HÁLÓK A KÖZÉPISKOLÁBAN

Szakdolgozat

Készítette:

KISZI GERGELY

Témavezető:

KORÁNDI JÓZSEF

2016

Bevezetés

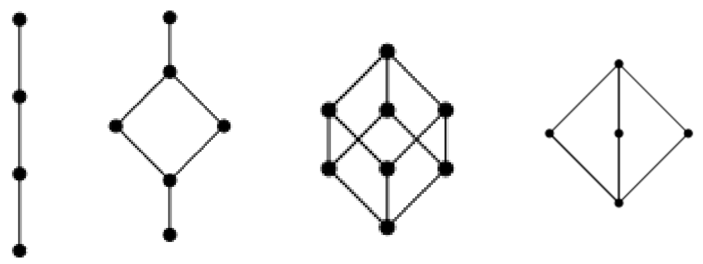
Egyetemi tanulmányaink során az algebra keretében megismerkedtünk olyan algebrai struktúrákkal, mint például csoportok, testek, gyűrűk. Szakdolgozatomban is egy algebrai struktúrát szeretnék bemutatni, a hálót, valamint azt, hogy a hálók hol mindenhol jelennek meg a középiskolában, annak ellenére, hogy magát a fogalmát nem tanítják. Egy matematika tanár képes kell legyen az egyes egyszerű feladatokat nem csak megérteni, és megértetni, hanem azt összekapcsolni olyan különböző témakörök fogalmaival. A diákok gyakran észreveszik a hasonlóságot, valamint és rá is kérdeznek az összefüggésekre. Az egyik ilyen hasonlóság a halmazelmélet és a matematikai logika között van, és ez összeköthető azzal, hogy mind a kettőnek rengeteg köze van a hálókhoz. Ahhoz azonban hogy eljussunk az összefüggés miértjéig meg kell néznünk az egész struktúrát az axiómáktól kezdve. A dolgozatomban lesznek olyan tételek, amiket későbbiek folyamán nem használunk fel, viszont segíti a háló szerkezetének pontosabb megértését. Az általános hálóelméleti tételek mellett a moduláris- valamint a disztributív hálók kapnak jelentős szerepet, továbbá kitérek a Boole-algebrára is. Szakdolgozatom végén összefoglalásként olyan példákat elemzek, mint például a tér altereiből- vagy például a tér konvex halmazaiból képezett háló. Ezekhez az elemzésekhez megoldok néhány, középiskolások által megoldható feladatot is.

Háló

Definíció: Azt a kétműveletes algebrai struktúrát, melynek mind a két művelete kommutatív, asszociatív, továbbá érvényes az elnyelési tulajdonság, **hálónak** nevezzük. Ezt a két műveletet ∨(legkisebb felső korlát, vagy unió) és ∧(legnagyobb alsó korlát vagy metszet) jelöli. A hálókat nyomtatott nagy betűvel jelöljük.

A háló, továbbá $x, y, z \in A$ esetén az alábbi egyenlőségeket hálóaxiómáknak nevezzük:

1. $x \vee y = y \vee x,\ \forall x, y \in A\ esetén$
2. $x \wedge y = y \wedge x\ ,\ \forall x, y \in A\ esetén$
3. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z,\ \forall x, y, z \in A\ esetén$
4. $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z\ \forall x, y, z \in A\ esetén$
5. $x \vee (x \wedge y) = x, \forall x, y \in A\ esetén$
6. $x \wedge (x \vee y) = x,\ \forall x, y \in A\ esetén$



Hálók

A háló definiálására van egy másik lehetőség is, amikre szükségünk van az alábbi tételekre.

<u>**Tétel**</u>: A háló műveletei idempotensek, azaz:

$$\forall x \in A \Longrightarrow x \wedge x = x \text{ és } x \vee x = x$$

Bizonyítás: Használjuk az 5. hálóaxiómát kiindulási alapként, azaz:

$$\forall x, y \in A, x \vee (x \wedge y) = x$$

Vegyük minkét oldalnak az *x*-szel vett legnagyobb alsó korlátját (kommutativitás miatt tetszőleges oldalról):

$$x \wedge [x \vee (x \wedge y)] = x \wedge x$$

Így már jól látható a 6. axióma, a ∧ elnyelési tulajdonsága miatt tehát

$$x = x \wedge x$$

Hasonló módon vizsgáljuk most a 6. axiómát is.

$$\forall x, y \in A, x \wedge (x \vee y) = x$$

Vegyük minkét oldalnak az x-szel vett legkisebb felső korlátját:

$$x \vee [x \wedge (x \vee y)] = x \vee x$$

Azonban az 5. axióma miatt:

$$x = x \vee x \square$$

<u>Tétel</u>: Minden hálóra teljesül, hogy:

$$\forall x, y \in A \text{ esetén } \; x \wedge y = x \; \Leftrightarrow x \vee y = y.$$

Bizonyítás: Tegyük fel tehát hogy:

$$x \vee y = y$$

Vegyük most az egyenlőség mind a két oldalának a *x*-szel balról vett legnagyobb alsó korlátját.

$$x \wedge (x \vee y) = x \wedge y$$

Az egyenlőség bal oldalán a 6. axióma, azaz a metszet elnyelési tulajdonsága miatt *x*-szel egyenlő, tehát megkaptuk a kívánt összefüggést az egyik oldalra:

$$x = x \wedge y$$

Vizsgáljuk meg most a másik irányból, azaz tegyük fel hogy:

$$x \wedge y = x$$

Vegyük x-szel balról a legkisebb felső korlátot:

$$x \vee (x \wedge y) = x \vee y$$

Az 5. axióma miatt az egyenlőség bal oldala egyenlő lesz x-szel, tehát:

$$x = x \vee y \square$$

Tétel: Ha egy kétműveletes algebrai struktúra műveletei asszociatívak, kommutatívak, idempotensek, továbbá teljesül, hogy $\forall x, y \in A$ esetén $x \wedge y = x \Leftrightarrow x \vee y = y$, akkor a két műveletre érvényes az elnyelési azonosság.

Bizonyítás: $\forall x, y \in A$-ra teljesül az alábbi egyenlőség, az asszociatív- és az idempotens tulajdonság alapján:

$$x \wedge (x \wedge y) = (x \wedge x) \wedge y = x \wedge y.$$

Mivel $x \wedge y \in A$ is igaz, így az előbbi egyenlőségből következik az 5. axióma:

$$x \vee (x \wedge y) = x.$$

Hasonló módon felírható:

$$x \vee (x \vee y) = (x \vee x) \vee y = x \vee y.$$

Mivel $x \vee y \in A$, a 6. axióma következik ebből, azaz:

$$x \wedge (x \vee y) = x \square$$

Ebből a tételből következik az alábbi hálódefiníció.

Definíció: Egy kétműveletes algebrai struktúrát $(A^{\wedge,\vee})$ **háló**nak nevezünk, ha műveletei asszociatívak, kommutatívak, idempotensek, továbbá igaz az, hogy $\forall x, y \in A$ esetén $x \wedge y = x \Leftrightarrow x \vee y = y$.

Definíció: Egy állítás **duálisán** azt az állítást értjük, amit a $\vee$ és $\wedge$ jelek megcserélésével kapunk

Dualitás elve: Ha egy tétel levezethető csak hálóaxiómák segítségével, akkor annak a tételnek a duálisa is levezethető belőle.

