

# Az inverzió és alkalmazásai

## Szakdolozat

Eötvös Lóránd Tudományegyetem,  
Természettudományi Kar

**Készítette:**  
Hutai Dániel Gábor

Matematika BSc,  
Tanári szakirány

**Témavezető:**  
Verhóczy László

Egyetemi docens,  
Geometriai Tanszék

Budapest,  
2016



# Tartalomjegyzék

<b>Előszó</b>	<b>2</b>
<b>1. Körökre vonatkozó fogalmak és állítások</b>	<b>3</b>
Pont körre vonatkozó hatványa . . . . .	3
Körök és egyenesek hajlásszöge . . . . .	6
<b>2. A síkbeli inverziók tárgyalása</b>	<b>10</b>
Egyenesek és körök inverz képei . . . . .	10
Az inverziók szögtartásának szintetikus tárgyalása . . . . .	14
<b>3. Az inverziók szögtartásának analitikus tárgyalása</b>	<b>18</b>
Az $\mathbb{R}^2$ -beli sima görbék . . . . .	18
Sima görbék transzformációval nyert képgörbéi . . . . .	19
Az $\mathbb{R}^2$ -beli inverzió szögtartása . . . . .	20
<b>4. A síkbeli inverzió alkalmazásai</b>	<b>22</b>
Steiner-féle körzáródás . . . . .	22
A Feuerbach-tétel bizonyítása inverzió alkalmazásával . . . . .	24
Mascheroni-féle szerkesztések . . . . .	27
<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>32</b>

## Előszó

Az inverzióról már középiskolás koromban hallottam. A gimnáziumban az egyik matematika órán esett róla szó, mint egy különleges geometriai transzformációról. Érdekes volt számomra, hogy egy kör képe egyenes is lehet, illetve egy egyenes képe is lehet kör. Később, az egyetemi tanulmányaim során kiderült, hogy az inverziók jól alkalmazhatóak nehezebb szerkesztési feladatok megoldásához, illetve előjönnek a hiperbolikus sík Poincaré-féle körmodelljének tárgyalása során is. Ezen okok miatt választottam a szakdolgozat témájaként.

Dolgozatom célja a síkbeli inverziók alapvető tulajdonságainak és alkalmazásainak tárgyalása. Ennek során törekedtem arra, hogy főként szintetikus eszközöket használjak.

Dolgozatom első fejezetében az inverziók tárgyalásához szükséges alapvető körgeometriai fogalmak és állítások leírására kerül sor. Ebben a részben bevezetem a pontok körre vonatkozó hatványának és két kör hatványvonalának fogalmát, mivel ezek fontos szerepet játszanak a továbbiakban. Értelmezni fogom két metsző kör hajlásszögét, továbbá megadom két kör merőlegességének egy szükséges és elégséges feltételét.

A második fejezetben részletesen tárgyalom a síkbeli inverzió tulajdonságait. Ennek során megmutatom, hogy a póluson nem átmenő egyenes inverz képe egy a póluson áthaladó kör. Kiderül, hogy a póluson nem átmenő kör inverz képe egy középpontos hasonlósággal nyert kör, ahol a hasonlóság centruma éppen a pólus. Belátom, hogy az alapkört derékszögben metsző egyeneseket és köröket az inverzió önmagába képezi. Megmutatom azt is, hogy két azonos pólusú inverzió szorzata egy középpontos hasonlóság. Az inverziók szögtartását előbb metsző egyenesekre és körökre bizonyítom be szintetikus eszközökkel. A harmadik fejezetben viszont differenciálgeometriai módszerek segítségével igazolom, hogy az inverziók nemcsak egyenesek és körök hajlásszögét őrzik meg, hanem két metsző görbe hajlásszögét is.

A negyedik fejezetben az inverzió három, érdekesebb alkalmazását vizsgálom meg. Először a körlánczáródási problémáról szóló Steiner-tételt igazolom inverzió segítségével. Ezt követően a háromszög Feuerbach-körének egy érdekes tulajdosságát tárgyalom. Bebizonyítom, hogy ez a kör érintkezik a háromszög beírt körével és a három hozzáírt körrel. Végül igazolom a Mohr-Mascheroni-tételt, amely kimondja, hogy a körzővel és vonalzóval végrehajtott szerkesztések végrehajthatóak pusztán a körző használatával. Ennek érdekében részletesen tárgyalom, hogy miként lehet megszerkeszteni pont, egyenes és kör inverz képét csupán körző alkalmazásával.

Szeretnék köszönetet nyilvánítani témavezetőmnek, Verhóczy Lászlónak, akitől munkám elkészítése során számos jó tanácsot, illetve segítséget kaptam mind a matematikában, mind pedig a  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  program használatában és saját idejét nem kímélve mindig időt szakított a kérdéseimre.

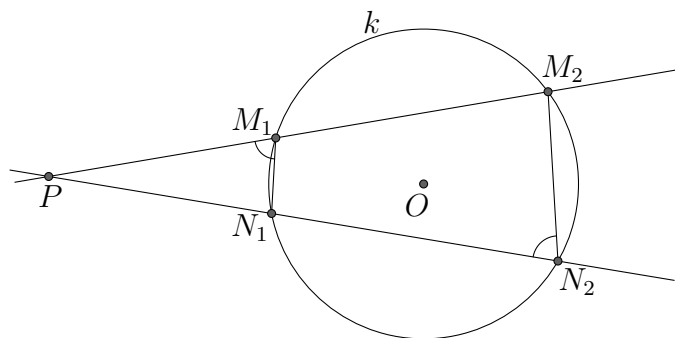
# 1. Körökre vonatkozó fogalmak és állítások

Ebben a fejezetben áttekintjük az inverzió tárgyalásához szükséges körgeometriai fogalmakat és összefüggéseket. Targyalásunkat mindvégig a tér egy rögzített  $\Sigma$  síkjában végezzük. Ha  $A$  és  $B$  a sík két pontja, akkor  $AB$  fogja jelölni a két pontot összekötő szakaszt és egyúttal a szakasz hosszát is. Azt az irányított szakaszt, melynek kezdőpontja  $A$  és végpontja  $B$  az  $\overrightarrow{AB}$  szimbólum fogja jelölni.

## Pont körre vonatkozó hatványa

A hatvány fogalmának értelmezéséhez szükség van a következő állításra:

**1.1. Állítás:** Legyen adva a síkon egy  $O$  középpontú és  $r$  sugarú  $k$  kör, továbbá egy  $P$  pont a körön kívül. Húzzunk a  $P$ -n át két tetszőleges szelőt a körhöz, melyeknek a körrel vett metszéspontjai legyenek  $M_1, M_2$ , illetve  $N_1$  és  $N_2$ . Ekkor a szakaszok hosszaira fennáll a következő egyenlőség:  $PM_1 \cdot PM_2 = PN_1 \cdot PN_2$ .

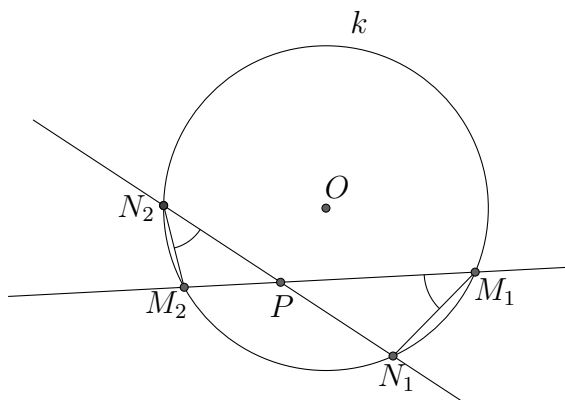


Külső ponton átmenő szelők.

**Bizonyítás:** Az első egyenes messe a kört az  $M_1, M_2$  pontokban, a második pedig az  $N_1, N_2$  pontokban. Tekintsük a mellékelt ábrát. Mivel az  $N_1M_1M_2N_2$  négyszög egy húrnégyszög, a  $PM_1N_1 \sphericalangle$  szög megegyezik a  $PN_2M_2 \sphericalangle$  szöggel. A  $PN_1M_1\Delta$  és  $PM_2N_2\Delta$  háromszögek hasonlóak, hiszen szögeik páronként egyenlők. A háromszögek hasonlóságából következik a megfelelő oldalak arányainak egyenlősége:  $\frac{PM_1}{PN_1} = \frac{PN_2}{PM_2}$ . Emiatt fennáll  $PM_1 \cdot PM_2 = PN_1 \cdot PN_2$ . Ezzel beláttuk, hogy tetszőleges  $P$  külső pont esetén bármely szelőn a szelőszakaszok hosszainak szorzata állandó.  $\square$

**Megjegyzés:** Az állítás akkor is igaz, ha a  $P$  pont a körön belül van. Vegyünk a  $k$  kör belsejében egy tetszőleges  $P$  pontot és húzzunk rajta két szelőt. Ezek metszéspontjai  $k$ -val legyenek  $M_1, M_2, N_1$  és  $N_2$ .

Ekkor  $PN_1M_1\Delta$  és  $PM_2N_2\Delta$  háromszögek hasonlóak ugyanis a  $P$ -nél lévő szögük megegyezik, továbbá a kerületi és középponti szögek tétele miatt  $PM_1N_1 \sphericalangle$  és  $PN_2M_2 \sphericalangle$  szögek is egyenlők. Tehát itt is felírható az oldalarányokra vonatkozó egyenlőség:  $\frac{PN_1}{PM_1} = \frac{PM_2}{PN_2}$ . Amiből  $PM_1 \cdot PM_2 = PN_1 \cdot PN_2$  következik.



*Belső ponton átmenő szelők.*

**1.2. Definíció:** Legyen adott a síkon egy  $O$  középpontú és  $r$  sugarú  $k$  kör, továbbá egy tetszőleges  $P$  pont. Ekkor a  $P$  pont  $k$  körre vonatkozó hatványán az  $OP^2 - r^2$  számot értjük. A hatvány jelölése:  $h_k(P) = OP^2 - r^2$ .

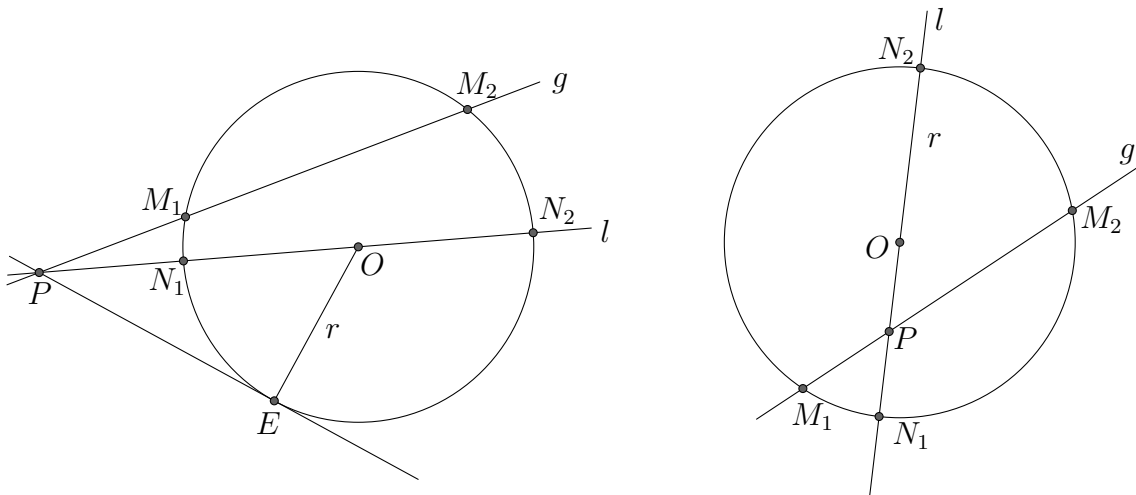
A definícióból látszik, hogy  $h_k(P)$  előjele megmutatja  $P$  helyzetét  $k$ -hoz képest. Ha  $h_k(P)$  pozitív, akkor  $P$  a  $k$  körön kívül van, ha negatív, akkor a belsejében, és ha nulla, akkor a körön van.

**Megjegyzés:** Egy egyenesen úgy tudunk megadni egy irányítást, ha kijelölünk egy az egyenesre eső irányított szakaszt. Két irányított szakasz akkor képviseli ugyanazt az irányítást, ha az irányuk megegyezik. Az irányítás megadását követően az egyenes tetszőleges irányított szakaszához előjeles hosszat tudunk rendelni. Vegyünk egy irányított  $g$  egyenesen egy  $\overrightarrow{AB}$  irányított szakaszt. Ha  $\overrightarrow{AB}$  az egyenesen vett irányítást képviseli, akkor az előjeles hossza  $AB$ . Amennyiben  $\overrightarrow{AB}$  iránya ellentétes az egyenesen vett irányítással, akkor előjeles hossza  $-AB$ .

**1.3. Állítás:** Legyen adott egy  $O$  középpontú  $r$  sugarú  $k$  kör, továbbá egy tetszőleges  $P$  pont a síkon. Tekintsünk egy a  $P$  ponton átmenő  $g$  szelőegyenest, amely az  $M_1, M_2$  pontokban metszi a kört. Ekkor a  $\overrightarrow{PM_1}, \overrightarrow{PM_2}$  irányított szakaszok előjeles hosszainak szorzata éppen a  $P$  pont  $k$  körre vonatkozó hatványával egyenlő.

Ha egy  $P$  külső pontból érintőt húzunk  $k$ -hoz, amely az  $E$  pontban érinti a kört, akkor a  $PE$  érintőszakasz négyzete a  $P$  pont  $k$  körre vonatkozó hatványával lesz egyenlő.

**Bizonyítás:** Vegyük azt a  $P$ -n átmenő  $l$  egyenest, amely áthalad a  $k$  kör  $O$  centrumán is. Messe el ez az  $l$  egyenes a  $k$  kört az  $N_1, N_2$  pontokban. Tekintsük a mellékelt ábrát. Az  $l$  egyenesen vegyük azt az irányítást, amelyet a  $\overrightarrow{PN_2}$  irányított szakasz képvisel. Ekkor a  $\overrightarrow{PN_1}, \overrightarrow{PN_2}$  irányított szakaszok előjeles hosszaira a  $PN_1 = OP - r$  és  $PN_2 = OP + r$  értékeket kapjuk. Ezek szorzatára pedig fennáll  $PN_1 \cdot PN_2 = OP^2 - r^2$ , ami megegyezik a  $h_k(P)$  hatvánnyal. Az 1.1. Állításból és azt követő Megjegyzésből már következik, hogy a  $\overrightarrow{PM_1}, \overrightarrow{PM_2}$  irányított szakaszok előjeles hosszainak szorzata ugyancsak a  $h_k(P) = OP^2 - r^2$  hatvánnyal egyenlő.



Szemléltető ábra a bizonyításhoz.

