2 \cdot \cos^2\phi - x^2 \cdot \sin^2\phi = 0 = \lambda \frac{\partial g}{\partial \phi} \tag{2.7}$$

Szerencsénk van, mert (2.6)-ból egyből meg is kaptuk lambdát, helyettesítsük ezt be (2.5)-be:

$$y \cdot \sin\phi + 2x \cdot \sin\phi \cdot \cos\phi = 2x \cdot \sin\phi$$

I. eset $\sin\phi \neq 0$

$$y + 2x \cdot \cos\phi = 2x$$

$$y = 2x(1 - \cos\phi)$$

Már y-t is kifejeztük, így már csak két ismeretlenünk maradt, helyettesítsünk be (2.7)-be:

$$2x(1 - \cos\phi) \cdot x \cdot \cos\phi + x^2 \cdot \cos^2\phi - x^2 \cdot \sin^2\phi = 0$$

$$2x^2 \cdot \cos\phi - 2x^2 \cos^2\phi + x^2 \cdot \cos^2\phi - x^2 \cdot \sin^2\phi = 0$$

$$2x^2 \cdot \cos\phi - x^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = 0$$

$$2x^2 \cdot \cos\phi - x^2 = 0$$

$$x^2(2\cos\phi - 1) = 0$$

Innen külön vizsgáljuk a szorzótényezőket:

I./1. eset:

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

nem értelmes a feladat szempontjából.

I./2. eset:

$$2\cos\phi - 1 = 0$$

$$2\cos\phi = 1$$

$$\cos\phi = \frac{1}{2}$$

II. eset

$$\sin\phi = 0 \Rightarrow \phi = 0^\circ \text{ vagy } \phi = 180^\circ$$

ekkor viszont a feladat szerint nem is hajtanánk fel a lemezt, vagy éppen teljesen visszahajtanánk. Bár ezzel is szélsőértéket kapunk, a minimumot, és így a terület 0 lenne.

A feladat miatt a koszinusz értékét az első negyedben nézzük, így a keresett szög:

$$\phi = 60^\circ$$

Most a megszorításba visszahelyettesítve a kapott értéket, kiszámolhatjuk x-et és y-t, sőt λ-t is.

$$g(x, y, \phi) = 2x + y - 27$$

$$2x + 2x(1 - \cos 60^\circ) = 27$$

$$2x + 2x \cdot \frac{1}{2} = 27$$

$$3x = 27$$

$$x = 9,\ y = 9$$

λ értékét a feladathoz nem fogjuk felhasználni, de (2.6)-ból ezt az értéket is megkapjuk:

$$9 \cdot \sin 60^\circ = \lambda$$
$$\frac{9\sqrt{3}}{2} = \lambda$$

Ha már dolgoztunk vele, számoljuk ki, mennyi lesz ez a maximális terület:

$$T = f(x, y, \phi) = (y + x \cdot \cos\phi) \cdot x \cdot \sin\phi$$

$$T = f(9, 9, 60^\circ) = (9 + 9 \cdot \cos 60^\circ) \cdot 9 \cdot \sin 60^\circ =$$
$$= (9 + 9 \cdot \frac{1}{2}) \cdot 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$
$$= \frac{27}{2} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{243\sqrt{3}}{4} \approx 105,222$$

A feladatra a válasz tehát az, hogy $x = 9$ és $\phi = 60^\circ$ értékek mellett lesz a vályú keresztmetszete maximális területű.

2.4. Feladat

Keressen három pozitív számot, melyek összege 48, és szorzata a lehető legnagyobb. Ez a feladat azért izgalmas, mert elsőre a szorzat és az összeg láttán egyből a mértani és a számtani közepekre, illetve az azok közötti összefüggésre gondolunk. Oldjuk meg először így.