Részben rendezett halmazok

Definíció: Rendezési relációnak egy reflexív, tranzitív és antiszimmetrikus kétváltozósrelációt értünk egy nem üres halmazon. Ezt a már megszokott ≤ jellel jelöljük. Egy P nem üres halmaz **részben rendezett**, ha értelmezve van egy ≤ kétváltozós reláció melyre teljesül, hogy:

1. $\forall x \in P, x \leq x$
2. Ha $x \leq y$ és $y \leq z$ akkor $x \leq z$
3. Ha $x \leq y$ és $y \leq x$ akkor $x = y$

Vegyünk egy részben rendezett halmaznak egy X részhalmazát, tehát $X \subset P$. Azt mondjuk, hogy $p \in P$ egy **alsó korlátja** X-nek amennyiben $\forall x \in X$ esetén $p \leq x$. $p \in P$ egy **felső korlátja** X-nek ha $\forall x \in X$ esetén $p \geq x$. Egy részben rendezett X **legnagyobb elemének** azt az x elemet tekintjük, melyre igaz, hogy $x \in X$ felső korlátja X halmaznak. Az x a X részben rendezett halmaz **legkisebb eleme,** ha $x \in X$ elsó korlátja X halmaznak. Az X halmaz alsó korlátaiból álló halmaznak a legnagyobb elemét az X **legnagyobb alsó korlátjának** hívjuk és inf(X) jelöléssel látjuk el, az X halmaz felső korlátaiból álló halmaznak a legkisebb elemét az X **legkisebb felső korlátjának** nevezzük, jele sup(X). Viszont nem minden részben rendezett halmaznak létezik legnagyobb alsó-, illetve legkisebb felső korlátja, azonban ha létezik legkisebb eleme, akkor az nullelemesnek, ha pedig létezik legnagyobb eleme, akkor egységelemesnek hívjuk. Részben rendezések esetében beszélhetünk még fedésekről is.

Definíció: Amennyiben adott $x, y \in P$ részben rendezett halmaz, azt mondjuk, hogy y fedi x-et ha $x < y$ és $\nexists z \in P$ hogy $x < z < y$. Jelölése: $x \prec y$.

Állítás: Ha egy részben rendezett P halmaznak bármely kételemű részhalmazának van legnagyobb alsó-, illetve legkisebb felső korlátja a P halmazban, akkor ebből a halmazból hálót lehet képezni, és

$$\forall x, y \in P\ x \vee y = \sup(x, y)\,, x \wedge y = \inf(x, y).$$

Bizonyítás: A bizonyításban a 2. hálódefinícióban leírt tulajdonságokat vizsgáljuk meg. Nyilvánvaló, hogy az így definiált egyenletekben az x és y sorrendje tetszőleges, tehát teljesül az kommutativitás. Az asszociatív tulajdonság is nyilván való, hiszen: $\sup\big(y, \sup(y,z)\big) = \sup(\sup(x,y), z)$ $\forall x, y, z \in P$ elemekre teljesül. Azt hogy idempotens a szuprémum illetve az infémum egyszerű belátni, hiszen $\forall x \in P, x \le x$ igaz hogy $\sup(x,x) = x$ és $\inf(x,x) = x$ és $x \vee x = x, x \wedge x = x$. $\sup(x,y) = x$ akkor és csak akkor egy részben rendezési reláció.

<u>Tétel:</u> Minden hálóra felírható egy részben rendezési reláció.

Bizonyítás: A háló idempotens tulajdonsága miatt igaz lesz, hogy $\forall x \in P, x \le x$.

Vizsgáljuk $\forall x, y, z \in P$ ahol $x \le y$ és $y \le z$. Ezek az egyenlőségek alapján felírhatóak az alábbi egyenlőségek:

$$x \vee y = y \text{ és } y \vee z = z.$$

Helyettesítsünk be az 1. egyenlőséget felhasználva a 2-ba.

$$(x \vee y) \vee z = z.$$

A hálóműveletek asszociativitása miatt:

$$x \vee (y \vee z) = z.$$

Felhasználva hogy $y \le z$, azt kapjuk, hogy $x \vee z = z$, ami azt jelenti, hogy $x \le z$. Tehát teljesül a rendezési relációnak a tranzitív tulajdonsága is. Vizsgáljuk $\forall x, y \in P$ ahol $x \le y$ és $y \le x$. Ebből következik, hogy $\sup(x,y) = x$ és $\sup(x,y) = y$. Ez természetesen akkor és csak akkor lesz igaz, ha $x = y$. □

Állítás: Egy *P* háló tetszőleges nem részhalmazának van szuprémuma és infimuma, és

$$\inf(p_1, p_2 \dots, p_N) = p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_N$$

$$\sup(p_1, p_2 \dots, p_N) = p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_N$$

Bizonyítás: Ahhoz, hogy az 1 egyenlőség igazak legyen, két dolgot kell belátni.

1. $\forall i = 1..N\ (p_i \in P)$, $p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_N \le p_i$
2. $k \le\ p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_N$, ahol k a P és alsó korlátja.

Az 1. állítás nyilván igaz, hiszen a háló definiálható egy részben rendezés ahol,

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_N \le p_i.$$

Az alsó korlátokról tudjuk, hogy $\forall i = 1 \dots N,\ k \wedge p_i = k,$ elvégre részben rendezés definiálható. Vizsgáljuk meg *k* és $p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_N$ metszetét:

$$k \wedge (p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_N) = (k \wedge p_1) \wedge (p_2 \wedge \dots \wedge p_N) = k \wedge (p_2 \wedge \dots \wedge p_N)$$

Ezt a folyamatot követve:

$$(k \wedge p_2) \wedge (p_3 \wedge \ldots \wedge p_N) = k \wedge (p_3 \wedge \ldots \wedge p_N) = \cdots = k \wedge p_n = k$$

Azaz megkaptuk, hogy:

$$k \wedge (p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_N) = k.$$

Ebből következik a 2. bebizonyítandó állítás, azaz hogy $k \leq p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_N$.

A 2. egyenlőség bizonyításához a következő 2 állítást kell bizonyítani:

1. $\forall i = 1..N\ (p_i \in P), p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_N \geq p_i$
2. $k \geq p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_N,$ ahol k a P $és$ felső korlátja.

A dualitás elve miatt ezeknek az állításoknak a bizonyítása lépésről-lépésre megegyezik az előző állítások bizonyításával, a $\vee$ és $\wedge$ jelek, valamint a relációk felcserélésével ugyan az.□

Definíció: Az *A* háló **részhálójának** azt a *R* halmazt nevezzük, amire teljesül, hogy $\forall x \in R$ esetén $x \in A$ és az *R* hálót alkot az *A*-beli műveletekre.

Ebből a definícióból következik, hogy a részhálónak a műveletei zártak, tovább, hogy minden háló részhálója önmagának. Ezenkívül az is nyilvánvaló, hogy az egyelemű részhalmaz is részháló, elvégre a háló minden elemére teljesül, hogy. $x = x \wedge x$ és $x = x \vee x$. Ezeket a részhálókat triviális részhálóknak nevezzük.

Tétel: Tetszőleges *A* háló esetén $\forall x, y, z \in A$-re teljesül hogy

$$x \wedge y \leq x \vee z.$$

Bizonyítás: Vizsgáljuk az alábbi egyenlőtlenségeket:

$$x \wedge y \leq x,$$

$$x \leq x \vee z.$$

Mivel ez egy részben rendezés, arról meg tudjuk hogy tranzitív, ezért tényleg igaz hogy

$$x \wedge y \leq x \vee z. \square$$

Tétel:$\forall x, y, z \in A$ esetén

$$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) \leq (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$$

Bizonyítás: $x \wedge y \leq x \vee y$, $x \wedge z \leq x \vee y$, $z \wedge y \leq x \vee y$ mindegyike teljesülni fog. Ebből adódóan a $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)$–nek egy felső korlátja lesz az $x \vee y$. Ugyan így elmondható $y \vee z$ és $z \vee x$ kifejezésekről is hogy $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)$–nek felső korlátjai. Ezeknek a felső korlátoknak a metszete is felső korlátja lesz a $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)$ kifejezésnek.□

Definíció:: Ha $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$ egyenlőség teljesül valamely $x, y, z \in A$ akkor $med(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)$ jelölést használjuk rá és az x, y, z **mediánsának** nevezzük.

Speciális Hálók

Komplementumos hálók

Elsőként vegyük a legegyszerűbb hálót, a **lánc**ot. Láncnak (L), az olyan részben rendezett halmazokat nevezzük melyek trichotóm, azaz $\forall x, y \in L, x \leq y$ vagy $x \geq y$. Az azzal a különleges tulajdonsággal rendelkezik, hogy bármely két elemet kiválasztva az egyik a két elem legnagyobb alsó korlátja lesz, míg a másik a két elem legkisebb felső korlátja lesz, azaz

$$\forall x, y \in L\ x \wedge y = x \text{ vagy } x \wedge y = y$$

Definíció: Ha egy A háló minden részhálójának van legkisebb felső, illetve legnagyobb alsó korlátja, **teljes háló**nak nevezzük.