Igazoljuk most az állítást érintő vonatkozásában. Húzzunk a  $P$  külső pontból érintőt  $k$ -hoz, ami a kört az  $E$  pontban érinti. A  $POE_\Delta$  derékszögű háromszögre alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt. Eszerint a érintőszakasz hoszának a négyzetére fennáll  $PE^2 = OP^2 - OE^2 = OP^2 - r^2$ , tehát  $PE^2$  megegyezik a  $P$  pont  $k$  körre vonatkozó hatványával.  $\square$

Továbbiakban felmerülhet a kérdés, hogy ha adott két kör  $k_1$  és  $k_2$  a  $\Sigma$  síkon, akkor hol helyezkednek el azok a síkbeli pontok, amelyeknek a  $k_1$ ,  $k_2$  körökre vonatkozó hatványaik egyenlők.

Ha a két kör koncentrikus, de különböző sugarú, akkor ilyen pont nem létezik. Legyen  $k_1$  és  $k_2$  középpontja  $O$ , sugaraik rendre  $r_1$  és  $r_2$  ( $r_1 \neq r_2$ ). Ekkor  $OP^2 - r_1^2 = OP^2 - r_2^2$  kellene, hogy teljesüljön, ami nem lehetséges.

Vezessünk be a  $\Sigma$  síkon egy derékszögű koordináta-rendszert. Legyen a koordináta-rendszer kezdőpontja  $O$ , alapvektorai pedig a síkbeli  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  ortonormált vektorok. Tekintsük a  $\Sigma$  sík egy tetszőleges  $P$  pontját és annak  $\overrightarrow{OP}$  helyvektorát. Ezt egyértelműen lehet kifejezni az  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  alapvektorok lineáris kombinációjaként az  $\overrightarrow{OP} = x_P \mathbf{i} + y_P \mathbf{j}$  alakban. A lineáris kombinációban szereplő  $x_P$ ,  $y_P$  számok a  $P$  pont koordinátái az adott koordináta-rendszerben. Ezt a  $P(x_P, y_P)$  kifejezéssel szokás jelölni. Ha bármely  $\Sigma$ -beli  $P$  ponthoz a koordinátából képzett  $(x_P, y_P)$  számpárt rendeljük, akkor egy bijektív megfeleltetést kapunk a  $\Sigma$  sík pontjai és a valós számpárok  $\mathbb{R}^2$  terének elemei között.

**1.4. Tétel:** Legyen adott a síkon két nem koncentrikus kör  $k_1$  és  $k_2$ , melyek középpontjai rendre  $C_1$  és  $C_2$ , sugaraik pedig  $r_1$  és  $r_2$ . Ekkor az  $\mathcal{A} = \{P \in \Sigma : h_{k_1}(P) = h_{k_2}(P)\}$  ponthalmaz egy egyenes, amely merőleges a  $C_1$ ,  $C_2$  centrumokra illeszkedő egyenesre.

**Bizonyítás:** A körök középpontjainak koordinátái legyenek  $C_1(u_1, v_1)$  és  $C_2(u_2, v_2)$ . Ismeretes, hogy ekkor  $k_1$ ,  $k_2$  a körök normálegyenletei:

$$\begin{aligned} (x - u_1)^2 + (y - v_1)^2 - r_1^2 &= 0, \\ (x - u_2)^2 + (y - v_2)^2 - r_2^2 &= 0. \end{aligned}$$

Eszerint egy  $P$  pont akkor van rajta a  $k_1$  körön, ha koordinátái kielégítik az első egyenletet. A körök normálegyenletei alapján vezessük most be a  $K_1, K_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  kétváltozós függvényeket, melyekre fennáll

$$\begin{aligned} K_1(x, y) &= (x - u_1)^2 + (y - v_1)^2 - r_1^2, \\ K_2(x, y) &= (x - u_2)^2 + (y - v_2)^2 - r_2^2. \end{aligned}$$

Eszerint a két kört a  $K_1(x, y) = 0, K_2(x, y) = 0$  egyenletek írják le. Tekintsünk a síkban egy  $P(x_P, y_P)$  pontot. Világos, hogy a  $\overrightarrow{C_1P}$  vektorra fennáll  $\overrightarrow{C_1P} = (x_P - u_1)\mathbf{i} + (y_P - v_1)\mathbf{j}$ . Emiatt teljesül  $C_1P^2 = (x_P - u_1)^2 + (y_P - v_1)^2$ . Ily módon azt kapjuk, hogy a  $K_1$  függvényre fennáll

$$K_1(x_P, y_P) = (x_P - u_1)^2 + (y_P - v_1)^2 - r_1^2 = C_1P^2 - r_1^2 = h_{k_1}(P)$$

Hasonlóan adódik, hogy igaz  $K_2(x_P, y_P) = h_{k_2}(P)$ . Eszerint egy  $P$  pontnak a két körre vonatkozó hatványa pontosan akkor egyenlő, ha teljesül  $K_1(x_P, y_P) - K_2(x_P, y_P) = 0$ . A fentiek alapján az  $\mathcal{A} = \{P \in \Sigma : h_{k_1}(P) = h_{k_2}(P)\}$  alakzatot azon pontok alkotják, melyek koordinátái kielégítik a  $K_1(x, y) - K_2(x, y) = 0$  egyenletet. Egyszerű számolással adódik, hogy fennáll

$$K_1(x, y) - K_2(x, y) = 2(u_2 - u_1)x + 2(v_2 - v_1)y + u_1^2 + v_1^2 - u_2^2 - v_2^2 - r_1^2 + r_2^2.$$

Eszerint az  $\mathcal{A}$  alakzatot a

$$2(u_2 - u_1)x + 2(v_2 - v_1)y + u_1^2 + v_1^2 - u_2^2 - v_2^2 - r_1^2 + r_2^2 = 0$$

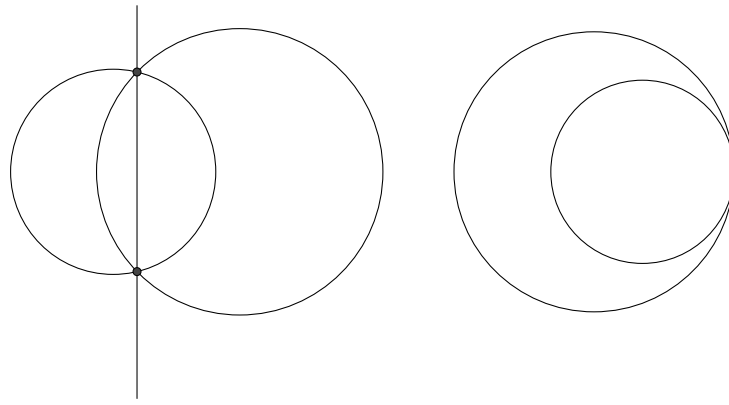
lineáris egyenlet írja le. Az analitikus geometriából pedig ismeretes, hogy ez egy olyan egyenes egyenlete, melynek a  $2(u_2 - u_1)\mathbf{i} + 2(v_2 - v_1)\mathbf{j}$  vektor az egyik normálvektora. Azonban ez megegyezik a  $2\overrightarrow{C_1C_2}$  vektorral. Ezzel pedig beláttuk, hogy az  $\mathcal{A}$  alakzat egy olyan egyenes, amely merőleges a  $C_1, C_2$  centrumok egyenesére.  $\square$

Az előző tétel alapján már bevezethetjük a hatványvonal fogalmát.

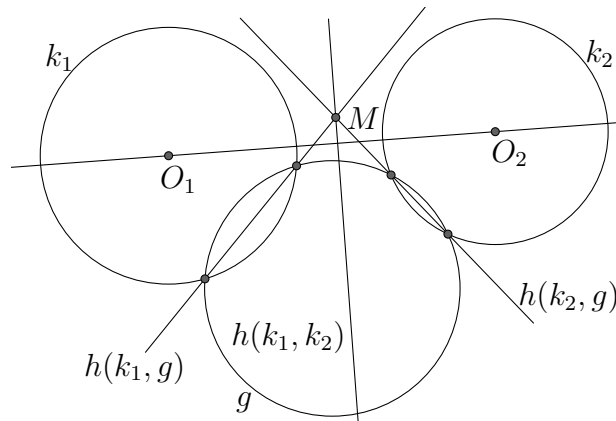
**1.5. Definíció:** Legyenek adva a  $\Sigma$  síkban a  $k_1, k_2$  körök, melyek nem koncentrikusak. A két kör hatványvonalán a  $h(k_1, k_2) = \{P \in \Sigma : h_{k_1}(P) = h_{k_2}(P)\}$  egyenest értjük.

A tétel segítségével egyszerű módszer adható két nem koncentrikus kör hatványvonalának a megszerkesztésére. Elsőként két metsző kör hatványvonalát adjuk meg. A metszéspontok rajta vannak a hatványvonalon, mivel mindkét körre vonatkozó hatványaik nullák és a hatványvonal egy egyenes, ezért a metsző körök hatványvonala megegyezik a metszéspontok által meghatározott egyenessel. Érintkező körök esetén a keresett egyenes a körök közös érintője lesz. A közös pont hatványa az érintkező körökre nézve nulla és a hatványvonal merőleges a körök középpontjai által meghatározott egyenesre. Ezeknek a feltételeknek csak a közös érintő tesz eleget.

Közös ponttal nem rendelkező körök esetén egy segédkört alkalmazunk a hatványvonal megtalálásához. Legyen adott a síkon két kör  $k_1$  és  $k_2$ , középpontjaik rendre  $O_1$  és  $O_2$ . Vegyünk fel egy  $g$  segédkört úgy, hogy az messe  $k_1$  és  $k_2$  köröket és középpontja ne illeszkedjen a körök középpontjainak az egyenesére. Tekintsük  $h(k_1, g)$  és  $h(k_2, g)$  hatványvonalakat. Ezek metszéspontja legyen  $M$ . Ekkor  $M$  egy olyan pont, aminek  $k_1$  és  $k_2$  körökre vonatkozó hatványa megegyezik, ezért rajta van  $h(k_1, k_2)$  egyenesen, amiről tudjuk, hogy merőleges az  $O_1$  és  $O_2$  centrumok egyenesére. Ezek a feltételek egyértelműen meghatározzák a  $h(k_1, k_2)$  egyenest.



*Metsző és érintkező körök hatványvonala.*



*Közös ponttal nem rendelkező körök hatványvonala.*

## Körök és egyenesek hajlásszöge

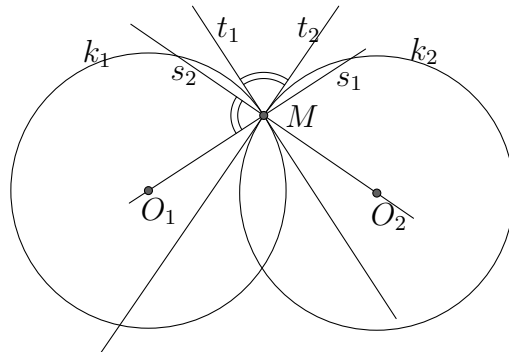
A körgeometriai foglamakhoz még szükséges áttekintenünk a körök és egyenesek hajlásszögével kapcsolatos fogalmakat és állításokat.

**1.6. Definíció:** Két metsző kör hajlásszögén a metszéspontjukba húzott érintő egyenesek hajlásszögét értjük. Egymást metsző kör és egyenes hajlásszögén az egyenesnek és a kör metszéspontjában húzott érintőnek a szögét értjük.

**1.7. Állítás:** Legyen adott két metsző kör a síkon  $k_1$  és  $k_2$ , középpontjaik rendre  $O_1$  és  $O_2$  és metszéspontjuk  $M$ . Ekkor az  $O_1$ -ből és  $O_2$ -ből az  $M$ -be húzott sugáregyenesek hajlásszöge megegyeztik a körök  $M$ -beli érintőinek a hajlásszögével.

**Bizonyítás:** Legyen az  $O_1$ -ből induló sugáregyenes  $s_1$  és az  $O_2$ -ből induló  $s_2$ , továbbá  $k_1$  és  $k_2$   $M$ -beli érintője rendre  $t_1$  és  $t_2$ . Tudjuk, hogy  $s_1, t_1$  és  $s_2, t_2$  merőleges egyenespárok. Tehát az  $s_1$  és  $s_2$  metsző egyenespár  $90^\circ$ -os elforgatottja  $M$ -körül éppen  $t_1$  és  $t_2$ , vagyis a sugáregyenesek hajlásszöge megegyezik az érintők hajlásszögével.  $\square$



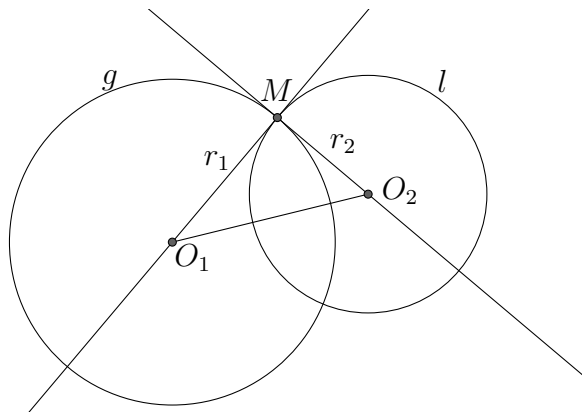


*Metsző körök hajlásszöge.*

Az eddigiek alapján kimondhatjuk azt az tételt, ami kapcsolatot teremt a körök merőlegessége és a hatvány fogalma között.

**1.8. Tétel:** *Legyen adott a síkon két kör  $g$  és  $l$ , melyek középpontjaik rendre  $O_1$  és  $O_2$ , sugaraik  $r_1$  és  $r_2$ . A két kör akkor és csak akkor metszi egymást derékszögben, ha az alábbi feltételek egyike teljesül:*

- i)  $r_1^2 + r_2^2 = (O_1O_2)^2$ .*
- ii)  $h_l(O_1) = r_1^2$ .*
- iii)  $h_g(O_2) = r_2^2$ .*



*Egymást derékszögben metsző körök.*

**Bizonyítás:** Elsőként mutassuk meg, hogy a körök merőlegességéből következnek a feltételek. Ha  $g$  és  $l$  derékszögben metszi egymást egy  $M$  pontban, akkor az előző állítás értelmében az  $O_1$ -ből és  $O_2$ -ből az  $M$ -be húzott sugáregyenesek egyben érintők is. Tekintsük az  $O_1MO_2\Delta$  derékszögű háromszöget és alkalmazzuk rá a Pitagorasz-tételt. Eszerint fennáll  $(O_1M)^2 + (MO_2)^2 = (O_1O_2)^2$ , azaz  $r_1^2 + r_2^2 = (O_1O_2)^2$ , ami éppen az *i*) feltétel.