Definíció: $n \in \mathbb{N}$ *darab pozitív szám* $(a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R})$ *aritmetikai, vagy számtani közepe:*

$$A(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

Definíció: $n \in \mathbb{N}$ *darab pozitív szám* $(a_1, a_2, \ldots, a_n > 0)$ *mértani közepe:*

$$G(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n}$$

Tétel: *Bármely* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, (n \in \mathbb{N})$ *nemnegatív valós számok esetén*

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

és egyenlőség csak abban az esetben áll fenn, ha $a_1 = \cdots = a_n$.

A mi feladatunkban 3 számot kell megadni:

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$$

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{48}{3} = 16$$

Már felhasználtuk, amit a keresett számok összegéről tudunk, feladatunk a szorzat maximalizálása. Mivel a maximális szorzatot keressük, és tudjuk, hogy a mértani közép kisebb vagy egyenlő a számtaninál, ezért nyilván ha a lehető legnagyobb a szorzat, akkor éppen az egyenlőség teljesül a két közép között. Ez pedig akkor lehetséges, ha mindhárom szám egyenlő, azaz $x = y = z$. Ekkor viszont:

$$\sqrt[3]{x^3} = 16$$

$$x = y = z = 16$$

Láttunk egy megolást, és most nézzük meg, hogy a Lagrange multiplikátor módszer segítségével is megkapjuk a végeredményt. A függvény, aminek a maximumát keressük, a szorzatfüggvény lesz, $f(x, y, z) = xyz$. Nem lehet azonban akármilyen nagy ez a szorzat, hiszen van még egy információnk, egy kikötés, miszerint $x + y + z = 48$. Ezt 0-ra rendezve felírhatjuk az alábbi g függvényt: $g(x, y, z) = x + y + z - 48 = 0$

Innentől alkalmazzuk a bemutatott módszert:

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$$

$$\nabla f(xyz) = \lambda \nabla g(x + y + z - 48)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yz = \lambda = \lambda\frac{\partial g}{\partial x} \tag{2.8}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = xz = \lambda = \lambda\frac{\partial g}{\partial y} \tag{2.9}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = xy = \lambda = \lambda\frac{\partial g}{\partial z} \tag{2.10}$$

Írjuk be a (2.8)-ban kifejezett λ-t a (2.9)-es egyenletbe:

$$yz = xz$$

$$z(y - x) = 0$$

1. eset: $z = 0$

Ekkor az egész keresett xyz szorzat 0 lenne, ami a minimális szorzatot adja.

2. eset: $y - x = 0 \Rightarrow y = x$

Helyettesítsünk (2.10)-be, mivel ott éppen ez a két ismeretlen van.

$$xy = x^2 = y^2 = \lambda$$

És most ezt (8)-ba:

$$yz = y^2$$

Mivel az $y = 0$ eredmény azonos lenne az 1. esettel, ezzel nyugodtan leoszthatunk.

$$z = y$$

Megkaptuk tehát, hogy

$$x = y = z$$

azaz a három számunk egyenlő lesz

$$3x = 48$$

$$x = 16$$

A szorzat értéke pedig $f(16, 16, 16) = 16^3 = 4096$.