Definíció: Az A-t **alulról korlátos** hálónak nevezzük, ha $\exists x \in A$ hogy $\forall y \in A$ esetén $x \wedge y = x$, és itt az x egy alsó korlát. Az A-t **felülről korlátos** hálónak nevezzük, ha $\exists x \in A$ hogy $\forall y \in A$ esetén $x \vee y = x$ és az x-et felső korlátnak hívjuk. Az A-t **korlátos hálónak** nevezzük, ha alulról és felülről is korlátos.

Definíció: Az A háló legnagyobb alsó korlátját $\mathbf{0}_A$, míg a legkisebb felső korlátjukat $\mathbf{1}_A$ jelekkel tüntetjük ki.

Definíció: R korlátos háló, akkor azt a R' halmazt melyre teljesül, hogy $R \wedge R' = 0_R$ és $R \vee R' = 1_R$ az R háló **komplementumának**, vagy kiegészítő halmazának nevezzük. Egy A korlátos hálónak egy x elemét **komplementumos elemnek** nevezzük, ha létezik legalább egy komplementuma, és **egyértelműen komplementumosnak**, ha csak egy ilyen létezik.

Definíció: Az A hálót **komplementumosnak** hívjuk, ha minden részhálója komplementumos, illetve ha minden részhálója egyértelműen komplementumos, akkora hálót is **egyértelműen komplementumosnak** nevezzük.

Ahhoz hogy tovább haladjunk a relatív komplementumos hálók definíciójához, meg kell ismerni az mit is jelent egy hálónak az intervalluma. Az intervallum fogalmával már 9. osztályban megtanítják a valós számok halmazán. A mostani definíció nagyon hasonlít az akkorira, csak most általánosabbanbeszélünk róla.

Definíció: Adott A háló **intervallumán** azt az $[a,b]$ halmazt értjük,melyre

$$[a, b] = \{x |\ x \in A, a \leq x \leq b\}.$$

Egy intervallum minden $a, b (\in A)$ esetén korlátos részháló lesz, ha $a \leq b$, hiszen részháló és van legnagyobb alsó és legkisebb felső korlátja. továbbá ez bármely két elemre is teljesül. Abban az esetben ha $a = b$ akkor $[a, a]$ az egyelemű háló lesz, valamint ha az $a = 0_A$ és $b = 1_A$ akkor a $[a,b]$ a teljes A hálót fogja jelenteni.

Definíció: Adott A háló, és $x, y, p \in A$ és $x \leq p \leq y$. Ha $q \in A$ és $p \wedge q = x$ és $p \vee q = y$. akkor a q-t a p elem a $[x,y]$ intervallumbeli **relatív komplementumának** nevezzük.

Definíció: Egy háló **relatív komplementumos,** ha mindem részhálója komplementumos. Másként úgy is megfogalmazhatjuk, hogy egy A háló relatív komplementumos, ha $\forall x, y$ és $x \leq y \in A$ esetén a $[x,y]$ intervallum relatív komplementumos.

Disztributív hálók

Definíció: Azt mondjuk, hogy egy A háló **disztributív**, ha

$$\forall x, y, z \ \in A\ (x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z) \text{ és } (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z).$$

Állítás: A két egyenlet ekvivalens egymással, azaz

$$\forall x, y, z \in A (x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z) \leftrightarrow (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$$

Bizonyítás: Tegyük fel hogy $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$ teljesül, tehát tetszőleges $c \in A$ esetén:

$$(x \wedge y) \vee c = (x \vee c) \wedge (y \vee c)$$

Legyen $c = x \wedge z$, hiszen $x \wedge z \in A$.

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = (x \vee (x \wedge z)) \wedge (y \vee (x \wedge z))$$

Az elnyelési tulajdonság miatt:

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge (y \vee (x \wedge z))$$

Továbbá $y \vee (x \wedge z) = (x \wedge z) \vee y$ a kommutatív tulajdonság miatt, és itt felhasználjuk a disztributív tulajdonságot, amit feltettünk.

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge ((y \vee x) \wedge (y \vee z))$$

A $\wedge$ asszociatív, majd az elnyelési azonosságot alkalmazva tehát

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = (x \wedge (y \vee x)) \wedge (y \vee z)$$

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge (y \vee z)$$

Ezzel tehát bebizonyítottuk, hogy a 1. egyenlőségből levezethető a 2. is azaz, hogy a $\wedge$ művelet disztributív a $\vee$-ra nézve. A dualitás elve miatt a másik oldali bizonyítás elhagyható, hiszen a tételben a $\wedge$ és a $\vee$ felcserélhető.□

<u>Tétel (Egyszerűsítési szabály)</u>: Adott A disztibutív háló és $x, y, p \in A$,

$$(p \wedge x = p \wedge y \text{ és } p \vee x = p \vee y) \rightarrow x = y$$

Bizonyítás: Írjuk fel az elnyelési azonosságot *x*-re és *y*-ra is

$$x = x \vee (x \wedge p) \text{ és } y = y \vee (y \wedge p)$$

Itt behelyettesíthetünk a tételben feltett egyenlőségek segítségével ($p \wedge x = p \wedge y$).

$$x = x \vee (y \wedge p) \text{ és } y = y \vee (x \wedge p)$$

Itt használjuk fel hogy a hálónk disztributív:

$$x = (x \vee y) \wedge (x \vee p) \text{ és } y = (y \vee x) \wedge (y \vee p)$$

majd megint a feltétel segítségével alakítsuk az egyiket ($p \vee x = p \vee y$):

$$x = (x \vee y) \wedge (x \vee p) = (y \vee x) \wedge (y \vee p) = y$$

Vagyis megkaptuk a bebizonyítandó állítást, azaz:

$$x = y \ \square$$

Ebből persze következik, hogy:

Tétel: A disztributív hálók bármely elemének legfeljebb egy relatív komplementuma van akármelyik őt tartalmazó intervallumban.

Bizonyítás: Vizsgáljuk tetszőleges $x, y \in A$ esetén a $p \in [x, y]$ elemet. Tegyük fel a, b relatív komplementumai p-nek. Ekkor

$$p \wedge a = x \text{ és } p \vee a = y,$$

$$p \wedge b = x \text{ és } p \vee b = y.$$

Mivel 4 egyenlőség teljesül, az egyszerűsítési szabály miatt, $a = b$, tehát az intervallum egyértelműen komplementumos. Mivel x, y választása tetszőleges volt, így a háló bármelyik intervallumára elmondható ez, tehát a hálónk relatív komplementumos. □

Tétel(De Morgan–azonosságok): Ha egy A korlátos, disztributív háló bármely 2 elemének van komplementuma, akkor a két elem komplementumának metszete egyenlő azegyesítés komplementumával. A dualitás elve miatt persze a fordítva is igaz az állítás, azaz két elem komplementumának egyesítése egyenlő a metszet komplementumával:

$$\forall x, y \in A, (x \wedge y)' = x' \vee y' \text{ és} (x \vee y)' = x' \wedge y'$$

Bizonyítás: A bizonyításban először érdemes megvizsgálni, hogy valóban komplementuma-e a$x \vee y$ a $x' \wedge y'$ nek.

$$(x \vee y) \vee (x' \wedge y') = [(x \vee y) \vee x'] \wedge [(x \vee y) \vee y'] = [y \vee (x \vee x')] \wedge [x \vee (y \vee y')]$$

$$(x \wedge y) \vee (x' \vee y') = [(x \wedge y) \wedge x'] \vee [(x \wedge y) \wedge y'] = [y \wedge (x \wedge x')] \vee [x \wedge (y \wedge y')]$$

Mivel $x \vee x' = y \wedge y' = 1_A$ *és* $x \wedge x' = y \wedge y' = 0_A$ ezért:

$$[y \vee (x \vee x')] \wedge [x \vee (y \vee y')] = [y \vee 1_A] \wedge [x \vee 1_A] = 1_A \wedge 1_A = 1_A$$

$$[y \wedge (x \wedge x')] \vee [x \wedge (y \wedge y')] = [y \wedge 0_A] \vee [x \wedge 0_A] = 0_A \vee 0_A = 0_A$$