Az  $i$ )ből már következik  $ii$ ) és  $iii$ )-is. Az  $(O_1O_2)^2 = r_1^2 + r_2^2$  egyenlőségből kivonunk  $r_2^2$ -et, akkor azt kapjuk, hogy  $(O_1O_2)^2 - r_2^2 = r_1^2$ , ahol  $(O_1O_2)^2 - r_2^2$  definíció szerint a  $h_l(O_1)$  hatvánnyal egyenlő. Így a  $h_l(O_1) = r_1^2$  egyenlőséget kapjuk, ami a  $ii$ ) feltétel. (Az  $iii$ ) hasonlóan adódik.) Ezzel azt is megmutattuk, hogy a három feltétel ekvivalens.

Most mutassuk meg, hogy a feltételekből következik, hogy a körök derékszögben metszik egymást. Induljunk ki  $i$ )-ből. Ha tudnánk, hogy a körök metszőek, akkor a Pitagorasztétel megfordításából következne a körök merőlegessége így elsőként ezt kell belátnunk. Az  $i$ ) feltételből alapján felírható a következő egyenlőtlenség:

$$(r_1 - r_2)^2 < (O_1O_2)^2 < (r_1 + r_2)^2, \quad \text{amiből} \\ |r_1 - r_2| < O_1O_2 < r_1 + r_2 \quad \text{következik.}$$

Eszerint a  $k_1$ ,  $k_2$  körök metszik egymást. Jelölje  $M$  az egyik metszéspontot. A Pitagorasztétel megfordítását az  $O_1M = r_1$ ,  $MO_2 = r_2$  és  $(O_1O_2)$  oldalú háromszögre alkalmazva megkapjuk a körök merőlegességét.  $\square$

## 2. A síkbeli inverziók tárgyalása

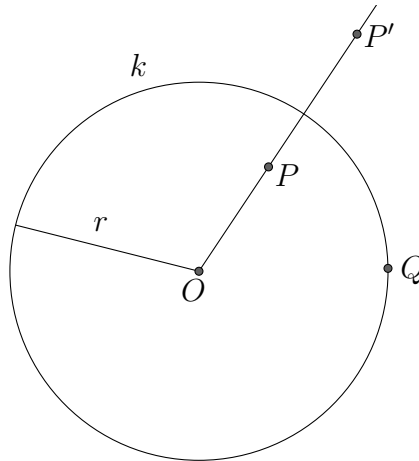
Ebben a fejezetben a síkbeli inverzióval kapcsolatos fogalmakat és állításokat fogjuk tárgyalni, amiket a későbbiekben felhasználunk majd az alkalmazásoknál. A tárgyalás továbbra is a tér egy rögzített  $\Sigma$  síkjában történik.

Legyen adott a síkon egy  $O$  centrumú,  $r$  sugarú  $k$  kör. Az alábbiak során értelmezzük a  $k$  körre vonatkozó  $\iota_k$  inverziót, ami a  $\Sigma \setminus \{O\}$  lyukas síkot képezi önmagára.

**2.1. Definíció:** A  $k$  körre vonatkozó inverzió azt a  $\iota_k : \Sigma \setminus \{O\} \rightarrow \Sigma \setminus \{O\}$  leképezést értjük, amely a sík tetszőleges  $P \neq O$  pontjához azon  $P' = \iota_k(P)$  pontot rendeli, amelyre teljesülnek az alábbi feltételek:

- (1) A  $P'$  képpont az  $OP$  félegyenesen van.
- (2) A  $P'$  pont  $O$ -tól mért távolságára fennáll az  $OP \cdot OP' = r^2$  egyenlőség.

Világos, hogy a fenti (1), (2) feltételek egyértelműen meghatározzák a  $P'$  képpontot. A  $k$  kört az inverzió alapkörének, az  $O$  pontot az inverzió pólusának,  $r$ -t az inverzió sugarának és  $r^2$ -et az inverzió hatványának mondjuk. A  $P' = \iota_k(P)$  pontot a  $P$  pont inverzének nevezzük.



*Egy  $P$  pont inverz képe.*

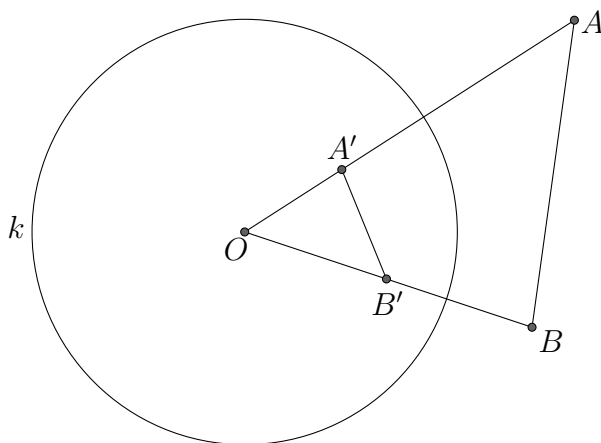
### Megjegyzés:

- A kör külső pontjainak az inverze belső pont és fordítva.
- Az alapkör pontjai az inverziónál fixen maradnak.
- Az inverziók bijektív leképezések.
- $\iota_k \circ \iota_k = id \Rightarrow \iota_k = \iota_k^{-1}$ . Innen ered a transzformáció elnevezése.
- A definícióból adódik, hogy a  $\iota_k$  inverziónál egy tetszőleges  $P$  pont  $P'$  képének az  $O$  pólusra vonatkozó helyvektora előáll az  $\overrightarrow{OP'} = \frac{r^2}{OP^2} \overrightarrow{OP}$  alakban.

## Egyenesek és körök inverz képei

A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy milyen alakzatok lesznek a síkbeli egyenesek és körök az inverzióval nyert képei. Mivel az inverzióknál a pólusnak nincs képe, ezért a továbbiakban minden alakzatot, amely tartalmazza a pólust, úgy fogunk kezelni, mint ha a pólus nem tartozna hozzá (azaz lyukas alakzatként kezeljük). Elsőként egyenesek inverzeit vizsgáljuk. Ehhez azonban szükségünk lesz a következő lemmára.

**2.2. Lemma:** *Legyen adott a síkon egy  $k$  kör, aminek sugara  $r$  és középpontja  $O$ . Vegyünk a síkon olyan  $A$  és  $B$  pontokat, hogy  $O$ ,  $A$  és  $B$  nem kollineárisak. Legyenek  $A'$  és  $B'$  rendre az  $A$  és  $B$  pontok  $k$  körre vonatkozó inverzei. Ekkor az  $OA'B'_\Delta$  háromszög hasonló az  $OBA_\Delta$  háromszöghöz.*



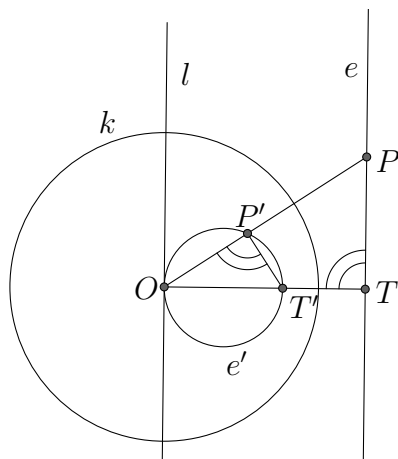
*Szemléltető ábra a 2.2. Lemmához.*

**Bizonyítás:** Az említett két háromszögben az  $O$ -nál lévő szöge közös. Az inverzió definíciója alapján fennáll az  $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = r^2$  összefüggés. Ebből pedig következik az oldalarányok egyenlősége:  $\frac{OA'}{OB'} = \frac{OB}{OA}$ . Ezzel beláttuk, hogy a két háromszög hasonló. Továbbá az is igaz, hogy  $AA'B'B$  négyszög húrnégyszög a húrnégyszög-tétel következtében.  $\square$

Legyen adott a síkon egy  $O$  középpontú,  $r$  sugarú  $k$  kör. Az alábbi tétel azt írja le, hogy a  $\iota_k$  inverzióknál mik lesznek a síkbeli egyenesek képei.

### 2.3. Tétel:

- i)* Ha egy  $e$  egyenes áthalad az  $O$  póluson, akkor annak  $e' = \iota_k(e)$  inverz képe maga az  $e$  egyenes.
- ii)* Legyen adott egy olyan  $e$  egyenes a síkon, amely nem halad át  $O$  póluson. Ekkor az  $e' = \iota_k(e)$  képalakzat egy  $O$ -n átmenő kör, amelynek a pólusbeli érintője párhuzamos az  $e$  egyenessel.



Egy póluson át nem menő  $e$  egyenes inverz képe.

**Bizonyítás:**

- i)* Az inverzió definíciójából következik, hogy az  $O$ -n átmenő lyukas egyenes pontjainak inverzei rajta vannak magán a lyukas egyenesen.
- ii)* Bocsássunk  $O$ -ból merőlegest  $e$ -re, aminek talppontja legyen  $T$ . Továbbá vegyünk fel az  $e$  egyenesen egy  $T$ -től különböző tetszőleges pontot,  $P$ -t. Ezek inverzei  $k$ -ra nézve rendre  $T'$  és  $P'$ . Alkalmazzuk a lemmát  $T$ ,  $P$ , és  $T'$ ,  $P'$  pontokra. A  $TP'T'P$  négyszög húrnégyszög, tehát a  $OTP \sphericalangle$  szög (ami derékszög) egyenlő  $T'P'O \sphericalangle$  szöggel. Tehát tetszőleges  $P$  pont esetén az  $OT'$  szakasz mindig derékszög alatt látszik  $P'$  pontból. A Thalesz-tétel megfordítása miatt  $P'$  rajta van az  $OT'$ -re emelt Thalesz-körön. Ebből adódik, hogy ez Thalesz-kör lesz az  $e$  inverz képe.

Legyen  $l$  egyenes az  $e'$  kör  $O$ -beli érintője. Az  $O$  és  $T$  pontokra illeszkedő egyenes (ami  $e'$  egy átmérő egyenes) egyszerre merőleges  $e$ -re (mert eleve így vettük fel a  $T$  pontot) és  $l$ -re is (mert  $l$  érintő, ami merőleges az érintési pontba húzott átmérő egyenesre). Ebből következik  $l$  és  $e$  párhuzamossága.

□

Most vizsgáljuk meg, hogy mik lesznek a körök inverz képei. A továbbiakban is az  $O$  középpontú,  $r$  sugarú  $k$  kör lesz a tekintett  $\iota_k$  inverzió alapköre.

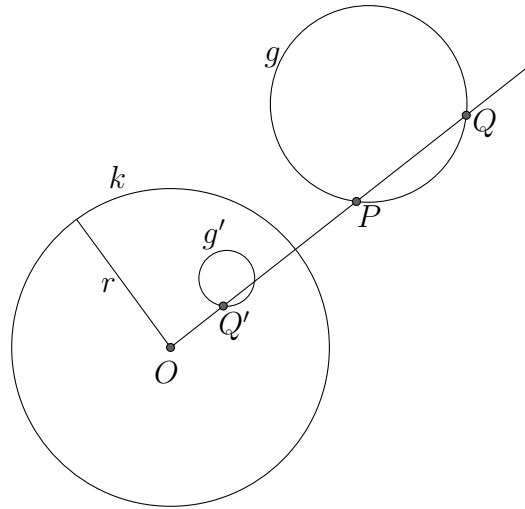
**2.4. Tétel:**

- i)* Legyen adott egy  $g$  kör, amely áthalad az inverzió  $O$  pólusán. Ekkor  $g' = \iota_k(g)$  egy  $O$ -n át nem menő egyenes, ami párhuzamos a  $g$  kör  $O$ -beli érintőjével.
- ii)* Ha  $g$  egy olyan kör, amely nem halad át  $O$ -n, akkor  $g' = \iota_k(g)$  szintén egy olyan kör, amely nem halad át az  $O$  póluson.

**Bizonyítás:**

- i)* Az előző tétel *ii)* esetéből és az inverzió definíciójából következik ez az eset.

- ii) Vegyük az  $O$  pontnak a  $g$  körre vonatkozó  $h_g(O)$  hatványát. Mivel  $O$  nincs rajta a  $g$  körön, fennáll  $h_g(O) \neq 0$ . Tekintsük a síkban azt a  $\kappa$  középpontos hasonlóságot, amelynek centruma  $O$  és előjeles aránya  $\lambda = \frac{r^2}{h_g(O)}$ . Világos, hogy ez a középpontos hasonlóság a  $g$  kört egy körbe képezi. Azt szeretnénk belátni, hogy a  $\kappa$  középpontos hasonlósággal nyert  $\kappa(g)$  kör megegyezik  $g$ -nek a  $g' = \iota_k(g)$  inverz képével.
- Legyen  $Q$  tetszőleges pontja  $g$ -nek.  $Q$ -nak a  $\iota_k$  szerinti inverz képét jelölje  $Q'$ . Ismeretes, hogy a  $Q'$  pont helyvektorára fennáll  $\overrightarrow{OQ'} = \frac{r^2}{OQ^2} \overrightarrow{OQ}$ . Legyen  $P$  az  $OQ$  egyenes és  $g$  ( $Q$ -től különböző) másik metszéspontja. (Lásd a mellékelt ábrát.)



*Egy póluson át nem menő  $g$  kör inverz képe ( $h_g(O) > 0$  eset).*

Világos, hogy az  $\overrightarrow{OQ}$ ,  $\overrightarrow{OP}$  irányított szakaszok előjeles hosszainak szorzata éppen a  $h_g(O)$  hatvány. Emiatt ezekre a vektorokra fennáll az  $\overrightarrow{OP} = \frac{h_g(O)}{OQ^2} \overrightarrow{OQ}$  egyenlőség. Tekintsük most  $P$ -nek a  $\kappa$  hasonlósággal nyert  $P'' = \kappa(P)$  képét. Erre nyilván teljesül  $\overrightarrow{OP''} = \lambda \cdot \overrightarrow{OP} = \frac{r^2}{h_g(O)} \overrightarrow{OP}$ . A fenti két összefüggésből már adódik, hogy igaz

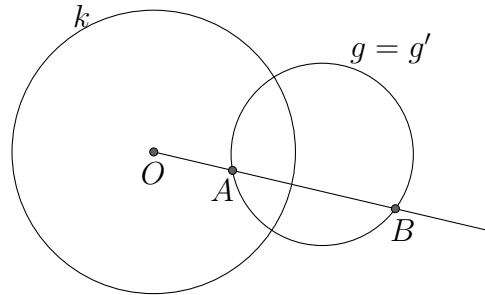
$$\overrightarrow{OP''} = \frac{r^2}{h_g(O)} \cdot \frac{h_g(O)}{OQ^2} \overrightarrow{OQ} = \frac{r^2}{OQ^2} \overrightarrow{OQ}.$$

Ez pedig azt mutatja, hogy a  $P''$  pont éppen a  $Q$  pont inverz képe. Ezzel beláttuk, hogy a  $g$  kör tetszőleges  $Q$  pontjának inverz képe rajta van a középpontos hasonlósággal nyert  $\kappa(g)$  körön. Ez pedig azt igazolja, hogy  $g$  kör  $g' = \iota(g)$  inverz képe megegyezik a  $\kappa(g)$  körrel.