3. fejezet

Több megszorítás egyszerre

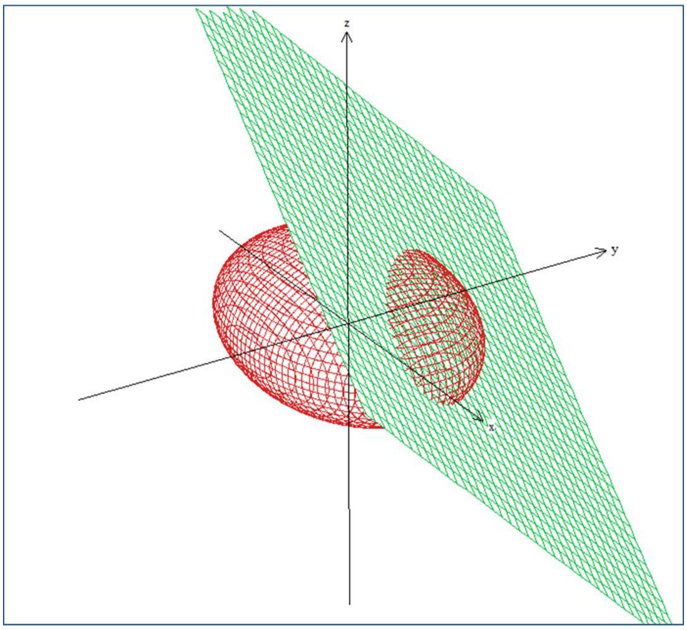
Ahogyan ezt már a dolgozat elején említettem, a Lagrange multiplikátor módszer nem csak egy megszorítással működik, hanem tetszőlegesen sok g_i korlátozó függvénnyel is dolgozhatunk. Ilyenkor, ha minden megszorítás teljesül (és nem kizáróak), akkor a megszorítások metszethalmazán lesz a keresett szélsőérték. Könnyen előfordulhat, hogy ez leegyszerűsödik, például ha az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és a g_i-k szintvonalai az (x, y) síkban fekvő görbék, amiknek csak véges sok metszéspontjuk van. Ezek ilyenkor könnyen ellenőrizhetők a szélsőértékek szempontjából. Sokkal érdekesebb (és persze a módszer is ilyenkor válik hasznossá), ha magasabb dimenziókban vagyunk. Legyenek $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $g_1, g_2, \ldots, g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(m < n)$ adott függvények. Legyen

$$H := \{x \in \mathbb{R}^n | g_1(x) = 0, g_2(x) = 0, \ldots, g_m(x) = 0\}$$

Tegyük fel, hogy $H \neq \varnothing$.

Definíció: *Az f függvénynek a $g_1(x) = 0,\ g_2(x) = 0, \ldots,\ g_m(x) = 0$ feltétel mellett feltételes szélsőértéke van a $P \in H$ pontban, ha a P pontban az $f_{|H}$ függvénynek lokális szélsőértéke van. [4]*

Egy alacsonyabb dimenzióban adott példával szemléltetjük a működést:



3.1. ábra.

A vizuális segítség hiánya miatt már nem ábrázolt f függvény szélsőértékét amellett a feltétel mellett keressük, hogy egyszerre legyen rajta a zöld $g(P) = 0$ síkon és a piros $h(P) = 0$ ellipszoidon is. Ez tehát az az eset, ahol két korlátozó alakzatunk van. Ahhoz, hogy mindkettő teljesüljön, a megoldásnak a két görbe által meghatározott metszésvonalon, a közös részükön kell lennie. Esetünkben ez egy sík és egy ellipszoid metszete, ellipszis lesz. Ekkor, ha mindkét görbéhez a metszésvonal mentén húzunk normálvektorokat, ezek páronként minden pontban merőlegesek lesznek a közös metszésvonalra. Sőt, minden, a metszésvonalra merőleges vektor felírható a két normálvektor lineáris kombinációjaként. Ha ez a két normálvektor lineárisan összefüggő, akkor lehet, hogy a két megszorítás egyből megoldást ad a szélsőértékre. Ebben az esetben például akkor, ha a g sík és a h ellipszoid pontosan egy pontban érinti egymást.

A számításaink általános esetben a következőképpen fognak alakulni:

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$$

Ezt a Lagrange függvény használatával is felírhatjuk:

$$L(P, \lambda) = f(x_1, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$$

Itt P egy $n+1$ dimenziós koordinátarendszer egy pontjának koordinátáit jelöli, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, λ_i-k pedig a megszorítások egyes Lagrange multiplikátorai. Annyit kell tehát változtatnunk, hogy az egyenlet jobb oldalán álló egy korlátozó függvényünk helyett a megszorító függvények egyenként különböző konstansszorosainak összegét írjuk be. A módszer innentől hasonló [5]:

$$\nabla f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x)$$

Ez az összes ismeretlen szerinti parciális deriválás után n darab egyenletet fog adni, amihez hozzájön az m darab λ_i szerinti parciális derivált is, azaz az összes $g_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$ megszorítás. Szükséges, hogy $\sum_i^m \alpha_i \nabla g_i(P) = 0$ egyenlet, ahol $P \in H$ csak $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$ konstansokra legyen megoldható, tehát a ∇g_i-k független rendszert alkossanak. Ezekkel a feltételekkel már egyértelműen megoldhatóvá válik az egyenletrendszerünk.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_n}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_1} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial \lambda_1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_2} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial \lambda_2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_m} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial \lambda_m}$$