Ebből észrevehető, hogy ezek jó komplementumok, továbbá azt is tudjuk, hogy disztributív hálóknak bármely eleméhez legfeljebb egy komplementumtartozhat, tehát az egyetlen megoldás ez lesz.□

Ebből a tételből már levezethető, hogy a komplementum képzés egy rendezésfordító leképezés, hiszen ha $x, y \in A$ *és* $x \leq y$ akkor:

$$x' = (x \wedge y)' = x' \vee y'$$

Amiből meg egyértelműen következik, hogy $x' \geq y'$.□

Moduláris hálók

Definíció: Egy *A* háló **moduláris,** ha $x \leq z$ $(x, y, z \in A)$ igaz hogy:

$$(x \vee y) \wedge z = x \vee (y \wedge z)$$

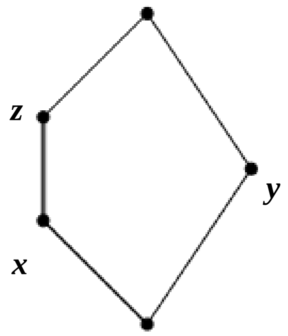
<u>Dedekind–tétel</u>: Egy háló moduláris akkor és csak akkor, ha nincsen az N_5 hálóval izomorf részhálója.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a háló (*A*) moduláris, tehát telje. Vizsgáljuk meg a $x, y, z \in N_5, x \leq z$ elemeket N_5 hálóban. $x \vee y = 1_{N_5}$, *és* $y \wedge z = 0_{N_5}$. Ebből már következik, hogy:

$$(x \vee y) \wedge z = 1_{N_5} \wedge z = z$$

$$x \vee (y \wedge z) = x \vee 0_{N_5} = x$$

$x \neq z$ tehát az N_5 nem moduláris, továbbá nem lehet részháló sem, mivel a ∧ és ∨ zártak.



N_5 *háló*, $x \leq z$

A bizonyítás másik felében tegyük fel, hogy az A háló nem moduláris. Ekkor igaz, hogy $\exists x, y, z \in A$ melyekre igaz hogy $x \leq z$ és $x\vee(y\wedge z) < (x\vee y)\wedge z$. Vizsgáljuk meg azt az $N = \{a, a', b, c, c'\}$ halmaz hálót alkot-e a $\wedge$ és $\vee$ műveletekre, ahol $a = y\wedge z, a' = x\vee a, b = y, c = x\vee y$ és $c' = z\wedge c$. Mivel $a \leq a' < c' \leq c$, valamint az $a \leq b \leq c$ ezért ezek láncok, így zártak a háló műveletekre. Abban az esetben ha $c'\wedge b, c'\vee b, a'\wedge b, a'\vee b$ is a háló elemei, akkor N egy N_5.

$$c'\wedge b = \big(z\wedge(x\vee y)\big)\wedge y = y\wedge(x\vee y)\wedge z = y\wedge z = a$$

Mivel $a \leq a'\wedge b \leq c'\wedge b = (z\wedge c)\wedge b = z\wedge(c\wedge b) = z\wedge b = a$, ezért $a'\wedge b = a$ szintén egy N-beli elem.

$$a'\vee b = \big(x\vee(z\wedge y)\big)\vee y = y\vee(y\wedge z)\vee x = y\vee x = c$$

$c \geq c'\vee b \geq a'\vee b = (x\vee a)\vee b = x\vee(a\vee b) = x\vee b = c$ egyenlőségből következik, hogy $c'\vee b = c$. Tehát a $\wedge,\vee$ műveletek zártak a N-ben, tehát tényleg háló, továbbá az A részhálója. Az így keletkező N azonban nem moduláris háló, hiszen $a' \leq c', b$ elemekre:

$$(a'\vee b)\wedge c' = c\wedge c' = c' > a' = a'\wedge c = a'\vee(b\wedge c')$$

Ebből már következik, hogy N izomorf N_5-tel, ugyanis ez az egyetlen 5 elemből álló, nem moduláris háló.□

Elsőként azt szeretném megmutatni, hogy minden disztributív háló moduláris. Ennek az igazolásában csak azt használjuk hogy $x\vee z = z$ a $x < z$ miatt $x\vee(y\wedge z) = (x\vee y)\wedge(x\vee z) = (x\vee y)\wedge z$ és meg is kaptuk, hogy minden disztributív háló moduláris. Az is triviális, hogy minden moduláris háló részhálója is moduláris, elvégre, a 2 művelet zárt minden hálóban.

A következő tételekben olyan szükséges és elégséges feltételeket fogok ismertetni és bebizonyítani, ami egy hálóról eldönti, hogy az moduláris-e vagy sem, továbbá visszatekintünk a disztributív hálókra is.

Tétel: Egy *A* háló moduláris akkor és csak akkor ha

$$\forall x, y, z \in A \text{ esetén}, x \vee \big(y \wedge (x \vee z)\big) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

Bizonyítás: Ha a háló moduláris, akkor $x \leq p$ ($p \in A$) és $p = (x \vee z)$ esetén, a $(x \vee y) \wedge p = x \vee (y \wedge p)$ egyenlőségbe behelyettesítve megkapjuk, hogy:

$$(x \vee y) \wedge (x \vee z) = x \vee \big(y \wedge (x \vee z)\big).$$

Ha teljesül rá az egyenlet a hálóban, azaz, $x \vee \big(y \wedge (x \vee z)\big) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$, és még olyan $x, y, z \in A$ választunk ahol: $x \leq z$, akkor megkapjuk azt, hogy $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$, azaz a háló tényleg moduláris.□

Ennek a tételnek az alkalmazása elég sok számolást venne igénybe, meg kell vizsgálni minden *A* minden 3 elemű részhalmazát, számolással pedig ez sokáig tartana,viszont ez már egy könnyen leprogramozható feladat. A következő tétel használata tehát sok esetben hatásosabbnak bizonyulhat.

Tétel: Egy *A* háló moduláris, akkor és csak akkor ha, $x \leq z$ esetén $\exists med(x, y, z)$.

Bizonyítás: Vizsgáljuk meg a $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)$ kifejezést. $z \wedge x = x,$ hiszen $x \leq z$. $(x \wedge y) \vee x = x$, hiszen $x \wedge y \leq x$. Így az alábbi egyenlőséget kapjuk:

$$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = x \vee (y \wedge z)$$

Hasonló elgondolással $z \vee x = z$ és $(z \vee y) \wedge (z \vee x) = z$.

$$(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) = (x \vee y) \wedge z$$

Ebből következik hogy ha $\exists med(x, y, z)$ akkor $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$, és ez fordítva is igaz, ha a háló moduláris, akkor $\exists med(x, y, z)$.□

Tétel: *A* háló disztributív akkor és csak akkor, ha bármely három elemének létezik mediánsa.

*Bizonyítás:*Tegyük fel, hogy A disztributív. Ekkor tetszőleges $x, y, z \in A$ elemekre:

$$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = \big((x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee z\big) \wedge \big((x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee x\big)$$

Felhasználva a hálóaxiómákat:

$$\big((x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee z\big) \wedge \big((x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee x\big) = \big((x \wedge y) \vee z\big) \wedge ((y \wedge z) \vee x)$$

Disztributivitás miatt:

$$\begin{aligned}\big((x \wedge y) \vee z\big) \wedge \big((y \wedge z) \vee x\big) &= [(x \vee z) \wedge (z \vee y)] \wedge [(y \vee x) \wedge (z \vee x)] = \\ &= (x \vee z) \wedge (z \vee y) \wedge (y \vee x) \wedge (z \vee x) = (x \vee z) \wedge (z \vee y) \wedge (y \vee x).\end{aligned}$$

Azaz megkaptuk hogy $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \vee z) \wedge (z \vee y) \wedge (y \vee x) = med(x, y, z)$

Most megnézzük a ← irányt. Használjuk fel hogy $x = x \wedge (x \vee y) \wedge (x \vee z)$, ahol $x, y, z \in A$.

$$x \wedge (y \vee z) = x \wedge (x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (z \vee y) = x \wedge [(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)]$$