□

Az inverzió pólusán áthaladó (lyukas) egyenesekről láttuk, hogy önmaguk inverzei. Felmerülhet a kérdés, hogy vannak-e olyan körök, amelyek önmagukba képződnek az inverzió során.

**2.5. Állítás:** *Adott a síkon egy  $O$  középpontú,  $r$  sugarú  $k$  kör. A  $k$ -ra merőleges körök inverzei önmaguk.*



*Az alapkörre merőleges kör inverz képe önmaga.*

**Bizonyítás:** Vegyünk egy  $k$ -ra merőleges  $g$  kört. Indítsunk  $O$ -ból egy tetszőleges félegyenest úgy, hogy az messe  $g$ -t. Az így keletkezett metszéspontok  $A$  és  $B$ . A hatvány definíciójából tudjuk, hogy  $h_g(O) = OA \cdot OB$  ( $h_g(O)$  az  $O$ -ból  $g$ -hez húzott szelőkön megjelenő szakaszok előjeles hosszainak a szorzata). A merőleges körök hatvánnyal való jellemzésénél már láttuk, hogy  $h_g(O) = r^2$ . Tehát igaz, hogy:  $OA \cdot OB = r^2$ . Ez azt jelenti, hogy  $A$  és  $B$  egymás inverzei. Ebből az következik, hogy a  $k$ -ra történő inverzió során  $g$  minden pontja  $g$  egy pontjába megy. Ha  $O$ -ból érintőt húzunk  $g$ -hez, akkor épp  $k$  és  $g$  metszéspontjait kapjuk, amik az inverziónál fixen maradnak. Tehát  $g$  önmaga inverze.  $\square$

## Az inverziók szögtartásának szintetikus tárgyalása

A továbbiakban azt fogjuk vizsgálni, hogy mi történik metsző körök és egyenesek hajlásszögével az inverzió során. Ehhez azonban először azt kell látni, hogy ha két kör vagy egyenes érinti vagy metszik egymást, akkor ez a tulajdonság az inverzió során megőrződik. Erről szól majd az alábbi állítás. Ezt követően is az  $O$  középpontú,  $r$  sugarú  $k$  kör lesz a tekintett  $\iota_k$  inverzió alapköre.

**2.6. Állítás:** *Ha két kör vagy egyenes egy  $E$  pontban érintkezik vagy  $M_1$  és  $M_2$  pontokban metszik egymást (ahol  $E$ ,  $M_1$  és  $M_2$  pontok közül egyik sem egyezik meg  $O$ -val), akkor a  $k$ -ra vonatkozó inverzeik is érintkezni fognak  $E'$ -ben, ahol  $E'$  az  $E$  inverze, vagy ha metszők voltak, akkor az inverzeik is metszeni fognák egymást  $M'_1$  és  $M'_2$  pontokban, ahol  $M'_1$  és  $M'_2$  rendre az  $M_1$  és  $M_2$  pontok inverzei.*

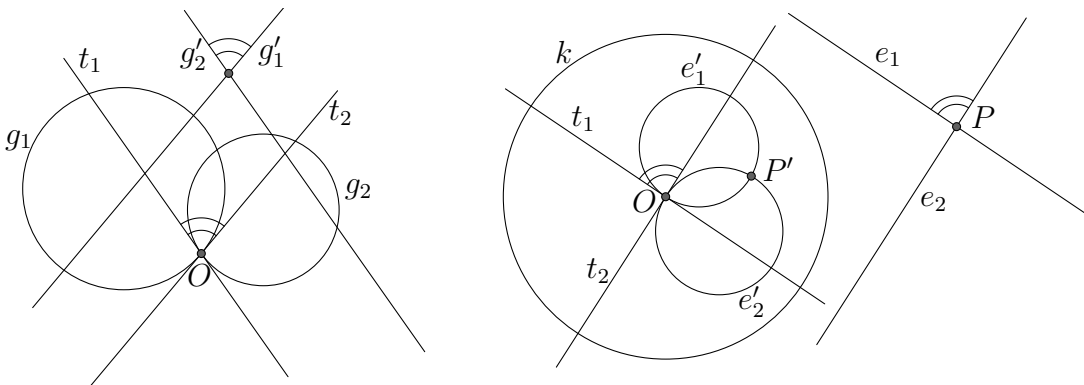
**Bizonyítás:** Az érintkezés azt jelenti, hogy az alakzatok egyetlen közös ponttal rendelkeznek. Jelen esetben a metszés (két kör vagy egy kör és egy egyenes esetén) azt jelenti, hogy az alakzatoknak két közös pontjuk van. Az inverziók bijektivitása miatt ezek a tulajdonságok megőrződnek.  $\square$

Most már kimondhatjuk a következő állítást, ami a metsző körök és egyenesek hajlásszögéről szól.

**2.7. Tétel:** *Legyen adott a síkon két metsző kör vagy két metsző egyenes, vagy pedig egy kör és egy azt metsző egyenes, amelyek hajlásszöge  $\alpha$ . Ekkor ezek inverze képei is metszők és hajlásszögük szintén  $\alpha$ .*

**Bizonyítás:** Hat esetet vizsgálunk attól függően, hogy az alakzatok  $O$ -ban metszik-e egymást vagy sem, illetve, hogy két körről, két egyenesről vagy egy kör és egy egyenesről van szó.

- i)* Legyen adott a síkon két egyenes, amelyek  $O$ -ban metszik egymást. Korábban beláttuk, hogy az ilyen (lyukas) egyenesek inverzei önmaguk. A hajlásszögük természetesen megmarad.
- ii)* Legyenek  $g_1$  és  $g_2$  olyan körök, amelyek  $O$ -ban metszik egymást. Már igazoltuk, hogy  $k$ -ra vonatkozó inverz képeik olyan egyenesek, amelyek párhuzamosak  $g_1$  és  $g_2$  körök  $O$ -beli érintőjével,  $t_1$ -el és  $t_2$ -vel. Mivel  $g_1$  és  $g_2$  hajlásszögén épp  $t_1$  és  $t_2$  hajlásszögét értjük, az inverzeik pedig ezekkel párhuzamos egyenesek, ezért a hajlásszög megmarad.
- iii)* Legyen adott két egyenes a síkon  $e_1$  és  $e_2$ , amelyek metszik egymást egy  $O$ -tól különböző  $P$  pontban. A  $k$  körre vonatkozó inverzeik olyan  $e'_1$  és  $e'_2$  körök, amelyek  $O$ -ban és  $P'$ -ben metszik egymást, ahol  $P'$  a  $P$  pont inverze. Továbbá az inverziók olyan leképezések, amelyek önmaguk inverzei. Ebből és a *ii*)-esetből következik, hogy az ilyen egyenesek hajlásszöge is megmarad.

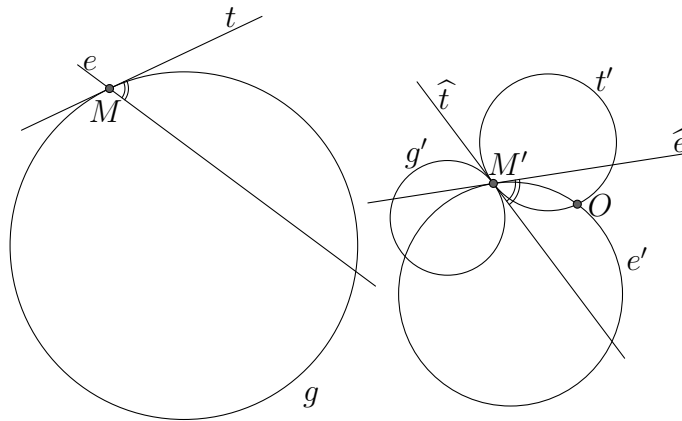


*Egymást  $O$ -ban metsző  $g_1$  és  $g_2$  körök (bal) és egymást  $P \neq O$  pontban metsző  $e_1$  és  $e_2$  egyenesek (jobb).*

- iv)* Legyen adott a síkon egy  $e$  egyenes és egy  $g$  kör, amik  $O$ -tól különböző pontokban metszik egymást. Legyen  $M$  egy ilyen pont, továbbá  $g$  kör  $M$ -beli érintője  $t$  egyenes. Ekkor  $e$  és  $g$  szöge definíció szerint egyenlő  $e$  és  $t$  szögével. Az inverzió végrehajtása után  $g$  képe egy  $O$ -n át nem menő  $g'$  kör és  $e$  képe egy  $O$ -n átmenő  $e'$  kör, aminek  $O$ -beli érintője párhuzamos  $e$ -vel, továbbá  $t$  képe szintén egy olyan  $O$ -n átmenő  $t'$  kör, aminek  $O$ -beli érintője párhuzamos  $t$ -vel. Ekkor  $e'$  és  $t'$  szögét  $O$ -beli érintőik



szögével jellemezhetjük, de mivel mindkét kör áthalad  $M'$ -n is (mert  $e$  és  $t$  egyenesek áthaladtak  $M$ -en), ezért  $e'$  és  $t'$  körök  $M'$  beli érintőinek szögét is használhatjuk. Legyen  $e'$  érintője  $M'$ -ben  $\widehat{e}$  és  $t'$ -é  $\widehat{t}$ . Az is tudjuk, hogy  $t$  érinti  $g$ -t  $M$ -ben, ezért  $t'$  és  $g'$   $M'$ -ben érintkező körök lesznek, vagyis  $\widehat{t}$  egyben érintője  $g'$ -nek is. Összegezve:  $e$  és  $g$  szöge definíció szerint  $e$  és  $t$  szögével egyenlő. Ez a szög megegyezik  $e'$  és  $t'$   $O$ -beli érintőinek a szögével, amik egyenlő az  $M'$  beli érintők,  $\widehat{e}$  és  $\widehat{t}$ , szögével. Ezen érintők szöge szintén definíció szerint megegyezik  $e'$  és  $t'$  szögével. Végül az  $M'$ -beli érintkezés miatt  $e'$  és  $t'$  szöge megegyezik  $e'$  és  $g'$  szögével. Mivel végig egyenlőség volt a szögek között, ezért  $e$  és  $g$  szöge ugyanakkora, mint  $e'$  és  $g'$  szöge.



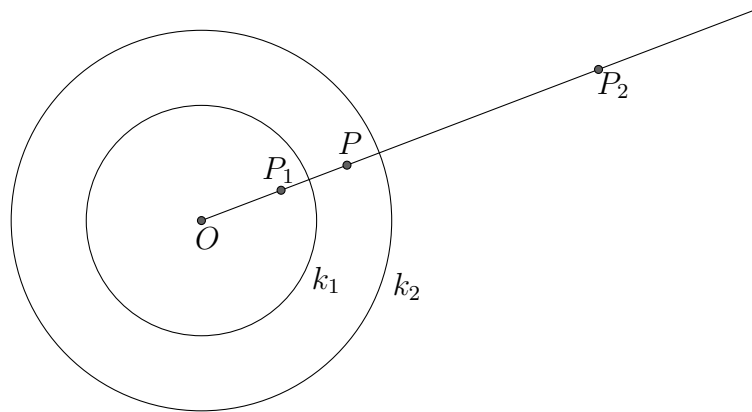
*Egymást  $O$ -tól különböző pontokban metsző kör és egyenes.*

- v) Legyen adott a síkon két kör  $g_1$  és  $g_2$ , amelyek  $O$ -tól különböző pontokban metszik egymást. Legyen  $M$  egy ilyen pont. Ekkor a két kör hajlásszögén az  $M$ -beli érintő egyenesek (legyenek ezek  $t_1$  és  $t_2$ ) hajlásszögét értjük. A  $k$  körre vonatkozó inverz során a körök képei olyan  $g'_1$  és  $g'_2$  körök lesznek, amelyek szintén  $O$ -tól különböző  $M'$  pontban metszik egymást, ahol  $M'$  az  $M$  inverze. Az inverz körök hajlásszögén  $g'_1$  és  $g'_2$   $M'$ -beli érintőinek a hajlásszögét értjük. Mivel  $t_1$  érinti  $g_1$ -et  $M$ -ben, ezért  $t'_1$  és  $g'_1$  egymást  $M'$ -ben érintő körök lesznek (ez  $t_2$ -re és  $g_2$ -re is igaz). Az inverziónál  $t_1$  és  $t_2$  egyenesek képei  $t'_1$  és  $t'_2$  körök, amik egymást  $O$ -ban és  $M'$ -ben metszik, és  $M'$ -beli érintőik párhuzamosak  $t_1$ -el és  $t_2$ -vel (ezek az érintők legyenek  $\widehat{t}_1$  és  $\widehat{t}_2$ ). Összegezve:  $g_1$  és  $g_2$  körök szöge megegyezik  $t_1$  és  $t_2$  egyenesek szögével (definíció szerint),  $t_1$  és  $t_2$  szöge megegyezik  $\widehat{t}_1$  és  $\widehat{t}_2$  egyenesek szögével (mert párhuzamosak). Ugyanakkor  $\widehat{t}_1$  és  $\widehat{t}_2$  egyenesek szöge definíció szerint megegyezik  $t'_1$  és  $t'_2$  körök szögével és az  $M'$ -beli érintkezésük miatt ez a szög megegyezik  $g'_1$  és  $g'_2$  szögével. Tehát  $g_1$  és  $g_2$  szöge egyenlő  $g'_1$  és  $g'_2$  szögével.
- vi) Adott a síkon egy  $g$  kör és egy  $e$  egyenes, amik  $O$ -ban metszik egymást. Hajlásszögük definíció szerint az  $e$  egyenes és  $g$   $O$ -beli érintő egyenesének (legyen az érintő  $t$ ) a hajlásszöge. Az inverz képeik szöge  $e'$  egyenes és  $g'$  egyenes szöge. Az egyenes képe önmaga, a kör képe egy olyan  $g'$  egyenes, ami párhuzamos  $t$ -vel. Tehát  $g$  és  $e$  szöge megegyezik  $g'$  és  $e'$  szögével.

□

Az inverzió definíciójánál láttuk, hogy minden inverziónak a négyzete megegyezik az identikus leképezéssel. Viszont, ha két inverziónál a pólus közös és az alapkörök különbözőek, akkor ezek szorzatára egy érdekes állítást mondhatunk ki.