A már ismertetett folyópartos feladatot három dimenzióban, két megszorítással vizsgálva, most A, B fókuszú ellipszoidokat kell néznünk, ahol állandó annak az összege, hogy egyik fókuszból a felszínre jutunk, majd vissza a másik fókuszba. A két dimenzióshoz hasonlóan, a 'jó' ellipszoidunk az lesz, ami érinti a két megszorítás metszetét, és következésképpen a normál vektora merőleges mindkét megszorításra. Ekkor ez a normál vektor felírható a két megszorító felület normálvektorainak, azaz gradienseinek lineáris kombinációjaként:

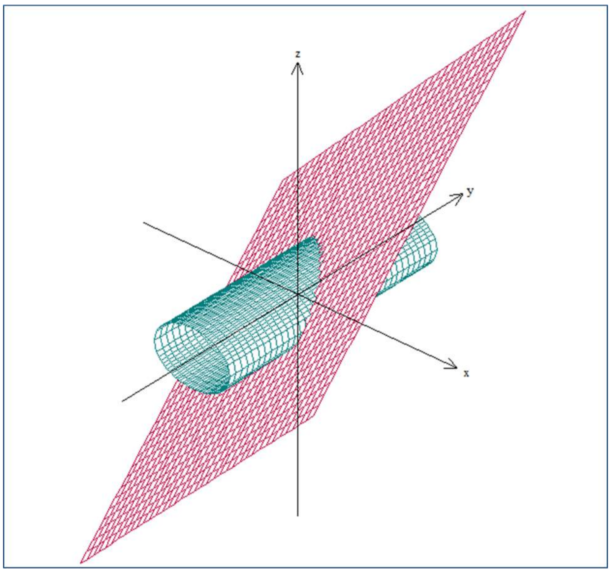
$$\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P) + \mu \nabla h(P)$$

A következő fejezetben egy konkrét feladaton keresztül mutatom be ezt az esetet.

4. fejezet

Feladatok II.

Keressük meg az $f(x, y, z) = 3x - y - 3z$ függvény szélsőértékeit az $x + y = z$ síkra és az $x^2 + 2z^2 = 1$ görbére korlátozva.



4.1. ábra.

Az ábrán látható sík és ellipszis alapú henger lesznek tehát a megszorításaink. A megoldás pedig a cső és a sík közös részén, egy ellipszisen lesz.

$$g(x, y, z) = x + y - z = 0$$

$$h(x, y, z) = x^2 + 2z^2 - 1 = 0$$

A megszorításunk tehát most kettő görbéből áll, így ezeket különböző multiplikátorokkal ellátva kell összeadni, és normálvektoraikat vizsgálni.

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z))$$

$$\nabla f(3x - y - 3z) = \lambda \nabla g(x + y - z) + \mu \nabla h(x^2 + 2z^2 - 1))$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3 = \lambda + 2\mu x = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} + \mu \frac{\partial h}{\partial x} \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -1 = \lambda = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} + \mu \frac{\partial h}{\partial y} \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -3 = -\lambda + 4\mu z = \lambda \frac{\partial g}{\partial z} + \mu \frac{\partial h}{\partial z} \tag{4.3}$$