Mivel a háló disztributív, ezért moduláris is, tehát felhasználva $x \leq (x \wedge z) \vee (x \wedge y)$, ezért:

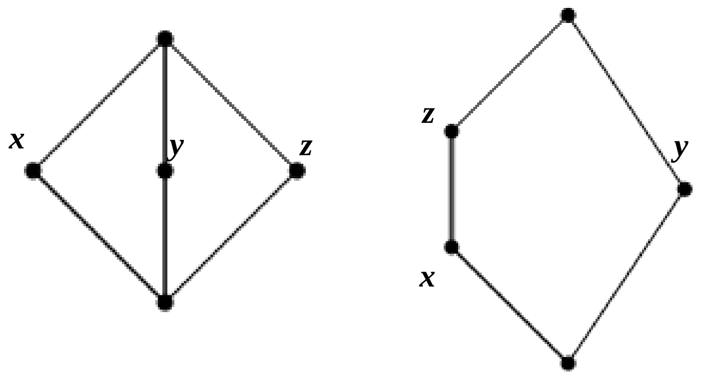
$$x \wedge [(y \wedge z) \vee (x \wedge y) \vee (z \wedge x)] = (x \wedge y \wedge z) \vee [(x \wedge z) \vee (x \wedge y)] = (x \wedge z) \vee (x \wedge y)$$

Hiszen $(x \wedge y \wedge z) \leq (x \wedge z) \vee (x \wedge y)$ tehát tényleg igaz, hogy $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge z) \vee (x \wedge y)$.□

<u>Birkhoff–tétel</u>: Egy háló akkor és csak akkor disztributív, ha nincs a M_3 és az N_5 hálóval izomorf részhálója.

*Bizonyítás:*Először lássuk be hogy az M_3 és az N_5 nem disztributívak.

M_3 esetén vegyük a $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$. Itt a $x \vee y = 1_{M_3}$ és $x \wedge z = y \wedge z = 0_{M_3}$ és tovább számolva megkapjuk, hogy $1_{M_3} \wedge z = z$ és $0_{M_3} \vee 0_{M_3} = 0_{M_3}$. Mivel $z \neq 0_{M_3}$ ezért az M_3 nem disztributív.



M_3*és az* N_5

Az N_5 esetén vegyük ugyanúgy, mint az előbb az $(x \vee y) \wedge z, = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ egyenletet. $x \vee y = 1_{N_5}$, $x \wedge z = x$, $y \wedge z = 0_{N_5}$ tehát megkaptuk, hogy $1_{N_5} \wedge z = x \vee 0_{N_5}$, ami természetesen nem igaz hiszen $z \neq x$. Mivel egy disztributív háló minden részhálója disztributív, ezért az is kiderül,h ogy az M_3 és az N_5 egy disztributív hálónak sem lehet részhálója. A bizonyítás egyik felével kész vagyunk, most már csak a visszafele irányt kell bebizonyítani.

Legyen A egy moduláris, nem disztributív háló. Válasszunk 3 elemet a hálóból (p,q,r) úgy, hogy $\nexists med(p,q,r)$. Ebből következik, hogy, $u = (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$, $v = (p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ esetén $u < v$. Mivel a háló moduláris, ezért $x = u \vee (p \wedge v) = (u \vee p) \wedge v, y = u \vee (q \wedge v) = (u \vee q) \wedge v$ *és* $z = u \vee (r \wedge v) = (u \vee r) \wedge v$ egyenlőségek teljesülni fognak. Vizsgáljuk meg a$N = \{u, x, y, z, v\}$ halmazt, hogy hálót alkotnak-e.

$$x = (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee [p \wedge (p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee r)]$$

Egyszerűsítsük le az egyenlőséget annak a segítségével, hogy $p \vee q \geq p$ *és* $p \vee r \geq p$.

$$x = (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee [p \wedge (q \vee r)]$$

Vegyük észre továbbá azt is, hogy $p \wedge (q \vee r) \geq p \wedge r$, $p \wedge (q \vee r) \geq p \wedge q$, amiből következik, hogy:

$$x = (q \wedge r) \vee [p \wedge (q \vee r)]$$

Hasonló gondolatmenettel az y is leegyszerűsíthető:

$$y = (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee [q \wedge (p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee r)] = (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee [q \wedge (p \vee r)] =$$
$$= (p \wedge r) \vee [q \wedge (p \vee r)]$$

Vizsgáljuk ennek a *x,y* egyesítését.

$$x \vee y = (q \wedge r) \vee [p \wedge (q \vee r)] \vee (p \wedge r) \vee [q \wedge (p \vee r)]$$

Tudjuk továbbá, hogy $q \wedge r \leq q \wedge (p \vee r)$és $p \wedge r \leq p \wedge (q \vee r)$, amiből az alábbi egyenlőséget kapjuk:

$$x \vee y = [p \wedge (q \vee r)] \vee [q \wedge (p \vee r)]$$

Most használjuk fel, hogy a háló moduláris, elvégre $p \wedge (q \vee r) \leq p \leq p \vee r$ egyenlőtlenségből következik, hogy $p \wedge (q \vee r) \leq p \vee r$.

$$x \vee y = ([p \wedge (q \vee r)] \vee q) \wedge (p \vee r) = (q \vee [p \wedge (q \vee r)]) \wedge (p \vee r)$$

Alkalmazzuk ismét a moduláris tulajdonságot, csak a $q \leq q \vee r$ egyenlőtlenséget felhasználva:

$$x \vee y = \big((p \vee q) \wedge (q \vee r)\big) \wedge (p \vee r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee r) = v$$

Dualitás elve miatt az is igaz lesz, hogy $x \wedge y = u$. Továbbá szimmetrikusan adtuk meg a *x,y,z* elemeket, tehát bármelyik kettőnek a metszete *u*, és egyesítse *v*. Mivel minden 5 vagy annál kevesebb elemű nem disztributív moduláris háló izomorf M_3-mal, ezért ha az *N* nem disztributív, akkor van az *A* hálónak M_3-mal izomorf részhálója. Ha disztributív lenne az *N*, akkor teljesülne hogy:

$$x = x \vee u = x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) = v$$

$$x = x \wedge v = x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) = u$$

A két egyenlőségből megkaptuk, hogy $v = u$, ami meg ellentmond annak, hogy $v > u$, tehát nem lehet az *N* disztributív, tehát $N \cong M_3$.□

<u>Intervallumizomorfizmus-tétel</u>: Minden moduláris hálóra teljesül, hogy,

$$\forall x, y \in A \ , [y, x \vee y] \cong [y \wedge x, x]$$

Bizonyítás: Vezessünk be $\mu_1(p) = p \vee y$. Ebből következik, hogy a $[x \wedge y, x]$ intervallumot a $[y, x \vee y]$ intervallumba képzi. Legyen továbbá egy μ_2 leképezést, úgy hogy $\mu_2\ (p) = p \wedge x$. Ez a leképezés a $[y, x \vee y]$ intervallumot a $[x \vee y, x]$ intervallumba képezi le. Természetesen ezek rendezéstartó leképezések, hiszen ha $z_1 \leq z_2$, akkor $z_1 \wedge x \leq z_2 x, \text{és}\ z_1 \vee y \leq z_2 \vee y$ is teljesül. Mivel a háló moduláris, ezért ha $y \leq p \leq x \vee y$ akkor $\mu_1 \circ \mu_2(p) = (p \wedge x) \vee y = p \wedge (x \vee y) = p$ Hasonló módon $x \wedge y \leq q \leq x$ akkor $\mu_2 \circ \mu_1(q) = (q \vee y) \wedge x = x \wedge (y \vee q) =$

$= (x \wedge y) \vee q = q$. Mivel a 2 leképezésünk (μ_1, μ_2) rendezéstartó és létezik inverze, ezért ezek egymás inverzei lesznek, tehát ezek kölcsönösen egyértelmű leképezések. Ebből következik hogy $[y, x \vee y] \cong [y \wedge x, x]$.□

Egyszer már definiált láncnak nézzük meg egy másik, az előzővel egyenértékű definícióját, ami a láncot mint sorozatot értelmezi.