**2.8. Állítás:** *Azonos pólusú, de különböző hatványú inverziók szorzata egy olyan középpontos hasonlóság, amelynek középpontja az inverziók pólusa és aránya az inverziók hatványainak a hányadosa.*



*Azonos pólusú, de különböző hatványú inverziók szorzata.*

**Bizonyítás:** Tekintsük a síkon  $k_1$  és  $k_2$  kört, melyeknek a középpontja  $O$  és sugaraik rendre  $r_1$  és  $r_2$ . Továbbá vegyünk fel a síkon egy tetszőleges  $P$  ( $O$ -tól különböző) pontot.  $\iota_1$  és  $\iota_2$  rendre a  $k_1$  és  $k_2$  körökre vonatkozó inverziókat jelölik (hatványaik rendre  $r_1^2$  és  $r_2^2$ ). Tekintsük  $P_1$  és  $P_2$  pontokat, ahol  $P_1 = \iota_1(P)$  és  $P_2 = \iota_2(P_1)$ . Tehát  $P_2 = \iota_2 \circ \iota_1(P)$ . Az inverzió definíciójából tudjuk, hogy:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP_1} &= \frac{r_1^2}{OP^2} \overrightarrow{OP} \\ \overrightarrow{OP_2} &= \frac{r_2^2}{OP_1^2} \overrightarrow{OP_1}.\end{aligned}$$

Behelyettesítve és egyszerűsítve azt kapjuk, hogy:

$$\overrightarrow{OP_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \overrightarrow{OP}.$$

Továbbá igaz, hogy  $P$  képei mindig az  $OP$  félegyenesen vannak. Az eddigiekből következik tehát, hogy  $\iota_2 \circ \iota_1$  leképezés egy  $O$  középpontú,  $\frac{r_2^2}{r_1^2}$  arányú középpontos hasonlóság.  $\square$

**Következmény:** Tekintsük  $(\iota_2 \circ \iota_1) \circ \iota_1 = \iota_2$  összefüggést, ahol  $\iota_1$  egy egységkörre vonatkozó inverzió. A fenti állítás alapján a  $\iota_2 \circ \iota_1 = \kappa$  transzformáció egy középpontos hasonlóság. Emiatt fennáll a  $\iota_2 = \kappa \circ \iota_1$  egyenlőség. Ez azt jelenti, hogy minden inverzió előáll, mint egy középpontos hasonlóság és egy egységkörre vonatkozó inverzió szorzata. Tehát minden szögekkel kapcsolatos állításnál elegendő az állítást egységkörre vonatkozó inverziókra belátni, ugyanis szögtartó leképezések egymásutánja szintén szögtartó.

### 3. Az inverziók szögtartásának analitikus tárgyalása

Az előző fejezetben beláttuk a síkbeli inverziók szögtartását metsző körök és egyenesek esetén. Azonban az inverzió nemcsak körök és egyenesek hajlásszögeit tartja meg, hanem tetszőleges két metsző görbének a hajlásszögét is megőrzi. Ennek igazolása érdekében az inverziót analitikusan fogjuk tárgyalni ebben a fejezetben.

A korábbiakban a  $\Sigma$  síkon már bevezettünk egy derékszögű koordináta-rendszert, melynek kezdőpontja  $O$  és alapvektorai az  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  ortonormált vektorok. A sík tetszőleges  $P$  pontja esetében a helyvektor  $\overrightarrow{OP} = x_P \mathbf{i} + y_P \mathbf{j}$  lineáris kombinációjában szereplő  $x_P$ ,  $y_P$  számokat mondjuk a  $P$  pont koordinátáinak. Ily módon egy bijektív megfeleltetést nyerünk a  $\Sigma$  sík pontjai és a valós számpárok  $\mathbb{R}^2$  terének elemei között. Vegyük azt a  $\xi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^2$  leképezést, amely a sík tetszőleges  $P$  pontjához a  $\xi(P) = (x_P, y_P)$  számpárt rendeli. Ezt nevezzük a sík koordinátázásának.

A valós számpárok  $\mathbb{R}^2$  terének elemeit egyaránt tekinthetjük pontoknak és vektoroknak. Az  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  és  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  vektorok összege az  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$  számpár, az  $\mathbf{u}$ -nak a  $\lambda$  számmal vett szorzata pedig a  $\lambda \mathbf{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2)$  vektor. A valós számpárok  $\mathbb{R}^2$  vektorterében egy természetes bázist képeznek az  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$  vektorok.

Értelmezni tudjuk két  $\mathbb{R}^2$ -beli vektor skaláris szorzatát is. Az  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  és  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  vektorok skaláris szorzatán az  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$  számot értjük. Az  $\mathbf{u}$  vektor hossza az  $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$  nemnegatív szám. Amennyiben az  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  vektorok egyike sem nullvektor, akkor hajlásszögük az a  $0$  és  $\pi$  közötti  $\alpha$  érték, amelyre fennáll  $\cos \alpha = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|}$ .

Amennyiben az  $\mathbb{R}^2$ -beli számpárokat pontoknak tekintjük, akkor a  $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$  és  $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$  pontok távolságán a  $\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|$  valós számot értjük.

#### Az $\mathbb{R}^2$ -beli sima görbék

Nézzünk most néhány fogalmat a görbék analitikus leírásával kapcsolatban. Vegyünk egy  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  ( $I \subseteq \mathbb{R}$ ) vektorértékű függvényt ( $I \subseteq \mathbb{R}$  egy valós intervallum). Ehhez egyértelműen léteznek olyan  $x_1, x_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  valós függvények, melyekre igaz  $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$  minden  $t \in I$ -re. Ezek adják a  $\gamma$  vektorfüggvény koordináta-függvényeit. A  $\gamma$  leképezés akkor differenciálható, ha a koordináta-függvényei deriválhatóak.

**3.1. Definíció:** A  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  ( $I \subseteq \mathbb{R}$ ) folytonos leképezést  $\mathbb{R}^2$ -beli paraméteres görbének nevezzük.

**3.2. Definíció:** Ha  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  ( $I \subseteq \mathbb{R}$ ) leképezés folytonosan differenciálható  $I$ -n, akkor  $\gamma$ -át sima görbének hívjuk.

**3.3. Definíció:** Legyen adott egy  $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$ ,  $t \in I$  sima paraméteres görbe. Az  $\mathbb{R}^2$ -beli  $\gamma'(t) = (x_1'(t), x_2'(t))$  vektort a görbe sebességvektorának (más szóval érintővektorának) nevezzük a  $t$  helyen. Ezen vektor hosszát, a  $\|\gamma'(t)\|$  számot, a görbe sebességének hívjuk.

**3.4. Definíció:** A  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  ( $I \subseteq \mathbb{R}$ ) sima görbe reguláris, ha fennáll  $\gamma'(t) \neq \mathbf{0}$  tetszőleges  $t \in I$  helyen.

**3.5. Definíció:** Legyen adott egy  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  ( $I \subseteq \mathbb{R}$ ) sima paraméteres görbe, ami reguláris. A görbe  $t_0$ -beli érintője az az egyenes, amely áthalad  $\gamma(t_0)$  ponton és irányvektora a görbe  $\gamma'(t_0)$  sebességvektorával egyenlő.

**3.6. Definíció:** Legyenek adva a reguláris  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  ( $I \subseteq \mathbb{R}$ ) és  $\rho : H \rightarrow \mathbb{R}^2$  ( $H \subseteq \mathbb{R}$ ) sima görbék  $\mathbb{R}^2$ -ben. Tegyük föl, hogy létezik olyan  $t_0 \in I \cap H$ , amire  $\gamma(t_0) = \rho(t_0)$  teljesül (vagyis a két görbe metszi egymást). Ekkor a  $\gamma$  és  $\rho$  görbéknek a  $\gamma(t_0) = \rho(t_0)$  pontbeli hajlásszögén a  $t_0$ -beli érintők hajlásszögét értjük.

Világos, hogy a  $\gamma$  és  $\rho$  metsző görbék  $t_0$  helyen vett érintővektorainak  $\alpha$  szögére fennáll

$$\cos \alpha = \frac{\langle \gamma'(t_0), \rho'(t_0) \rangle}{\|\gamma'(t_0)\| \cdot \|\rho'(t_0)\|}.$$

## Sima görbék transzformációval nyert képgörbái

Amennyiben adott egy  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálható valós függvény, akkor annak az  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  helyen vett parciális deriváltjait  $\partial_1 f(x, y)$  és  $\partial_2 f(x, y)$  fogja jelölni.

Tekintsünk most egy  $\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  kétváltozós vektorértékű leképezést. Ehhez egyértelműen léteznek olyan  $\mu_1, \mu_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  valós függvények, melyekre igaz  $\mu(x, y) = (\mu_1(x, y), \mu_2(x, y))$  minden  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  helyen. A  $\mu_1, \mu_2$  függvények a  $\mu$  vektorfüggvény koordináta-függvényei.  $\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  vektorfüggvény folytonosan differenciálható, ha a koordináta-függvényei folytonosan deriválhatóak.

**3.7. Definíció:** Legyen adott egy  $\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  folytonosan differenciálható vektorfüggvény. A  $\mu$  leképezés  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  pontbeli Jacobi-mátrixa:

$$\mathbf{J}\mu(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_1 \mu_1(x, y) & \partial_2 \mu_1(x, y) \\ \partial_1 \mu_2(x, y) & \partial_2 \mu_2(x, y) \end{pmatrix}.$$

Ezt követően jelölje az  $(x, y)$  pontbeli Jacobi-mátrixot a  $\mathbf{J}\mu(x, y)$  szimbólum.

Tegyük fel, hogy a  $\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  folytonosan differenciálható leképezés bijektív. Ekkor a  $\mu$ -t egy geometriai transzformációnak tekinthetjük az  $\mathbb{R}^2$  síkban. A  $\gamma$  sima görbének vehetjük a  $\mu$  szerinti  $\tilde{\gamma} = \mu \circ \gamma$  képgörbét.

**3.8. Állítás:** Legyen adott egy  $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$  sima görbe és egy  $\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  folytonosan differenciálható leképezés. Vegyük a  $\tilde{\gamma}(t) = \mu \circ \gamma(t) = (\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t))$  képgörbét. Ekkor a képgörbe koordináta-függvényeinek deriváltjára fennáll

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1'(t) \\ \tilde{x}_2'(t) \end{pmatrix} = \mathbf{J}\mu(\gamma(t)) \cdot \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix}.$$

**Bizonyítás:** A  $\gamma$  görbe  $\mu$  szerinti képének koordináta-függvényeire a következők igazak:  $\tilde{x}_1(t) = \mu_1(x_1(t), x_2(t))$ ,  $\tilde{x}_2(t) = \mu_2(x_1(t), x_2(t))$ . Ezen összetett függvények deriváltjaira alkalmazzuk a láncszabályt. Azt kapjuk, hogy fennáll

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1'(t) &= \partial_1 \mu_1(x_1(t), x_2(t)) \cdot x_1'(t) + \partial_2 \mu_1(x_1(t), x_2(t)) \cdot x_2'(t), \\ \tilde{x}_2'(t) &= \partial_1 \mu_2(x_1(t), x_2(t)) \cdot x_1'(t) + \partial_2 \mu_2(x_1(t), x_2(t)) \cdot x_2'(t). \end{aligned}$$

Ez pedig megfelel az alábbi mátrixegyenletnek:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1'(t) \\ \tilde{x}_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 \mu_1(\gamma(t)) & \partial_2 \mu_1(\gamma(t)) \\ \partial_1 \mu_2(\gamma(t)) & \partial_2 \mu_2(\gamma(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix}.$$

Ez már igazolja a kimondott állítást.  $\square$

**Megjegyzés:** Ha  $\mu$  leképezés a teljes  $\mathbb{R}^2$  helyett, annak csak egy nyílt részhalmazát képezi önmagára, akkor is érvényes az állítás.

## Az $\mathbb{R}^2$ -beli inverzió szögtartása

Tekintsük a számpárok  $\mathbb{R}^2$  síkját és abban a  $\mathbf{0} = (0, 0)$  pontot. Világos, hogy amennyiben a  $\Sigma$  síkban azt a  $\iota_k$  inverziót vesszük, melynek alapköre az  $O$  centrumú egységkör, akkor ennek az  $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$  kilyukasztott számsíkon azon  $\mu : \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$  differenciálható leképezés felel meg, melyet a

$$\mu(x, y) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

összefüggés ír le. Eszerint a  $\mu$  kétváltozós vektorfüggvény koordináta-függvényeire teljesül

$$\mu_1(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \mu_2(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

**3.9. Állítás:** Az inverziónak megfelelő  $\mu : \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$  leképezés  $(x, y)$  pontbeli Jacobi-mátrixára igaz, hogy

$$\mathbf{J}\mu(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \cdot \begin{pmatrix} y^2 - x^2 & -2xy \\ -2xy & x^2 - y^2 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad (\mathbf{J}\mu(x, y))^2 = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \mathbf{E},$$

ahol  $\mathbf{E}$  a  $2 \times 2$ -es egységmátrix.

**Bizonyítás:** A Jacobi-mátrix közvetlen számolással megkapható a  $\mu_1, \mu_2 : \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$  függvények parciális deriváltjaiból. Egyszerű számolással adódik az is, hogy a  $\mathbf{J}\mu(x, y)$  mátrix önmagával vett szorzata az  $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  egységmátrixnak az  $\frac{1}{(x^2 + y^2)^2}$  számmal vett szorzata.  $\square$

Vegyük észre, hogy a  $\mathbf{J}\mu(x, y)$  mátrix szimmetrikus, vagyis a transzponáltjára igaz  $\mathbf{J}\mu(x, y)^T = \mathbf{J}\mu(x, y)$ .

Az alábbi tételből már következik, hogy az inverzió megőrzi az egymást metsző reguláris sima görbék hajlásszögét.

**3.10. Tétel:** Az inverziónak megfelelő  $\mu : \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$  leképezés megőrzi az egymást metsző reguláris görbék sebességvektorainak hajlásszögét.

**Bizonyítás:** Tegyük fel, hogy a  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$  és  $\rho : H \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$  reguláris görbéknek a  $t_0 \in I \cap H$  paraméterű pontja azonos. Ez a közös pont legyen  $(x, y)$ , vagyis fennáll  $\gamma(t_0) = \rho(t_0) = (x, y)$ .

A két görbe  $t_0$ -beli sebességvektorára alkalmazzuk a  $\gamma'(t_0) = \mathbf{u}$  és  $\rho'(t) = \mathbf{v}$  jelölést. Ezek persze kifejezhetőek az  $\mathbf{u} = (u_1, u_2) = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2$  és  $\mathbf{v} = (v_1, v_2) = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2$  alakban. Legyen  $\alpha$  a két sebességvektor hajlásszöge. Mint ismeretes, erre igaz  $\cos \alpha = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|}$ .

Tekintsük a  $\gamma$ ,  $\rho$  görbéknek a  $\mu$  transzformáció szerinti képgörbéit. Ezeknek a  $\tilde{\gamma} = \mu \circ \gamma$  és  $\tilde{\rho} = \mu \circ \rho$  képgörbéknek is megegyezik a  $t_0$  paraméterű pontja. A  $t_0$  helyen vett sebességvektoraikra alkalmazzuk a  $\tilde{\gamma}'(t_0) = \tilde{\mathbf{u}}$  és  $\tilde{\rho}'(t) = \tilde{\mathbf{v}}$  jelölést. A 3.8. Állítás alapján ezen  $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$  és  $\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2)$  érintővektorok koordinátáira fennáll

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{J}\mu(x, y) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{J}\mu(x, y) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Ha az első mátrixegyenletet transzponáljuk, akkor azt kapjuk, hogy igaz

$$(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = (u_1, u_2) \cdot \mathbf{J}\mu(x, y)^T = (u_1, u_2) \cdot \mathbf{J}\mu(x, y)$$

Itt kihasználtuk, hogy a Jacobi-mátrix szimmetrikus.