Szerencsére (4.2)-ből lambda értékét egyből megkapjuk. Ezt (4.1)-be beírva kapjuk:

$$3 = -1 + 2\mu x$$

$$x = \frac{2}{\mu} \tag{4.4}$$

Műt beírva (4.3)-ből is könnyen kifejezhető z:

$$-3 = 1 + 4\mu z$$

$$z = -\frac{1}{\mu} \tag{4.5}$$

Most, hogy már két ismeretlent kifejeztünk, használjuk fel a h megszorítást, amiben éppen ezek a változók szerepelnek, hogy meghatározzuk μ értékét:

$$\left(\frac{2}{\mu}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{\mu}\right)^2 - 1 = 0$$
$$\frac{4}{\mu^2} + \frac{2}{\mu^2} - 1 = 0$$
$$4 + 2 - \mu^2 = 0$$
$$\mu^2 = 6$$
$$\mu = \pm\sqrt{6}$$

Két esetet kell innentől vizsgálnunk

1. eset: $\mu = \sqrt{6}$

(4.4)-be és (4.5)-be visszahelyettesítve könnyen megkapjuk x-et és z-t

$$x = \frac{2}{\sqrt{6}}$$
$$z = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

Most az eddig fel nem használt g felület egyenletébe helyettesítve y-t is megkapjuk:

$$y = -\frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} = -\frac{3}{\sqrt{6}}$$

2. eset: $\mu = -\sqrt{6}$

Ekkor az előzőhöz hasonlóan kapjuk x-et, y-t és z-t

$$x = -\frac{2}{\sqrt{6}}$$
$$y = \frac{3}{\sqrt{6}}$$
$$z = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

A két szélsőértéket tehát az alábbi pontokban veszi fel f:

$P_1(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{3}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$ és

$P_2(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{3}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$

Az ezekhez tartozó értékek pedig:

$f(P_1) = 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} - (-\frac{3}{\sqrt{6}}) - 3 \cdot (-\frac{1}{\sqrt{6}}) = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$

$f(P_2) = 3 \cdot (-\frac{2}{\sqrt{6}}) - \frac{3}{\sqrt{6}} - 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = -\frac{12}{\sqrt{6}} = -2\sqrt{6}$

Ezeket egymással összehasonlítva megállapíthatjuk, hogy a P_1 pontban f-nek maximuma lesz, míg P_2-ben f minimum értéket vesz fel.

5. fejezet

Záró gondolatok

A szakdolgozatom célja az volt, hogy megismertessem a Lagrange multiplikátor módszert, amit a matematikán kívül nagyon sok más területen alkalmaznak. Emellett remélem sikerült egy jó összefoglalót készítenem a témában magyar nyelven, ami később mások számára is hasznos lehet. A feladatok szintén a módszer gyakorlati alkalmazását hivatottak megkönnyíteni. Én mindenképpen közel kerültem ehhez a témához, már a mindennapjaimban is számos szituációhoz kreálok önkéntelenül feltételes szélsőértékes feladatokat.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném elsősorban megköszönni témavezetőmnek, Keszthelyi Gabriellának a segítségét és a támogatását, amivel végigkísért a munkám során. Köszönöm az együttműködést és a közös munkát.

Ezenkívül köszönöm a barátaimnak, akik mellettem álltak, és az utolsó pillanatig tartották bennem a lelket.

Köszönöm testvéremnek, hogy saját munkájával példát állítva nekem, a legjobb eredmény elérésére sarkallt. Illetve a szüleimnek, akiknek kitartó nevelése remélhetőleg meghozta gyümölcsét, és külön édesanyámnak, aki a kitartó templombajárással tesz meg értem minden tőle telhetőt.

Irodalomjegyzék

[1] Bussotti, P., *On the genesis of the Lagrange multipliers*, Journal of optimization theory and applications, 117.3, (2003): 453–459,

[2] http://www.slimy.com/~steuard/teaching/tutorials/Lagrange.html

[3] Klein, D., *Lagrange multipliers without permanent scarring*, University of California at Berkeley, Computer Science Division, (2004)

[4] Sikolya, E., http://www.cs.elte.hu/~seszter/oktatas/2008_09_2/BSc_mattanar_ea/Lagrange_multiplikator.pdf

[5] http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/0046_adatbanyaszat/apes02.html