Definíció: Adott A háló és $x, y \in A$ melyekre igaz hogy $\mathrm{x} \leq \mathrm{y}$, akkor azt az $\forall \mathrm{n_i} \in \mathrm{A}$ sorozatot **lánc**nak nevezzünk, amire igaz, hogy:

$$x = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = y$$

Itt az x és y közötti lánc, melynek hossza n. Abban az esetben, ha igaz hogy $x_i \prec x_{i+1}$ $(0 \leq i < n)$, akkor ez egy maximális lánc és az n számot az $[x, y]$ intervallum hosszának nevezzük, mivel ez a leghosszabb lánc a két pont között. Jelölése:$\delta(x, y) = n$.

Definíció: Adott A háló, ami nullelemes, továbbá moduláris. Egy $x \in A$ **dimenzióján** azt a számot értjük, amely a $[0, x]$ intervallumban található maximális lánc hosszával egyenlő, azaz $d(x) = \delta(0, x)$. Ad függvényt a háló dimenziófüggvényének nevezzük. Amennyiben minden elem dimenziója legfeljebb $n \in \mathbb{N}$, akkor azt mondjuk, hogy a háló véges magasságú.

<u>Tétet:</u> Adott A nullelemes, moduláris háló, és $x, y \in A$, ahol $d(x) = n, d(y) = m$ $(m, n \in \mathbb{N})$ akkor:

$$d(x \vee y) = d(x) + d(y) - d(x \wedge y)$$

Bizonyítás: Először is nézzük a $d(x) = \delta(0, x)$. A $[0, x]$ intervallum felbontható úgy, hogy $[0, x \wedge y]$ $és$ $[x \wedge y, x]$ egyesítése, tehát megkaptuk, hogy

$$d(x) = \delta(0, x \wedge y) + \delta(x \wedge y, x) = d(x \wedge y) + \delta(x \wedge y, x).$$

Ebből következik hogy:

$$\delta(x \wedge y, x) = d(x) - d(x \wedge y)$$

Hasonló módon felbonthatjuk a $[0, x \vee y]$ intervallumot is:

$$d(x \vee y) = \delta(0, y) + \delta(y, x \vee y) = d(y) + \delta(y, x \vee y)$$

Itt felhasználva az Intervallumizomorfizmus-tételt, azaz $[y, x\vee y] \cong [y\wedge x, x]$:

$$d(x\vee y) = \delta(0, y) + \delta(y, x\vee y) = d(y) + \delta(x\wedge y, x)$$

Behelyettesítve $\delta(x\wedge y, x)$-re megkapott egyenlőséget, megkapjuk hogy:

$$d(x\vee y) = d(y) + d(x) - d(x\wedge y)\square$$

<u>Tétel</u>: A komplementumos moduláris hálók relatív komplementumos hálók.

Bizonyítás: A komplementumos moduláris háló, $x, y, p \in A$ és $x \leq p \leq y$ úgy, hogy p komplementumos elem, komplementuma q. Mivel a hálónk moduláris, ezért létezik egy $a = (x\vee q)\wedge y = x\vee(q\wedge y)$. Vizsgáljuk meg p és a metszetét.

$$p\wedge a = p\wedge[(x\vee q)\wedge y] = (x\vee q)\wedge(y\wedge p) = (x\vee q)\wedge p$$

Mivel a hálónk moduláris, továbbá teljesül az is, hogy $x \leq p$ így definíció alapján

$$(x\vee q)\wedge p = x\vee(q\wedge p)$$

Felhasználva azt, hogy a p és a q egymás komplementumai (tehát $p\wedge q = 0_A$), azt kapjuk, hogy:

$$p\wedge a = x\vee 0_A = x$$

Ehhez hasonló módon számolva megkapjuk, hogy az p és a egyesítése:

$$p\vee a = p\vee[(x\vee q)\wedge y] = (p\vee x)\vee(q\wedge y) = (p\vee q)\wedge y$$

$$p\vee a = y\wedge 1_A = y$$

Ezzel a két egyenlettel megkaptuk a relatív komplumentumát a p-nek, tehát a hálón relatív komplementumos, hiszen ez bármely $[x, y]$ intervallumra elmondható.□

Boole-algebra

A Boole-algebra gyakran a hálók ismerete nélkül kerül szóba, hiszen lehet definiálni, mint egy legalább kételemű halmaz, azon értelmezett ∧(gyakran „és”) valamint a ∨(„vagy”) kétváltozós művelettel,amelyekre teljesül a kommutativitás, az asszociativitás, továbbá teljesülnek az elnyelési azonosságok,és a műveletek disztributívak egymásra nézve.

Értelmezett továbbá $'\neg'$ egyváltozós művelet ami, komplementumot képez. A hálók ismeretében azonban bevezethető egy új definíció is.

Definíció: A legalább kételemű, komplementumos disztributív hálót **Boole-algebrának** nevezzük.

Mindamellett hogy a Boole-algebrában a műveletek asszociatívak, kommutatívak és érvényesül az elnyelési tulajdonság is, továbbra is idempotensek maradnak a műveletek és a De–Morgan azonosságok is igazak.

Az egyik legismertebb Boole-algebra, az egy *X* halmaz részhalmazaiból, mint elemekből képzett struktúra, ahol a két művelet az ∩ és a ∪. Ekkor, mint látni fogjuk a legkisebb elem az üres halmaz, a legnagyobb pedig maga az X halmaz.

Tétel: Egy tetszőleges *X* halmaz összes részhalmazának halmaza az ∩ és a ∪ műveletekkel Boole-algebrát alkotnak.

*Bizonyítás:*Legyen *X* a kiindulási halmaz, és jelölje *X* összes halmazának halmazát*P(X)*

$$\forall x, y \in P(X), x \cap y = \{a \mid a \in X \text{ és } [a \in x \text{ és } a \in y]\}$$

$$\forall x, y \in P(X), x \cup y = \{a \mid a \in X \text{ és } [a \in x \; vagy \; a \in y]\}$$

Ezek a definíciók alapján a triviális hogy teljesül az asszociativitás, a kommutativitás és az elnyelési azonosság is. Vizsgáljuk meg, hogy komplementumos a háló:

$$\forall x \in P(X), \exists y \in P(X), x \cap y = \emptyset \text{ és } x \cup y = X$$

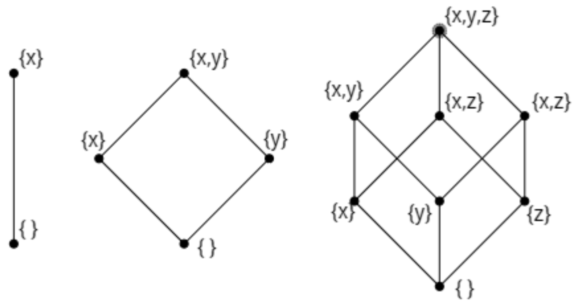
Válasszuk ki úgy *y*, hogy legyen minden elem benne, ami nincs benne az *x*-ben. Így tehát biztos, hogy van *x*-nek komplementuma, és tovább, ez minden részhalmazra igaz, tehát a hálónk komplementumos. Vizsgáljuk meg a disztributív tulajdonságot.

$$(x \wedge y) \vee z = \{a \mid a \in X \text{ és } [(a \in x \text{ és } a \in y) \; vagy \; a \in z]\}$$

Azaz vagy eleme a *z*-nek, vagy az *x* és *y* közös elemei között szerepel.

$$(x \vee z) \wedge (y \vee z) = \{a \mid a \in X \text{ és } [(a \in x \; vagy \; a \in z) \text{ és } (a \in y \; vagy \; a \in z)]\}$$

De hát ez szintén tartalmazza az összes elemet, ami benne van z-ben, és az össze benne lévő elemnek egyaránt benne kell, hogy legyen az x-ben és van y-ban is. Tehát megkaptuk, hogy ez egy disztributív háló tehát Boole algebra.□



$1, 2\ ,3\ elemű\ halmaz\ részhalmazaiból\ képzett\ hálók$

Boole-algebra a kételemű (0,1) halmazhoz tartozó algebra is. Ezt leginkább a matematika logika használja, ahogy a 0-hoz a hamis, míg a 1-hez az igaz.