Számítsuk ki az  $\tilde{\mathbf{u}}$  és  $\tilde{\mathbf{v}}$  vektorok skaláris szorzatát. Látható, hogy teljesül

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle &= \tilde{u}_1 \tilde{v}_1 + \tilde{u}_2 \tilde{v}_2 = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \end{pmatrix} = (u_1, u_2) \cdot \mathbf{J}\mu(x, y) \cdot \mathbf{J}\mu(x, y) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ &= (u_1, u_2) \cdot \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \mathbf{E} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \cdot (u_1, u_2) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle. \end{aligned}$$

Eszerint az  $\langle \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle$  és  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  skaláris szorzatok között szoros kapcsolat áll fenn. Világos, hogy amennyiben az  $\tilde{\mathbf{u}}$  és  $\tilde{\mathbf{v}}$  vektorok hosszát tekintjük, akkor azokra teljesül

$$\|\tilde{\mathbf{u}}\| = \frac{1}{x^2 + y^2} \|\mathbf{u}\|, \quad \|\tilde{\mathbf{v}}\| = \frac{1}{x^2 + y^2} \|\mathbf{v}\|.$$

Legyen  $\tilde{\alpha}$  az  $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}$  vektorok hajlásszöge. A fenti eredmények alapján ennek koszinuszára fennáll

$$\cos \tilde{\alpha} = \frac{\langle \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\|\tilde{\mathbf{u}}\| \cdot \|\tilde{\mathbf{v}}\|} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} = \cos \alpha.$$

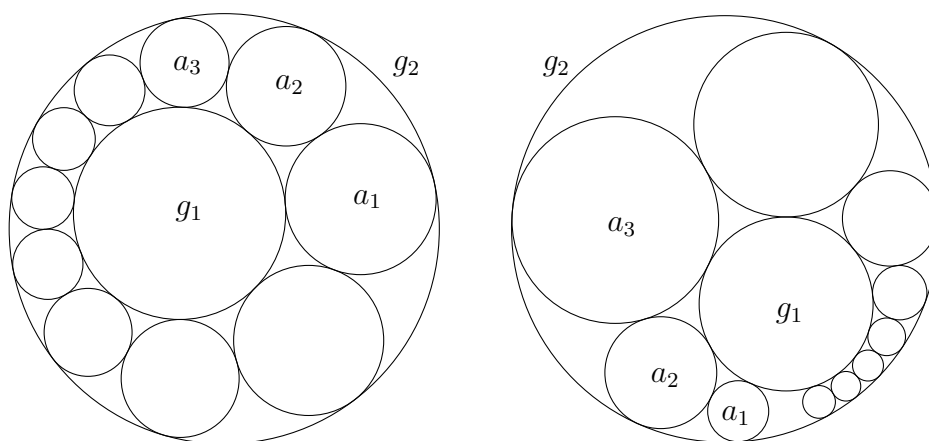
Ezzel beláttuk, hogy a képgörbék  $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}$  érintővektorainak hajlásszöge megegyezik a  $\gamma$ ,  $\rho$  görbék  $t_0$  helyen vett  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  sebességvektorainak szögével.  $\square$

## 4. A síkbeli inverzió alkalmazásai

### Steiner-féle körzáródás

Ebben a fejezetben a síkbeli inverzió néhány alkalmazását fogjuk vizsgálni. A tárgyalás során felhasználjuk mindazt, amit eddig az inverziókról beláttunk. Elsőként a Steiner-féle körzáródási problémát fogjuk megvizsgálni.

Legyen adott a síkon két nem koncentrikus kör  $g_1$  és  $g_2$ , ahol a  $g_1$  kör  $g_2$  belsejében van. Kiindulásként vegyünk egy  $a_1$  kört, amely kívülről érinti a  $g_1$  kört és belülről a  $g_2$ -t. Ezt követően rajzoljunk be további  $a_i$  ( $i \geq 2$ ) köröket oly módon, hogy azok kívülről érintsék  $g_1$ -et, belülről érintsék  $g_2$ -t, továbbá az  $a_i$  kör kívülről érintse az  $a_{i-1}$  kört. A láncot mindaddig folytatjuk, amíg nem metszünk bele az  $a_1$  körbe. Ezáltal egy érintkező körökből álló véges láncot hozunk létre. Akkor mondjuk, hogy a körlánc záródik, ha az utolsó kör érinti a körláncot elindító  $a_1$  kört. Világos, hogy attól függően, hogy a körláncot melyik forgásirányt választva hozzuk létre más-más láncot kapunk abban az esetben, amikor a körlánc nem záródik. Záródás esetében azonban a láncot alkotó körök ugyanazok lesznek. Példaként tekintsük az alábbi ábrát.



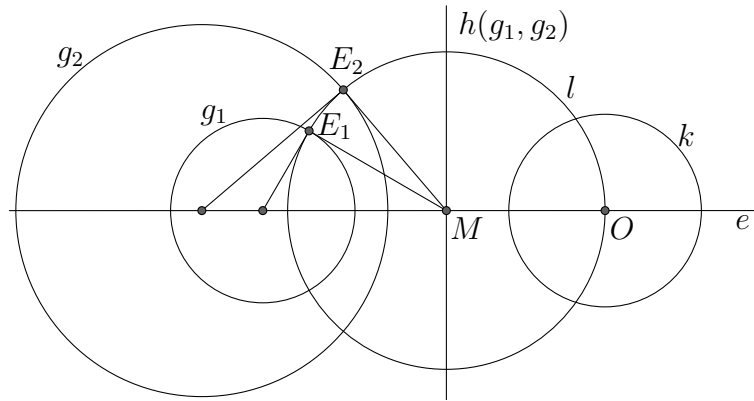
*Egy záródó és egy nem záródó körlánc két nem koncentrikus körhöz.*

Ahogy az ábra mutatja, az egyik esetben záródott a körlánc míg a másikban nem. Felmerülhet a kérdés, hogy mitől függ ez a záródás adott  $g_1$ ,  $g_2$  körök esetében. Vajon függ-e attól, hogy hol vesszük fel a körláncot elindító  $a_1$  kört? A kérdés megválaszolásához szükségünk lesz a következő állításra. Ezt követően is feltesszük, hogy a tér egy rögzített  $\Sigma$  síkjában végezzük a tárgyalást.

**4.1. Állítás:** *Legyen adott két nem koncentrikus kör  $g_1$  és  $g_2$  oly módon, hogy  $g_1$  teljesen a  $g_2$  belsejében van. Ekkor egy alkalmas inverzióval  $g_1$  és  $g_2$  koncentrikus körökbe képezhetők.*

**Bizonyítás:** Keressük azt a  $k$  kört, amelyre ha inverziót alkalmazunk (jelölje ezt az inverziót  $\iota_k$ ), akkor  $g_1$  és  $g_2$  képei koncentrikusak lesznek. Legyen  $e$  a  $g_1$  és  $g_2$  körök centrumainak az egyenese (ami persze derékszögben metszi a köröket). Az első fejezetben leírt módszer alapján vegyük föl  $g_1$  és  $g_2$  körök hatványvonalát,  $h(g_1, g_2)$ -t. Legyen  $M$  az  $e$  és

$h(g_1, g_2)$  egyenesek metszéspontja. Húzzunk  $M$ -ből érintőket  $g_1$  és  $g_2$  körökhöz (legyenek az érintési pontok rendre  $E_1$  és  $E_2$ ). Mivel  $M \in h(g_1, g_2)$ , ezért  $M$ -ből a körökhöz húzott érintő szakaszok egyenlő hosszúak. Tekintsük azt az  $l$  kört, melynek középpontja  $M$  és áthalad  $E_1$  és  $E_2$  pontokon. Ekkor  $l$  derékszögben metszi  $g_1$  és  $g_2$  köröket. Legyen  $O$  pont az  $e$  egyenes és az  $l$  kör azon metszéspontja, amelyik nem esik  $g_1$  illetve  $g_2$  körök belsejébe.



*Szemléltetés a bizonyításhoz.*

Legyen  $k$  az a kör, melynek középpontja  $O$  és sugara tetszőleges hosszúságú. A  $\iota_k$  inverziónál  $g'_1$  és  $g'_2$  alakzatok körök (melyek centrumai  $e$  egyenesen vannak),  $e$  egyenes képe ( $e'$ ) önmaga, továbbá  $l$  kör képe egy olyan  $l'$  egyenes, amely  $g'_1$ -t és  $g'_2$ -t is derékszögben metszi az inverziók szögtartása miatt. Világos, hogy két kör akkor és csak akkor koncentrikus, ha létezik két olyan egyenes, amelyek mindkét kört derékszögben metszik. Mivel  $e'$  és  $l'$  is derékszögben metszik  $g'_1$  és  $g'_2$  köröket, emiatt  $\iota_k(g_1) = g'_1$  és  $\iota_k(g_2) = g'_2$  körök koncentrikusak. Ezzel az állítást beláttuk.  $\square$

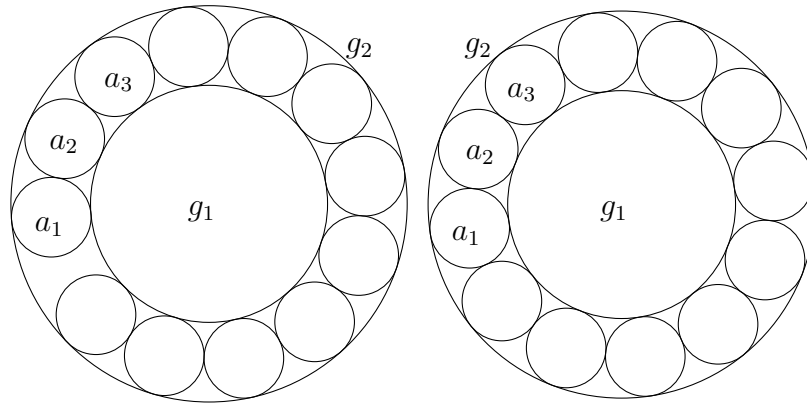
Most, hogy az állítást bebizonyítottuk, kimondhatjuk a Steiner-tételt, ami megválaszolja, hogy mitől függ a körlánc záródása. A bizonyítási eljárás alapötlete megtalálható a Coxeter által írt *A geometriák alapjai* c. tankönyvben. (Lásd [1], 99. oldal.)

**4.2. Tétel:** *Legyenek adottak a síkon  $g_1$  és  $g_2$  körök oly módon, hogy  $g_1$  teljesen a  $g_2$  kör belsejében van. Vegyünk egy  $a_1$  kört, amely kívülről érinti a  $g_1$  kört és belülről a  $g_2$ -t, majd tekintsük az  $a_1$  által meghatározott  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) érintkező körláncot. Ekkor a körlánc záródása nem függ  $a_1$  kör megválasztásától, vagyis a körlánc vagy mindig záródik, vagy pedig soha.*

**Bizonyítás:** Legyenek a  $g_1$  és  $g_2$  körök koncentrikusak. Lelölje  $C$  a közös centrumot,  $r_1$  és  $r_2$  a körök sugarát. Ez esetben a láncot alkotó  $a_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) körök egybevágóak, sugaruk  $\frac{r_2 - r_1}{2}$ , középpontjaik pedig azon a  $C$  centrumú körön vannak, melynek sugara  $\frac{r_2 + r_1}{2}$ . Látható, hogy a körlánc záródása nem függhet a láncot elindító  $a_1$  kör megválasztásától, hiszen a kapott körláncokat  $C$  körüli forgatással egymásba lehet vinni.

Ha  $g_1$  és  $g_2$  nem koncentrikus, akkor az előbb belátott állításban szereplő módszer segítségével, alkalmas inverzió megválasztásával, koncentrikus körökbe visszük őket. Most az inverz körök között kezdünk körláncot razolni (legyenek ezek a  $b_i$  körök). Ekkor persze a





Egy nem záródó és egy záródó körlánc két koncentrikus körhöz.

$b_i$  körlánc záródása független  $b_1$  megválasztásától. Hajtsuk végre újra azt az inverziót, ami  $g_1$ -et és  $g_2$ -t koncentrikus körökbe vitte. Minden  $i$ -re legyen  $b_i$  kör inverze  $a_i$ . Az inverziók érintkezéstartása miatt  $a_i$  körök is láncot fognak alkotni  $g_1$  és  $g_2$  között. Világos, hogy az  $a_i$  körlánc pontosan akkor záródik, amikor  $b_i$  is záródik. Ezek alapján tehát megállapítható, hogy ha  $g_1$  és  $g_2$  nem koncentrikus körök között egy körláncot indítunk, akkor a záródás itt sem függ a lánc első körének megválasztásától. Konklúzió: a körlánc záródása csak is  $g_1$  és  $g_2$  köröktől függ.  $\square$

## A Feuerbach-tétel bizonyítása inverzió alkalmazásával

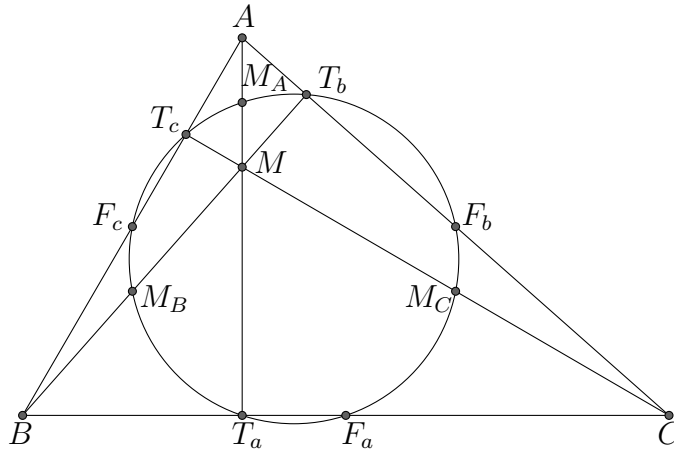
A háromszögek nevezetes körei közül az egyik a Feuerbach-kör. Számos érdekes tulajdonsággal bír. Lássuk, mi az a Feuerbach-kör. Legyen adott egy háromszög a  $\Sigma$  síkon, melynek három csúcsa legyen  $A$ ,  $B$  és  $C$ . Legyenek a háromszög oldalai:  $AB = c$ ,  $BC = a$  és  $CA = b$ . Jelölje a háromszög magasság-talppontjait  $T_a$ ,  $T_b$  és  $T_c$ , magasságpontját  $M$ , az oldalfelező pontjait  $F_a$ ,  $F_b$  és  $F_c$  és a magasságpontját a csúcsaival összekötő szakaszok felezőpontjait  $M_A$ ,  $M_B$  és  $M_C$ . Ekkor a következőt állíthatjuk.

**4.3. Tétel:** *Bármely háromszögben a magasság-talppontok ( $T_a$ ,  $T_b$  és  $T_c$ ), az oldalfelező pontok ( $F_a$ ,  $F_b$  és  $F_c$ ) és a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjai ( $M_A$ ,  $M_B$  és  $M_C$ ) egy körön helyezkednek el. Ezt a kört hívjuk a háromszög Feuerbach-körének.*

A fenti tétel bizonyítása az inverzió alkalmazása nélkül is elvégezhető. Erre a dolgozatban nem térünk ki. Egy analitikus bizonyítás fellelhető a közismert Hajós-féle tankönyvben (Lásd [3], 303-304. oldal.)

A továbbiakban a Feuerbach-kör azon tulajdonságát fogjuk vizsgálni, amely a háromszög beírt és hozzáírt köreivel való érintkezéséről szól. Targyalásunk a Coxeter és Greitzer szerzőpáros által írt *Az újra felfedezett geometria* c. könyvben leírt bizonyítási eljárás alapul. (Lásd [2], 191-194. oldal.)

Ismeretes, hogy a háromszög három belső szögfelezője egy pontban metszi egymást (ez a háromszög beírt körének a középpontja, a továbbiakban jelölje  $I$  ezt a pontot). Hasonló

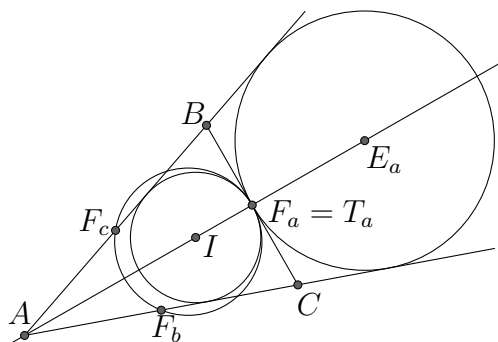


Az  $ABC_{\Delta}$  háromszög Feuerbach-köre.

bizonyítással adódik, hogy egy háromszögben egy belső szögfelező és a nem mellette lévő két külső szögfelező is egy pontban metszi egymást. Ezek a pontok (három ilyen pont definiálható) egyenlő távolságra vannak az oldalegyenesektől (jelölje  $E_a$ ,  $E_b$  és  $E_c$  ezeket a pontokat). Ezek a háromszög hozzáírt köreinek a középpontjai.

**4.4. Tétel:** *Legyen adott az  $ABC_{\Delta}$  háromszög. Ekkor a háromszög Feuerbach-köre belülről érinti a beírt kört és kívülről érinti a három hozzáírt kört.*

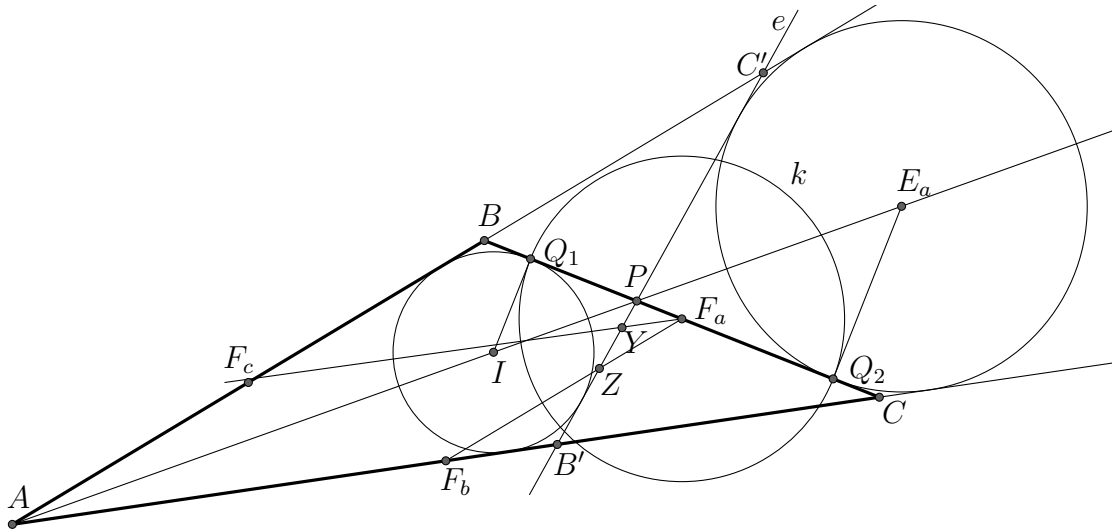
**Bizonyítás:** Elsőként tekintsük azt az esetet, amikor a háromszög egyenlő ( $AB = AC$ ) szárú. Ebben az esetben az  $ABC_{\Delta}$  háromszög beírt köre és az alaphoz ( $BC$ -oldalhoz) tartozó hozzáírt köre mind az oldalfelező pontban ( $F_a$ ) érintik az alapot. Ez persze a Feuerbach-körré is igaz, mivel egyenlő szárú háromszög esetén az alap oldalfelező pontja és a hozzá tartozó magasságvonal talppontja egybe esik. Szemléltetésként tekintsük az alábbi ábrát.



Egyenlő szárú háromszög Feuerbach-köre.

A továbbiakban feltételezhetjük, hogy a háromszög nem egyenlő szárú.

Belátjuk, hogy a Feuerbach-kör érinti a beírt kört és az egyik oldalhoz (legyen ez a  $BC$  oldal) tartozó hozzáírt kört. Ha ez megvan, akkor a másik két hozzáírt körről való



Szemléltetés a bizonyításhoz.

érintkezés teljesen analóg módon bizonyítható. Legyenek  $a = BC$ ,  $b = AC$  és  $c = AB$  a háromszög oldalai,  $F_a$ ,  $F_b$  és  $F_c$  a oldalfelező pontjai (az általuk meghatározott kör a háromszög Feuerbach-köre). Továbbá jelölje  $s$  a félkerületet ( $s = \frac{a+b+c}{2}$ ).

Érintse a beírt kör  $BC$  oldalt  $Q_1$  pontban és a hozzáírt kör  $Q_2$  pontban ( $BQ_1 = s - b$  mivel  $Q_1$  a beírt kör érintési pontja). Ha  $A$ -ból érintőt húzunk a hozzáírt körhöz, akkor annak hossza:  $AB + BQ_2 = AC + CQ_2$ . Tudni, hogy  $AB + BQ_2 + Q_2C + CA = 2s$ , tehát  $Q_2C + CA = s$ , amiből  $Q_2C = s - b$  következik. Mivel  $BQ_1 = Q_2C$ , ezért  $F_a$  felezi  $Q_1Q_2$  szakaszt.

Legyen  $e$  egyenes a beírt kör és a  $BC$  oldalhoz tartozó hozzáírt kör  $BC$  oldalegyenestől különböző közös érintője. Jelölje  $e$  egyenes metszéspontját  $AB$  oldalegyenessel  $C'$  és  $AC$  oldalegyenessel  $B'$  (szimmetria okok miatt  $BC' = CB'$  teljesül). Legyen  $e$  metszéspontja  $BC$  oldalegyenessel  $P$ ,  $F_aF_b$ -vel  $Z$  és  $F_aF_c$ -vel  $Y$ .

Tekintsük azt az  $F_a$  centrumú  $k$  kört, amely áthalad  $Q_1$  és  $Q_2$  pontokon (jelölje a kör sugarát  $r$ ). Azt állíthatjuk, hogy a  $k$  körre vonatkozó inverzió  $e$  egyenest a Feuerbach-körbe viszi. Ha ezt bebizonyítjuk, akkor az inverziók érintkezéstartása miatt igaz lesz a tétel, ugyanis az  $e$  egyenes érinti a beírt és a hozzáírt kört (amik merőlegesen  $k$ -ra, tehát önmaguk inverzei). Ehhez azt kell belátnunk, hogy az oldalfelező pontok ( $F_a$ ,  $F_b$  és  $F_c$ ) rajta vannak  $e$  egyenes inverzén. Ezt három lépésben tesszük meg.

1. lépés:

Mivel  $e$  nem halad át  $F_a$  ponton (az inverzió pólusán) ezért az inverze egy  $F_a$ -n áthaladó  $e'$  kör lesz.

2. lépés:

A következőt állíthatjuk.  $Z$  pont  $k$  körre vonatkozó inverze  $F_b$  pont. Ha ez igaz, akkor  $F_b$  rajta van  $e'$  körök (ugynais  $Z \in e$ ). Ehhez  $F_aZ \cdot F_aF_b = r^2$  egyenlőségnek kell teljesülnie. Az  $F_aF_b$  szakasz hossza, középvonal lévén,  $\frac{c}{2}$ . A  $BC$  oldal feldarabolható kisebb szakaszokra:  $BC = a = BQ_1 + Q_1F_a + F_aQ_2 + Q_2C$ , ahol  $BQ_1 = Q_2C = s - b$  és  $Q_1F_a = F_aQ_2 = r$ .

Átrendezéssel azt kapjuk, hogy  $r = \frac{b-c}{2}$  (itt feltettük, hogy  $b > c$ , de ha  $b < c$ , akkor  $\frac{c-b}{2}$  lesz a sugár).

Most az  $F_aZ$  szakasz hosszát kell meghatározni. A  $F_aZP_\Delta$  hasonló  $BC'P_\Delta$  háromszöghöz ( $BPC' \triangleleft$  és  $F_aPZ \triangleleft$  szögek csúcshögek, továbbá  $BC'P \triangleleft$  és  $F_aZP \triangleleft$  szögek váltószögek).

Emiatt fennáll a megfelelő oldalarányok egyenlősége:  $\frac{F_aZ}{F_aP} = \frac{BC'}{BP}$ . Határozzuk meg a szakaszok hosszait.

$BC' = s - c - (s - b) = b - c$ . A szögfelező tételt alkalmazva  $\frac{BP}{PC} = \frac{c}{b}$  (ahol  $PC = a - BP$ )

egyenlőség írható fel és átrendezéssel  $BP = \frac{ac}{b+c}$  kapható.  $F_aP = BF_a - BP$ , behelyettesítve azt kapjuk, hogy  $F_aP = \frac{a}{2} - \frac{ac}{b+c} = \frac{a(b-c)}{2(b+c)}$ . Ezek alapján kiszámolhatjuk  $F_aZ$

szakasz hosszát (behelyettesítjük a kiszámolt szakaszok hosszait  $\frac{F_aZ}{F_aP} = \frac{BC'}{BP}$  egyenlőségbe).

$$F_aZ = F_aP \cdot \frac{BC'}{BP} = \frac{a(b-c)}{2(b+c)} \cdot \frac{(b-c)(b+c)}{ac} = \frac{(b-c)^2}{2c}.$$

Ez az  $F_aZ$  érték kielégíti az  $F_aZ \cdot F_aF_b = r^2$  egyenlőséget, hiszen fennáll  $F_aF_b = \frac{c}{2}$  és

$r^2 = \frac{(b-c)^2}{4}$ , tehát  $Z \in e$  pont valóban  $F_b$  pont inverze  $k$  körre nézve, azaz  $F_b$  pont rajta van  $e$  inverzén.

3. lépés:

Analóg módon bizonyítható, hogy az  $Y \in e$  pont  $F_c$  inverze  $k$  körre nézve, tehát  $F_c$  is rajta van  $e$  egyenes inverz képén.

Mivel  $F_a$ ,  $F_b$  és  $F_c$  pontok (amik meghatározzák a Feuerbach-kört) mind rajta vannak  $e'$  körön, ezért  $e'$  a háromszög Feuerbach-köre.

Az  $e$  egyenes érinti a beírt kört és a  $BC$  oldalhoz hozzáírt kört. Ezek a körök pedig önmaguk inverzei  $k$ -ra nézve. Emiatt  $e'$  Feuerbach-kör érinti a háromszög beírt körét és a  $BC$  oldalhoz hozzáírt kört.

Az pedig analóg eljárással igazolható, hogy a Feuerbach-kör a háromszög másik két oldalához hozzáírt kört is érinti. Ezzel a tételt beláttuk.  $\square$

## Mascheroni-féle szerkesztések

Mielőtt rátérnénk arra, hogy mik azok a Mascheroni-féle szerkesztések, ismertessük röviden az euklideszi szerkesztéseket. Euklideszi szerkesztéseknek nevezzük azokat a szerkesztéseket, amelyeknél az alábbi öt alaplépést hajtjuk végre véges sokszor csak körző és vonalzó használatával (feltehető, hogy a vonalzó tetszőleges hosszúságú és a körzővel is tetszőleges szakaszt körzőnyílásba tudunk venni):

- (ES1) Két megszerkesztett pontra illeszkedő egyenes megrajzolása vonalzóval.
- (ES2) Egy megszerkesztett ponttal, mint centrummal kör megrajzolása egy, már megszerkesztett ponton át.

(ES3) Két metsző egyenes metszéspontjának a kijelölése.

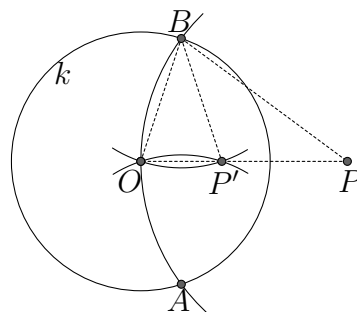
(ES4) Egymást metsző kör és egyenes metszéspontjainak a kijelölése.

(ES5) Két metsző kör metszéspontjainak a kijelölése.

A Mascheroni-féle szerkesztések abban térnek ez az euklideszitől, hogy csak körzőt használhatunk. Ez persze magával vonja azt, hogy az (ES3) és az (ES4) alaplépések nem hajthatók végre, ugyanis ezekhez vonalzóra van szükség. Valójában az (ES1) alaplépéshez is kellene vonalzónak, de a Mascheroni-féle szerkesztéseknél egy egyenest megszerkesztettnek tekintünk, ha adva van két pontja. Az inverziók segítségével érdekes tényt állapíthatunk meg a Mascheroni-féle szerkesztésekről. Mielőtt kimondanánk ezt a tételt, mutassuk meg, hogy hogyan szerkesztjük meg egy pont, egy egyenes illetve egy kör inverz képét csak körzővel. Ezen szerkesztési eljárások alapötletei megtalálhatóak a Strohmajer János által írt *Geometriai példatár III. c.* jegyzetben. (Lásd [6], 3. fejezet, 33–37. feladatok.)