Tétel: $H = \{0,1\}$ és $H^K = \{0,1\}^K$ továbbá ezen értelmezett 2 kétváltozós művelet, melyek $\forall x, y \in H^K$:

$$a \vee b = \{(h_1, h_2, \dots, h_n),\ h_i = 1 \text{ ha } a_i = 1 \text{ vagy } b_i = 1, (1 \leq i \leq n) \text{ külöben } 0\}$$

$$a \wedge b = \{(h_1, h_2, \dots, h_n),\ h_i = 1 \text{ ha } a_i = 1 \text{ és } b_i = 1, (1 \leq i \leq n) \text{külöben } 0\}.$$

Az így keletkezett háló izomorf a $P(K)$ hálóval.

Bizonyítás: Létrehozunk egy rendezéstartó bijekciót. Adott $K = \{k_1, k_2, \dots k_n\}$, továbbá $\mu: P(K) \to H^K, \mu(h) = \{(h_1, h_2, \dots, h_n),\ h_i = 1\ ha\ k_i \in n\ ,1 \leq i \leq n$ különben $0\}$. Mivel $\mu(x \cup y) = \mu(x) \vee \mu(x)$ és $\mu(x \cap y) = \mu(x) \wedge \mu(y)$, valamint a μ definíciójából látható hogy $\mu(x)' = \mu(x')$ tehát tényleg igaz hogy a két háló izomorf.□

Az eseményalgebra is Boole-algebra. Az alaphalmazunk, az eseményterünk, elemei az események, és az azon értelmezett három művelet az unió(ahol legalább az egyik teljesül), a metszet(ahol mind a kettő teljesül), és létezik az események ellentettje is(komplementum), ami pontosan akkor következik be, ha az esemény nem. Az unióra és a metszetre teljesül, hogy asszociatív, kommutatív, idempotens, tehát valóban az így létrejött struktúra egy háló. Az komplementum miatt, ahogy a neve is mutatja, ez egy komplementumos háló. Mivel azonban minden elemnek csak egy ellentettje van, azért ezek ráadásul egyértelműen komplementumos hálók lesznek. A disztributivitás is teljesül, hiszen az eseményteret fel lehet fogni halmazként, és azoknak a részhalmazai az események. Azt meg már beláttuk, hogy a halmazok részhalmazai disztributív hálót alkotnak, ez itt is teljesülni fog.

Középiskolai előfordulás:

Már a szakdolgozatom elején említettem, hogy a középiskolában gyakran jelennek meg a hálók. Az egyik legkönnyebben megérthető példát, a halmazok részhalmazaiból képzett struktúrát már megvizsgáltuk, és kiderült, hogy egy komplementumos disztributív hálóról beszélünk, tehát igaz az is hogy relatív komplementumos.

Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös

Már tanulmányai elején a diákok megismerkednek a legkisebb közös többszörös, és a legnagyobb közös osztó fogalmával, viszont jelöljük az előbbit ∧-tel, míg az utóbbit ∨-val. Ezeknek a kiszámítására a pontos képlet a következő Adott $A, B \in \mathbb{Z}$ és

$$A = \prod_{1}^{\infty} p_i^{\alpha_i}\ , B = \prod_{1}^{\infty} p_i^{\beta_i}\ ahol\ \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}(\forall i = 1,2,..)\ \text{és}\ p_i = \ i.\ prím.$$

$$A \vee B = \prod_{1}^{\infty} p_i^{\max(\alpha_i,\beta_i)}, A \wedge B = \prod_{1}^{\infty} p_i^{\min(\alpha_i,\beta_i)}.$$

A számelmélet alaptétele miatt, elég a hatványkitevőket vizsgálnunk. A műveletek definíciójából egyértelműen látszik, hogy kommutatív, hiszen a minimum-, és a maximumválasztásnál a sorrend tetszőleges. Természetesen az asszociatív tulajdonság is teljesülni fog mind a 2 műveletre, hiszen szintén csak a hatványkitevőt vizsgálva:

$$\max(\max(\alpha_i, \beta_i), \gamma_i) = \max(\alpha_i, max(\beta_i, \gamma_i)),$$

$$\min(\min(\alpha_i, \beta_i), \gamma_i) = \min(\alpha_i, min(\beta_i, \gamma_i))\ teljesül$$

Az idempotens tulajdonság is triviális, elvégre:

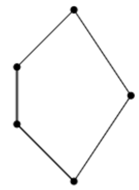
$$max(\alpha_i, \alpha_i) = \alpha_i, \text{tehát}\ A \vee A = A,$$

$$\min(\alpha_i, \alpha_i) = \alpha_i, t\ \text{tehát}\ A \wedge A = A.$$

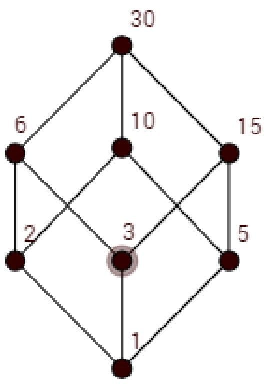
Annak a belátása is egyszerű hogy $A \wedge B = B \Leftrightarrow A \vee B = A$, Elvégre ha megint a hatványkitevőket vizsgáljuk, akkor annak kell teljesülni , hogy:

$$max(\alpha_i, \beta_i) = \alpha_i \Leftrightarrow min(\alpha_i, \beta_i) = \beta_i.$$

De hát ez megy nyilvánvaló, hogyha két elem közül az egyik a két elem minimuma, akkor és csak akkor lesz a másik elem a maximális elem.



Vizsgáljuk meg ezt a hálót, hogy disztributív-e. Ennek a bizonyítása során Birkhoff-tételt használjuk fel, ami kimondja, hogy akkor és csak akkor lehet a háló disztributív, ha nincs N_5-tel vag M_3-mal izomorf részháló. Azt pedig nagyon könnyű látni, hogy nem létezikN_5-tel izomorf háló. Indirekt tegyük fel, hogy létezik ilyen részháló: Ekkor igaz, hogy ebben a hálóban $a \leq c$ tehát $a|c$. De hát akkor $a \vee b | c \vee b$ is teljesülnie kéne, tehát, akkor $a \vee b$ is eleme kellene, hogy legyen a hálónak. Tehát a hálónk disztributív. Azonban ez a háló nem véges tehát nem komplementum a háló. Az M_3 létezésének kizárása rendkívül hasonló módon történik, és megkapjuk a Birkhoff-tétel miatt, hogy a hálónk moduláris.



A 2,3,5 $prímekből\ keletkező$ $ilyen\ háló$

Azt a végtelen hálót nem igazán vizsgáljuk a sem az általános- s sem a középiskolai tanulmányok során, viszont ennek a részhálói már szerepel a tananyagban. Arról a hálóról van most szó, ahol prímeket adunk meg, és a háló elemeit azok számok alkotják, amelyek kisebbek, mint a prímek legkisebb közös többszörösei, és osztói annak. Ahelyett, hogy ismételten végig mennék az axiómákon és úgy bizonyítanám be, hogy tényleg háló, ahelyett inkább azt kéne látni, hisz ez tulajdonképpen egy Boole-háló, mégpedig azért, mert felírhatjuk ide is a $P(K) \cong H^K$ bizonyításában előkerülő bijekciót. Ezzel együtt tehát itt már igaz lesz, hogy disztributív, komplementumos a hálónk.

Feladatokat a középiskolásoknak ebben a témakörben érdemes két féle módon is adni. Egyrészt kiszámoltatni velük, bizonyos elemeket, a másik pedig hogy ábrázoltatjuk a hálókat. Azáltal hogy maguk számolják ki az adatokat, és maguk készítenek egy hálót, gyakran jobban megértik az anyagot, mintsem a tanár megmutatja nekik. Egyik ilyen feladat például hogy kiszámoltatjuk a 1326-nak az összes osztóját. Az általános módszer az ilyen jellegű feladatoknál a prímtényezős felbontás, majd a kapott prímek kombinálása. A tapasztaltabb diákok kihasználják már azt is, hogy osztók helyett beszélhetünk osztó párokról. Ez azért lehetséges mert a háló egyértelműen komplementumos.