**4.5. Állítás:** *Pont inverz képe megszerkeszthető csak körzővel.*

**Bizonyítás:** Legyen adott a síkon egy  $O$  centrumú,  $r$  sugarú  $k$  kör és egy tetszőleges  $P$  pont  $k$ -n kívül.  $P$  pont  $k$ -ra vonatkozó inverzét,  $P'$ -t, akarjuk megszerkeszteni csak körző használatával. Vegyük körzőnyílásba a  $PO$  szakaszt és körözzünk ezzel a távolsággal  $P$  centrumból. Ez a kör  $k$ -t  $A$  és  $B$  pontokban metszi. Most körözzünk  $A$  pontból  $OA$  távolsággal, majd  $B$  pontból  $OB$  távolsággal (szimmetriai okok miatt  $OA = OB = r$ ). Legyen ezen körök  $O$ -tól különböző metszéspontja  $P'$ . Ekkor az  $O$ ,  $P$  és  $P'$  pontok kollineárisak (az  $AB$  szakaszfelező merőlegesén helyezkednek el) és az  $OAP'_\Delta$  háromszög hasonló  $OPA_\Delta$  háromszöghöz (mindkettő egyenlő szárú háromszög és az alapon fekvő szögek ugyanakkorák), így igaz a megfelelő oldalak arányainak az egyenlősége:  $\frac{OA}{OP'} = \frac{OP}{OA}$ , ami átrendezve  $OP \cdot OP' = OA^2 = r^2$  egyenlőséget adja. Tehát  $P'$  valóban  $P$  pont inverze  $k$ -ra nézve.  $\square$



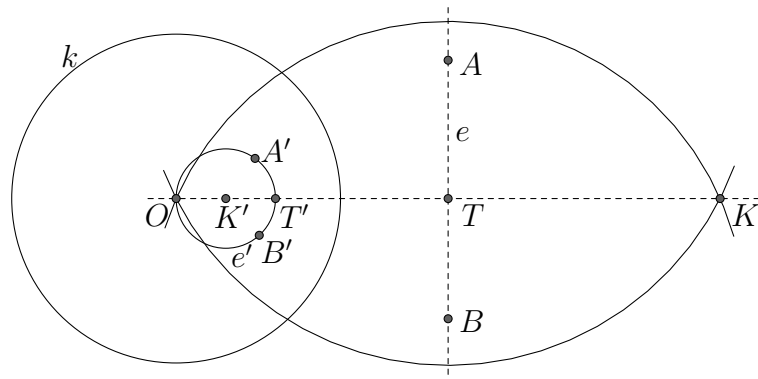
*Pont inverzének szerkesztése csak körzővel.*

**Megjegyzés:** Az imént bemutatott módszer csak akkor működik, hogy ha  $OP > \frac{r}{2}$ . Amennyiben ez nem teljesül, azaz  $OP \leq \frac{r}{2}$ , a következőképpen járunk el. Az  $OP$  szakaszt másoljuk az  $OP$  félegyenesre  $\overrightarrow{OP}$  irányba oly módon, hogy az új szakasz kezdőpontja  $P$

legyen (a szakasz végpontját jelölje  $Q_1$ ). Ezt úgy tehetjük meg, mintha egy  $P$  középpontú szabályos hatszöget akarnánk szerkeszteni, ahol a hatszög egyik csúcsa az  $O$  pont, a vele szemközti pedig  $Q_1$ . Ekkor  $Q_1$ -re  $OQ_1 = 2OP$  és  $OP = PQ_1$  teljesül. Most ismét felmásoljuk az  $OP$  szakaszt az  $OP$  félegyenesre immáron  $Q_1$  kezdőponttal és ezen szakasz végpontját jelölje  $Q_2$  (ezt szintén az előbbi, szabályos hatszöges módszerrel tehetjük meg). Legyen  $Q_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) az  $i$ -edszerre, hasonló módszerrel felmásolt szakasz végpontja (a kezdőpontja természetesen  $Q_{i-1}$ ). Ezt a másolási folyamatot addig ismételjük amíg  $OQ_i > \frac{r}{2}$  nem teljesül. Ha  $OQ_i > \frac{r}{2}$ , akkor a fentebb leírt szerkesztési eljárással megszerkeszthetjük  $Q_i$  pont inverz képét,  $Q'_i$ -t. Az inverzió definíciójából könnyen levezethető, hogy ha  $OQ_i = (i + 1) \cdot OP$ , akkor  $(i + 1) \cdot OQ'_i = OP'$ , ahol  $P'$  a  $P$  pont inverze. Ez azt jelenti, hogy ha megszerkesztettük  $Q'_i$  pontot, akkor a szabályos hatszöges eljárással  $i$ -szer felmásoljuk az  $OQ'_i$  szakaszt az  $OP$  félegyenesre  $\overrightarrow{OP}$  irányba oly módon, hogy az első felmásolt szakasz kezdőpontja  $Q'_i$  legyen és a további szakaszok kezdőpontjai mindig az előző szakasz végpontja legyen. Ezzel megszerkesztettük a  $P$  pont inverzióval nyert képét.

**4.6. Állítás:** *Két pontjával meghatározott egyenes inverz képe megszerkeszthető csak körzövel.*

**Bizonyítás:** Legyen adott a síkon egy  $O$  centrumú,  $r$  sugarú  $k$  kör továbbá  $A$  és  $B$  pontjai által meghatározott  $e$  egyenes. Ezen egyenes  $k$ -ra vonatkozó invertét ( $e'$ -t) akarjuk megszerkeszteni. Körözzünk  $A$ -ból  $OA$  sugárral és  $B$ -ből  $OB$  sugárral. Ezen körök  $O$ -tól különböző metszéspontja legyen  $K$  ennek inverze  $K'$ .

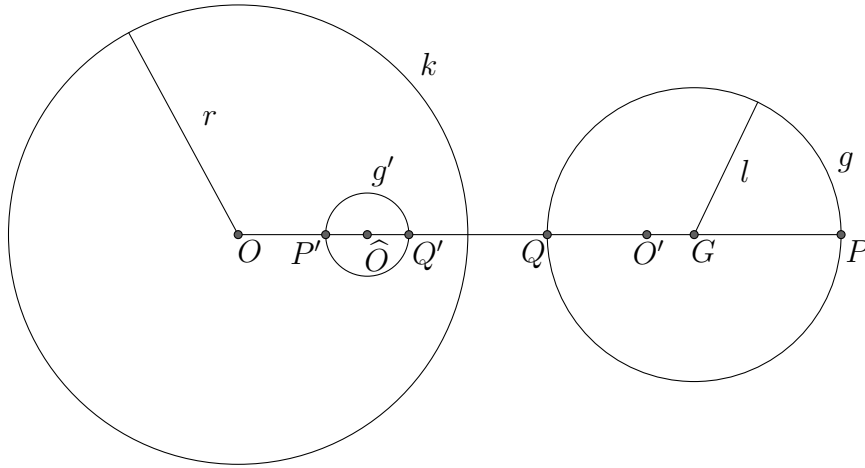


*Egyenes inverzének szerkesztése csak körzövel.*

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor az  $e$  egyenes nem tartalmazza  $O$ -t. Amennyiben tartalmazza,  $e$  képe önmaga (ekkor  $K$  nem is létezik). Ilyenkor  $e'$  egy  $O$ -n átmenő kör. Azt állíthatjuk, hogy  $e'$  az a kör, aminek a középpontja  $K'$  és áthalad  $O$ -n. Legyen  $T$  az  $OK$  és  $e$  egyenes metszéspontja ( $OK$  egyenese merőleges  $e$ -re és  $T$  felezi  $OK$  szakaszt) és  $T'$   $T$  inverze. Mivel  $T \in e$ , ezért  $T' \in e'$  sőt,  $T'$  lesz  $e'$   $O$ -val átellenes pontja. Mivel  $OK$  szakasz hossza kétszerese  $OT$ -nek, ezért  $OK'$  hossza fele akkora kell hogy legyen, mint  $OT'$  (egyszerű számolással ellenőrizhető). Tehát  $K'$  az  $OT'$  szakasz felezőpontja és a keresett körről tudjuk, hogy az  $OT'$  szakaszra emelt Thalesz-körrel azonos. Ezek alapján  $K'$  nem lehet más, mint  $e'$  középpontja.  $\square$

**4.7. Állítás:** *Kör inverz képe megszerkeszthető csak körzövel.*

**Bizonyítás:** Legyen adott a síkon egy  $O$  centrumú,  $r$  sugarú  $k$  kör, továbbá egy  $g$  kör. Ezen kör inverzét ( $g'$ -t) akarjuk megszerkeszteni  $k$ -ra nézve. Ha  $O \in g$ , akkor  $g'$  egy egyenes, tehát a kör tetszőleges két pontját ha invertáljuk, akkor azok biztos rajta lesznek  $g$  inverzén, ezzel  $g'$  egyenest megszerkesztettnek tekintjük. Ha  $O \notin g$ , akkor  $g'$  szintén egy kör. Legyen  $O$  pont  $g$  körre vonatkozó inverze  $O'$  pont és  $O'$  inverze  $k$ -ra nézve  $\widehat{O}$ . Ekkor azt lehet állítani, hogy  $g'$  kör középpontja  $\widehat{O}$ .



*Kör inverzének szerkesztése csak körzövel.*

Legyen  $g$  kör középpontja  $G$  és sugara  $l$ , továbbá legyenek a körök centális egyenesének és  $g$  körnek a metszéspontjai  $P$  és  $Q$ , ezek inverzei  $k$  körre nézve  $P'$  és  $Q'$ . Az inverzió definíciójából a következőket állapíthatjuk meg:

$$OP' = \frac{r^2}{OP}, \quad OQ' = \frac{r^2}{OQ}, \quad OO' \cdot O\widehat{O} = r^2 \quad \text{és} \quad O'G = \frac{l^2}{OG}.$$

Ebből az következik, hogy

$$OP' + OQ' = r^2 \frac{OP + OQ}{OP \cdot OQ} = OO' \cdot O\widehat{O} \frac{2OG}{OP \cdot OQ}.$$

Vezessünk be irányított szakaszokat. Ekkor a következőket mondhatjuk:

$$OP = OG + l, \quad OQ = OG - l, \quad OO' = OG - O'G = OG - \frac{l^2}{OG} = \frac{OG^2 - l^2}{OG}.$$

$$OG \cdot OO' = OG \frac{OG^2 - l^2}{OG} = OG^2 - l^2, \quad \text{és} \quad OP \cdot OQ = OG^2 - l^2.$$

Behelyettesítéssel azt kapjuk, hogy:

$$\frac{OP' + OQ'}{2} = OO' \cdot O\widehat{O} \frac{OG}{OP \cdot OQ} = O\widehat{O} \frac{OG \cdot OO'}{OP \cdot OQ} = O\widehat{O}.$$

Ezek alapján  $\widehat{O}$  valóban  $g'$  kör középpontja. Ha meg akarjuk szerkeszteni  $g'$  kört csak körzővel, akkor az imént mutatott módszerrel kiszerkesztjük a középpontját,  $\widehat{O}$ -t, és egy további tetszőleges  $A$  pontjának is megszerkesztjük az  $A'$  inverzét. Ezzel megszerkesztettük egy kör inverzét csak körzővel.  $\square$

**Megjegyzés:** A bizonyítás során kihasználtuk, hogy a  $g$  kör centruma meg van adva. Amennyiben nincs megadva, akkor meg kell szerkesztenünk a kör középpontját. Tekintsük a kör három pontját. Ez a három pont meghatároz egy háromszöget, aminek a körülírt köre maga a  $g$  kör, aminek középpontja a háromszög oldalfelező merőlegeseinek metszéspontja. Ekkor csak körző segítségével meg tudjuk szerkeszteni két oldalfelező merőleges egyenes két-két pontját. Ezen oldalfelezők metszéspontját már meg tudjuk szerkeszteni csak körzővel. Ezzel megszerkesztettük a  $g$  kör centrumát és így már alkalmazható a fenti módszer  $g$  inverz képének megrajzolására.

Most, hogy meg tudjuk szerkeszteni pontok, egyenesek és körök inverzét csak körzővel, kimondhatjuk a Mohr-Mascheroni tételt.

**4.8. Tétel:** *Minden, körző és vonalzó használatával végrehajtható szerkesztés elvégezhető pusztán körző használatával.*

**Bizonyítás:** Az öt euklideszi alaplépés közül a **(ES2)** és a **(ES5)** lépések végrehajtásához csak körzőre van szükség, tehát ezek megmaradnak a Mascheroni-féle szerkesztésekben is. Ugyan most egyeneseket nem húzhatunk be, de ha adott két pont, akkor a rájuk illeszkedő egyenest megszerkesztettnek vesszünk. Tehát amit tisztázni kell az az, hogy hogyan hajtjuk végre a **(ES3)** és **(ES4)** alaplépéseket csak körzővel.

Elsőként mutassuk meg, hogy hogyan jelöljük ki két metsző egyenes metszéspontját csak körző használatával. Természetesen a metsző egyenesek két-két pontjukkal vannak megadva. Legyen az egyik egyenes ( $e$ )  $A$  és  $B$  pontokkal adva, a másik ( $f$ ) pedig  $P$  és  $Q$  pontokkal. Ekkor alkalmas inverzió megválasztásával, csak körzővel megszerkeszthető  $e$  és  $f$  egyenesek  $e'$  és  $f'$  inverzei. Az inverziót úgy válaszjuk meg, hogy  $e'$  és  $f'$  körök legyenek. Mivel  $e$  és  $f$  metsző egyenesek, ezért  $e'$  és  $f'$  metsző körök lesznek. Egyik metszéspontjuk természetesen az inverzió pólusa lesz, a másik pedig az egyenesek metszéspontjának az inverze (ez két kör metszéspontja, tehát csak körzővel is kijelölhetőek). Legyen ez a metszéspont  $L$ . Ekkor  $L$  pont inverze  $e$  és  $f$  egyenesek metszéspontja lesz. Ezzel sikeresen kijelöltük két egyenes metszéspontját csak körző segítségével.

Most mutassuk meg, hogy hogyan jelöljük ki egy egymást metsző  $g$  kör és  $e$  egyenes metszéspontjait, ha az egyenes két pontjával van megadva. Alkalmas inverzió alkalmazásával vigyük  $e$  egyenest egy  $e'$  körbe úgy, hogy  $g$  képe szintén kör legyen. A mutatott módszerekkel mindkét alakzatnak meg tudjuk szerkeszteni az inverzét pusztán körző segítségével. Mivel  $e'$  és  $g'$  egymást metsző körök, ki tudjuk jelölni a metszéspontjaikat. Ezen metszéspontokon az inverziót végrehajtva megkapjuk  $e$  egyenes és  $g$  kör metszéspontjait.  $\square$



## Irodalomjegyzék

- [1] H. S. M. Coxeter: *A geometriák alapjai*. Műszaki Könyvkiadó, 1987.
- [2] H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer: *Az újra felfedezett geometria*. Gondolat, 1977.
- [3] Hajós György: *Bevezetés a geometriába*. Nemzeti Tankönyvkiadó, 1994.
- [4] Reiman István: *A geometria és határterületei*. Gondolat, 1986.
- [5] Reiman István: *Fejezetek az elemi geometriából*. Tankönyvkiadó, 1987.
- [6] Strohmajer János: *Geometriai példatár 3*. Nemzeti Tankönyvkiadó, 1994.
- [7] Verhóczki László: *Klasszikus differenciálgeometria*. Digitális Tankönyvtár, 2013.