Hálók a geometriában

Hálók azonban a geometriában is megtalálhatók. Legyenek az alaphalmazunk elemei a tér pontjai, egyenesei, síkjai, maga a tér, és az üres halmaz. A két művelet pedig legyen a metszet(∧), és a projekció(∨). A metszet az a már jól ismert definíció, tehát a közös pontok által alkotott térelem, projekció alatt pedig a két elem pontjait tartalmazó legszűkebb halmazbeli elemet értjük. Természetesen itt is teljesül a kommutativitás és az asszociativitás, valamint az elnyelési tulajdonságot csak a definíciókból egyszerűen végiggondolva megkapjuk. Vizsgáljuk meg a disztributivitást is. Azt szeretnénk belátni, hogy:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

Ennek cáfolására keressünk ellenpéldát. Legyen a,b,c három páronként kitérő egyenes. Ebben a helyzetben, $a \wedge (b \vee c)$ kifejezés az a egyenest adja vissza, hiszen $b \vee c$ az egész teret fogja jelenteni, hiszen kitérőek, és a tér és egy egyenes metszete egy egyenes. A másik oldalon viszont az üres halmaz van, hiszen az $(a \wedge b) = \emptyset$ és $(a \wedge c) = \emptyset$ hiszen kitérők. Üres halmazok projekciója is üres halmaz, és megkaptuk, $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = \emptyset$. Tehát még egy olyan példa, ami nem disztributív. Viszont ez a háló komplementumos mégpedig a következőképpen:

- a tér komplementuma az üres halmaz, a tér egyértelműen komplementumos
- egy tetszőleges sík komplementuma egy olyan P pont a térben, ami nincs rajta a síkon, vagy egy vele párhuzamos egyenes vagy sík. Látható, hogy végtelen sok ilyen pont van.
- egy egyenes komplementuma, egy kitérő egyenes, vagy egy, az egyenessel párhuzamos sík.
- egy pont komplementuma, egy sík, nem tartalmazza magát a pontot.
- Az üres halmaz komplementuma a tér. Egyértelműen komplementumos.

Egy kicsit kilépve a középiskolai anyag világából, vizsgáljuk meg a projektív teret. Legyen ugyanaz a 2 művelet, ugyan azokkal az elemekkel, mint az előbb, csak bővítsük ki az ideális ponttokkal, egyenesekkel és síkokkal. Az hogy ez is háló az ugyanúgy belátható, mint az előbb, viszont a komlementum területén már változik a helyzet egy helyen. Ugyanis az egyenes komplementuma minden olyan egyenes, ami kitérő és nem párhuzamos vele, valamint síknak a komplementuma a nem rajta egy fekvő pont. Általános értelemben itt sem lesz disztributív a háló, viszont vizsgáljuk meg, úgy ha feltesszük, hogy $a, b, c \in$ P $a \leq c$ is teljesül.

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

Ilyenkor az $a \wedge (b \vee c) = a$ hiszen $a < b \vee c$, valamint felhasználva a kommutativitást és az elnyelési azonosságoz:

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = (a \wedge b) \vee a = a \vee (a \wedge b) = a$$

Vizsgáljuk meg, hogy moduláris-e a hálónk.

$$\forall a, b, c \in \mathrm{P}\ a \leq c \ \rightarrow (a \vee b) \wedge c = a \vee (b \wedge c)$$

Itt azt a tanult tételt fogjuk alkalmazni, amelyik kimondja, hogy 2 elem projekciója úgy áll elő, hogy az összes olyan egyenest vesszük, aminek létezik olyan pontj ami illeszkedik mind a 2 elemre (egy ilyen egyenes jele (A, B) ahol, $A \in a, B \in$ b). Válasszunk egy tetszőleges $P \in (a \vee b) \wedge c$ pontot, és azt fogjuk belátni, hogy ez biztos benne, lesz a $a \vee (b \wedge c)$-ben is. Megkaptuk tehát hogy:

$$P \in (a \vee b) \text{ és } P \in c$$

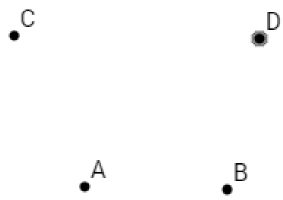
De a projekciót feltudjuk, mint pontpárok, tehát $P \in (A, B)$ ahol, $A \in a, B \in b$. Ha $P = A$, akkor természetesen igaz lesz, hogy $P \in a \vee (b \wedge c)$. Másrészről, ha $P \neq A$, tehát az A, B, P egy egyenesre illeszkednek. De ekkor vegyük észre, hogy a $B \in (A, P)$ is igaz lesz, amiből már látszik, hogy $B \in a \vee c = c$ a $a \leq c$ miatt. Mivel $B \in b$ és $B \in c$ ezért $B \in b \wedge c$ is igaz lesz. Mivel $A \in a, B \in b \wedge c$ így $P \in a \vee (b \wedge c)$ is teljesülni fog. Tehát a projektív tér térelemeinek hálója moduláris.

Konvex ponthalmazok

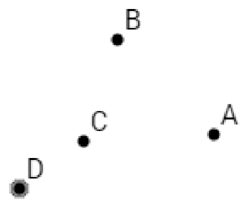
Az utolsó háló, amit megemlítenék még, az a tér konvex ponthalmazaiból épül fel. Megtanultuk, hogy azokra a k ponthalmazokra nevezzük konvexnek, melyere $\forall A, B \in k$

esetén $P \in [A,B] \rightarrow P \in k$, ahol az $[A,B]$ az A és B pontokat összekötő szakaszt értjük. Az egyik művelet legyen a szokásos metszet (∧), míg a másik a konvex burok (∨), tehát a legszűkebb olyan konvex ponthalmaz, amely mindkét ponthalmaz elemeit tartalmazza. Természetesen ezek zárt műveletek, hiszen a konvex burkot eleve úgy képezzük, hogy konvex legyen, továbbá 2 konvex halmaz metszete is konvex. Az hogy a metszet asszociatív, kommutatív az triviális. Abból a tételből, ami kimondja, hogy a tetszőleges véges sok konvex ponthalmaznak pontosan 1 darab konvex burka létezik, egyértelműen következik, hogy ez a művelet is asszociatív és kommutatív. Továbbá az elnyelési tulajdonságok is teljesülni fognak, hiszen a $a \subseteq (a \vee b)$ tehát $a = a \wedge (a \vee b)$ és ennek duálisa is igaz lesz. A disztributivitás cáfolására egy egyszerű esetet vizsgáljunk meg. Legyen a, b és c páronként kitérő egyenesek, plusz tegyük fel még azt is, hogy nem párhuzamosak. Ilyenkor $b \vee c = \mathbb{R}^3$ és $a \wedge (b \vee c) = a$. Az egyenlet másik oldalán viszont $a \wedge b = \emptyset$ és $a \wedge c = \emptyset$, két üres halmaz konvex burka szintén üres halmaz.

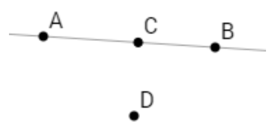
Az ehhez a témához kapcsolódó feladatok esetben sokkal inkább a rajzolás kap nagyobb szerepet, mintsem a számolás. Lehet például két párhuzamos egyenes konvex burát kérdezni, vagy két felrajzolt kör metszetét. De pontok konvex burkának a kérdezése is nagyon hasznos lehet, például az alábbi esetek vizsgálatával:



1. ábra



2. ábra



3. ábra

Ezeknél a példák esetében az 1. ábra egy olyan pontnégyest mutat, aminek a konvex burka az a négyszög, melynek csúcsai a négy pont. A 2. ábra azt az esetet mutatja be amikor az egyik pont beleesik a maradék három pont konvex burkába. A harmadik meg hogy abban az esetben, amikor három pont kollineáris, azaz egy egyenesre esek, akkor a két szélső pontot érdemes vizsgálni.

Irodalom

Kiss Emil: Bevezetés az algebrába Typotex, Budapest 2007,

Kiss Emil: Bevezetés az algebrába,A gyakorlatok és a feladatok megoldásai Typotex, Budapest 2007

Dr. Szász Gábor:Hálóelmélet, Tankönyvkiadó Budapest, 1975

Pelikán József: Algebra (összeállította Gröller Ákos) ELTE TTK

Tartalom: